Скворцова С.О.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Навчально-методичний посібник
для студентів за спеціальністю 6.010100 «Початкове навчання»

Частина І
Методика формування в молодших школярів загального уміння розв'язувати сюжетні задачі

Одеса
2011

ББК 74.262
С 427
УДК 373.3:51

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів
спеціальності „Початкове навчання”
(лист №1.4/18 – Г - 1821 від 23 жовтня 2007 року)

Рецензенти: доктор психологічних наук, професор, чл.-кор. АПН України, завідувач лабораторії методології і теорії психології Інституту психології імені Г.С. Костюка АПН України
Балл Г.О.
доктор педагогічних наук, завідувач кафедри теорії і методики початкового навчання Бердянського державного педагогічного університету
Коваль Л.В.
кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри методики викладання природничо-математичних дисциплін ООІУВ
Папач О.В.

Скворцова С.О.

Методика навчання розв’язування сюжетних задач у початковій школі: Навчально-методичний посібник для студентів за спеціальністю 6.010100 «Початкове навчання». – Частина І – Методика формування в молодших школярів загального уміння розв’язувати сюжетні задачі. – Одеса: ООО «Абрикос-Компани», 2011. – 268 с.

ISBN 966-96048-5-0

У посібнику викладено теоретико-методичні основи навчання учнів розв’язування сюжетних задач. Визначається зміст понять „загальне уміння розв’язувати задачі”, „окреме уміння розв’язувати задачі”. Виділяється операційний склад загального уміння розв’язувати прості та складені задачі. На основі визначених концептуальних теоретичних основ конструюється модель методичної системи навчання учнів розв’язування сюжетних задач в курсі математики початкової школи, що спрямована на формування загального уміння розв’язування задач та окремих умінь розв’язування задач певних видів. Методична система реалізується у 1 - 4-х класах загальноосвітньої школи, нею передбачено навчання молодших школярів розв’язування задач усіх математичних структур, що містяться у чинних підручниках. В першій частині подано методику формування в молодших школярів загального уміння розв’язувати задачі.

Для студентів, вчителів і методистів.

ВСТУП

Під ***математичною задачею*** розуміють будь-яку вимогу обчислити, перетворити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується кількісних відношень і просторових форм, створених людським розумом на основі знань про навколишній світ. Серед численних математичних задач виділяють задачі, які називають по-різному: арифметичні, текстові, сюжетні. Усі ці задачі характеризуються наступними рисами: 1) задачі сформульовані на природній мові (тому їх називають текстовими); 2) в них звичайно описується кількісний бік якихось явищ, подій (тому вони називаються сюжетними); 3) вони являють собою задачі на визначення шуканого значення деякої величини, які у початковій школі розв'язуються арифметичними способами (тому їх інколи називають арифметичними). Таким чином, усі ці терміни розкривають одне й те саме поняття.

Ми користуємося терміном „сюжетна задача". Під ***сюжетною задачею*** ми розуміємо математичну задачу, в якій описаний деякий життєвий сюжет, а саме кількісний бік реальних процесів, явищ та ситуацій і міститься вимога знайти шукану величину за даними в задачі величинами та зв'язками між ними.

Питання про ***цілі розв'язування сюжетних задач*** є центральним в методиці навчання математики. Вони з одного боку, складають специфічний розділ програми, зміст якого учні повинні засвоїти, з другого – виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку учнів. Проаналізувавши цілі розв'язування сюжетних задач, які були визначені В. А. Євтушевським, Н. О. Менчинскою та М. І. Моро, Є. С. Ляпіним, Л. М. Фрідманом, дістаємо висновку про те, що цілі розв'язування сюжетних задач за багато років не змінилися. На сучасному етапі розбудови шкільної математичної освіти розв'язування сюжетних задач у навчанні математики переслідує наступні цілі: формування в учнів загального підходу, загальних вмінь і здібностей розв'язання будь-яких задач; пізнання і більш глибинне оволодіння математичними поняттями, що вивчаються, і деякими загальнонауковими і загальножиттєвими поняттями; оволодіння поняттями моделі і моделювання і власно математичним моделюванням; розвиток мислення, кмітливості учнів, їх творчого потенціалу. Крім загальних цілей, розв'язування задач виконує у навчальному процесі ряд функцій: навчальні, розвивальні, виховуючі та контролюючі.

Навчальні функції задач спрямовані на формування системи математичних знань, умінь і навичок. Через систему задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються на етапі мотивації у потребі здобуття нових знань; в процесі розв'язування задач дістають інформацію про методи їх розв'язування.

Під *розвивальними* розуміють функції задач, спрямовані на формування в учнів науково-теоретичного, зокрема функціонального, стилю мислення, на оволодіння ними загальними та специфічними розумовими діями та прийомами розумової діяльності. У процесі розв'язування задач учні виконують різні розумові дії (аналіз, синтез, абстрагування, порівняння, конкретизацію й узагальнення), висловлюють судження і міркування.

Під *виховуючими* розуміють такі функції задач, що спрямовані на формування в учнів наукового світогляду, сприяють екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвивають пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості. Як виховний спосіб, задачі роблять можливим пов'язання навчання з життям, ознайомлення учнів із пізнавально-важливими фактами. Внутрішня краса самої математики, оригінальність прийомів розв'язування задач збуджують у дітей естетичні почуття. Треба виділити ще й *контролюючу* функцію сюжетних задач, яка спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом в цілому.

Між тим, розв'язування будь-якої сюжетної задачі поліфункціонально, але в кожній конкретній задачі вчитель має виділяти провідну функцію і за належної цільової установки домагатися її реалізації в першу чергу. Останнім часом на перший план методисти висувають *функцію формування умінь розв'язування будь-яких сюжетних задач* (Н. Б. Істоміна, І. Б. Нефьодова, С. М. Лук'янова, В. В. Малихіна, Л. М. Фрідман, С. Є. Царьова). *Формування уміння розв'язувати задачі* розуміється вченими, як *формування загального уміння та окремих умінь розв'язувати задачі певних видів*. При цьому процес навчання розв'язування сюжетних задач повинен бути організований так, щоб він здійснював ефективний вплив на розвиток мислення учнів та формування їх особистості. Це положення знайшло відображення і у новій редакції Державного стандарту початкової загальної освіти (2010 р.). Таким чином, сюжетні задачі в початковому курсі математики реалізують навчальні, розвивальні, виховуючі і контролюючі функції, але основною є функція вироблення вмінь у їх розв’язуванні.

Таким чином, ***метою навчання*** розв’язування задач у початковій школі є формування у молодших школярів умінь (загального і окремих), що виявляється у можливості учнів успішно розв’язувати задачу будь-якої математичної структури початкового курсу математики. Очевидно, що ***змістом навчання*** – є задачний матеріал початкового курсу математики, а саме види простих і складених задач. На матеріалі простих і складених задач діти знайомляться із структурою задачі, етапами її розв’язування, в них опрацьовується загальне уміння розв’язувати сюжетні задачі. На матеріалі „типових” задач – задачах на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на подвійне зведення до одиниці, на спільну роботу, на рух здійснюється формування окремих умінь розв’язувати задачі.

Випускники початкової школи повинні вміти розв’язувати усі види простих задач та складені задачі на 3-4 дії одного чи різних ступенів. До програмного мінімуму відносяться „типові” задачі на знаходження четвертого пропорційного, ускладнені задачі на знаходження четвертого пропорційного (задачі на подвійне зведення до одиниці), на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на спільну роботу, задачі на одночасний рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках). Задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання, та задачі на одночасний рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням) та на неодночасний рух викликають цікавість в учнів з достатнім і високим рівнем навчальних досягнень, тому вони хоча і містяться у чинних підручниках, але до обов’язкових результатів навчання не відносяться.

Основним ***методом навчання*** молодших школярів розв’язування сюжетних задач є частково-пошуковий метод або евристична бесіда, який полягає в тому, що вчитель заздалегідь готує систему запитань, відповідаючи на які учні самостійно знаходять спосіб розв’язування задачі. Таким чином, методом навчання є особливі системи взаємопов’язаних навчальних задач, які побудовані із застосуванням сюжетних задач різноманітних математичних структур, що пропонуються у чинних підручниках математики для початкової школи. Системи навчальних задач побудовані таким чином, щоб спонукати учня виконувати операції порівняння, абстрагування, узагальнення, тобто спрямовані на розвиток мислення дитини. В них передбачено розкриття зв’язків між задачами різних видів і типів, з їх допомогою учні приучуються пов’язувати кожну нову задачу з раніш вже розв’язаною.

Так, при навчанні розв’язування простих задач учням пропонується порівняти структуру взаємно обернених задач, що містять співвідношення додавання або віднімання або різницевого порівняння – з метою визначення відмінних ознак та їх впливу на розв’язання задачі. При введенні задач нових математичних структур (простих, складених, в тому числі й „типових”) також здійснюється порівняння із задачами відомих математичних структур, визначення їх відмінності та її впливу на розв’язання задачі. Для узагальнення способу розв’язування „типових” задач використовуються різноманітні зміни умови або вимоги задачі і досліджується їх вплив на розв’язання. Отже, формування уміння здійснюється не за допомогою розв’язання великої кількості задач, а через „дослідження” опорної задачі засобом спеціальної системи навчальних задач, яка містить такі обов’язкові елементи: розв’язання задачі відомої математичної структури, зміна/зміни її умови або вимоги, дослідження впливу цих змін на розв’язання задачі. Учні під керівництвом вчителя аналізують спосіб розв’язування задачі на прикладі опорної задачі, узагальнюють його, а потім застосовують до наступних задач.

Також при ознайомленні першокласників з поняттям „задача”, її структурними компонентами, застосовується пояснювально-ілюстративний метод.

Очевидно, що зазначені зміст і методи навчання визначають ***форми навчання*** молодших школярів розв’язування задач – фронтальну роботу вчителя з класом під час ознайомлення із задачами певного виду або типу і індивідуальну роботу учнів над задачею. Під час індивідуальної роботи здійснюється диференціація навчання через диференціацію дози допомоги учням або диференціацію задач за рівнем їх складності. Диференціація дози допомоги може реалізуватися через застосування карток з друкованою основою. Диференціація змісту навчання розв’язування задач здійснюється за допомогою визначення обов’язкових для розгляду усіма учнями питань та додаткових, які вивчаються за умов резерву часу або для поглибленого вивчення за рахунок варіативного компоненту навчального плану. Очевидно, що до обов’язкових питань відноситься навчання розв'язування задач, що входять до програмного мінімуму.

Основним ***засобом навчання*** молодших школярів розв'язувати сюжетні задачі є репрезентативні та розв'язуючі моделі. Репрезентативні моделі у вигляді короткого запису задачі (схема або таблиця) або у вигляді схематичного рисунка; розв'язуючі моделі у вигляді „дерева міркувань". Навчання учнів самостійного складання схематичних рисунків розпочинається ще в 1-му класі під час підготовчої роботи до введення поняття „задача" і продовжується протягом наступних років навчання. Тому можна очікувати, що нескладні схематичні рисунки діти змозі виконати самостійно, а рисунки до задач дещо ускладненої математичної структури – під керівництвом вчителя. Іноді для економії часу на уроці під час фронтальної роботи над задачею, схематичний рисунок виконується вчителем на дошці, на основі пропозицій школярів або пропонується дітям у готовому вигляді. Схеми аналізу або синтезу – „дерева міркувань" – є ілюстрацією процесу пошуку розв'язування і складаються вчителем разом із учнями під час фронтальної роботи над задачею. Схематичний рисунок та „дерево міркувань" виконуються учнями у разі потреби, під час самостійної роботи над задачею.

Також до засобів навчання розв'язування задач віднесемо дидактичні матеріали: тексти пам'яток, картки з друкованою основою. На перших етапах засвоєння порядку роботи над задачами (простими, складеними), під час самостійної роботи, учні користуються картками із текстом пам'яток, почергово виконуючи їх завдання. Для опрацювання окремих дій при розв'язуванні задач використовуються картки з друкованою основою, які містять певні наочні опори. Наприклад, опрацьовуючи дію складання короткого запису задач, діти розв'язують задачі на картках з друкованою основою, на яких вже є ключові слова і треба записати відповідні ним числа. До засобів навчання можна також віднести опорні схеми простих і складених задач, що подані на окремих картках; також опорні схеми „типових" задач та узагальнені плани їх розв'язування тощо.

РОЗДІЛ І

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ РОВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ

1.1. Структура сюжетної задачі

Згідно підходу У. Рейтмана, розуміння сутності задачі розкривається через визначення її структури. В структурі будь-якої задачі можна виділити умову (твердження) і вимогу (запитання), або дані і шукані величини.

Умова сюжетної задачі – це частина тексту, в якій задана сюжетна ситуація (подія, явище, процес), числові значення величин, що характеризують її кількісну сторону та вказано залежність між цими значеннями. В стандартному формулюванні умова виражається одним або кількома твердженнями (розповідними реченнями), які приймаються за істині, в яких вказуються характеристики і відношення між об'єктами. В умові міститься один чи кілька об'єктів. ***Об'єктом задачі*** може бути: предмет, явище, подія, процес. Якщо умова містить один об'єкт, то в умові описується ситуація, що трапилися з цим об'єктом, числове значення, що характеризує цю ситуацію можуть бути відомим або невідомим; якщо ж в умові міститься два і більше об'єктів, то в ній вказується відношення між цими об'єктами – воно може бути відоме або невідоме.

Своєрідність опису об'єкта в задачі, за Л. М. Фрідманом [130], виявляється в тому, що описані не всі його властивості, а лише кількісний бік об'єкта. При чому будь-яка сюжетна задача являє собою словесний опис одного або кількох фіксованих моментів (випадків, епізодів) якого-небудь явища, процесу, події.

Завершується ситуація вимогою знайти невідомий компонент. ***Вимога*** – це частина тексту, в якій вказана (названа, позначена) шукана величина (число, множина). Вимога задач може бути сформульована у формі наказового або питального речення.

В залежності від способів поєднання та формулювання умови та вимоги задачі визначають ***канонічне і неканонічне формулювання задачі***. Канонічним, І. І. Аргинська [8], називає формулювання, в якому спочатку в оповідній формі викладено умову, а потім йде запитання, яке подано запитальним реченням. Будь-яке відхилення від такої форми викладення задачі автор відносить до неканонічних. Таких неканонічних форм може бути п’ять:

- після умови слідує запитання, подане оповідним реченням;
- частина умови в оповідній формі стоїть на початку тексту, а інша її частина поєднана із запитанням у складне запитальне речення;
- частина умови в оповідній формі стоїть на початку тексту, а інша її частина поєднана із запитанням у складне оповідне речення;
- весь текст задачі поєднаний в одне складне запитальне речення, що починається з її запитання;
- весь текст задачі поєднаний у складне оповідне речення, що починається з її запитання.

Слід зазначити, що часто під умовою задачі розуміють весь текст задачі. Це поширена помилка – задача складається з умови і запитання.

В умові задачі містяться ***дані задачі***, а запитання задачі вказує на ***шукане***. Дані – це, як правило, числові компоненти тексту задачі. Вони характеризують: значення величин, числові характеристики множин, числові характеристики відношень між ними. Числові характеристики величин та числові характеристики множин звичайно задані числами, а числові характеристики відношень між ними можуть бути позначені словесно. Знаходження шуканого в числовому вигляді звичайно є кінцевою метою розв’язання сюжетної задачі.

Математичним змістом сюжетних задач, є не самі по собі явища, а ті їх сторони, в яких виражена їх кількісна характеристика. Цей бік об’єкта задачі виявляється у заданні (в умові задачі) тих чи інших величин і їх значень – відомих і невідомих.

Кількісний бік випадку (епізоду) характеризується однією або трьома ***взаємопов’язаними величинами***, із яких одна є величина відношення двох інших. Л. М. Фрідман докладно вивчав питання про задання у задачах величин та їх значень [130].

У сюжетних задачах величини і їх числові значення можуть бути задані явно або неявно (якщо у формулюванні задачі вони не вказані і виявляються лише при глибокому аналізі описаного у задачі явища). Л. М. Фрідман характеризує *повне задання в тексті задач окремих значень величини*:

1) назви величини, значенням якої воно є;
2) вказування особливостей даного значення, що відрізняє його від інших значень тієї самої величини;

3) розміру цього значення у вигляді іменованого числа, якщо це значення відоме (дане).

Однак, у більшості випадків задач задання значень величин здійснюються неповно: перша частина може бути пропущеною і лише мається на увазі; друга може бути скороченою до мінімуму і майже повністю пропущеною, але є якісь непрямі вказівки, наприклад у вигляді найменування у числа – розміру значення і так далі. Відсутність у словесному заданні значення величини третьої частини – її розміру у вигляді іменованого числа – показує, що це значення невідоме. При цьому якщо у задання значення входять слова: „Скільки?”, „Знайти” і так далі, то це невідоме значення є шуканим [127, 130].

Значення різних величин (відомі і невідомі) складають у сукупності ***предметну область сюжетних задач***. Ці елементи предметної області сюжетних задач пов’язані такими співвідношеннями, моделями яких є арифметичні дії, рівності і нерівності. ***Співвідношення, котрими пов’язані між собою значення величин***, в сюжетних задачах, поділяються на три види:

1. *Співвідношення між значеннями однієї і тієї самої величини*:
   а) співвідношення поєднання двох або кількох значень в одне ціле (додавання);
   б) співвідношення віднімання від цілого якоїсь його частини (віднімання);
   в) співвідношення розбиття цілого на рівні частини;
   г) співвідношення, пов’язане з переходом від однієї одиниці лічби або вимірювання до іншої.
2. *Співвідношення порівняння двох значень однієї і тієї самої величини*:
   а) співвідношення рівності двох значень величини;
   б) співвідношення різницевого порівняння двох значень величини;
   в) співвідношення кратного порівняння двох значень величини.
3. *Співвідношення між значеннями різних величин* [128, 130].

А. К. Артьомов виділяє в сюжетній задачі ***логічну основу умови*** – ядро, що “очищене” від сюжетних деталей, в ньому відображуються необхідні для розв’язування математичні відношення між об’єктами, що використані в задачі. Воно застосовується у змісті обчислювального процесу для отримання відповіді на запитання задачі. Це ядро звичайно фіксується в короткому записі тексту задачі

[21]. Отже, в логічній основі умови відображуються величини, що характеризують об'єкт або об'єкти задачі, її предметну область.

В задачі може міститися не одна логічна основа, а декілька, але заданих по-різному: одна з них завжди задається у відкритій, явній формі, а інші у прихованій. При *відкритій формі логічної основи*, поняття що застосовані в задачі, і відношення між ними явно та чітко фіксуються у словесному формулюванні задачі. Виявлення *прихованих логічних основ* народжує інший спосіб розв'язування задачі.

Наприклад: "Два потяги відправилися з однієї станції у протилежних напрямках. Один з них пройшов 175 км, а інший на 62 км менше. На якій відстані один від одного знаходилися потяги в цей час?". Тут логічну основу умови складають: дані значення відстаней, що пройшли потяги, відношення між останніми (другий потяг пройшов на 62 км менше за перший), напрямок руху потягів. Ці основи задані у відкритому вигляді, вони мають однорівневий характер, їх аналіз народжує єдиний спосіб розв'язування:
1) 175 – 62 = 113 (км) пройшов другий потяг,
2) 175 + 113 = 288 (км) пройшли разом обидва потяги, відстань між ними.

Користуючись положенням Л. М. Фрідмана про види співвідношень, якими пов'язані елементи предметної області сюжетної задачі, можна сказати, що в предметній області цієї задачі задані два співвідношення: 1) співвідношення різницевого порівняння; 2) співвідношення поєднання частин у ціле (додавання). Ця логічна основа є однорівневою, тому що в ній не можна ці співвідношення трактувати по-іншому.

"За 7 днів їдальня витратила 35 кг масла. На скільки днів при тій самій нормі витрати вистачить 105 кг масла?". Тут логічна основа задачі виявляється на двох рівнях – відкритому та прихованому. В першому випадку спрямованість розумового процесу визначається запитанням: скільки масла витрачали за 1 день? Отримаємо:
1) 35 : 7 = 5 (кг) на 1 день
2) 105 : 5 = 21 день.

В другому випадку хід того самого процесу визначається допоміжним запитанням, постановка якого викриває інші відношення, що містяться в умові задачі, тобто іншу логічну основу: у скільки разів маса масла стала більшою? (105 : 35 = 3 – у стільки разів більше витратили масла. Тому, його вистачить на число днів більше 7 у 3 рази: 7 · 3 = 21 день).

В цій задачі на одному рівні можна виділити два співвідношення між значеннями різних величин, а на другому рівні – два співвідношення кратного порівняння.

Виявити *приховану логічну основу задачі* можна не лише через постановку додаткового запитання, а й за допомогою наочного оформлення задачі.

Наочне оформлення і аналіз його дозволяє викрити різні логічні основи умови, що народжує різні способи розв’язування. Наочне оформлення може бути у предметній та графічних формах [21].

Положення А. К. Артьомова про неодиничність логічних основ умови задачі перекликається з думкою Л. М. Фрідмана про залежність характеру трактування співвідношення, що задано в задачі від особистого погляду того, хто розв’язує цю задачу. Термін А. К. Артьомова „логічна основа умови” та термін Л. М. Фрідмана „вид співвідношення”, на нашу думку, характеризують одне й те саме поняття, і визначення логічних основ умови, і визначення видів співвідношень, якими пов’язані значення різних величин, спрямовує хід розумового процесу на розв’язання задачі.

Запитання (вимога) задачі повинно бути пов’язаним з її умовою. Цей зв’язок може бути *прямим* або *непрямим*. Прямий зв’язок: запитання задачі безпосередньо орієнтує на застосування того, що дано в умові, для відповіді на нього. Непрямий зв’язок: запитання задачі безпосередньо не пов’язане з даними в умові задачі поняттями та відношеннями між ними; тому попередньо вимагається перетворити запитання так, щоб після цього запитання безпосередньо орієнтувало на умову задачі. При цьому *перетворення* може бути виконане по-різному, що *визначає різні способи розв’язання задачі*:

1. Переформулювання запитання – заміна даного запитання іншим, що є рівносильним першому, тобто таким, щоб з першого логічно слідував другий та навпаки. Наприклад: „Дві ланки школярів вийшли одночасно назустріч одна одній з двох селищ. Одна ланка йшла з швидкістю 4 $\frac{км}{год}$, а друга з швидкістю 3 $\frac{км}{год}$. Зустріч відбулася через 2 год. Знайди відстань між селищами.” Тут зв’язок запитання і умови задачі поданий в непрямій формі: в умові немає безпосередньої вказівки на шукану відстань, цей зв’язок опосередкований, тому що

відповідь на запитання задачі можлива лише через відповідь на інше запитання: яку відстань пройшли дві ланки разом? Це запитання прямо пов'язано з умовою задачі.

2. Добір допоміжного запитання. В цьому випадку до запитання даної задачі ставиться допоміжне запитання (нерівносильне першому), відповідь на яке дозволяє відповісти на запитання даної задачі. При цьому добір може бути неоднозначним, що народжує різні способи розв'язування.

Наприклад: "В парку посадили 5 рядочків лип, по 16 штук у кожному рядку, і стільки ж осик, по 20 штук у кожному рядку. Скільки рядків осик посадили у парку?". Тут запитання задачі зв'язано з її умовою непрямо. Воно не припускає переформулювання на рівносильне запитання. Тому для відповіді на нього слід підібрати допоміжне запитання, яке призведе до відповіді на запитання задачі. Про що треба попередньо дізнатися, щоб відповісти на запитання задачі? Скільки всього осик посадили? Тут постановка допоміжного запитання визначила один хід міркувань для відповіді на запитання задачі, але допоміжне запитання можна поставити інакше: "Число яких рядків було більше при однаковій кількості дерев, та на скільки більше? (Лип в кожному рядку було по 16, а осик по 20, при однаковій кількості дерев число рядків з осиками менше, тому що в кожному рядку осик на 20 – 16 = 4 дерева більше. Але "4 зайві" осоки, що повторені 4 рази, дадуть 16, тобто число лип в одному рядку. Значить, рядків осик буде на 1 менше, ніж лип: 5 – 1 = 4.) [21].

У результаті встановлення взаємозв'язків між умовою й вимогою визначається ***оператор задачі*** – окрема дія (при розв'язуванні простих задач) та сукупність дій (при розв'язуванні складених задач) та їх обґрунтування.

Задача може бути розв'язною (якщо вона має хоч би один розв'язок) або нерозв'язною (якщо за даними умови задачі неможна знайти розв'язок). Щоб задачу можна було розв'язати, при її формулюванні треба дотримуватися вимог до правильної постановки сюжетних задач:

1) усі елементи предметної області, про які йдеться в задачі, мають існувати;

2) усі твердження, які задано в умові задачі, мають бути істинними;

3) умова і вимога задачі мають бути логічно зв'язані між собою.

Завдання для самоперевірки:

1. Чи можна цей текст назвати задачею? Чому? Який текст можна назвати задачею, який ні?
   1) На клумбі росло 7 роз і 2 ромашки.
   2) На скільки більше лип, ніж верб посадили школярі?
   3) У Сашка 7 цукерок, а у Петра на 2 цукерки більше. Скільки цукерок у Петра?
   4) Тарас намалював на одному аркуші 4 кораблика, а на другому – 3 кораблика. Скільки всього машин намалював Тарас?
2. Визначити структуру сюжетної задачі (умову, запитання, числові дані, шукане, співвідношення, якими пов'язані дані задачі, дані та шукане).
   1) Мама купила 10 зошитів. З них 6 у клітинку, решта у лінійку. Скільки зошитів у лінійку купила мама?
   2) З однієї ділянки господарка зібрала 24 кг огірків, а з другої ділянки – 25 кг огірків. На базарі вона продала 36 кг огірків. Скільки кілограмів огірків залишилося в господарки?
   3) У кравчині було 22 м тканини. Вона пошила 6 наборів серветок, витрачаючи на кожний набір по 2 м тканини. Скільки метрів тканини залишилося в кравчині?
   4) Сашко купив 4 альбоми по 7 грн. за кожний і 5 ручок по 4 грн. Скільки всього грошей коштувала покупка?
3. Визначити величини, що містяться в задачі. Пояснити, що означає кожне числове дане. Значення якої величини є шуканим?
   1) В магазин привезли 8 ящиків помідорів по 9 кг у кожному і 5 ящиків огірків по 8 кг. Скільки всього кілограмів овочів привезли в магазин?
   2) За 5 м тканини заплатили 35 грн. Скільки коштують 8 м такої самої тканини?
   3) Машина їхала 3 години по асфальтовій дорозі і подолала 360 км, потім машина їхала 2 години по ґрунтовій дорозі і проїхала 80 км. На скільки більше швидкість машини по асфальтовій дорозі, ніж по ґрунтовій?
4. Перетворити формулювання задачі у канонічне.
   1) У Сашка залишалось 2 зошити. Скільки зошитів стало у нього після того, як тато йому купив ще 6 зошитів?
   2) Скільки пасажирів їхало в автобусі, якщо серед них були 4 жінки та 5 чоловіків?
   3) У шкільну бібліотеку діти здали 4 книжки із казками, а книжок з оповіданнями було на 6 більше. Знайди кількість книжок з оповіданнями, які здали діти до бібліотеки.
5. Скільки логічних основ міститься в задачі? Яка з них задана явно? Яка неявно? Якими способами можна розв'язати задачу?

1) У їдальню привезли 87 кг картоплі. На сніданок витратили 24 кг картоплі, а на обід 38 кг. Скільки кілограмів картоплі залишилося в їдальні?

2) З 8 м тканини пошили 4 скатертини. Скільки можна пошити таких самих скатертин з 24 тканини?

3) З двох міст, відстань між якими 90 км, одночасно назустріч один одному вирушили два велосипедисти і зустрілися через 2 години. З якою швидкістю рухався перший велосипедист, якщо швидкість іншого $20 \frac{км}{год}$?

6. Який зв’язок між запитанням і умовою? Перетвори запитання так, щоб воно безпосередньо орієнтувало на умову задачі.

1) З двох селищ одночасно назустріч один одному вирушили два пішоходи і зустрілися через 3 години. Яка відстань між селищами, якщо швидкість першого пішоходу $5 \frac{км}{год}$, а швидкість другого $7 \frac{км}{год}$?

2) З пунктів А і В, відстань між якими 120 м, одночасно в одному напрямку вирушили два велосипедисти. Швидкість велосипедиста, що їде позаду, 15 $\frac{м}{с}$, а велосипедиста, що їде попереду, 12 $\frac{м}{с}$. Через скільки секунд один велосипедист наздожене іншого?

1.2. Класифікація сюжетних задач початкового курсу математики

Питання про класифікацію сюжетних задач не є новим для методичної науки. Класифікації задач присвячені праці математиків-методистів XIX - XX століття І. В. Арнольда, О. М. Астряба, Є. С. Березанської, Д. М. Воронова, А. І. Гольденберга, І. М. Кавун, І. І. Александрова, М. М. Попової, Г. Б. Поляк, О. М. Пчьолко, С. І. Шохор-Троцького та інших.

На сучасному етапі розвитку методичної науки сюжетні задачі класифікують в залежності від кількості видів співвідношень, які вони містять (Л. М. Фрідман) та в залежності від кількості арифметичних дій, за допомогою яких вони розв’язуються (М. О. Бантова, Г. В. Бєльтюкова, М. В. Богданович, О. С. Дубинчук, М. І. Моро, Л. М. Скаткін, А. М. Пишкало та інші). Таким чином виділяються два класи задач: прості і складені. Зрозуміло, що в межах кожного класу задач виділяються окремі типи, підтипи, види.

У власній класифікації сюжетних задач ми реалізували ідею І. В. Арнольда про два класи задач відповідно кількості величин, що описують подію в задачі, а також ідеї Д. М. Воронова та О. М. Астряба про класифікацію задач на основі співвідношень, що в них задані. *Кількість і види співвідношень становлять математичну структуру задачі.* Отже, основою поділу задач на типи та види повинна бути їх математична структура – саме її особливості впливають на вибір того чи іншого способу розв'язування.

1.2.1. Класифікація простих задач

Під ***простою задачею*** будемо розуміти сюжетну задачу, на запитання якої можна відповісти відразу – виконавши одну арифметичну дію.

Прості задачі є математичними моделями життєвих ситуацій, які виникають внаслідок об'єднання, вилучення чи поділу предметних множин, у процесі різницевого чи кратного порівняння двох значень тієї самої величини, а також при кількісній характеристиці якого-небудь явища кількома взаємозв'язаними величинами.

В методичній літературі існують різноманітні *класифікації простих задач*. М. О. Бантова, Г. В. Бєльтюкова [24], М. В. Богданович [38], М. І. Моро та А. М. Пишкало [73], Н. Б. Істоміна [50] визначають типи простих задач за характером випадків застосування арифметичних дій. Існують класифікації простих задач на основі арифметичної дії, за допомогою якої розв'язується задача. Так, О. С. Дубинчук [47] подає чотири типи і виділяє відповідні ним види простих задач. Між тим, О. С. Дубинчук зазначає, що до простих задач відносяться й такі, для розв'язання яких треба послідовно виконати одну й ту саму дію над трьома і більше числами. Але, на відміну від попередніх авторів ця вчена зазначає, що задачі на знаходження невідомого компоненту арифметичних дій не є простими. Що, на нашу думку, неправомірно, бо для їх розв'язання треба виконати одну арифметичну дію.

Також класифікують задачі за арифметичною дією, якою вони розв'язуються, М. П. Нікітіна [74], Н. Б. Істоміна та Р. Н. Шикова [51], П. М. Ерднієв [138]. Поділ простих задач на групи П. М. Ерднієвим побудовано на підставі трійок взаємнообернених задач, причому умовно прямою задачею є задача, яка логічно простіша за решту задач, і тому за методикою цього автора, вивчається спочатку. Л. М. Скаткін також пропонує трійки простих задач, але не взаємно обернених [70].

За основу класифікації простих задач С. І. Смирнова [117] та Л. М. Фрідман [130] поклали не вибір арифметичної дії, а зміст понять *ціле* та *частина*.

Проаналізувавши існуючи класифікації простих задач, можна впевнитися, що найбільш повною є класифікація Л. М. Фрідмана, але вона значно відрізняється від існуючих традиційних класифікацій. Тому, нами здійснено спробу адаптувати класифікацію Л. М. Фрідмана для застосування в умовах традиційного навчання. В основу класифікації простих задач покладено види співвідношень, що виділені Л. М. Фрідманом, і співвіднесено їх з традиційними видами простих задач, що широко застосовуються у чинних підручниках та у методичній літературі, причому до кожного виду наведено схематичний рисунок.

Прості задачі розбито на 8 типів в залежності від видів співвідношень, які вони містять (за Л. М. Фрідманом). У межах кожного типу ми виділили наступні види:

- задачі, що містять співвідношення додавання (поєднання частин у ціле): задачі на знаходження суми, задачі на знаходження невідомого доданка, задачі на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел;
- задачі, що містять співвідношення віднімання (вилучення частини з цілого): задачі на знаходження різниці, задачі на знаходження невідомого зменшуваного, задачі на знаходження невідомого від’ємника;
- задачі, що містять співвідношення різницевого порівняння: задачі на різницеве порівняння, задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць;
- задачі, що містять співвідношення переходу від більшої одиниці вимірювання або лічби до меншої (співвідношення множення): задачі на конкретний зміст дії множення, задачі на знаходження невідомого множника;
- задачі, що містять співвідношення розбиття цілого на рівні частини (співвідношення ділення): задачі на ділення на рівні частини, задачі на ділення на вміщення;
- задачі, що містять співвідношення кратного порівняння: задачі на кратне порівняння, задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів;
- задачі, що містять співвідношення частин і цілого: задачі на знаходження частини від числа, задачі на знаходження числа за значенням його частини, задачі на знаходження дробу, який одне число складає від іншого;

- задачі, що містять співвідношення залежності між значеннями різних величин: задачі на знаходження загальної величини (загальної довжини, вартості, відстані тощо), задачі на знаходження величини однієї одиниці вимірювання (довжини одного відрізу, ціни, швидкості тощо), задачі на знаходження кількості або часу.

Подані види задач пропонуються протягом перших чотирьох років навчання. Усі розглянуті види задач вводяться не одночасно, а традиційно ознайомлення з ними йде в певній послідовності. Природно, що найбільша кількість нових видів простих задач припадає на перші два роки навчання. У подальшому навчанні вважається, що уміння розв'язувати прості задачі вже сформовано і на передній план виступає формування уміння розв'язувати складені задачі.

1.2.2. Класифікація складених задач

Вважаємо ***складеною задачею*** таку, на запитання якої не можна відповісти відразу, виконавши одну арифметичну дію; для розв'язання складеної задачі треба виконати дві або більше арифметичні дії.

Складені задачі дуже численні й різноманітні. Л. М. Фрідман класифікує складені задачі на підставі кількості співвідношень, що входять у задачу і виділяє задачі 2-го, 3-го і так далі порядку. Кожна складена задача містить не менш ¸ ніж два співвідношення; при цьому, чим більша кількість співвідношень у задачі, тим складніше її розв'язати [130]. Аналогічно до класифікації складених задач підходять і інші методисти – вони визначають види складених задач за кількістю арифметичних дій, які потрібно виконати для їх розв'язання (Л. М. Скаткін [70], М. В. Богданович [38], П. М. Ерднієв [137; 138] та ін).

Класифікація складених задач за кількістю арифметичних дій або видів співвідношень досить загальна і не конкретизована. Безумовно у методичній літературі є й інші класифікації складених задач (Н. Б. Істоміна [51], М. І. Моро, А. М. Пишкало [73] та ін), але усі вони неповні і також не конкретні. Цей стан пояснюється тим, що *для класифікації складених задач немає єдиної основи*, тому *ми поділяємо їх на дві групи*. До ***першої групи***, вслід за І. В. Арнольдом та Л. М. Фрідманом, віднесемо задачі, в яких явища, що описуються, характеризуються однією величиною, тобто містяться у різноманітних поєднаннях прості задачі на співвідношення додавання, віднімання, різницевого порівняння, кратного порівняння та переходу від більшої одиниці рахунку або вимірювання до меншої, співвідношення розбиття цілого на рівні частини, на співвідношення частин і цілого. Таким чином, до цієї групи відносяться складені задачі, які містять різноманітні поєднання відомих видів простих задач, крім співвідношення залежності між значеннями різних величин. Ці задачі можна записати коротко схематично, причому на цьому короткому записі майже завжди можна виділити складові прості задачі. Зрозуміло, що до ***другої групи*** відносяться задачі, в яких явища, що описуються, характеризуються кількома величинами, а саме – містять співвідношення залежності між значеннями різних величин; ці задачі доцільніше записувати коротко в формі таблиці.

Класифікувати складені задачі ***першої групи*** будемо *за назвою простої задачі, що має розв'язуватися останньою*; тому отримаємо такі ***види складених задач***: задачі на знаходження остачі (різниці); задачі на знаходження суми; задачі на знаходження невідомого доданка; задачі на знаходження невідомого зменшуваного; задачі на знаходження невідомого від'ємника; задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць; задачі на різницеве порівняння; задачі на знаходження добутку; задачі на знаходження частки; задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів; задачі на кратне порівняння; задачі на знаходження дробу від числа; задачі на знаходження числа за його дробом.

Зрозуміло, що в межах кожного виду можна виділити різноманіття задач за наявністю в них різних видів простих задач.

Другу групу складених задач (задачі, що містять пропорційні величини) ми умовно ***розділимо на дві підгрупи***:

1) *задачі, що містять знаходження суми, різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток*: на знаходження суми двох добутків (часток); задачі, обернені до задач на знаходження суми двох добутків (часток); на різницеве порівняння двох добутків (часток); задачі, обернені до задач на різницеве порівняння двох добутків (часток); задачі на кратне порівняння двох добутків (часток); задачі, обернені до задач на кратне порівняння двох добутків (часток);

2) *„типові" задачі*: задачі, що містять однакову (сталу) величину (задачі на знаходження четвертого пропорційного, задачі

на пропорційне ділення, задачі на знаходження невідомих за двома різницями, задачі на подвійне зведення до одиниці); задачі на процеси (задачі на спільну роботу, задачі на рух); задачі на знаходження середнього арифметичного.

Задачі цієї групи записуються коротко в формі таблиці.

Підставою для виділення двох підгруп задач, що містять пропорційні величини, є те, що задачі другої підгрупи традиційно вважаються „типовими”. Таким чином, складену задачу вважаємо „типовою”, якщо вона належить до групи задач, що мають спільні риси або за сюжетом або за способом розв'язування. Під способом розв'язування задачі розуміємо процедуру, яка являє собою сукупність прийомів розумової діяльності або логічних операцій і математичних дій, які використовуються під час розв'язування певної сукупності задач одного типу чи виду.

Задачі першої підгрупи класифікуємо за математичною моделлю.

Як було показано вище, усі методисти одностайні у класифікації складених задач з пропорційними величинами, в тому числі „типових” задач. Тому, дотримуючись загальноприйнятих назв „типових” задач, ми дещо вдосконалили існуючу класифікацію, поєднавши їх за спільною ознакою: задачі, що містять однакову величину, задачі на процеси та задачі на знаходження середнього арифметичного.

Таким чином, ми класифікуємо задачі на *прості* та *складені* (за С. І. Шохор-Троцьким). *Прості задачі* розподіляємо на *типи в залежності від виду співвідношення* (за Л. М. Фрідманом), *виділяючи в межах кожного типу кілька видів*. *Складені задачі* розбиваємо на два типи*: 1) задачі, що описують явища, які характеризуються однією величиною; 2) задачі, що описують явища, які характеризуються кількома величинами* (за І. В. Арнольдом). У межах першого типу складених задач ми здійснюємо класифікуємо залежно від простої задачі, що має розв'язуватись останньою, і маємо: задачі на знаходження суми, на знаходження різниці тощо. В межах другого типу єдиної основи для класифікації немає; тут виділяються: 1) задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків чи часток (в залежності від математичної моделі); 2) „типові” задачі: задачі, що містять однакову величину, задачі на процеси та задачі на знаходження середнього арифметичного (на основі способу розв'язання).

Перейдемо до ***обґрунтування можливості поєднання „типових" задач у три групи***. Математична структура задач на знаходження *четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями* містить *спільні істотні ознаки*: наявність двох випадків, одна з величин є однаковою для обох випадків і для іншої величини дані два числові значення для обох випадків. Відмінні ознаки математичних структур задач цих видів полягають у наступному: в задачах на знаходження четвертого пропорційного для третьої величини дано одне числове значення, а друге є шуканим; у задачах на пропорційне ділення та у задачах на знаходження невідомих за двома різницями обидва числові значення третьої величини є шуканими, причому у задачах на пропорційне ділення дано їх суму, а у задачах на знаходження невідомих за двома різницями – їх різницю.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

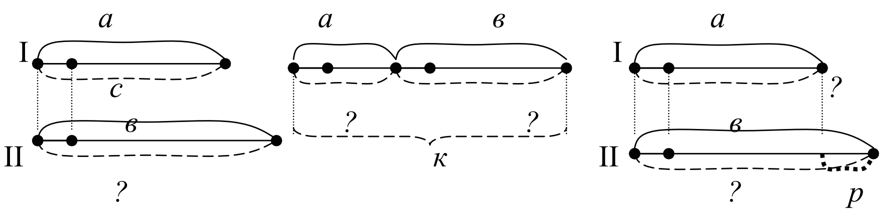
I	*а*		*с*
		однакова	
II	*в*		?

Задачі на пропорційне ділення

I	*а*		?
		однак.	*к*
II	*в*		?,

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

I	*а*		?
		однак.	
II	*в*		?, на *р* б.(м.)



Наявність спільних ознак надає можливість узагальнити *спосіб розв'язування задач* цих видів. Оскільки усі ці задачі містять однакову для двох випадків величину, то ключем до їх розв'язання є знаходження її значення. Але відмінність у розв'язуванні цих видів задач полягає саме у способі відшукування значення однакової величини: у задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходять за двома іншими величинами одного з випадків; у задачах на пропорційне ділення – за двома сумарними значеннями двох інших величин; у задачах на знаходження невідомих за двома різницями – за значеннями різницевого відношення двох інших величин.

Дещо відокремлені від інших задачі на подвійне зведення до одиниці. Ці задачі також містять однакову (сталу) величину, але це величина „подвійної одиниці”, наприклад, маса сіна одному коню на один день. Крім того, усі розглянуті вище види задач містять три пропорційні величини, а задачі на подвійне зведення до одиниці – чотири величини. Але можна говорити, що ці задачі також розв’язуються способом знаходження однакової величини – величини „подвійної одиниці”, яку у задачах першого та другого підвиду знаходять послідовним діленням значення загальної величини на значення двох інших величин, що пов’язані з нею. Треба відмітити, що між задачами на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою може бути величина однієї одиниці, і задачами на подвійне зведення до одиниці є певний зв’язок: задачу на знаходження четвертого пропорційного можна перетворити у задачу на подвійне зведення до одиниці і навпаки; при розв’язанні задачі на подвійне зведення до одиниці, після виконання першої дії ми призводимо цю задачу до відповідної задачі на знаходження четвертого пропорційного.

Незважаючи на визначені відмінності можна говорити про спільні підходи у методиці навчання учнів розв’язування зазначених видів задач. Хоч математична структура задач на подвійне зведення до одиниці дещо відрізняється від математичних структур задач, що розглянуті вище, але у цих задач є спільне у способі розв’язання – для відповіді на запитання задачі треба знайти значення однакової величини, тому ми поєднали задачі цих чотирьох видів – у групу задач, що містять однакову (сталу) величину.

Перейдемо до обґрунтування поєднання в одну групу задач на процеси – на ***спільну роботу та на рух***. Задачі на рух містять опис процесу руху двох тіл, а задачі на спільну роботу – процесу праці двох виконавців. Якщо подати математичні структури задач на одночасний рух та на спільну роботу (в яких дано продуктивність праці кожного виконавця) у вигляді таблиці, то ми отримаємо такі математичні структури (мал. 1).

Так, і задачі на спільну роботу і задачі на одночасний рух, поданої математичної структури, містять: три пропорційні величини: $\frac{\textit{загальний..виробіток}}{\textit{відстань}}, \frac{\textit{продуктивність..праці}}{\textit{швидкість}}$, час $\frac{\textit{роботи}}{\textit{руху}}$; три випадки: перші два стосуються $\frac{\textit{роботи}}{\textit{руху}}$ кожного з двох об’єктів, а третій – їх спільної

$\frac{\textit{роботи}}{\textit{руху}}$; чотири числові значення: $\frac{\textit{продуктивність..праці}}{\textit{швидкість..руху}}$ першого об’єкта, $\frac{\textit{продуктивність..праці}}{\textit{швидкість..руху}}$ другого об’єкта, $\frac{\textit{загальний..виробіток}}{\textit{загальна..відстань}}$ при їх спільн$\frac{\textit{ій..праці}}{\textit{ому..русі}}$ та час спільн$\frac{\textit{ої..роботи}}{\textit{ого..руху}}$; три з них дано, а одне є шуканим.

	$\frac{\textit{заг..виробіток}}{\textit{відстань}}$	$\frac{\textit{продукт..пр.}}{\textit{швидкість}}$	час
I		□	
II			
I і II	**?**	?	□

	$\frac{\textit{заг..виробіток}}{\textit{відстань}}$	$\frac{\textit{продукт..пр.}}{\textit{швидкість}}$	час
I		□	
II		□	
I і II	□	?	**?**

	$\frac{\textit{заг..виробіток}}{\textit{відстань}}$	$\frac{\textit{продукт..пр.}}{\textit{швидкість}}$	час
I		**?**	
II		□	
I і II	□	?	□

	$\frac{\textit{заг..виробіток}}{\textit{відстань}}$	$\frac{\textit{продукт..пр.}}{\textit{швидкість}}$	час
I		□	
II		**?**	
I і II	□	?	□

Мал. 1. Опорні схеми задач на спільну роботу (3-й клас) та на одночасний рух (4-й клас)

Математичну структуру задач на одночасний рух та на спільну роботу можна подати у вигляді узагальненої таблиці (мал. 2).

	$\frac{\textit{заг..виробіток}}{\textit{відстань}}$	$\frac{\textit{продукт..пр.}}{\textit{швидкість}}$	час
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	t

N_1 – продуктивність праці першого виконавця; N_2– продуктивність праці другого виконавця; A – загальний виробіток при спільній праці; V_1 - швидкість першого тіла; V_2 - швидкість другого тіла; t – час спільного руху або час спільної праці; S – відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Мал. 2. Узагальнена опорна схема задач на спільну роботу та на рух

Задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією додавання та задачі на одночасний рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках) мають два способи розв’язування (табл. 1). Задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей кожного виконавця, та задачі на рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням) також мають два способи розв’язування (табл. 2).

Таблиця 1

Способи розв'язування задач на спільну роботу, в яких спільну продуктивність роботи двох виконавців знаходять дією додавання, та на рух в різних напрямках

I спосіб	II спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$	$A = (N_1 + N_2) \cdot t$ $S = (V_1 + V_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (V_1 + V_2)$
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (S - V_1 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $N_2 = A : t - N_1$ $V_1 = S : t - V_2$ $V_2 = S : t - V_1$

Таблиця 2

Способи розв'язування задач на спільну роботу, в яких спільну продуктивність роботи двох виконавців знаходять дією віднімання,
та на рух в одному напрямку

I спосіб	II спосіб
$A = N_1 \cdot t - N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t - V_2 \cdot t$	$A = (N_1 - N_2) \cdot t$ $S = (V_1 - V_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 - N_2)$ $t = S : (V_1 - V_2)$
$N_1 = (A + N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (N_1 \cdot t - A) : t$ $V_1 = (S + V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (V_1 \cdot t - S) : t$	$N_1 = A : t + N_2$ $N_2 = N_1 - A : t$ $V_1 = S : t + V_2$ $V_2 = V_1 - S : t$

Треба зазначити, що в курсі початкової математики розглядають задачі на спільну роботу та на рух у різних напрямках дещо ускладненої математичної структури (мал. 3).

	заг..виробіток / *відстань*	*продукт..пр.* / *швидкість*	час
I	A_1 / S_1	?	t_1
II	A_2 / S_2	?	t_2
I і II	A / S	?	t

Мал. 3. Узагальнена опорна схема задач на спільну роботу та на рух ускладненої математичної структури

Задачі на спільну роботу і задачі на одночасний рух, поданої математичної структури, містять такі спільні ознаки: три пропорційні величини: $\frac{загальний..виробіток}{відстань}, \frac{продуктивність..праці}{швидкість}$, час $\frac{роботи}{руху}$; три випадки: перші два стосуються $\frac{роботи}{руху}$ кожного з двох об'єктів, а третій – їх спільної $\frac{роботи}{руху}$; шість числових значень: $\frac{загальний..виробіток}{загальна..відстань}$ першого об'єкта, $\frac{загальний..виробіток}{загальна..відстань}$ другого об'єкта, $\frac{загальний..виробіток}{загальна..відстань}$ при їх спільн$\frac{ій..праці}{ому..русі}$ та час $\frac{роботи}{руху}$ першого об'єкта, час $\frac{роботи}{руху}$ другого об'єкта, час їх спільн$\frac{ої..роботи}{ого..руху}$; п'ять з них дано, а одне є шуканим.

Спосіб розв'язування цих задач, на відміну від задач, розглянутих вище, передбачає виконання ще двох арифметичних дій, внаслідок чого задачі такої математичної структури зводяться до попередніх.

Таким чином, задачі на спільну роботу та задачі на одночасний рух мають однакові математичні структури та аналогічні способи розв'язування, що дає можливість об'єднати їх в одну групу.

Задачі на знаходження середнього арифметичного. Спосіб розв'язування задач цього виду спирається на правило знаходження середнього арифметичного кількох чисел. Серед усього різноманіття задач на знаходження середнього арифметичного, які подані у чинному підручнику [74; 75], можна виділити два класи таких задач: 1) задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного; 2) ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного, які містять пропорційні величини.

Перший клас охоплює задачі¸ які не містять групу пропорційних величин, і спосіб їх розв'язування полягає у „перекладі" задачі мовою математики, визначення чисел, для яких треба знайти середнє арифметичне. Другий клас охоплює задачі, які містять три пропорційні величини і в яких явно не вказано середнє арифметичне яких і скількох чисел треба знайти. „Ключем" до розв'язання цих задач є правила знаходження середньої величини.

Таким чином, ми виділили три групи „типових" задач:

- задачі, що містять однакову (сталу) величину;
- задачі на процеси;
- задачі на знаходження середнього арифметичного.

Завдання для самоперевірки:

1. Яку ознаку покладено в основу розбиття задач на два класи: прості і складені?

2. До якого класу відноситься задача?

1) Після того, як Сашко розв'язав 7 завдань, йому залишилося розв'язати ще 8 завдань. Скільки завдань має розв'язати Сашко?
2) У майстерні було 23 м тканини. Скільки метрів тканини стало в майстерні після того, як привезли 4 рулони тканини по 9 м у кожному?
3) Першого дня на базу привезли 2 вагони вугілля, маса якого 38 т. Другого дня привезли 3 таких самих вагони вугілля. Скільки вугілля привезли другого дня?

3. Які висновки можна зробити з того, що задача є складеною?

4. Які види простих задач пропонуються в 1-му (2-му, 3-му, 4-му) класі? Покажи їх опорні схеми. Наведи приклади.

5. Визначити вид простої задачі.

1) У вазі лежить 7 шоколадних цукерок, а карамелей на 4 менше. Скільки карамелей лежить у вазі?
2) Бабуся на городі вирвала моркву і зв'язала 5 пучків по 4 морквини у кожному пучку. Скільки всього морквин вирвала бабуся на городі?
3) У Тараса було 5 машинок. Скільки машинок стало у хлопчика після того, як тато йому купив ще 3 машинки?
4) Наталці до школи треба йти 40 м. Чверть шляху вона вже пройшла. Скільки метрів пройшла Наталка?
5) Микола спіймав 7 карасів, а Петро 8. Сашко спіймав стільки карасів, скільки Микола і Петро разом. Скільки карасів спіймав Сашко?

6. З яких простих задач складається задача? До якого виду її можна віднести?

1) На першій полиці 12 книжок, а на другій на 7 менше. Скільки книжок на двох полицях?
2) Мама зірвала з одного куща 8 помідорів, а з другого 4 помідори. Усі помідори вона розклала у дві банки, порівну у кожну. Скільки помідорів у кожній банці?
3) В коробці 12 кг цукерок, а у коробці печива на 3 кг менше. У коробці пряників на 5 кг більше, ніж печива. Скільки кілограмів пряників у коробці?
4) З 27 м бавовни пошили костюми, витрачаючи на кожний костюм по 3 м тканини, а з 6 м бавовни пошили плаття, витрачаючи на кожне по 2 м тканини. У скільки разів більше пошили костюмів, ніж платтів?

7. Наведи приклади складених задач на знаходження суми різноманітних математичних структур. Чим вони відрізняються?

1.3. Діяльність з розв′язування задач

1.3.1. Сутність процесу розв'язування задач

Розв'язування задачі є складним процесом розумової діяльності людини, який спрямований на перетворення об'єкта, що описаний у змісті задачі, на вирішення суперечності між умовою та вимогою задачі.

Сутність діяльності з розв'язування задач полягає у знаходженні такої теорії, такої системи загальних положень, застосовуючи які до умов задачі і проміжних результатів розв'язування, можна врешті відповісти на запитання задачі (задовольнити вимозі задачі) [128] або у відшукуванні способу її розв'язування [23]. Процес розв'язування сюжетних задач як „перекодування" учнем словесно заданого сюжету, що містить числові компоненти і характерну структуру, на мову арифметичного запису, як перехід від словесної моделі до моделі математичної або схематичної, розглядають А. В. Бєлошиста [27] та Н. Б. Істоміна [50]. В основі здійснення цього переходу лежить аналіз тексту і виділення в ньому математичних понять і співвідношень.

Засоби діяльності із розв'язування задач поділяються на внутрішні і зовнішні (за Г. О. Баллом [23]), та складаються з трьох компонентів (за Л. М. Фрідманом [128]):

1) засоби, представлені в умовах задачі, над якими виконуються кроки-перетворення – <u>специфічний компонент</u>;
2) загально логічні правила виведення, за якими виконуються перетворення умов задачі – <u>логічний компонент</u>;
3) евристики, які спрямовують процес розв'язування – <u>евристичний компонент</u>.

Крім цих компонентів, при реальному розв'язуванні задач використовуються ще й інші засоби, а саме – здогадка, інтуїція.

В *описі процесу розв'язування задач* розглядаються *два типи структур*: *зовнішня та внутрішня* [124]. Зовнішня структура описує розв'язування задачі через логічні схеми, алгоритмічні і евристичні приписи, тим самим визначаючи послідовність перетворення задачної системи. Використання розумових операцій передбачає побудову внутрішньої структури. Зазначимо, що в реальному процесі розв'язування задачі внутрішній і зовнішній аспекти тісно взаємодіють один з одним, утворюючи єдине ціле.

1.3.2. Зовнішня структура процесу розв'язування задач

Аналіз процесу розв'язування сюжетної задачі здійснений Д. Пойя [77], М. О. Бантовою та Г. В. Бельтюковою [24], М. В. Богдановичем [38] та іншими провідними методистами. Здебільшого методисти визначають чотири ***етапи процесу розв'язування сюжетної задачі***:

1. Ознайомлення з задачею. Аналіз тексту задачі.
2. Пошук розв'язування задачі.
3. Реалізація плану розв'язування задачі. Запис розв'язання і відповіді.
4. Робота над задачею після її розв'язання.

Останній етап передбачає з'ясування того, що здобутий результат задовольняє умові задачі, перевірку розв'язання; аналіз розв'язання, обґрунтування прийомів розв'язування, розгляд інших способів розв'язування, дослідження задачі і її розв'язання.

Діяльність із розв'язування задач може здійснюватися *алгоритмічним і евристичним способом*. Якщо учень виконує приписи, то в цьому випадку здійснюється алгоритмічний спосіб діяльності з розв'язування задач, який характеризується тим, що учень здійснює власну діяльність у відповідності з відомим йому алгоритмом. Елементарні дії полягають у застосуванні відомого алгоритму розв'язування даного класу задач. Але для цього, під час аналізу задачі треба встановити належність даної задачі до задач певного класу. Евристичний спосіб діяльності з розв'язування задач відрізняється відсутністю у школяра такого алгоритму, і головна частина його діяльності полягає у пошуках плану або способу розв'язування даної задачі. Для задач неалгоритмічного характеру використовуються різноманітні евристичні правила і схеми, застосування яких не гарантує знаходження системи елементарних дій, які призведуть до повного розв'язання задачі.

Таким чином, якщо, розпочинаючи розв'язання математичної задачі, учень не має орієнтувальної основи для своїх дій, то він її відшукує, виконуючи евристичну діяльність. Така діяльність здійснюється за допомогою особливих прийомів – евристик. По-перше евристики – це всілякі засоби (графічні схеми, друковані інструкції, усні вказівки викладача, наочні матеріали, відомості тощо), застосування яких робить можливим і полегшує розв’язування задачі (М. Б. Балк, Г. Д. Балк, Г. О. Балл, К. Г. Юнг та ін.). По-друге евристики – це прийоми розв’язання певних класів задач, що не піддаються чіткій алгоритмізації (В. І. Андрєєв, О. Б. Єпішева, В. І. Крупич, О. І. Скафа, З. І. Слєпкань та ін.). І, нарешті, евристики, – це специфічні розумові прийоми, що складають пошукові стратегії і тактики (А. К. Артьомов, Н. І. Зільберберг, Л. Ларсон, Ю. М. Колягін, Ю. М. Кулюткін, Г. І. Саранцев, О. І. Скафа, Л. М. Фрідман та ін.)

Типові евристики, які доцільно формувати в учнів початкової школи, виділені і описані А. К. Артьомовим [19]: виділення із тексту задачі змістовних одиниць, їх перетворення і комбінування з умовою і запитанням задачі; формулювання простої задачі з частини умови даної складеної задачі; перекодування інформації, а саме побудова різноманітних моделей однієї й тієї самої задачі; переформулювання умови і (або) запитання задачі на рівносильні; розчленування запитання задачі та запитань, які виникають по ходу її розв’язування, на допоміжні; добір допоміжного запитання до даного; отримання висновків з того, що дано (вичерпання з даного математичного об'єкту особливостей, що є в ньому); постановка запитання до даних і результатів, отриманих під час розв’язування задачі; введення допоміжних позначень, умов (наприклад, у співвіднесенні з життєво практичними ситуаціями).

Серед запропонованих евристик немає повністю ізольованих, вони взаємопов’язані між собою і взаємозалежні. Причому, одні з них порівняно прості за складом, інші – є більш складними. О. В. Баринова пропонує використовувати як *домінуючу евристику – моделювання – моделювання як задачної ситуації (побудову допоміжних моделей – предметних, схематичних, словесних), так і процесу її розв’язування (схеми аналітичного і синтетичного розбору задачі, „дерева міркувань”)*, тому що саме моделювання забезпечує необхідне орієнтування в задачній ситуації [26].

Незалежно від способу (алгоритмічного чи евристичного), діяльність учнів із розв’язування задач являє собою реалізацію основних етапів розв’язування через виконання певних дій. Розглянемо дії, за допомогою яких реалізуються етапи розв’язування задачі.

1. Ознайомлення з задачею. Аналіз тексту задачі.

Ознайомитися – це означає, прочитавши формулювання задачі, уявити собі життєву ситуацію, яка відображена в ній. При ознайомленні читаємо текст задачі двічі: перший раз – для ознайомлення з її змістом в цілому, а потім – для відокремлення кожної змістовної одиниці тексту в окрему частину (читаємо по частинах). Поділ задачі на частини передбачає відокремлення умови і запитання, числових даних і шуканого, визначення їх змісту.

Проаналізувати текст задачі – це означає виділити умову і запитання; визначити величини, що входять до задачі: дані та шукані, встановити зв'язки між ними. Аналіз задачі відбувається двома способами (за Л. М. Фрідманом):

а) предметно–змістовий аналіз – це декодування умови задачі в цілому, відновлення тієї реальної задачної ситуації, моделлю якої є дана задача. Такий аналіз звичайно виконується усно, і задачна ситуація, що створюється на основі цього аналізу, утворює у дитини мислений образ сюжету задачі;

б) логіко-семантичний аналіз – спрямований на виявлення особливостей словесного задання окремих величин, як відомих, так і невідомих, в тому числі й шуканих, а головне – на виявлення словесних ознак окремих видів співвідношень. Це аналіз тексту задачі для встановлення величин, їх значень і співвідношень між ними, що задані в тексті задачі, розбиття тим самим тексту задачі на окремі елементарні умови (елементарною умовою задачі є судження, що міститься в тексті задачі, яке не можна розчленувати на більш дрібні судження) і вимоги. Таким чином виявляється структура задачі.

В результаті *логіко-семантичного аналізу* тексту задачі встановлюється:

1) які величини характеризують кількісний бік тих явищ, процесів і подій, які складають сюжет задачі;
2) скільки і які значення кожної величини задані явно або неявно в тексті задачі;
3) характер кожного значення величини: відоме або невідоме це значення, а якщо невідоме, то яке – шукане, проміжне (допоміжне) чи невизначене;

4) якими співвідношеннями пов’язані між собою ці значення величин;

5) яке значення є головним в кожному співвідношенні, які слова-ознаки, що входять у задання значення величини, вказують на характер цього значення;

6) який характер кожного з цих співвідношень (розв’язне, нерозв’язне);

7) як пов’язані між собою ці співвідношення [130].

Такий аналіз можливий лише за наявності засобів фіксації – моделі задачі у формі таблиці, графіка або рисунка [116; 130]. Так, М. І. Бурда, Н. Б. Істоміна, Л. Г. Петерсон, Л. М. Фрідман та багато інших методистів після аналізу тексту задачі радять здійснювати поступовий переклад словесної моделі в графічну (схематичну), і лише потім у символічну (математичну) [39; 50; 127]. На застосування моделей під час аналізу умови задачі як на фактор підвищення пізнавальної активності учнів, вказують Т. Й. Мельничук та Т. М. Хмара [68].

Отже, результати аналізу тексту задачі повинні бути втілені у *репрезентативній моделі задачі*. Л. М. Фрідман зазначає, що складання репрезентативної моделі сюжетної задачі має кілька цілей. Зокрема така модель може слугувати:

а) для фіксації результатів аналізу задачі і тим самим для організації власне цього аналізу, тому складання моделі виконується в процесі аналізу та в міру його виконання;

б) для погляду на задачу з різних точок зору. Побудова моделі задачі дозволяє здійснити те основне, що спрямовує, підштовхує процес розв’язування, процес переформулювання задачі;

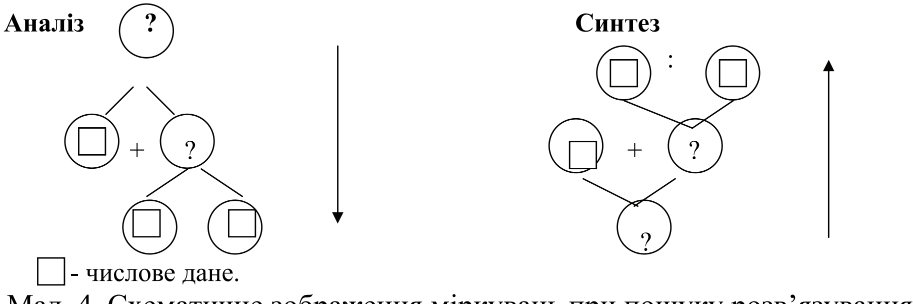
в) побудова моделі задачі є підготовчим етапом для складання математичної моделі задачі [130].

М. І. Бурда та Л. М. Фрідман розглядають *предметні, наочно-схематичні й табличні моделі задачі (репрезентативні)*. Предметна модель сюжетної задачі – це будь-яке наочне відновлення тієї реальної ситуації, що описана в задачі. Такі моделі можуть складатися з речей, а можуть бути поданими у вигляді малюнків, різного роду інсценуванням сюжету задачі. До цього виду моделей відноситься і мислене відновлення реальної ситуації, що описана в задачі, у вигляді уявлень. Наочно-схематичні моделі використовуються для узагальненого, схематичного відновлення ситуації задачі. Моделі цього виду зберігають наочність, що притаманна предметним моделям, але відновлюють реальну ситуацію, що описана в задачі за допомогою відрізків, геометричних фігур тощо. До наочно-схематичних моделей належать різного роду схематичні записи умови задачі або короткі записи у формі таблиці, схематичні рисунки. Таблична форма короткого запису застосовується тоді, коли в задачі є кілька взаємо пов'язаних величин, кожна з яких задана одним або кількома значеннями [39; 127].

Треба зупинитися ще на одному виді моделей – *структурних* (графи, схеми), які виділяють Л. М. Фрідман та М. І. Бурда. Вони використовуються для наочного зображення залежностей і зв'язків між даними і шуканими величинами, тобто для наочного зображення математичної структури розв'язання задачі. Структурні моделі були вперше розроблені Л. М. Фрідманом ще в 50-ті роки. Ці моделі відновлюють у наочній формі усі співвідношення і вузлові зв'язки між ними. Корисність їх застосування для розв'язання сюжетних задач була доведена в експериментах Є. М. Семенова [82], Є. Н. Турецького [125], К. У. Асимова [22]. Складання структурної схеми задачі можна віднести не лише до першого етапу в роботі над задачею – до аналізу тексту задачу, а й до другого етапу – пошуку розв'язування задачі, тому що на структурній схемі наочно бачимо розв'язуючу модель задачі.

II. Пошук розв'язування задачі.

Пошук розв'язування задачі арифметичним способом може бути здійснений від запитання задачі до числових даних – аналітично, або від числових даних задачі до її запитання – синтетично (див. мал. 4). Приклади роботи над задачами подані у додатку А.



Мал. 4. Схематичне зображення міркувань при пошуку розв'язування задачі

У практиці навчання застосовуються обидва шляхи, але переваги належать синтетичному методу, оскільки аналітичний спосіб у чистому вигляді, зазначає Л. М. Фрідман, більш важкий для учнів [129; 130]. М. В. Богданович також вважає, що синтетичний спосіб для дітей легший, але застосування його може створювати додаткові проблеми; аналітичний спосіб більш цілеспрямований щодо складання плану розв'язування задачі, тут треба мати на увазі не одну якусь дію, а хід міркування в цілому. Однак для задач на три й більше дій він громіздкий [37; 38]. Р. Н. Шикова погоджуючись з М. В. Богдановичем вважає, що при аналізі учні отримують уявлення про розв’язання задачі в цілому, а не про окремі дії, що вибрані, а синтез сприяє опрацюванню вміння передбачати про що можна дізнатися за двома певними числовими даними та спрямуванню думки дітей у потрібному напрямку [136].

С. Є. Царьова розглядає пошук розв’язування задачі не лише, як міркування „від запитання задачі до числових даних” або „від числових даних до запитання”, а й виділяє ще кілька способів пошуку розв’язування задачі: *пошук за предметною або графічною моделлю* (цей спосіб реалізується у системі розвивального навчання Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова), *пошук за допомогою відокремлення словесного задання математичних відношень і перекладу їх на мову виразів* (створення структурних моделей за Л. М. Фрідманом) [134].

Для складених задач пошук розв’язування задачі завершується складанням плану розв’язування, в якому обговорюється, про що ми дізнаємося першою дією, другою дією, і так далі…

Обравши той або інший метод чи спосіб розв’язування сюжетної задачі, слід скласти для неї відповідну розв’язуючу математичну модель. Це означає, що якщо обрано арифметичний спосіб розв’язування, то модель будується у вигляді обчислювальної формули або просто послідовності арифметичних дій (план розв’язування).

Цікаву методику *застосування схематичних моделей на етапі пошуку розв’язування задачі арифметичним методом* пропонує М. І. Бурда. Автор при розв’язанні складених задач виділяє три види схем: 1) схема розбору задачі (від шуканого до даних); 2) схема плану розв’язування; 3) структурна схема розв’язання. Застосування цих схем здійснюється при поступовому переході від схеми розбору до схеми плану розв'язування і від схеми плану розв'язування до структурної схеми та навпаки. Розбір задачі від шуканого до даних проводиться з одночасним кресленням схеми [39].

Треба зазначити, що на етапі пошуку розв'язування задачі особливу увагу мають дії, що належать до групи евристичних правил та схем, які спрямовують процес діяльності із розв'язування задач.

III. Здійснення плану розв'язування задачі. Запис розв'язання і відповіді.

Далі здійснюється *власне розв'язання*: знаходження результатів кожної з намічених арифметичних дій та встановлення змісту отриманого числа або знаходження значення числового (числових) виразу (виразів) – при арифметичному способі розв'язування задачі; розв'язання рівняння і відповідь на запитання задачі – при алгебраїчному методі. Таким чином, відбувається третій етап процесу роботи над задачею.

IV. Робота над задачею після її розв'язання.

Робота над задачею після її розв'язання полягає у перевірці правильності розв'язку .

Перевірити розв'язання задачі – значить встановити, чи воно правильне, чи ні. Л. М. Фрідман [130] розглядає перевірку розв'язання як встановлення факту, що отриманий розв'язок задовольняє умовам задачі. Перевірка розв'язання задачі потрібна для того, щоб виключити неправильні або неповні відповіді задачі, по-перше, через можливі помилки в процесі розв'язування, а по-друге, через неточність математичних моделей.

Перевірка розв'язання сюжетних задач може бути прямою або непрямою, у свою чергу кожна з них може бути повною або неповною. Пряма повна перевірка розв'язання задачі полягає в тому, що ми впевнюємося у виконанні усіх умов задачі при знайденому (знайдених) значеннях шуканого; неповна перевірка полягає в тому, що перевіряються не усі умови, а лише деякі. Непряма перевірка проводиться за допомогою складання і розв'язування оберненої задачі.

1. *Складання та розв'язування оберненої задачі*. Обернена задача складається шляхом обміну ролями одного з шуканих з якимось із даних, тобто знайдене значення одного з шуканих приймають за дане, а одне з даних вважають шуканим. Якщо в результаті розв'язання

оберненої задачі отримують значення, що збігається з обраним даним, то це свідчить, що задача розв'язана правильно.

Цікава методика використання стрілок при розв'язуванні прямих і обернених до них задач запропонована Т. Й. Мельничук та Т. М. Хмарою [68]. Згідно з цим методом, розв'язування задачі недоцільно завершувати знаходженням відповіді на неї. Доцільно складати і розв'язувати одночасно з вихідною (прямою) задачею, обернену до неї. При цьому, зазначають автори, дістаємо нову інформацію про зв'язки між величинами вихідної задачі. Зв'язки, у яких перебувають пари застосовуваних операцій, використовуються для перевірки правильності розв'язання задачі. Їх достовірність ілюструється застосуванням двох протилежно спрямованих стрілок.

2. *Розв'язання задачі іншим способом.* Непряму перевірку можна здійснити, розв'язавши задачу іншим способом. Якщо задачу можна розв'язати іншим способом, то отримання однакових результатів підтверджує, що задача розв'язана правильно .

Проблему формування у молодших школярів уміння розв'язувати задачі різними способами вивчали провідні методисти Н. Б. Істоміна [52], Л. Ш. Левенберг [64], О. С. Пчьолко [78], С. Є. Царьова [133; 134], Р. Н. Шикова [135].

Цікавий підхід до відшукування різних арифметичних способів розв'язування задачі запропоновано А.К. Артьомовим. Цей підхід передбачає використання: переформулювання запитання задачі; добір допоміжного запитання; виявлення прихованих логічних основ задачі; наочного оформлення задачі [21].

В початкових класах застосовуються такі способи прямої перевірки правильності розв'язання:

3. *Встановлення відповідності між числами, які отримані в результаті розв'язання задачі, і даними числами*. При перевірці розв'язання задачі таким способом, виконуються арифметичні дії над числом, яке було отримано у відповіді на запитання задачі: якщо при цьому отримаємо число, що дано в умові, тоді задача розв'язана правильно. Наприклад при розв'язанні задачі: „Мама купила по однаковій ціні 3 кг яблук та 2 кг груш. За всю покупку вона заплатила 15 гривень. Скільки окремо коштують яблука та окремо коштують груші?", отримали, що яблука коштують 9 гривень, а груші – 6 гривень; додавши отримані числа (9 + 6 = 15 гривень), одержимо число, яке дано в умові задачі. Отже, задачу розв'язано правильно.

4. *Орієнтовна оцінка відповіді (встановлення відповідності шуканого числа області своїх значень)*. Цей спосіб полягає в тому, що до початку розв'язання задачі встановлюється область значень шуканого числа, тобто визначається більшим або меншим якогось із даних чисел повинно бути шукане число. Після розв'язання задачі перевіряється, чи відповідає отриманий результат встановленій області значень (тоді задачу, можливо, розв'язано правильно), чи ні (тоді розв'язання неправильне)). Цей засіб допомагає виявити помилковість розв'язання і має поєднуватися з іншими способами перевірки.

С.Є Царьова зазначає, що кожний із названих прийомів перевірки має ряд переваг та недоліків. Загальним недоліком усіх цих прийомів є спрямованість кожного на перевірку кінцевого результату, що в більшості випадків не дає змогу виявити помилку у розв'язанні, якщо вона допущена. Крім цього, при перевірці будь яким із перелічених прийомів в розряд правильних може потрапити розв'язання з кількома помилками, що компенсують одна одну; коли розв'язання неправильне, а відповідь правильна. Але існує *прийом перевірки*, який не має таких недоліків – це визначення змісту складених за задачею виразів [134].

Виявлення недоліків проведеного розв'язання, пошуки кращого розв'язання, встановлення і закріплення в пам'яті учнів тих прийомів і способів, які були застосовані в даному розв'язанні, виявлення умов можливості застосування цих прийомів і способів – усе це й сприяє перетворенню розв'язування задачі у могутній навчальний та виховуючий засіб. При обговоренні проведеного розв'язання корисно у деяких випадках встановити можливість узагальнення даної задачі, виявити її особливості, зіставити розв'язання даної задачі з раніш розв'язаними тощо [130].

Методику роботи над задачею, згідно визначеним етапам, подано у додатку А.

1.3.3. Психологічна структура діяльності з розв'язування задач

Процес розв'язування сюжетних задач дуже складний. Якщо цей процес розглядати з математичної точки зору, то важливо, на які поняття учень спирається, щоб розглянути усі відношення; які математичні операції слід виконати, щоб відповісти на запитання задачі; в якому порядку побудувати власну структуру дій для досягнення мети; що обрати за основу власних дій (зовнішня структура діяльності з розв'язування задач). Якщо його розглядати з точки зору психолога, то треба встановити: з яких розумових дій складається процес розв'язування, як учень здійснює аналіз, планує розв'язання, контролює себе, як він розкриває зв'язки між величинами тощо (внутрішня структура діяльності по розв'язуванню задач).

Психологічну (внутрішню) структуру розв'язування сюжетних задач складають усі ті розумові процеси, що відбуваються у психіці учня і призводять до виконання певних дій у певній послідовності. Психологічну структуру розв'язування сюжетних задач вивчали: Н. О. Менчинська, К. А. Славська, З. І. Камикова та інші. Ще С. Л. Рубінштейном були визначені характеристики мислення під час розв'язування задач такі, як аналіз, синтез, аналіз через синтез, абстрагування і узагальнення. Ряд психологів (Н. О. Менчинська та інші) на підставі експериментальних досліджень довели особливу роль цих розумових процесів при розв'язуванні сюжетних задач. З. І. Калмикова, досліджуючи процеси аналізу і синтезу при розв'язуванні сюжетних задач, дійшла висновку, що аналітико-синтетична діяльність учнів при розв'язуванні сюжетних задач спрямована на аналіз даних, шуканого, а також на виділення закономірностей, які дозволяють встановити взаємовідносини даних між собою і з шуканим. Виходячи з цього, виникає необхідність навчання учнів правильного аналізу задачі, способам розкриття відношень, що пов'язують шукане і дані.

Отже, загальні розумові дії, перед усім, *аналізу і синтезу* лежать в основі процесу розв'язування сюжетних задач молодшими школярами. Між тим, слід мати на увазі, що за даними А. А. Люблинської [66], Г. П. Антонової [6] та інших вчених для молодших школярів характерним є низький рівень виконання аналізу і синтезу і нерівномірний їх розвиток, який полягає у відставанні синтезу. Дитині легше виконати аналіз, виділивши частини об'єкту, ніж поєднати їх у одне ціле і визначити співвідношення між ними.

Особливості здійснення молодшими школярами аналізу і синтезу впливають на виконання операції *порівняння*. В основі розв'язування задач знайомої математичної структури лежить саме порівняння. В. Н. Осинська зазначає, що при порівнянні задач треба звернути увагу на дані, що містяться в умовах, характер зв'язку між даними та шуканим, тому що саме це визначає спосіб їх розв'язування. У задач одного типу є спільне в суттєвому: структурі, умові, зв'язках між даними умови і шуканими величинами; відмінності ж стосуються несуттєвого в умові і розв'язках задач [75].

Порівняння – обов'язкова умова будь-якого абстрагування і будь-якого узагальнення. Розв'язування із наступним порівнянням кількох задач окремого виду надає можливість узагальнити спосіб їх розв'язування. *Узагальнення* – складний прийом розумової діяльності, який передбачає уміння аналізувати, порівнювати, виділяти суттєве, головне, абстрагувати, синтезувати [46].

Г. П. Антонова, вивчаючи індивідуальні особливості розумової діяльності молодших школярів, провела ряд експериментів по виявленню відмінностей у здійсненні ними операцій аналізу і синтезу, узагальнення і абстрагування; у виявленні гнучкості розумових процесів. В результаті встановлено, що рівні узагальнення і абстрагування знаходяться у відповідності з рівнями аналізу і синтезу: чим вищий рівень аналізу і синтезу, тим вищий рівень узагальнення і абстрагування. Крім цього, високий ступінь гнучкості мислення виявляється у тих учнів, яким притаманний високий рівень розвитку розумових процесів, і навпаки.

В. В. Давидов [45] виділяє два *типи узагальнень при розв'язуванні задач*:

1. Узагальнення через аналіз умови і вимоги задачі, що дозволяє абстрагувати її істотні залежності (теоретичний шлях узагальнення).
Завдяки цьому, розв'язання задачі відразу набуває узагальненого значення і переноситься на цілий клас задач, забезпечуючи теоретичний підхід з позицій єдиного типу розв'язання.

2. Узагальнення через порівняння (емпіричний шлях узагальнення).
Узагальнення здійснюється шляхом розгорненого порівняння задач. При цьому кожна наступна задача розв'язується як відносно окрема через спроби й помилки. Лише поступово в цих розв'язаннях знаходяться схожі моменти, що призводить до узагальнення.

Отже, під час розв'язування будь-якої задачі учень виконує *аналіз*: відокремлює запитання від умови, виділяє дані й шукані числа, визначає взаємозв'язки між даними і шуканими, підбирає числові дані, які потрібні для відповіді на запитання задачі; складаючи план розв'язування, він виконує *синтез*, користуючись при цьому *конкретизацією* (у думці „малює" умову задачі), а потім *абстрагуванням* (абстрагуючись він конкретної ситуації, вибирає арифметичні дії); внаслідок багаторазового розв'язання задач певного виду учень *узагальнює* знання зв'язків між даними і шуканим, чим узагальнюється спосіб розв'язування задач цього виду [76; 83].

Таким чином, в основі процесу розв'язування сюжетних математичних задач лежать загальні розумові дії (зокрема, аналізу, синтезу, абстрагування та узагальнення), які складають внутрішню структуру процесу розв'язування сюжетних задач.

Завдання для самоперевірки:

1. Виконати предметно-змістовий аналіз тексту задачі.

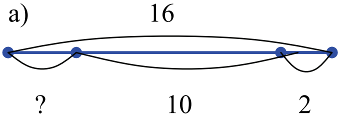
1) У дівчинки було 25 см стрічки, після того, як вона зробила закладку, у неї залишилося 12 см стрічки. Скільки сантиметрів стрічки витратила дівчинка на закладку?
2) В дідуся у садку росте 5 вишень і 3 яблуні. Скільки фруктових дерев росте в дідуся у садку?
3) Біля озера посадили 8 верб, а осик на 4 більше, ніж верб. Беріз на 5 менше, ніж верб і осик разом. Скільки беріз посадили біля озера?
4) Майстер виготовляє 24 деталі за 4 години, а учень за 6 годин. Скільки деталей виготовлять майстер і учень за 3 години, якщо працюватимуть разом?

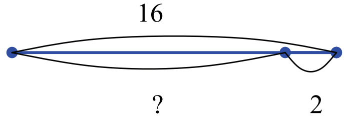
2.Виконати логіко-семантичний аналіз тексту задачі.

1) У класі 12 дітей. З них 7 хлопчиків, а решта дівчинки. Скільки дівчинок в класі?
2) Після того, як з бочки взяли 12 л води для поливу дерев, в ній залишилось ще 6 л води. Скільки літрів води було у бочці спочатку?
3) У шкільну їдальню привезли бідон молока. У бідоні було 16 л молока. В нього долили 4 л молока. Скільки літрів молока стало у бідоні?
4) Поштарка повинна рознести 36 журналів, а газет на 3 менше. Скільки газет повинна рознести поштарка?
5) Сашко розв'язав 15 прикладів і 7 задач, а Тарас розв'язав на 4 завдання менше, ніж Сашко. Скільки завдань розв'язав Тарас?
6) Бабуся заготовила 5 трилітрових бутилі соку і 6 дволітрових. Скільки всього літрів соку заготовила бабуся?

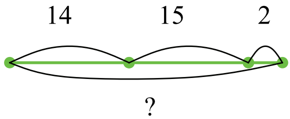
3. Вибери схематичний рисунок до задачі.

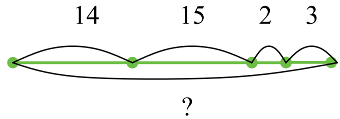
1) Тарас зіграв на турнірі з шахів 16 партій. З них 10 він виграв, 2 програв, а решту звів у нічию. Скільки партій Тарас звів у нічию?

а)


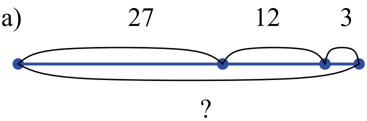
б)


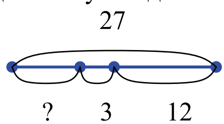
2) На ставку плавало 14 лебедів та 15 качок. У комишах було ще 2 лебедя та 3 качки. Скільки всього птахів було?

а)


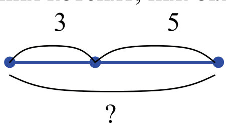
б)


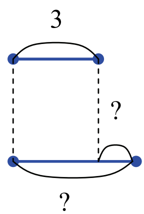
3) На дитячому майданчику грали 27 дітей. Пішли до дому 12 дівчинок і 3 хлопчика. Скільки дітей залишилося грати на дитячому майданчику?

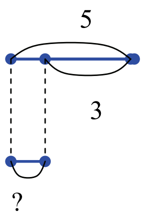
а)


б)


4) В нашої кішки народилися котенята: 3 чорних і 5 білих. На скільки менше чорних котенят, ніж білих?

1)


2)


3)


4. До тексту задачі підбери короткий запис.

1) Зозуля поклала 1 яйце сороці в кубло і 3 яйця вороні. Скільки всього зозулят прийдеться виховувати приймальним батькам?
2) Зозуля поклала 1 яйце сороці в кубло, а вороні на 3 яйця більше. Скільки яєць поклала зозуля у кубло вороні?
3) Зозуля поклала 1 яйце сороці в кубло і 3 яйця вороні. На скільки більше яєць поклала зозуля у кубло вороні, ніж сороці?
4) Зозуля підкинула вороні і сороці 3 яйця. Скільки яєць вона підкинула сороці, якщо вороні вона підкинула 1 яйце?

а)

Сорока – 1 шт.
Ворона – 3 шт.
На ?

б)

Сорока – 1 шт.
Ворона – ?, на 3 шт. більше

в)

Сорока – ?
Ворона – 1 шт.
} 3 шт.

г)

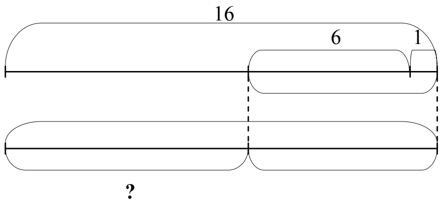
Сорока – 1 шт.
Ворона – 3 шт.
} ?

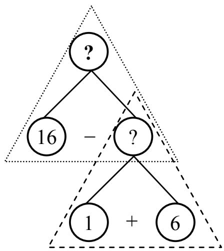
5. В яких формах може бути подано короткий запис задачі? В якому випадку короткий запис виконується в формі таблиці? В якому випадку у формі креслення? В якому випадку – схематично? До задачі склади короткий запис.

1) З одного селища одночасно у протилежних напрямках вирушили два велосипедиста. Яка відстань буде між ними через 3 години, якщо швидкість першого $5\ \frac{м}{с}$, а швидкість другого $4\ \frac{м}{с}$?

6. Прокоментуй аналітичний пошук розв’язування задачі.

1) У шкільній їдальні було 16 л олії. На сніданок витратили 1 л олії, а на обід 6 л. Скільки літрів олії залишилося?

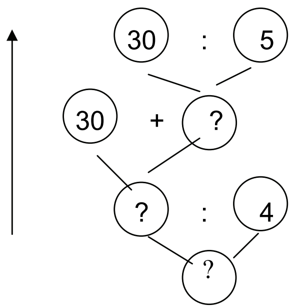




Розв’язання

1) 1 + 6 = 7 (л) всього витратили
2) 16 – 7 = 9 (л) залишилося
Відповідь: 9 літрів олії залишилося.

7. Прокоментуй синтетичний пошук розв’язування задачі.



На дослідній ділянці у господарстві посіяли 30 кг пшениці, жита – в 5 разів менше, ніж пшениці, а гречки – в 4 рази менше, ніж пшениці та жита разом. Скільки посіяли гречки?

8. Виконати перевірку розв’язання задачі способом складання і розв’язування оберненої задачі.

1) Столяр полагодив в перший день 14 стільців, а в другий - на 4 стільці менше. Скільки стільців полагодив столяр в другий день?
2) У вагоні було 11 пасажирів. Після того, як на станції увійшло ще декілька пасажирів, у вагоні стало 18 пасажирів. Скільки пасажирів увійшло на станції?
3) На шкільній кролефермі було 25 білих кролів, 43 чорних, а сірих на 12 менше, ніж білих і чорних разом. Скільки сірих кролів було на кролефермі?

9. Виконати перевірку розв’язання розв’язавши задачу з завдання №6 (1) іншим способом.

1.4. Уміння розв′язувати задачі. Види умінь

Під *умінням* розуміємо свідоме застосування знань і навичок, що є в учня, для виконання складних дій у різноманітних умовах, тобто для розв'язування відповідних задач.

Оволодіння умінням розв'язувати задачі здійснюється в процесі навчання за правильної організації діяльності вчителя та учня. Таким чином, навчання розв'язування задач – це спеціально організована взаємодія вчителя та учнів, мета якої полягає в формуванні у дітей ***уміння розв'язувати задачі***.

Зосередимо спочатку увагу на змісті поняття „уміння розв'язувати задачі”, а потім розглянемо формування уміння розв'язування задач. Слід зазначити, що незважаючи на те, що поняття „уміння розв'язувати сюжетні задачі” широко застосовується на практиці для характеристики мети і результатів навчання розв'язування задач, у методичній літературі [24; 37; 70; 71; 73] означення цього поняття відсутнє. Зміст даного поняття подається у більшості випадків у вигляді конкретної мети, яка повинна бути здійснена в процесі розв'язування сюжетних задач.

Означення поняття „уміння розв'язувати задачі” зустрічається у дисертаційних дослідженнях Г. Д. Бухарової [40], С. Є. Царьової [134], Ю. М. Колягіна [55] та В. А. Мізюк [72]. Підхід Г. Д. Бухарової та С. Є. Царьової до трактування поняття „уміння розв'язувати сюжетні задачі” являє собою сукупність операційних факторів зовнішньої структури процесу розв'язування задачі. В. А. Мізюк виходить з того, що про сформоване вміння можна говорити лише тоді, коли учень самостійно без допомоги розв'язує задачі. Отже, вміння розв'язувати сюжетні задачі – це готовність і здатність учнів самостійно і свідомо розв'язувати ці задачі. Уміння розв'язувати задачі, як комплекс, до складу якого входять: 1) активно діючі математичні знання (і відповідні їм спеціальні уміння і навички); 2) досвід у застосуванні знань; 3) певна сукупність сформованих властивостей мислення (розумові операції), які виявляються в процесі розв'язування задач, визначає Ю. М. Колягін [55].

Для цілеспрямованого формування уміння розв'язувати сюжетні задачі, слід проводити роботу за двома напрямкам: по-перше формування дій та операцій, що складають зовнішню структуру; по-друге формування дій та операцій, що складають внутрішню (психологічну) структуру процесу розв'язування задач. Але ми зосереджуємося на формуванні зовнішньої структури діяльності з розв’язування задач. Аналіз формування внутрішньої структури – це справа психологів.

Тому, при означенні поняття „***уміння розв’язувати задачі***” ми виходимо з його операційного складу (зовнішньої структури): уміння розв’язувати сюжетні задачі – це складне уміння, яке містить комплекс умінь нижчого порядку, що стосуються послідовно виконуваних дій, а саме:

1) уміння аналізувати текст задачі;
2) уміння подавати результати аналізу у вигляді репрезентативної моделі;
3) уміння співвідносити задачу з раніш вивченими і відтворювати спосіб розв’язування задач даного типу (якщо учню пропонується задача відомого типу);
4) уміння виконувати пошук розв’язування задачі, якщо задача невідомого типу або учень не „впізнав” задачу: при арифметичному способі розв’язування виконувати аналітичні міркування (від запитання задачі до числових даних) або синтетичні (від числових даних до запитання задачі), при алгебраїчному методі розв’язування – складати рівняння, при геометричному методі розв’язування – виконувати креслення, будувати діаграми або графіки;
5) уміння виконувати операції, які забезпечують розв’язання задачі;
6) уміння перевіряти правильність розв’язку.

Ми окремо не виділили „знання про задачу та процес її розв’язування”, тому що ми притримуємося загальноприйнятого означення „уміння” у психології, як свідомого застосування знань і навиків.

О. В. Баринова [25; 26], на підставі аналізу робіт психологів відокремлює *рівні уміння розв’язувати задачі молодшими школярами*, в основу яких покладено виділені Н. О. Менчинською види аналізу: елементарний, комплексний, перевершуючий. Між тим, очевидно, що рівень сформованості уміння розв’язувати задачі прямо залежить від рівня сприймання і розуміння задач. С. Д. Максименко та В. П. Максименко [67] в результаті аналізу процесу розв’язування математичних задач виділили три групи учнів з різними співвідношеннями наочно-образних і словесно-логічних компонентів у їх розумовій діяльності і на основі аналізу особливостей аналітико-синтетичної діяльності учнів всіх груп виділили п’ять рівнів сприймання і розуміння задач.

В результаті порівняльного аналізу існуючих у методичній літературі трактувань рівнів розв’язувати задачі та на основі аналізу операційного складу вміння розв’язувати задачі й спостережень за роботою над задачами учнів початкової школи нами встановлено наступні ***рівні уміння розв’язувати задачі***:

I. Низький рівень. Сприймання задачі здійснюється учнем поверхово, неповно, учень не може виділити умову і запитання задачі, визначити об’єкт задачі, виокремити числові дані і шукане задачі. При цьому він виділяє зовнішні, частіше несуттєві елементи задачі. Учень не може і не намагається уявити хід розв’язування задачі. Учень не вміє складати короткий запис задачі або схематичний малюнок. При складанні короткого запису, схематичного малюнку учень не спирається на слова-ознаки і не визначає вид співвідношення. Перед розв’язанням задачі не робить прикидку: шукане число буде більше чи менше за дане число. Учень не виконує пошук розв’язування задачі (аналіз або синтез), а відразу приступає до розв’язання задачі, обираючи числові дані та арифметичну дію навмання. Після розв’язання задачі має труднощі у формулюванні відповіді. Учень не „бачить” різних способів розв’язання, навіть коли вчитель вказує на них.

II. Середній рівень. Сприймання задачі супроводжується її аналізом, учень виділяє умову і запитання, об’єкт задачі, числові дані і шукане. Учень прагне зрозуміти задачу, виокремлює дані та шукане, але здатний при цьому встановити між ними лише окремі зв’язки. Він вміє виділяти ключові слова та складати короткий запис задачі або виконувати схематичний малюнок. Через відсутність єдиної системи зв’язків між величинами є важкою прикидка очікуваного результату. Учень може виконати пошук розв’язування задачі, спираючись на схематичний малюнок або за допомогою дорослого. Учень чітко дає відповідь на запитання задачі. Учень знаходить різні способи розв’язування задачі, за наявності попереднього досвіду при розв’язанні аналогічних задач.

III. Високий рівень. Учень володіє предметно-змістовним аналізом задачі. Вміє визначати слова-ознаки та види співвідношень, що задані в задачі, а також складати репрезентативну модель задачі. На підставі повного всебічного аналізу задачі учень виділяє взаємозв'язки між даними та шуканим і робить прикидку очікуваного результату. Самостійно виконує пошук розв'язування (аналіз або синтез), формулює план розв'язування та записує розв'язання, як за діями, так і виразом. Складає і розв'язує обернені задачі; встановлює відповідність між числами, які отримані в результаті розв'язання задачі і даними числами. Учень здатний самостійно побачити різні способи розв'язування і вказати найбільш раціональний. При аналізі задачної ситуації учень вільно відкидає неістотні і зайві елементи з точки зору її вимоги.

В методичній літературі виділяють два основних типи умінь розв'язувати задачі: загальне уміння розв'язувати задачі – узагальнене; уміння розв'язувати задачі певного виду – окремі уміння розв'язувати задачі.

Загальне (узагальнене) уміння розв'язувати задачі виявляються при розв'язуванні людиною незнайомої задачі, тобто такої, спосіб розв'язання котрої людині невідомий (С. Є. Царьова, Л. М. Фрідман та інші). Якщо учень переносить засвоєні дії на нові види задач, правильно і самостійно розв'язує сюжетні задачі широкого кола, то відповідне вміння є узагальненим (В. А. Мізюк).

В основі *умінь розв'язування задач певних видів* лежать окремі методи розв'язання задач даного виду (алгоритми, евристичні схеми). Л. М. Фрідман наголошує на необхідності відрізняти загальне уміння розв'язувати задачі від окремих умінь розв'язання задач певного виду. Учні можуть дуже успішно навчитися розв'язувати задачі усіх тих видів, які вивчаються в школі, але не оволодіти загальним умінням розв'язувати задачі. Уміння розв'язувати задачі певних видів формуються на базі наданого вчителем зразка, користуючись яким учні виконують операції, що входять у дане уміння. Загальне ж уміння розв'язування задач, зазначає автор, у більшості випадків формується стихійно, а не в результаті цілеспрямованого, систематичного навчання. Існує думка про те, що воно може бути сформоване лише на основі розв'язування великої кількості задач (Д. Пойя). Але ж результати такої роботи учнів дуже незначні: більшість дітей не можуть розв'язати незнайому задачу. Між тим, бажаним результатом навчання є формування загального вміння розв'язувати задачі.

Завдання для самоперевірки:

1. Які дії учень повинен виконати послідовно, одну за одною, щоб розв'язати будь-яку задачу?

2. Прочитавши задачу і записавши її коротко, школяр „впізнав" її вид та згадав за яким планом розв'язуються такі задачі, чи треба йому виконувати аналітичний або синтетичний пошук розв'язування задачі?

3. Схарактеризуйте рівні сформованості вміння розв'язувати задачі.

4. Які типи вмінь розв'язувати задачі виділяють у методичній науці?

5. Як ви розумієте „загальне вміння", „вміння розв'язувати задачі певних видів "?

РОЗДІЛ 2

ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ

2.1. Навчання розв′язування задач з точки зору розвивального навчання

Теоретичні основи психології розвивального навчання закладалися Л. С. Виготським, О. М. Леонтьєвим, Е. В. Ільєнковим, Д. Б. Ельконіним в 60-ті – 70-ті роки XX століття. В теперішній час існують системи розвивального навчання у різних варіантах – система Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова, система Л. В. Занкова, система „Школа 2100" або школа П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної. В усіх цих системах на першому місці стоїть не накопичення знань, вмінь та навичок у вузькій предметній області, а становлення особистості, її „будівництво" в процесі діяльності дитини в предметному світі, причому не просто індивідуальної, а спільної, колективної діяльності. Усі зазначені концепції реалізують діяльнісний підхід у навчанні, вони розглядають процес навчання – як процес діяльності учня, який спрямований на становлення його свідомості і його особистості в цілому.

2.1.1. Система Л. В. Занкова

Результатом навчання учнів з розв'язування задач в системі Л. В. Занкова є формування в них „істинного уміння розв'язувати задачі", яке полягає у здатності розв'язувати будь-яку задачу, що є доступною за рівнем складності для даного віку, якщо в ній відсутні незнайомі поняття і якщо для її розв'язання не вимагається виконати незнайомі операції [8]. Формування істинного уміння розв'язувати задачі відбувається за етапами:

Під час *підготовки* (1-й клас) учні складають розповіді математичного змісту до малюнку. Впорядковують кілька даних малюнків і усвідомлюють за ними сюжет, що містить математичні відношення. Здійснюють доповнення кількох пов'язаних між собою малюнків недостатніми для завершення сюжету. Вносять зміни у дані малюнки, що запобігають спотворенню значення сюжету. Отже, в

1-му класі термін „задача” ще не вводиться і учні ще не розв’язують задачі.

На *першому рівні* (2-3-й класи) особливо важливим є перший етап – усвідомлення постановки задачі, її змісту. Тут учні навчаються відрізняти сюжетну задачу від інших видів завдань, виділяти основні частини задачі, здійснювати всебічний аналіз ситуації, що подана в задачі, виділяти математичні відношення, що до неї закладені. На цьому рівні учні досліджують тексти простих задач (в результаті їх всебічного вивчення учні обирають арифметичну дію та розв’язують задачу) і починають знайомитися зі складеними задачами [8].

Формування уміння працювати над тестом задачі здійснюється за напрямками: доведення, що даний текст належить до задач на основі виділення необхідних і достатніх ознак, що притаманні цьому виду завдань; доповнення текстів, які не містять усіх необхідних і достатніх ознак, до задачі; встановлення залежності між зміною одного з елементів задачі та її розв’язанням; складання схеми аналізу задачі при її розборі від запитання (отримання наочної моделі процесу аналізу); перетворення задач з ускладненою (неканонічною) структурою тексту в задачі простішої структури; порівняння задач, що схожі за фабулою, але різних за математичним змістом; перетворення складених задач в задачі, для розв’язання яких потрібна менша кількість кроків, аж до отримання простої задачі; скорочення розгорненого тексту задачі до її короткого запису [9].

З ускладненням задач, що пропонуються учням, і вдосконаленням їх уміння працювати з текстом задачі увага вчителя та учнів переміщується з першого етапу їх розв’язування – усвідомлення постановки задачі – на два наступних – висунення гіпотези розв’язання (складання плану розв’язування) і перевірку гіпотези, що висунуто (здійснення складеного плану). При цьому І. І. Аргинська пояснює, що це зовсім не означає ігнорування першого етапу, його здійснення повинно бути органічною частиною роботи над задачею, та воно вже здійснюється на рівні навички. Тут учням пропонуються задачі з браком даних [8]. В цьому випадку виникає проблема перетворення вихідного тексту таким чином, щоб задача мала розв’язок. Діти можуть застосовувати два принципово різних способи таких перетворень: доповнення умови даними, яких бракує; зміну запитання так, щоб для відповіді на нього було достатньо даних вихідного тексту.

Також на цьому рівні пропонуються учням задачі з зайвими даними – щоб текст став задачею з необхідною і достатньою кількістю даних, він також потребує перетворень, що аналогічні перетворенням задач з даними, яких бракує: зміна умови так, щоб лишилися тільки потрібні для розв'язання дані; зміна запитання так, щоб усі дані стали необхідні для розв'язання задачі [9].

На *третьому рівні* (4-й клас) здійснюється класифікація задач за схожістю їх математичного змісту і дослідження таких шляхів перетворення тексту задач, які призводять до ускладнення або спрощення останніх; складаються і розв'язуються обернені задачі. Ще одним аспектом роботи над задачами є встановлення зв'язків між ними; встановлення схожості і відмінності в розв'язанні задач, виявлення тих моментів, від яких вони залежать, допомагає дітям у класифікації задач. Тут здійснюється ознайомлення з алгебраїчним методом розв'язування задач, в якому більш чітко виступають ознаки класифікації [10].

Автор підручників математики для початкової школи за системою Л. В. Занкова І. І. Аргинська виділяє наступні ***етапи в роботі над кожною задачею***:

1) усвідомлення постановки задачі, її змісту;
2) висунення гіпотези розв'язання (складання плану розв'язування);
3) перевірку гіпотези, що висунуто (здійснення складеного плану);
4) перевірка і дослідження задачі.

Основними *відмітними характеристиками роботи над задачами* є:

- різні форми короткого запису;
- пошук розв'язування здійснюється аналітично;
- різні форми запису розв'язання;
- дослідницька робота над задачею після її розв'язання, яка полягає у:

а) складанні і розв'язуванні обернених задач;
б) зміні запитання або умови так, щоб розв'язання містило більше чи менше арифметичних дій;
в) зміна умови або запитання так, щоб задачу не можна було розв'язати;
г) внесення у задачу таких змін, щоб вона містила зайві числові дані, або щоб в ній було недостатньо числових даних для відповіді на її запитання;

д) внесення у задачу таких змін, щоб в ній зникли зайві числові дані або щоб числових даних було достатньо для відповіді на запитання задачі;
е) зміна тексту задачі так, щоб у її розв'язанні з'явилася обернена дія.

Велику увагу приділено порівнянню задач з однаковою фабулою, але з різним математичним змістом; порівнянню задач з різною фабулою та однаковим математичним змістом [7-18].

2.1.2. Система Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова

Одним із завдань курсу математики є оволодіння дітьми дією моделювання. Моделювання у навчанні повинно бути засвоєно учнями і як спосіб пізнання, яким вони повинні оволодіти, і як найважливіша навчальна дія, яка є основним елементом навчальної діяльності.

Розробники цієї системи виходять з того, що формування вміння моделювання, загальних методів розв'язування задач, здібностей до розв'язування будь-яких задач передбачає якісно інший підхід до формування вміння розв'язувати задачі. *Якщо моделювання – це метод і засіб пізнання, тоді набір сюжетних задач – це один з полігонів, де опрацьовується дія моделювання; вміння розв'язувати задачі виступає як один з критеріїв сформованості дії моделювання.* Текст будь-якої сюжетної задачі можна відновити по-іншому: предметно, графічно, за допомогою таблиць, формул й тощо. Це й є перехід від словесного моделювання до інших форм моделювання. Здатність дитини виконати кілька моделей до однієї й тієї самої задачі свідчить про ступінь оволодіння дією моделювання. Існує і обернений зв'язок: чим краще дитина оволодіває дією моделювання, тим легше їй розв'язувати задачі.

В системі розвивального навчання Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова навчання розв'язування задач не будується за типами задач, хоча типологія задач розглядається, але на відміну від традиційної методики в процесі навчання типи задач не „нарощуються". Таким чином, прості і складені задачі вводяться одночасно. В 1-4-му класах діти не розв'язують задачі по діях. Розв'язання записується або виразом або рівнянням з опорою на схему [1].

Розв'язання задачі складається з наступних етапів:

I етап – це *переклад* умови задачі у *графічну модель*, тобто *схему*. Схема, на відміну від креслення, не вимагає спеціальних креслярських приладів і точного дотримання заданих відношень. Схема може виконуватися від руки, вказувати і відображувати задані відношення.

II етап – це *перетворення* однієї графічної *моделі* в другу. Цей етап можна пропустити, якщо необхідності у перетворенні немає або вона відпала у зв'язку із згорнутістю дії.

III етап – складання буквено-знакової моделі (формули), тобто *складання рівняння*.

ІУ етап – розв'язання складеного рівняння. Цей етап може співпадати із попереднім, якщо дитина записує рівняння відразу у формі розв'язання:

x = вираз .

V етап – це підбір замість літер відповідних чисел. Числа повинні підходи з трьох точок зору: сюжету задачі; здійснимості арифметичної дії; уміння успішно оперувати з підібраними числами.

Іншими словами, зазначає Е. І. Александрова, мова йде про область припустимих значень по відношенню до сюжету, до здійснимості арифметичної дії на множині чисел, яка розглядається (в залежності від сюжету), по відношенню до власного досвіду дитини в оперуванні числами, що надає можливість діагностувати область успішності дитини.

VI етап – виконання необхідних обчислень, які вимагають послідовного виконання арифметичних дій з числами.

VII етап – повернення до умови задачі для отримання відповіді на її запитання, тому що не завжди величина, яку позначали літерою *x* і відносно якої складається і розв'язується рівняння, може співпадати з величиною, яку потрібно знайти для відповіді на запитання задачі. Розв'язавши рівняння, необхідно перевірити, чи отримана відповідь на запитання задачі.

Автор зазначає, що *основними етапами є чотири*: побудова схеми, складання і розв'язання рівняння з літерними даними і обчислення числового значення шуканої величини.

Саме цим основним етапам – моделюванню в графічній, буквено-знаковій і числовій формі – відводиться значне місце у навчанні. Таким чином, однією з функцій розв'язування задач в системі Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова є формування у дітей здатності до математичного моделювання і переходу від однієї моделі до другої, і навпаки. Отже, процес розв'язання сюжетної задачі Е. І. Александрова подає у вигляді схеми (мал. 5).

Мал. 5. Схема процесу розв'язування сюжетної задачі за Е. І. Александровою

Пунктиром показані ще два етапи, пов'язані із моделюванням задачі за допомогою короткого запису, який по своєї суті, несе в собі елемент як графічної моделі (наступність повідомлень), так і буквено знакової моделі. Таким чином, в цій системі короткий запис розглядається як додатковий засіб моделювання, і з'являється в 4-му класі, коли дитина достатньо вільно розв'язує задачі за допомогою складання схеми і рівняння [1].

Таким чином, в системі Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова *вміння розв'язувати задачі розглядається як похідне від вміння моделювання*. Робота по формуванню дії моделювання, а попутно і по формуванню вміння розв'язувати задачі цілеспрямовано ведеться на протязі всього курсу.

Задачі розглядаються як засіб формування у молодших школярів уміння моделювати, прості та складені задачі вводяться одночасно. Е. І. Александрова виділяє вміння, які повинні дати можливість дитині розв'язувати будь-які задачі в межах відомих їй операцій (дій) з числами: по ходу читання тексту задачі зображати на схемі величини; за схемою складати математичний вираз або рівняння; усно в словесній формі давати відповідь на запитання, записуючи вираз або його числове значення [5]. Основою відзнакою від традиційного навчання є алгебраїчний спосіб розв'язання задач: діти розв'язують задачу способом складання рівняння або виразу.

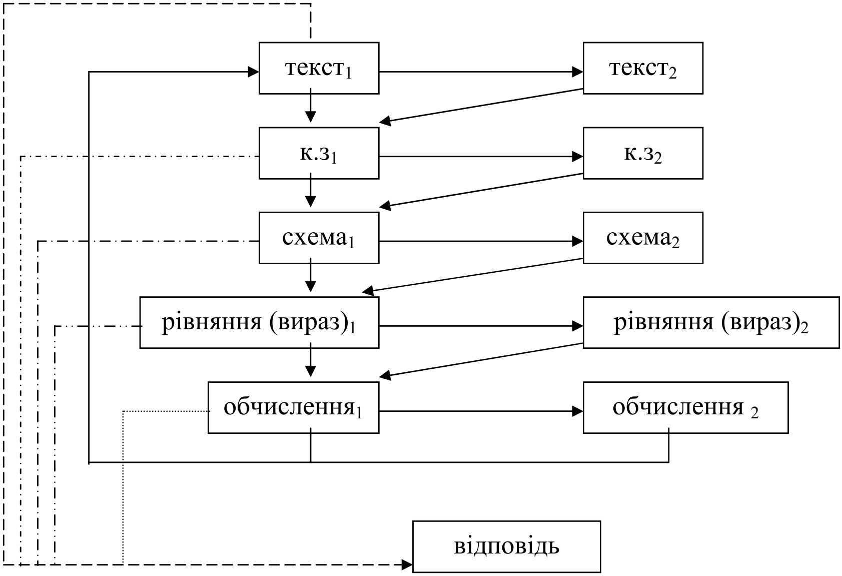
Відмітною особливістю методики навчання молодших школярів розв'язування задач в цій системі є те, що до 4-го класу не розглядається зміст поняття „задача", його складові. В 4-му класі діти знайомляться з поняттям „сюжетна задача" та її складовими, вчаться записувати задачу коротко і перетворювати короткий запис задачі з метою складання схематичного малюнку. Отже, елементами новизни при роботі над задачею стає: осмислення того, що таке сюжетна задача; введення нової формули моделювання – короткого запису; встановлення зв'язку між задачами „на процеси" з відомими схемами до арифметичних дій.

Е. І. Александрова зауважує на тому, що *особливістю при складанні короткого запису задачі* є те, що діти відразу вказують дію, яка відповідає відношенням між величинами, які виділені з тексту. Крім уміння складати короткий запис задачі, дітям потрібне й вміння його перетворювати. Причиною, за якою потрібно перетворювати короткий запис є побудова схеми. Загальна схема роботи над сюжетною задачею в 4-му класі має наступний вигляд (мал. 6).

З моделі способу роботи над задачею видно, що перетворенню підлягає не лише короткий запис, схема та рівняння теж можуть при необхідності перетворюватися; такому перетворенню підлягають також текст задачі і обчислення [2].

2.1.3. Система „Школа 2100"

Поняття „задача" вводиться, як і традиційно, на задачах на знаходження суми і остачі. Але, на відміну від традиційної методики, у підручнику Л. Г. Петересон, далі розглядаються задачі на дві дії, і лише потім вводяться, спочатку прості задачі на різницеве порівняння, а потім – на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.



Мал.6. Загальна схема роботи над сюжетною задачею за Е. І. Александровою

Відмінним від традиційної методики є те, що в якості обґрунтування вибору арифметичної дії при розв'язуванні простих задач застосовуються поняття „частина" і „ціле"; основою пошуку розв'язування – вибору арифметичної дії за допомогою якої розв'язується проста задача є схематичний рисунок, який до речі, виконує роль і короткого запису задачі. Основним методом пошуку способу розв'язування складених задач також виступає схематичний рисунок, який подано у готовому вигляді для більшості задач, а для решти дано схематичний рисунок, в якому відсутні числові дані, і лише незначна частина задач пропонується без нього.

При формуванні умінь розв'язувати задачі учні озброюються алгоритмом для самостійної роботи над задачами, і переважна більшість задач пропонується для самостійного розв'язання. На цьому етапі розв'язуються задачі у 3-4 дії, які містять усі чотири арифметичні дії; вводяться задачі на знаходження четвертого пропорційного і задачі на знаходження двох чисел за їх сумою або різницею.

За такого подання завдань на розв'язування задач у підручника Л. Г. Петерсон не можна говорити про спеціальне формування дії моделювання при розв'язуванні задач, хоча основним способом пошуку розв'язання задачі є пошук розв'язання за схематичним рисунком. Це не єдина відмінність від методики навчання розв'язування задач в системі Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова – так учні майже не виконують короткі записи задач, не ведеться робота з перетворення моделей. На відміну від методики навчання розв'язування задач в системі Л. В. Занкова в цій системі учні не озброюються загальним методом розв'язування задач – аналізом.

Виходячи з досвіду розвивального навчання розв'язування задач при формуванні молодших школярів вмінь розв'язування задач слід передбачити навчання учнів моделюванню задачного формулювання, перетворенню моделей, а також впроваджувати прийоми дослідницької роботи над задачею.

Завдання для самоперевірки:

1. Що спільного у методиці роботи над задачами в системах розвивального навчання на основі навчальної діяльності (Д. Б. Ельконіна і В. В. Давидова) та „Школа 2100"?
2. Що спільного у методиці роботи над задачами в системах розвивального навчання Л. В. Занкова та Д. Б. Ельконіна і В. В. Давидова?
3. В чому полягає розвивальне навчання розв'язування задач?

2.2. Диференціація у навчанні молодших школярів розв'язування сюжетних математичних задач

Як бачимо, розглянуті системи розвивального навчання мають багато спільного, а саме ґрунтуються майже на одних й тих самих психологічних принципах. Психологічні принципи розвивального навчання запропоновані З. І. Калмиковою [232]. Проблемність та інші принципи розвивального навчання не можуть бути реалізовані без врахування вікових та індивідуально-типологічних особливостей мислення дітей. Тому одним з важливих принципів розвивального навчання З. І. Калмикова вважає оптимальний (який відповідає цілям навчання і психічним особливостям індивіда) розвиток різних видів розумової діяльності: абстрактно-теоретичного, і наочно-образного, і наочно-дійового практичного мислення.

Школярі, які знаходяться в однакових умовах навчання засвоюють матеріал по-різному: перші на високому рівні, другі – на середньому, треті – на низькому. Такий стан пояснюється суттєвими відмінностями між дітьми. Так, за даними Ю. З. Гільбуха, розбіг індивідуальних відмінностей молодших школярів можна схарактеризувати відношенням 1:10. В умовах індивідуалізації і диференціації навчання різниця в рівнях засвоєння може бути згладжена шляхом варіювання кількості вправ і міри допомоги. Ось чому одним з важливих принципів розвивального навчання є його індивідуалізація і диференціація.

2.2.1. Вікові і індивідуальні відмінності молодших школярів при розв’язуванні задач

Багаточисельні психологічні дослідження доводять, що відмінності у психологічному розвитку дітей одного й того самого віку досить великі. При цьому важливо пам’ятати, що відмінності дітей виявляються не лише у рівні їх розвитку, але й у продуктивності навчальної праці.

Як зазначалося вище психологічну структуру процесу розв’язування задач складають загальні розумові дії аналізу, синтезу, порівняння, абстракції і узагальнення. Тому на процес розв’язування задач значно впливає рівень аналітико-синтетичної діяльності молодших школярів, який безпосередньо пов’язаний, за думкою М. О. Менчинської, із швидкістю засвоєння [69].

Також успіх в процесі навчання визначається ще одною важною особливістю – *гнучкістю розумових процесів* і її протилежністю – *інертністю розумових процесів*. Для другокласників, згідно дослідженням З. І. Калмикової, у розв’язанні предметних задач характерним є перевага інертності мислення. Це виявляється у низькій здатності до відкривання нових знань, у зв’язаності з конкретною ситуацією, яку не завжди можна подолати навіть при допомозі вчителя, розумова активність виявляється у розв’язуванні задач за методом „сліпих проб” [53]. Для учнів третього та четвертого років навчання, за даними Н. О. Менчинської, характерно зростання можливостей до варіювання способів дій, до вибору найбільш раціонального шляху розв’язання задачі. Але, поряд із цим, автор вказує, що наявність вікових відмінностей у зміні властивостей розумової діяльності, не знімає питання про індивідуальні відмінності, оскільки в межах одного й того самого віку і на протязі усіх років навчання зустрічаються учні, які мають різну гнучкість мислення, що безпосередньо впливає на засвоєння знань.

Схильність до варіювання дій або, навпаки, *тенденція до їх стереотипного повторення* визначає підхід до розв’язування задач. В роботі Н. О. Менчинської [69] продуктивний підхід характеризується всебічним аналізом задачі, активними пошуками способів її розв'язування, а при репродуктивному підході, як правило, відсутнє усвідомлення задачі як проблеми і усе її розв'язування призводиться до відновлення звичних способів дій, які відносяться до знайомих окремих задач, при чому вони не співвідносяться з умовою в цілому.

А. З. Зак говорить про *теоретичний і емпіричний спосіб розв'язування* задач [49]. Теоретичний спосіб характеризується виконанням таких розумових дій, як:

1) аналіз змісту задачі (виділення істотних відношень);
2) моделювання (організація зовнішніх опор певного виду, графічне зображення ходу міркування);
3) рефлексія (осмислення власних дій, розуміння їх не випадковості і правомірності);
4) планування, як здатність діяти в розумі.

При емпіричному способі сприймання задачі обмежується зовнішніми ознаками, розв'язування здійснюється методом „спроб і помилок"; аналогічна задача розв'язується як зовсім нова; при обґрунтуванні розв'язання (за вимогою експериментатора) йде опора на випадкову ознаку.

Певний рівень *аналізу і синтезу, узагальнення і абстрагування* при засвоєнні і застосуванні знань, а також пов'язаний із ним рівень *співвідношення чуттєвих і абстрактних компонентів* розумової діяльності сполучаються з певним ступенем *гнучкості розумових процесів*. І усі вони безперервно пов'язані з *темпом засвоєння*, з швидкістю просування учнів у навчанні [69].

В результаті досліджень І. В. Дубровіної було встановлено, що у здатних до математики молодших школярів ярко виявляються здібності до аналітико-синтетичного сприймання умови задачі, узагальнення математичного матеріалу, гнучкість розумових процесів. Менш ясно виражені: здібність до згорнення міркувань і системи відповідних дій, прагнення до пошуку більш раціонального способу розв'язування задач. Але, останні компоненти виразно представлені у „дуже здатних" учнів. У „мало здатних" ці компоненти виявляються на порівняно низькому рівні або не виявляються зовсім [48].

Таким чином, при *розв'язуванні задач учні відрізняються один від одного рівнем аналітико-синтетичної діяльності, який* *безпосередньо пов'язаний із швидкістю засвоєння*. Також успіх в процесі навчання визначається ще одною важною особливістю – *гнучкістю розумових процесів*. З цією якістю мислення пов'язана схильність до варіювання дій або, навпаки, тенденція до їх стереотипного повторення, яка визначає підхід до розв'язування задач. Означені особливості визначають підхід до задачі. *Продуктивний (теоретичний) підхід* характеризується всебічним аналізом задачі, активними пошуками способів її розв'язування, а при *репродуктивному (емпіричному) підході*, як правило, відсутнє усвідомлення задачі як проблеми і усе її розв'язування призводиться до відновлення звичних способів дій, які відносяться до знайомих окремих задач, при чому вони не співвідносяться з умовою в цілому.

2.2.2. Напрями у диференціації навчання розв'язування задач

Отже, процес розв'язування задачі обумовлений можливостями учня, який розв'язує її (Ю. М. Колягін, В. І. Крупич, В. О. Крутецький та інші). Так, за даними В. О. Крутецького для формування узагальненого способу розв'язування учням потрібно від 1 до 27 задач [62]. Близькі до цих експериментальні дані одержано Н. О. Менчинською – нею констатований розбіг від 2 до 20 розв'язаних задач [69]. Тому, навчання, яке зорієнтовано на „середнього" учня, недостатньо ефективно.

Дитина не здійснює активну навчальну діяльність, якщо навчальне завдання не відповідає її можливостям. Щоб запобігти цьому методисти пропонують здійснювати *диференціацію навчання розв'язування задач за рахунок варіювання їх за ступенем складності* (С. О. Алексєєв, В. О. Гусев, Г. В. Дорофеєв, О. Н. Капиносов, В. Н. Рудницька, І. М. Смирнова, О. О. Столяр та інші). Ця група авторів розглядає диференціацію змісту навчання розв'язування задач.

Але існує й інший напрямок – *диференціація процесу розв'язування задачі*. Так, М. Є. Тимощук пропонує диференціювати допомогу учням згідно етапам роботи над задачею. В методичних рекомендаціях Л. Г. Латохіної для диференціації навчання розв'язування задач пропонуються спеціальні завдання, які пов'язані з аналізом тексту задачі, пошуком способу її розв'язування, а також, спрямовуючі на складання оберненої задачі, виразів і рівнянь до задачі.

В руслі першого напрямку В. А. Мізюк розроблено систему завдань, диференційованих за складністю; визначено психолого-методичні засади диференційованого формування вмінь розв'язувати задачі в початковій школі. Авторка дійшла висновку, що методика диференційованого вироблення вмінь розв'язувати задачі має враховувати рівні навчальної діяльності учнів початкової школи (мінімально-базовий, базовий і підвищений), операційний склад умінь і психолого-методичні засади їх формування [72].

На *мінімально-базовому* рівні учні мають розв'язувати задачі обов'язкового мінімуму, визначеного програмою з математики. На цьому рівні доцільно використовувати пояснювально-ілюстративні методи, прийоми емоційного стимулювання; більшої ваги набуває наочність. Учням пропонуються задачі репродуктивного характеру, нескладні творчі завдання; обсяг їх самостійності незначний: переважає розв'язування задач за зразком, реконструктивна робота. На цьому рівні учні повинні знати структуру задачі, вміти виділяти умову, вимогу, відомі й шукані величини, встановлювати залежності між ними.

На *базовому* рівні учні повинні розв'язувати задачі середньої складності. Це задачі з більш складними обчисленнями і логічними перетвореннями, задачі, що утворені шляхом комбінації задач обов'язкового мінімуму і містять одну чи дві ново засвоєні дії. Розв'язування цих задач потребує від школярів продуктивної розумової діяльності. На цьому рівні навчання переважають конструктивні і варіативні самостійні роботи, збільшення кількості задач, які потребують від учнів ретельного аналізу задачної ситуації. Учні, які досягли цього рівня, повинні володіти загальними знаннями про задачу і вміти пояснювати причини неповноти або неправильності її побудови, самостійно складати нескладні задачі.

Підвищений рівень математичної підготовки характеризується вміннями розв'язувати задачі підвищеної складності, із логічним навантаженням, з елементами випереджувального навчання. Ці задачі характеризуються збільшенням кількості логічних операцій, нестандартною фабулою і способом розв'язування. Вироблення вмінь спрямоване на інтенсивну самостійну діяльність – самостійні пошуки нової інформації, дослідження цікавих і оригінальних способів розв'язування тощо. Окрім загальних знань про задачу, учні мають знати додаткові характеристики її складових. На основі цього вони самі мають складати задачі та завдання творчого характеру.

Важливим засобом вироблення вмінь розв'язувати задачі у дослідженні В. А. Мізюк виявилася система диференційованих завдань, яка включає такі їх види: підготовчі, пробні, тренувальні, творчі, перевірочні.

Підготовчі завдання спрямовані на активізацію опорних знань і вмінь, необхідних для розв'язування задачі. До них віднесено завдання-питання і нескладні задачі. Для підготовки таких завдань аналізується задачний матеріал уроку чи теми, визначаються основні поняття теоретичного курсу математики та ускладнення, які можуть виникнути в учнів певної групи. Автор зазначає, що для учнів з низькими навчальними можливостями (ІІІ група) доцільно систематично пропонувати підготовчі завдання, для учнів із середніми і високими (ІІ та І групи) – залежно від складності задачного матеріалу.

Пробні завдання рекомендується використовувати на етапі ознайомлення із розв'язанням задач нового виду. Вони спрямовані на первинне закріплення набутих знань та вироблення вмінь розв'язувати аналогічні задачі. Використання пробних завдань залежить від числових даних і сюжету задачі. Для учнів третьої групи краще пропонувати невеликі числові дані, щоб спрямовувати їх увагу саме на засвоєння способу розв'язування. Учням ІІ групи – слід надавати інструктивні вказівки до розв'язання, ІІІ групи – розв'язувати пробні задачі під керівництвом учителя.

Тренувальні завдання спрямовували діяльність учнів на закріплення вивчених способів розв'язування, опрацювання окремих дій та застосування набутих знань і вмінь у стандартних ситуаціях. Диференціація завдань відбувалася шляхом підвищення їх складності і збільшенням міри самостійності.

Творчі завдання спрямовані на розширення, поглиблення і вдосконалення набутих знань і вмінь розв'язувати задачі. Їх розв'язування вимагають оригінальності мислення, кмітливості, цілеспрямованого пошуку плану, складних міркувань, які потребують напруження розумової діяльності, творчого підходу до розв'язання. До творчих віднесено задачі з нестандартними ситуаціями: зайвими, недостатніми даними, з незвичайно сформульованим текстом, завдання на переформулювання і складання задач [72].

Аналогічної позиції – диференціації змісту навчання учнів розв’язування задач притримується С. М. Лук’янова [65]. Авторка визначила вимоги, яким повинна задовольняти спрямованість на диференціацію і індивідуалізацію під час розв’язування задач:

1. Для забезпечення різних темпів руху під час вивчення типових задач та способів їх розв’язання слід виділити базову і варіативну частину. До базових відносяться задачі, які дають можливість скласти уявлення про даний тип задач і основні способи їх розв’язання. Базова частина є основою для варіативної, що складається із завдань підвищеної складності. Також до варіативної частини можна включати окремі ускладнені за структурою типи задач чи окремі способи або прийоми роботи із задачами.

2. Для того, щоб уникнути дискомфорту в процесі поділу учнів на тих, хто працює тільки на базовому рівні, і тих, хто розв’язує складніші задачі з варіативної частини, треба використати принцип мінімаксу (ножиць): пропонувати всім учням зміст максимального рівня, забезпечувати засвоєння базового, а контролювати той рівень, який обирає учень.

3. Побудова і базового і варіативного рівнів відбувається за принципом поступового наростання складності і трудності задачного матеріалу, а процес їх вивчення – за принципом активної діяльності. Діяльність учня в свою чергу орієнтована на отримання ним власного досвіду творчої діяльності.

Треба зазначити, що в початковій школі індивідуальні особливості школярів ще незначно пов’язані із системою знань, і це суттєво обмежує можливості диференціації навчання розв’язування задач за змістом. Тому, на відміну від В. А. Мізюк, яка розглядала принципи відбору задач, диференційованих за складністю, та С. М. Лук’янової, яка визначала базовий і варіативний компонент, О. В. Баринова вивчала можливості диференціації діяльності учнів в процесі розв’язування однієї і тієї самої задачі. Рівнева диференціація процесу розв’язування сюжетних задач за ступенем повноти подання орієнтувальної основи діяльності дозволяє забезпечити оптимальну діяльність усіх учнів у залежності від рівня індивідуальних можливостей, що сприяє вдосконаленню їх уміння розв’язувати задачі.

В роботах методистів, що притримуються диференціації процесу розв’язування, варіативність діяльності учнів під час розв’язування задач досягається за рахунок варіювання міри допомоги через застосування допоміжних засобів (Н. Ф. Вапняр, Л. Г. Латохіна, Н. Ф. Роганова, С. Б. Суворова та інші) або безпосереднього керівництва з боку вчителя (І. К. Глушков, М. Є.Тимощук та інші). О. В. Баринова [26] дійшла висновку, що навчання розв'язування задач доцільно будувати на рівневій основі, з врахуванням домінуючих особливостей розумової діяльності молодших школярів.

Процес навчання при рівневій диференціації має особливості. Діяльність по керуванню таким навчанням авторка подає трьома блоками: І. Діагностико-орієнтувальним, ІІ. Виконавчим, ІІІ. Контрольно-корекційним. В першому блоці необхідну інформацію про рівень уміння розв'язувати задачі учнем дає застосування критеріальних задач. Зазначимо, що критеріальні задачі – це задачі з не сформульованим запитанням; даними, яких бракує; із зайвими даними; завдання, що не вимагають розв'язання (псевдо задачі); задачі, що містять відношення, яке виражено у непрямій формі; задачі, що мають кілька способів розв'язання. На цій підставі визначається рівень навчання – опорний, підвищений або перехідний між ними.

На опорному рівні орієнтувальна основа дії (ООД) задається учням в готовому вигляді. Тут поряд з текстом задачі пропонується готова модель даної задачної ситуації та (або) процесу її розв'язування. Спеціальні завдання націлюють на аналіз моделі у співставленні із текстом задачі і її діяльнісне усвідомлення. При цьому діти виконують дію декодування. Завдання можуть бути дані у вигляді алгоритму дій, що націлюють на добудування незавершеної моделі і, одночасно, таких, що ведуть учня до досягнення результату розв'язання задачі. Таким чином, дитина отримує орієнтувальну основу діяльності, що спрямована на розв'язання задачі, у готовому вигляді.

Підвищений рівень характеризується самостійним складанням ООД на підставі аналізу тієї самої задачної ситуації, при цьому здійснюється пошукова діяльність. Тут моделі є внутрішнім засобом розв'язування задачі, який дозволяє впорядкувати самостійний пошук орієнтувальної основи. При цьому учням пропонується виконати доцільну модель до задачі самостійно. Учень, який засвоїв різні види моделей, повинен обрати той вид який відповідає запропонованій задачі і найбільш є зручним у даному випадку. Складена модель задачної ситуації та (або) процесу розв'язування задачі використовується для її розв'язання. Тут учня слід націлювати на пошук альтернативних способів розв’язування задачі і, у випадку неможливості, пропонувати змінити задачу (і відповідно, перетворити модель) так, щоб стали можливі різні способи її розв’язання.

Перехідний між ними рівень передбачає діяльність за частково заданою системою орієнтирів; при цьому учень, самостійно доповнивши її, отримує ООД, що необхідна для розв’язання задачі. Тут пропонується учню складена частково модель, при цьому вона може бути незавершеною у більшому чи меншому ступені. Пропонується завдання: визначити недостатні елементи і завершити побудову моделі самостійно. Далі модель застосовується при розв’язуванні задачі. Таким чином, діяльність перехідного рівня повинна бути частково-пошуковою.

Для того, щоб організувати різнорівневу роботу над задачею в один й той самий час, який відведено для цього на уроці, О. В. Баринова пропонує застосовувати картки-завдання з друкованою основою, які заздалегідь готуються у трьох варіантах (для трьох рівнів). Картки містять системи завдань, які пов’язані з аналізом і розв’язання однієї й тієї самої задачі, але на різних рівнях. Пропонуючи учню варіант оптимального для нього рівня складності, здійснюється диференціація пошукової діяльності при розв’язуванні задач.

Авторка зазначає, що робота на уроці над задачею із застосуванням карток відбувається як самостійна (приклад карток з друкованою основою подано у додатку Б). Вчитель під час цієї роботи надає допомоги окремим учням. Але можливий варіант, коли вчитель керує роботою учнів одного з рівнів, в той час, як інші працюють самостійно.

Не виключено й можливості групової роботи на уроці. При цьому діти кожної групи обговорюють і виконують завдання спільно. Склад таких груп може бути як однорівневим, та і різнорівневим, в залежності від цілей, які ставить вчитель в цій роботі. Наприкінці уроку учні збираються вчителем для перевірки.

Той факт, що усі учні розв’язують одну й ту саму задачу надає можливості обговорити задачу відразу після її розв’язання. Це з одного боку служить оберненим зв’язком для вчителя, який отримує уявлення про виконання завдання вже на уроці. А з іншого, обернений зв’язок здійснюється для учня: він ще пам’ятає, які мав труднощі і сумніви, і отримує або підтвердження, або спростування власної діяльності і результатів. Крім того, під час обговорення результатів роботи, учень може побачити діяльність більш високого рівня, ніж той, на якому він працював. Таким, чином, зазначає О. В. Баринова, учень не обмежується рамками пропонуємого йому рівня [26].

Організація диференційованої роботи над однією тією самою задачею за рівнями навчальних можливостей учнів (О. В. Баринова) не виключає подальшої диференціації роботи над задачами за рівнем складності пропонуємих завдань (В. А. Мізюк). Хоча О. В. Баринова та В. А. Мізюк підходять до диференціації навчання молодших школярів розв'язування задач з різних боків, але спільною в них є кінцева мета – формування загального вміння розв'язувати задачі.

В методичній науці розроблена методика диференційованого навчання Т. Гори та С. Логачеської [44]. На відміну від О. В. Баринової та В. А. Мізюк, які згідно останніх пропозицій вчених, орієнтуються на формування загального уміння розв'язувати задачі, Т. Гора та С. Логачевська виходять з того положення, що формування навичок розв'язування простих задач і розвиток умінь розв'язувати складені задачі на початковому етапі відбувається завдяки наслідуванню зразків і постійній практиці.

Т. Гора та С. Логачевська [44] розглядають методику роботи над задачами на етапі закріплення вміння розв'язувати задачі певного виду. Підхід Т. Гори та С. Логачевської містить риси і підходу В. А. Мізюк (учням різних груп пропонуються завдання відмінні за рівнем складності) й підходу О. В. Баринової (слабким учням надається певна доза допомоги). Але, методика цих авторів має ряд відмінних рис. По-перше в ній враховані не три групи учнів, як у В. А. Мізюк та О. В. Баринової, а лише дві – дуже груба диференціація. Учні розбиваються на ці групи не за рівнями навчальної діяльності (підвищений, базовий, мінімально-базовий), як у В. А. Мізюк, та не за рівнем навчання (опорним, підвищеним та перехідним між ними), як у О. В. Баринової, а за можливістю самостійного запису розв'язання задачі з підручника, що була піддана колективному аналізу. Крім того, Т. Гора та С. Логачевська першому варіанту пропонують самостійну роботу вже на другому етапі, а другому варіанту лише на останньому етапі, в той час як О. В. Баринова пропонує усім учням самостійну роботу, але з диференціацією дози допомоги. Тобто О. В. Бариновою здійснюється диференціація самостійної роботи учнів над задачею, а Т. Гора та

С. Логачевска – працюють фронтально із слабкою групою, у той час як сильні учні самостійно розв'язують задачі.

Виходячи з того, що усі школярі навчаються за єдиним підручником, вважаємо доцільним йти за другим напрямком диференціації – диференціювати дозу допомоги учням при розв'язуванні однієї й тієї самої задачі за допомогою карток з друкованою основою. Але крім цього, в системі навчання молодших школярів розв'язування задач ми здійснюємо диференціацію й за мірою складності задач, визначаючи типи і види задач, які пропонуються дітям додатково, для поглибленого вивчення.

Завдання для самоперевірки:

1. Які види диференціації можна застосовувати при навчанні молодших школярів розв'язування задач?

2. В чому полягає методика диференційованого навчання розв'язування задач В.А.Мізюк?

3. В чому полягає методика диференційованого навчання розв'язування задач В. В. Баринової?

2.3. Процес формування умінь з точки зору діяльнісного підходу

Усі розвивальні системи реалізують діяльнісний підхід у навчанні. На основі діяльнісного підходу здійснюється рівнева диференціація процесу розв'язування задач за ступенем повноти подання орієнтувальної основи діяльності. Тому розглянемо докладно процес формування вмінь, в тому числі процес формування вмінь розв'язування задач з точки зору діяльнісного підходу.

2.3.1. Вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навичкам та вмінням

Формування в учнів умінь розв'язувати задачі – це формування в них діяльності з розв'язування задач. У психології детально розроблені дві діяльнісні теорії навчання: теорія поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної та теорія навчальної діяльності Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова, складовою частиною якої є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова.

Формування навичок і умінь є складним і тривалим процесом. Психологами (передусім П. Я. Гальперіним та його науковою школою) доведено, що від того, як організований процес формування розумових дій залежать і тривалість формування навичок і умінь, і результати цього формування: міцність, гнучкість, узагальненість, усвідомленість навичок і умінь.

Л. М. Фрідманом виділено основні ***вимоги до процесу формування розумових дій***, виконання яких забезпечує високу ефективність формування навичок та умінь [129]. Розглянемо їх докладно.

I. *Повнота орієнтувальної основи розумових дій.* Формування будь-якої навички або уміння починається з подання учням такої системи вказівок та орієнтирів, користуючись якою учень в змозі самостійно виконати дану дію. Ця система орієнтирів і вказівок називається орієнтувальною основою дії (ООД) [122].

Н.Ф.Тализіна вважає, що ООД може бути подана учням в різній формі: у формі зразка дії (вчитель показує, як слід виконувати цю дію), у вигляді словесного пояснення з одночасним показом процесу виконання дії, у вигляді покрокового алгоритму тощо. Однак, в будь-якому випадку важливо, щоб ця ООД була повною, тобто містила всі необхідні вказівки та орієнтири.

II. *Розгорненість дії при її першому показі.* Коли розумова дія учнями вже засвоєна і вони оволоділи навичкою або умінням у її виконанні, тоді вона згортається, окремі операції, що її складають, виконуються у розумі і не фіксуються. Однак при першому ознайомленні необхідна повна розгорненість дії з фіксацією усіх її складових.

III. *Поелементне засвоєння складної дії.* Багато математичних дій, які мають бути засвоєні учнями, є складними за своєю структурою і складаються з ряду елементарних дій. Коли учень оволодів навичкою (умінням) в такій дії, тоді він виконує всі елементарні дії цілісно, одну за одною. Однак, при засвоєнні такої складної дії, при формуванні навички або вміння в цій дії, кожну із складових її елементарних дій треба засвоїти окремо, як самостійну дію.

Слід відмітити, що при навчанні учні не можуть (і не повинні) робити одночасно декілька нових дій. Тільки отримавши міцну навичку або уміння в кожної з них, вони в змозі набути уміння одночасного виконання всіх цих дій у складі складної дії.

ІУ. *Усвідомленість і повноцінність навиків та вмінь.* Учні повинні мати знання, на основі яких виконується дана дія, вони повинні знати, чому саме вона виконується так, та чи можна її виконати інакше. До складу уміння мають входити навички з планування дії, прогнозування її результату, навички з контролю за перебігом виконання цієї дії. Важливо, щоб учень міг завжди пояснити, чому і як він виконує дану дію і в яких випадках її можна застосувати.

У. *Розтягненість процесу формування навичок і вмінь.* Формування уміння являє собою тривалий процес, при цьому його не можна проводити ущільнено, протягом короткого часу шляхом багаторазових і частих вправ. Більш ефективним є розтягнення процесу формування навички чи вміння за часом.

УІ. *Поетапне опрацювання кожної навички або вміння.* Як встановлено дослідженнями П. Я. Гальперіна і його співробітників, для того, щоб сформувати повноцінну розумову дію, щоб учень набув міцної навички або гарне уміння в цій дії, необхідно, щоб процес її формування містив ряд обов'язкових етапів. Дія, перед тим, як стати розумовою, узагальненою, скороченою і засвоєною, проходить через перехідні стани. Основні з них і складають етапи засвоєння дії, кожний із котрих характеризується сукупністю змін основних властивостей дії.

2.3.2. Теорія поетапного формування розумових дій і понять (за П.Я. Гальперіним)

В основу цієї концепції покладено вчення про інтеріоризацію. Під процесом інтеріоризації в теорії поетапного формування розумових дій розуміється процес перетворення зовнішніх реальних дій з предметами у внутрішні, ідеальні. Розумові дії – результат переносу зовнішньої дії у план сприймання, уявлень і понять. В процесі переносу, який відбувається поетапно, відбуваються зміни дії за різними напрямками, параметрами. Н. Ф. Тализіна [121] описує напрямки, за якими відбувається зміна дій при їх перетворенні із зовнішніх, матеріальних – у розумові.

Перший і головний напрямок – *зміна дії за формою* (іноді це називається зміною плану або рівня). Відомо вісім форм: матеріальна, матеріалізована, перцептивна, зовнішньомовна (усна або письмова), форма зовнішнього мовлення про себе, дія за уявленням, розумова форма (дія з поняттям).

Другий напрямок – *перехід із зовнішнього плану у план внутрішній*. Ці зміни пов’язані із зміною форми, але становлять самостійну характеристику. П’ять форм є зовнішніми, три – внутрішніми, при цьому шосту форму (внутрішня мова про себе) можна розглядати як перехідну, що поєднує в собі ознаки зовнішньої і внутрішньої форм.

Третій напрямок – *зміна дії за мірою узагальненості*. Виділені умови і діяльнісний механізм отримання заданої міри узагальненості дії за заданими властивостями. Встановлено, що узагальнення йде за тими, і тільки тими властивостями, які увійшли у зміст ООД.

Четвертий напрямок – *зміна дії за повнотою операцій*, що виконуються.

П’ятий напрямок – *зміна міри автоматизації* і деяких інших характеристик дії.

Шостий напрямок – *міра самостійності дії* – перехід від розподіленого виконання дії до самостійного. Цей останній напрямок змін П. Я. Гальперін не вказує у своїх працях. Його розробляла Н. Ф. Тализіна. Вона вважає, що логічніше для цього напрямку зберегти назву Л. С. Виготського – перехід від соціального плану у індивідуальний.

Серед параметрів дії П. Я. Гальперін виділяє структурні, динамічні, рівневі і власне психологічні [118].

Що стосується структурних характеристик дії, то П. Я. Гальперін бачить дві особливості побудови цілеспрямованої дії: розділення орієнтувальної та виконавчої частин і опосередкованість дії своєрідною психічною зброєю – схемою її орієнтувальної основи. До структурних особливостей дії належить її *повнота*, яка виявляється в тому, що дія може виконуватися з повним або неповним складом ланок (розгорнення дії та її скорочення). Скорочення може відбуватися свідомо або стихійно. При стихійному скороченні учень не розуміє чому можна пропустити операцію; свідоме скорочення забезпечує можливість повернення від скорочених форм дії до більш повних.

Структурні властивості осмисленої дії полягають в *різному її виконанні*: то у вигляді злитого потоку, то в чіткому розділенні його окремих ланок, то в повному його відтворенні, то з пропуском окремих, а то й всіх ланок, де від початкових даних суб'єкт безпосередньо переходить до результату. Повністю скорочене виконання – це "дія за формулою", коли від початкових (вихідних) даних і вказівки на дію з ними безпосередньо переходять до результату, минувши всі проміжні перетворення.

В динамічні характеристики дії автор включає *силові* і *часові*. Силові параметри – величина і розподіл зусиль на різних ділянках дії, а часові – темп і ритм дії. П. Я. Гальперін наголошував на тому, що на початку навчання темп повинен бути повільним настільки, щоб дитина спокійно могла оволодіти об’єктивною структурою дії; починати слід з повністю розгорненої та штучно уповільненої дії.

Відпрацювання нової дії відбувається на таких рівнях: *матеріальний або матеріалізований* – дія відбувається з речами або їх замінниками; *в гучному мовленні* – задача розв’язується вголос; „*в зовнішньому мовленні про себе*”; „*в прихованому мовленні*”.

До власне психологічних характеристик дії П. Я. Гальперін відносить *узагальненість, розумність, усвідомленість і критичність*.

Під *узагальненістю* розуміється діапазон варіантів умов, в яких дія може успішно виконуватися. Узагальнити дію – значить виокремити із різноманітних властивостей об’єкта саме ті властивості, які потрібні для виконання цієї дії. *Критичність* дії – оцінка учнем відповідності передумов дії об’єктивній дійсності. Важливим для розуміння психологічних механізмів дії, на думку М. О. Степанової, є вказівка на зв’язок критичності дії з її розумністю. Розумність дії передбачає, по-перше, її орієнтацію на істотні властивості і, по-друге, її розгорненість. Розгорненість дії та її узагальненість забезпечують розумність дії, іншим виразом якої є її гнучкість.

Типовий стан дії відповідає **етапові її засвоєння**. П. Я. Гальперін спочатку виділяв п’ять етапів:

Перший можна було б назвати складанням ніби „проекту дії” – її орієнтувальної основи, якою у подальшому учень користується при її виконанні; пізніше він був названий етапом попереднього ознайомлення з дією.

На **другому** етапі утворюється матеріальна (або матеріалізована) форма цієї дії – її перша реальна форма в даного учня; його назва – етап матеріальної або матеріалізованої дії.

На **третьому** етапі дія відривається від речей (або їх матеріальних зображень) і переноситься у план голосного, діалогічного мовлення – етап голосного мовлення.

На **четвертому** етапі дія виконується шляхом беззвучного промовляння про себе, але з чітким словесно-понятієвим розчленуванням; це дія в плані „зовнішнього мовлення про себе”.

На **п’ятому** етапі ця дія стає автоматичним процесом і внаслідок чого саме в своїй мовній частині полишає свідомість; мовний процес стає прихованим і в повному смислі внутрішнім.

Потім зазначені п’ять етапів були ще доповнені **мотиваційним етапом** формування мотиваційної основи дії як необхідного компоненту в структурі орієнтування суб’єкта [41; 80]. Однак зміни дії відбуваються лише на чотирьох етапах, тому <u>процес формування дії</u> поділяється на <u>дві фази</u>: *попередню*, яка містить два етапи (мотиваційний і етап складання схеми ООД) і *основну*, яка містить решту етапів [121] .

На перших етапах поетапного формування розумових дій чітко виділяється психологічна частина цілеспрямованої дії – орієнтувальна її частина. Процес орієнтування суб’єкта у ситуації, який випереджує його дії в ній, – це орієнтувальна діяльність (ОД). Якість самої орієнтувальної діяльності визначається якістю подання схеми тієї дії, яка за цієї схемою потім виконується. Відмінності у повноті та способі побудови схеми орієнтувальної основи дії призвели до виділення трьох основних типів орієнтування в матеріалі та його вивчення. П. Я. Гальперін [43] на підставі провідного типу ООД запропонував три типи навчання:

В умовах **І типу навчання** орієнтувальна основа діяльності (ООД) неповна, що зумовлює багаторазові спроби і помилки. У цьому випадку формування дії відбувається на підставі контролю за кінцевим результатом, що не забезпечує співвіднесення умов з конкретними операціями. Тому дія дуже нестійка до зміни умов ситуації і обмежена в переносі на нові знання.

Характерним для першого типу навчання, зазначає Л. М. Фрідман [129], по-перше є немотивованість введення нових знань, а по-друге, відсутність повної орієнтувальної основи усіх дій, якими повинен оволодіти учень, відсутність „загальних схем речей”. Тому природно, що вся наступна діяльність учня при розв’язуванні численних задач спрямована на отримання конкретних результатів на основі даних їм часткових зразків дій, а не на засвоєння загальних способів дій, які не встановлюються при такому способі вивчення. Якщо все ж таки деякі учні ними оволодівають, то це відбувається стихійно.

ІІ тип навчання характеризується побудовою окремої конкретної дії на повній орієнтувальній основі, спроби й помилки стають випадковими та нехарактерними. Кожна операція чітко співвідноситься із умовами, і в результаті дія розумна (в рамках конкретних умов), узагальнена (у заздалегідь наміченому об'ємі) і свідома. Сформована дія стійка до змін умов, перенос значний, але залежить від ступеня ідентичності елементів, що входять до складу дії.

Навчання за **ІІІ типом** передбачає орієнтування на основні одиниці матеріалу, закони їх поєднання, методи визначення того та іншого і самостійне складання ООД для конкретних об'єктів. Повна ООД забезпечує формування дій і понять без проб і помилок; розумними стають не лише дії в сенсі співвідношення їх з умовами, але й самі умови, які розкриваються у своєму внутрішньому складі. Дія має можливість повного і широкого переносу [119].

Головна характеристика ІІІ типу полягає в тому, що учням пропонується метод аналізу предмету засобом його „розчленовування„ на складові „одиниці" і вказуються закони їх поєднання, що становить основи складу предмету, а різні види сполучень одиниць – його варіанти. Користуючись методом „розчленовування", учень може складати ООД самостійно для аналізу різних варіантів предмета.

Перший тип, який не вимагає від викладача великих знань про процес навчання, є найпоширенішим. Другий тип забезпечує швидке та впевнене оволодіння новими знаннями та уміннями, які відповідають бажаній якості, але обмежені своєю галуззю. Третій тип, крім цього, забезпечує можливість самостійного оволодіння новими знаннями з усіх наук, які з різних сторін вивчають ті самі об'єкти [43].

Звичайно пошук ООД ІІІ типу йде емпіричним шляхом, але в 1970-і рр. З. О. Решетова почала для відокремлення ООД застосовувати метод системно-структурного аналізу явищ. Результатом такого аналізу є виділення інваріанту системи, який народжує усю множину явищ – варіантів системи.

Системний аналіз предмета здійснюється: *на рівні цілісності* виділяються параметри (властивості), які характеризують дану систему; *на рівні складності* об'єкт як ціле „розтинається" на складові елементи, виділяються їх характеристики; *на рівні* *організованості* розглядається внутрішня впорядкованість об'єкта; *на рівні „система – оточення”* багаторівнева будова об'єкта аналізується з точки зору внеску кожного рівня у механізм народження істотних властивостей об'єкта як цілого [79].

Подальші дослідження ООД дозволили встановити її роль як психологічного механізму узагальнення, джерела формування системного типу мислення. Н. Ф. Тализіна [120] експериментально довела, що узагальнення йде тільки за тими властивостями предметів, які увійшли до орієнтувальної основи дій, що спрямовані на аналіз цих предметів. Це означає, що керування узагальненням пізнавальних дій і знань, які до них входять, повинно йти через побудову діяльності учнів, шляхом контролю за змістом орієнтувальної основи відповідних дій, а не шляхом тільки забезпечення спільності властивостей у об'єктах, що подаються. Крім того, згідно з отриманими дослідницею даними, варіації неістотних властивостей предметів зовсім не є обов'язковими для отримання узагальнення за системою істотних даних. Для цього достатньо лише включити відповідну систему істотних властивостей у зміст орієнтувальної основи дій. Важливим є зауваження авторки про те, що у дітей 5-6 років може бути отримано повноцінне узагальнення за закономірностями, або теоретичне узагальнення.

Виходячи з вище сказаного можна зробити важливий висновок, щодо шляху отримання ООД розв'язування „типових” задач. Виділення ООД повинно здійснювати через всебічне дослідження задачі методом системно-структурного аналізу. Системно-структурний аналіз математичної структури задачі може здійснюватися за допомогою змін неістотних ознак задачі певного виду при збереженні істотних. Дослідження впливу цих змін на розв'язання задачі дозволить учням узагальнити спосіб розв'язування задач певного виду. Причому учні повинні підводитися кожного разу до узагальнення більш високого порядку. Так розв'язавши задачу певної математичної структури і дослідивши її засобом змін, наприклад групи взаємопов'язаних величин або числових даних задачі, учні узагальнюють план розв'язування таких задач. Наступні зміни задачного формулювання полягають у зміні шуканого задачі, і на основі порівняння задачі попередньої математичної структури з одержаною, діти роблять узагальнення більш високого порядку.

Таким чином, формування загального уміння та умінь розв'язувати задачі певних видів слід здійснювати на підставі теорії поетапного формування розумових дій. Усі дії, що складають загальне уміння розв'язувати задачі мають бути поетапно опрацюванні, причому виділення ООД має йти за II типом навчання. А при формуванні умінь розв'язувати задачі певних видів здійснюється навчання за III типом, методом системно-структурного аналізу З. О. Решетової за умов управління навчальною діяльністю з боку вчителя.

На думку Н. Ф. Тализіної, В. В. Давидов розвинув діяльнісний підхід П. Я. Гальперіна [121]. Навчання за III типом орієнтування передбачає формування змістовних узагальнень, а теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова є складовою частиною теорії навчальної діяльності.

Спираючись на положення П. Я. Гальперіна про те, що лише при третьому типі орієнтування у програму навчання включається формування узагальнених схем дійсності, які в процесі їх вивчення стають об'єднуючими схемами окремих дій, новими структурами мислення, Л. М. Фрідман доходить висновку, що *третій тип орієнтування слід розглядати як основний спосіб організації навчання при формуванні ЦНД учнів* [42].

Вивчення навчального матеріалу в теорії навчальної діяльності будується за **принципом змістовного узагальнення**, *коли засвоєння знань загального і абстрактного характеру передує ознайомленню з більш частковими і конкретними знаннями.* Формування змістовних узагальнень передбачає:

1) виокремлення у системі, що вивчається, типового факту, відношення, „клітинки", яка має всі властивості цілого;
2) організацію діяльності учнів із поглибленого аналізу суттєвих зв'язків і відношень в цій системі;
3) формулювання узагальнення, принципу, засобу дії;
4) навчання застосування цього узагальнення до вивчення конкретного матеріалу.

2.3.3. Застосування змістовних узагальнень при навчанні розв'язування задач

Формування умінь розв'язувати математичні задачі в учнів основної школи за теорією змістовних узагальнень розглядає В. Н. Осинська [75]. Автор вважає, якщо виходити із теорії змістовних узагальнень, то передусім слід виділити опорну задачу даного типу. Після цього слід навчити школярів розв'язувати цю задачу. Коли учні проаналізують суттєві зв'язки умови задачі й спосіб розв'язування задач подібного типу, то вони будуть вміти розв'язувати всі аналогічні задачі, підводячи їх умови під відомий їм загальний спосіб дії. Методика навчання розв'язування задач на базі змістовних узагальнень передбачає послідовність розумових прийомів: аналіз через синтез – абстрагування (виокремлення суттєвих зв'язків і відношень) – змістовні узагальнення (усвідомлення загального способу розв'язування). Змістовне узагальнення передбачає перехід від загального до часткового, конкретного.

Отже, вже на першій задачі учні засвоюють усі необхідні знання про типові особливості задач, способи їх розв'язування, принципи варіації несуттєвого в задачі, вчаться придумувати аналогічні задачі, переносити на них засвоєний спосіб розв'язування.

Формування умінь розв'язувати задачі певних видів на засадах теорії змістовних узагальнень В. В. Давидова можливо здійснити, як вказує В. Н. Осинська, по-різному. Вчитель може сам розповісти все необхідне про особливості задач даного виду, про спосіб їх розв'язування, про принципи варіації несуттєвого в умовах задач і при їх розв'язуванні (на нашу думку такий підхід відповідає II типу навчання за П. Я. Гальперіним). Такий підхід доречний за дефіциту часу, при значній складності матеріалу, в слабкому класі на початковій стадії навчання школярів вміння узагальнювати або тоді, коли вчитель знайомить школярів з основними видами задач розділу, теоретичний матеріал якого вивчається, і з особливостями їх розв'язування. Показ зразка розв'язання задачі в традиційному його розумінні не тотожний названому підходу. Можна підвести школярів до „самостійного" узагальнення, в цьому випадку діяльність учнів на уроці організується відповідно до такої методичної схеми: розв'язування опорної задачі – з'ясування її типових особливостей – виділення головного – узагальнення способу розв'язування таких задач – визначення суттєвого в процесі розв'язування, тобто таких дій, без яких задачу не можна розв'язати, – складання алгоритму (схеми) розв'язування задач даного типу або з'ясування загального підходу до їх розв'язування (відповідає III типу навчання за П. Я. Гальперіним).

В. Н. Осинська зазначає, що треба завжди попереджати учнів про те, що вони починають вчитися розв'язувати задачі нового типу, мотивувати їх діяльність, ставити мету – з'ясувати сутність способу розв'язування на прикладі розв'язування опорної задачі. В процесі навчання школярі привчаються до визначеної послідовності в своїх діях при розв'язуванні типової задачі: розв'язати задачу; проаналізувати головне, суттєве в її умові і розв'язуванні; скласти схему розв'язування або назвати узагальнений орієнтир; відокремити несуттєве; зрозуміти принципи варіації умови задачі; вчитися застосовувати спосіб розв'язування до аналогічних задач; вміти складати аналогічні задачі даного типу, розпізнавати „типові" задачі [75].

Пропозиції В. Н. Осинської щодо аналізу головного, істотного в умові задачі і у її розв'язанні через поглиблений аналіз істотних і неістотних зв'язків і відношень, близькі до методу системно-структурного аналізу З. О. Решетової.

Методична схема пропонується В. Н. Осинською для учнів основної школи і її, на нашу думку, не можна застосувати у такому вигляді для навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач. Тому, для учнів початкової школи ми перетворили її на наступну:

1) отримання задачі нової математичної структури із задачі, спосіб розв'язання якої дітям вже відомий;

2) визначення ознак за якими задача нової математичної структури відрізняється від задачі знайомої математичної структури – висунення гіпотези про вплив цієї зміни на спосіб розв'язування задачі нової математичної структури;

3) розв'язування задачі;

4) перевірка гіпотези про вплив зміни у формулюванні задачі на спосіб її розв'язування;

5) зміна ситуації задачі або зміна числових даних задачі (в деяких задачах зміна шуканого або зміна сталої величини) та дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі ;

6) узагальнення способу розв'язування задач даної математичної структури;

7) розв'язання задач даного виду на основі застосування узагальненого способу розв'язування;

8) складання і розв'язання обернених задач або перетворення у задачу спорідненого виду;

9) дослідження впливу зміни на план розв'язування задачі;

10) узагальнення математичної структури та плану (способу) розв'язування задач даної групи;

11) співставлення задач схожих математичних структур з метою визначення спільного і відмінного;

12) узагальнення плану розв'язування задач даного класу, формулювання правила-орієнтира.

Зрозуміло, що запропонована методична схема навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач на основі змістовних узагальнень може бути застосована лише при роботі над „типовими" задачами, тобто при формуванні в них умінь розв'язувати задачі певних видів, тому що уміння розв'язувати задачі певного виду полягає на „впізнаванні" її математичної структури і актуалізації відомого способу розв'язування.

Завдання для самоперевірки:

1. Назвати вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навичкам і вмінням.
2. В чому полягає суть теорії поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна.
3. Які три типи орієнтування в предметі та відповідно які три типи навчання визначено П. Я. Гальперіним?
4. В чому полягає метод системно-структурного аналізу З. І. Решетової? Як його застосовують при навчанні розв'язування задач?
5. В чому суть теорії змістовних узагальнень В. В. Давидова? Як її застосовують при навчанні молодших школярів розв'язування задач?

2.4. Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі та уміння розв'язувати задачі певних видів

В основі діяльнісного підходу лежить формування дій (операцій), що складають ту чи іншу діяльність, в даному разі – діяльність з розв'язування задач. Хоча ми запропонували означення поняття „уміння розв'язувати задачі", як складного уміння, що являє собою комплекс умінь нижчого порядку, але визначили, що уміння розв'язувати задачі поділяють на загальні та уміння розв'язувати задачі певних видів (окремі). Зрозуміло, що склад цих двох видів умінь буде дещо відмінний.

На основі етапів роботи над задачею складові компоненти загального вміння виділяють С. Є. Царьова [131], В. І. Кузнєцов [63]. С. Є. Царьова лише вказує як одну з його складових – уміння виконувати кожний з етапів розв'язування задачі, а В. І. Кузнєцов просто перелічує ці етапи (з деякою конкретизацією), показуючи можливі переходи від одного етапу до іншого. На відміну від попередніх авторів, Л. А. Сафонова [81] при визначенні змісту загального уміння розв'язувати задачі не лише вказує на уміння, що реалізують етапи розв'язування задачі, а й конкретизує їх склад стосовно кожного з цих етапів. Аналогічно до трактування операційного складу загального вміння розв'язувати задачі підходить В. А. Мізюк [72], яка вважає, що загальне уміння становить складний комплекс, який включає активне оперування математичними знаннями і відповідними вміннями й навичками, досвід у застосуванні знань і певну сукупність розумових дій, необхідних для розв'язування. Визначені Л. А. Сафоновою та В. А. Мізюк уміння виступають як загальне уміння розв'язувати задачі лише у комплексі.

Щодо визначення складу вміння розв'язувати задачі певних видів, то вчені одностайні в тому, що воно складається з: знань про види задач, способи розв'язування задач кожного виду; уміння "впізнавати" задачу даного виду, обирати відповідний їй спосіб розв'язування і реалізовувати його на конкретній задачі [23; 132; 128].

На основі аналізу процесу розв'язування сюжетних задач, аналізу умінь, якими учень має володіти для реалізації кожного з етапів розв'язування задачі та на основі наданого нами *означення поняття „уміння розв'язувати задачі" ми пропонуємо трактування понять „загальне уміння розв'язувати задачі" та „ окреме – уміння розв'язувати задачі певних видів"* на основі їх операційного змісту (таблиця 3).

Таблиця 3

Трактування понять „уміння розв'язувати задачі", „загальне уміння розв'язувати задачі", „окреме – уміння розв'язувати задачі певних видів"

Уміння розв'язувати задачі	Загальне уміння розв'язувати задачі	Уміння розв'язувати задачі певних видів
1) уміння аналізувати текст задачі;	1) уміння здійснювати предметно-змістовий аналіз задачі; 2) уміння виконувати логіко-семантичний аналіз задачі;	1) уміння здійснювати предметно-змістовий аналіз задачі; 2) уміння здійснювати логіко-семантичний аналіз задачі;
2) уміння подавати результати аналізу у вигляді репрезентативної моделі;	3) уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; або малюнок, схематичний малюнок, діаграму, графік й тощо);	3) уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; малюнок, схематичний малюнок, схему...);
	4) уміння робити прикидку очікуваного результату;	4) уміння робити прикидку очікуваного результату;
3) уміння співвідносити задачу з раніш вивченими і відтворювати спосіб розв'язування задач даного типу (якщо учню пропонується задача відомого типу);		5) уміння співвідносити дану задачу з раніш вивченими і „впізнавати" задачу вивченої математичної структури; 6) уміння актуалізувати узагальнений спосіб розв'язування задач даного виду при арифметичному способі; уміння актуалізувати узагальнений спосіб складання рівняння при алгебраїчному методі; 7) уміння застосовуввати знайдений спосіб розв'язування та складати розв'язуючу модель задачі;

3) уміння виконувати пошук розв'язання задачі, якщо задача невідомого типу або учень не „впізнав" задачу: при арифметичному методі розв'язання виконувати аналітичні міркування (від запитання задачі до числових даних) або синтетичні (від числових даних до запитання задачі) , при алгебраїчному методі розв'язання – складати рівняння, при геометричному методі розв'язання – виконувати креслення, будувати діаграми або графіки;	5) уміння здійснювати пошук розв'язування задачі: при арифметичному способі виконувати аналітичні або синтетичні міркування; уміння позначати одне з невідомих значень величини (шукане або проміжне) змінною та виражати інші величини через змінну, уміння подавати одну з величин двома способами (через змінну та без неї) при алгебраїчному методі; 6) уміння складати план розв'язування задачі при арифметичному способі; при алгебраїчному методі – уміння складати рівняння;	
4) уміння виконувати операції, які забезпечують розв'язання задачі;	7) уміння реалізувати знайдений план розв'язування при арифметичному способі; уміння розв'язувати рівняння при алгебраїчному методі;	7) уміння реалізувати знайдений план розв'язання при арифметичному способі; уміння розв'язувати рівняння при алгебраїчному методі;
6) уміння перевіряти правильність розв'язку.	8) уміння перевіряти правильність розв'язку; 9) уміння співвідносити нову задачу з раніш розв'язаними. Уміння перетворювати дану задачу. Уміння узагальнювати математичну структуру задачі; 10) уміння досліджувати задачу засобом змін окремих її елементів, з метою формулювання загального плану розв'язування задач такої самої математичної структури.	8) уміння перевіряти правильність розв'язку задачі; 9) уміння перетворювати задачу (у обернену або у задачу іншого виду або у задачу спорідненої марематичної структури).

Як бачимо, до складу поняття „уміння розв'язувати задачі" входять майже ті самі дії, що й до складу „загального уміння розв'язувати задачі" або/і „уміння розв'язувати задачі певних видів" (окреме). Але, операційний склад загального уміння розв'язувати задачі та уміння розв'язувати задачі певних видів у більшому ступені конкретизований, в ньому визначені усі можливі, на нашу думку, операції. Тоді як операційний склад уміння розв'язувати задачі містить лише „обов'язкові операції", які учень має виконати, щоб успішно розв'язати задачу. Так, учень може розв'язати задачу, не припускаючи очікуваного результату... Крім того, якщо порівняти операційний склад загального і окремого умінь розв'язувати задачі, то бачимо, що вони містять однакові операції (дії), що стосуються аналізу тексту задачі та подання його результатів у вигляді моделі, уміння робити прикидку очікуваних результатів, уміння виконувати дії, які забезпечують розв'язання задачі; є спільне і у діях, що до перевірки розв'язання задачі. Відмінність операційного складу загального і окремого уміння виявляється на етапі пошуку розв'язування задачі.

Формування загального уміння розв'язувати задачі відбувається спочатку на простих – задачах, на запитання яких можна відповісти, виконавши одну арифметичну дію, а далі – на складених задачах – задачах, на запитання яких не можна відповісти однією арифметичною дією. Зазначена істотна відмінна ознака цих класів задач визначає відмінності у операційному складі загального уміння розв'язувати прості задачі та загального уміння розв'язувати складені задачі. Крім того, у початковій школі, прості і складені задачі, принаймні при формуванні загального уміння розв'язувати задачі, розв'язуються арифметичними способами. Тому, конкретизуємо операційний склад загального уміння, який виявляється при розв'язанні простих задач та операційний склад загального уміння на матеріалі складених задач. В результаті аналізу процесу розв'язування сюжетних задач, ми дійшли висновку: **з метою формування у молодших школярів умінь розв'язувати прості й складені задачі арифметичними способами слід поступово опрацювати певну сукупність дій** (таблиці 4, 5):

Таблиця 4

Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичними способами (на матеріалі простих задач)

Пор №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
1.	Уміння виконувати предметно-змістовий аналіз задачі	виділення умови задачі; виділення запитання задачі; виділення об'єкта (об'єктів) задачі; виділення числових даних і шуканого задачі;
2.	Уміння виконувати логіко-семантичний аналіз задачі	виділення слів-ознак окремих видів співвідношень; встановлення виду співвідношення;
3.	Уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; або малюнок, схематичний малюнок й тощо)	виділяти ключові слова і відповідні їм числові значення, складати короткий запис задачі у вигляді схеми; або визначати величини, що містяться в задачі, виділяти ключові слова і виділяти числові значення відповідних дискретних величин; записувати задачу у вигляді таблиці; зображати значення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретувати довжину відрізка як деяку величину, виражати один відрізок через інші; складати схематичний рисунок задачі;
4.	Уміння робити прикидку очікуваного результату	виходячи із ситуації задачі, визначати більше чи менше шукане число від одного з даних (наприклад, стало більше, ніж було, залишилося менше, ніж було тощо); співвідносити значення шуканої величини з іншими значеннями цієї самої величини, на основі знання характеру зміни однієї величини від зміни другої величини при сталій третій величині (у випадку співвідношення залежності між значеннями різних величин);

5.	Уміння здійснювати пошук розв'язування задачі	визначати яким членом спів-відношення є шукане; актуалізувати правило знаходь-ження невідомого компонента даного співвідношення; обґрунтовувати вибір арифметич-ної дії, засобом якої розв'язується задача;
6.	Уміння реалізувати знайдений план розв'язування	записувати розв'язання; пояснювати виконання дії;
7.	Уміння перевіряти правильність розв'язку	складати і розв'язувати обернені задачі; встановлювати відповідність між числами, які отримані в результаті розв'язання задачі і даними числами; встановлювати відповідність шу-каного числа області його значень, які очікувались під час прикидки;
8.	Уміння співвідносити нову задачу з раніш розв'язаними.	порівнювати задачі даної марема-тичної структури з іншими задачами, математична структура яких схожа на дану; встановлювати як ця відмінність впливає на розв'язання.

Сформувавши в школярів уміння у виконанні дій, що реалізують етапи розв'язання задач на матеріалі простих задач, можна приступити до опрацювання дій, що притаманні власно розв'язанню складених задач.

В алгоритмі–приписі для розв'язування складених задач (пам'ятка № 3) [111] містяться ті самі дії, що потрібні для розв'язання простих задач, але до нього ще додаються дії, що притаманні лише розв'язуванню складених задач:

- міркувати аналітично або синтетично при пошуку розв'язування задачі;
- розбивати задачу на прості задачі;
- встановлювати порядок простих задач;
- формулювати план розв'язування задачі.

Результати аналізу дій, що складають арифметичний спосіб розв'язування складених задач, подані у таблиці 5, де дії, які притаманні лише розв'язуванню складених задач виділені жирним шрифтом.

Таблиця 5

Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичними способами (на матеріалі складених задач)

Пор №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способам	Дії, що адекватні арифметичному способу
1.	Уміння виконувати предметно-змістовий аналіз задачі	1) виділення умови задачі; 2) виділення запитання задачі; 3) виділення об'єкта (об'єктів) задачі; 4) виділення числових даних і шуканого задачі;
2.	Уміння виконувати логіко-семантичний аналіз задачі	1) виділення слів-ознак окремих видів співвідношень; 2) встановлення виду співвідношення (співвідношень);
3.	Уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; або малюнок, схематичний малюнок тощо)	1) виділяти ключові слова і відповідні їм числові значення, складати короткий запис задачі у вигляді схеми; або визначати величини, що містяться в задачі, виділяти ключові слова і числові значення відповідних дискретних величин; записувати задачу у вигляді таблиці; 2) зображати значення величини у вигляді довжини відрізка або за допомогою зображення іншої фігури, наприклад прямокутника; інтерпретувати довжину відрізка як деяку величину, виражати один відрізок через інші; складати схематичний малюнок задачі;
4.	Уміння робити прикидку щодо очікуваного результату	1) виходячи із ситуації задачі, визначати більше чи менше шукане число від одного з даних (наприклад, стало більше, ніж було, залишилося менше, ніж було тощо); 2) співвідносити значення шуканої величини з іншими значеннями цієї

		самої величини на основі знання характеру зміни однієї величини залежно від зміни другої величини при сталій третій величині (у випадку співвідношення залежності між значеннями різних величин);
5.	Уміння здійснювати пошук розв'язування задачі	**1) від запитання задачі до числових даних – аналіз;** **2) від числових даних до запитання задачі – синтез;**
6.	Уміння складати план розв'язування задачі	**1)розбивати задачу на прості;** **2)встановлювати порядок розв'язання простих задач;** 3)**формулювати план розв'язування задачі;**
7.	Уміння реалізувати знайдений план розв'язування	1) записувати розв'язання за діями; 2) пояснювати виконання дії; 3)**складати вираз, який є розв'язанням задачі;**
8.	Уміння перевіряти правильність розв'язку.	1) складати і розв'язувати обернені задачі; **2) переходити до розв'язання задачі іншим способом;** 3) встановлювати відповідність між числами, які отримані в результаті розв'язання задачі, і даними числами; 4)встановлювати відповідність шуканого числа області його значень, які очікувались під час прикидки;
9.	Уміння досліджувати задачу через зміни окремих її елементів, з метою узагальнення її математичної структури і формулювання загального плану розв'язування задач такої самої математичної структури .	**1) досліджувати задачу через зміни числових даних задачі, її сюжету та величин; встановлювати, як ця зміна вплине на розв'язання задачі;** **2) визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру;** **3) узагальнювати спосіб розв'язування задач даної математичної структури;**
10.	Уміння співвідносити нову задачу з раніш розв'язаними.	порівнювати задачі даної математичної структури з іншими задачами, математична структура яких схожа на дану; встановлювати, як ця відмінність впливає на розв'язання.

Завдання для самоперевірки:

1. Перелічити дії (операції) з яких складається загальне вміння розв'язувати задачі.
2. Перелічити дії (операції) з яких складається окреме вміння розв'язувати задачі певних видів.
3. Чим відрізняється операційний склад загального вміння від операційного складу окремого вміння розв'язувати задачі?
4. Конкретизуйте операційний склад загального вміння для розв'язування простих задач.
5. Конкретизуйте операційний склад загального вміння для розв'язування складених задач.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ

В основу методичної системи навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач покладено наступні ідеї:

1. Навчання розв'язування сюжетних задач в курсі математики початкової школи буде ефективнішим, якщо проводити спеціальну роботу з формування загального уміння розв'язувати задачі, переважно, в 1-3 класах та окремих умінь в 3-4-му класі, на основі опрацювання дій, що складають ці уміння.
2. Основним засобом формування дій, що складають уміння розв'язувати задачі, є спеціальні системи взаємопов'язаних навчальних задач.
3. Навчання діям, що складають загальне уміння розв'язувати задачі слід здійснювати через їх поетапне опрацювання на основі теорії П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної із застосуванням системно-структурного аналізу за З. О. Решетовою.
4. Для навчання учнів розв'язання „типових" задач застосовується теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова і метод системно-структурного аналізу З. О. Решетової, через зміни сюжету задачі або величин або числових або шуканих даних задачі.

Таким чином, методична система містить обов'язкові елементи:

1) методику формування загального уміння розв'язувати задачі;

2) методику формування у молодших школярів окремих умінь розв'язувати задачі певних видів.

Кожний з двох елементів системи є комплексним і містить елементи нижчого порядку:

1) *методика формування загального уміння розв'язувати задачі* реалізується:

- на матеріалі простих задач;
- на матеріалі складених задач (1-ша група);
- на матеріалі задач, що містять пропорційні величини: на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток;

2)*методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів, що містять пропорційні величини*, реалізується:

- на матеріалі задач, що містять однакову (сталу) величину для двох випадків (задач на знаходження четвертого пропорційного, задач на пропорційне ділення, задач на знаходження невідомих за двома різницями, задач на подвійне зведення до одиниці);
- на матеріалі задач на процеси (на спільну роботу та на рух);
- на матеріалі задач на знаходження середнього арифметичного.

Подані елементи реалізується засобом відповідних систем навчальних задач, отже вони також можуть розглядатися як система (мал. 8).

3.1. Методика формування в молодших школярів загального уміння розв'язувати сюжетні задачі

Теоретичною основою складання методики формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати задачі є вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навикам і умінням, що сформульовані Л. М. Фрідманом, а також теорія поетапного формування розумових дій і понять П. Я. Гальперіна, яка відповідає цим вимогам.

3.1.1. Методика формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі простих задач

Формування загального уміння розв'язувати прості задачі відбувається за етапами, які є загальноприйнятими у методичній науці:

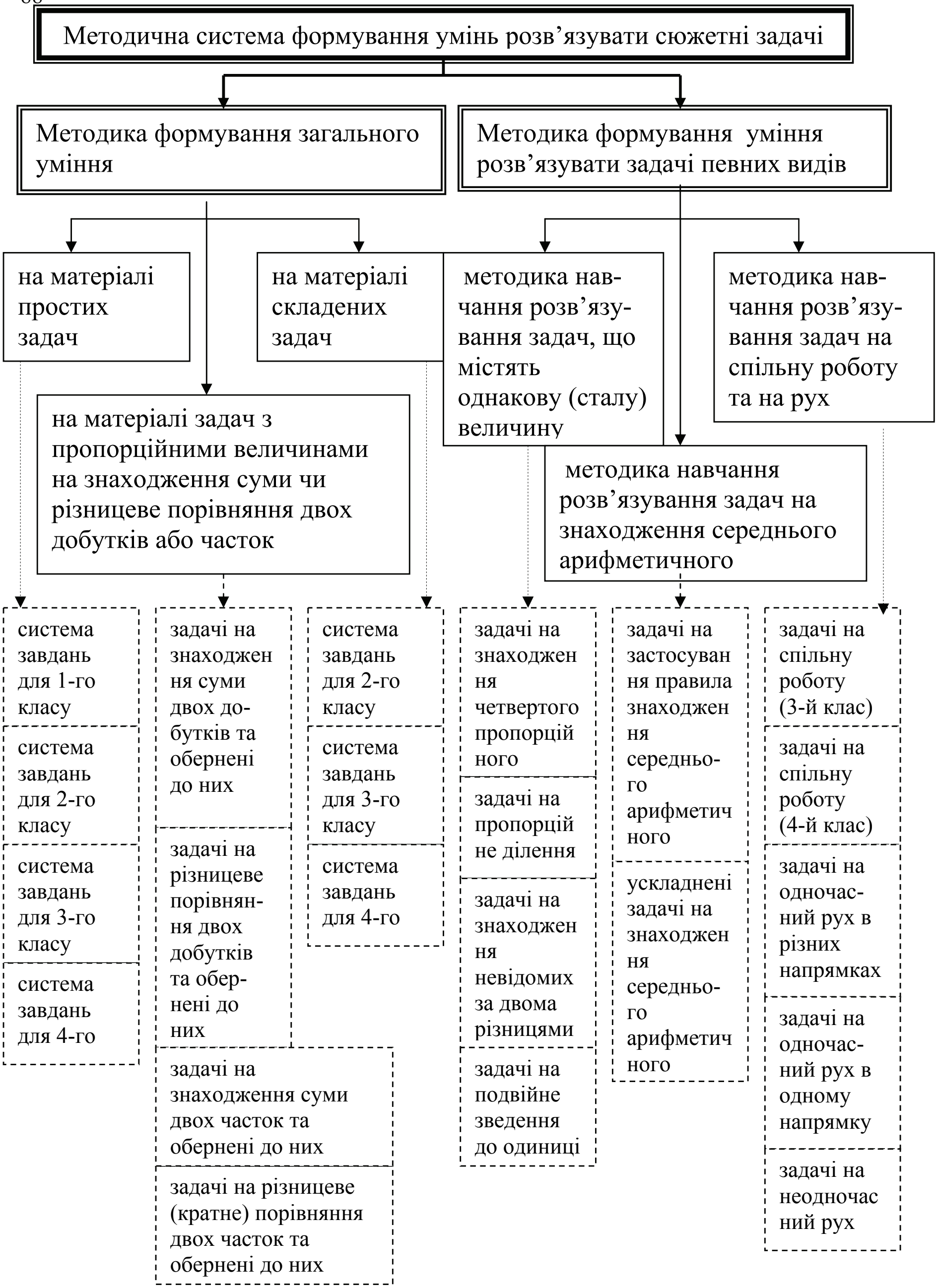
I етап – підготовча робота до введення поняття „задача" (1 клас);

II етап – ознайомлення з поняттям „задача", його структурними елементами та етапами її розв'язування (1-й клас);

III етап – формування загального уміння розв'язувати будь-які прості задачі (1 - 4 класи).

Зміст підготовчого етапу до введення поняття „задача"

Традиційно на етапі підготовчої роботи в учнів формується конкретний зміст дій додавання і віднімання, йде робота з розвитку мовлення дітей, коментування малюнків й тощо. Це пояснюється тим,



Мал. 8. Зміст методичної системи навчання розв'язування сюжетних задач

що поняття „задача” вводиться на задачах на знаходження суми й остачі (різниці). Лише потім, познайомившись з відношенням різницевого порівняння, діти розв’язують задачі на збільшення чи зменшення числа на кілька одиниць, на різницеве порівняння, а далі, дізнавшись про взаємозв’язок дій додавання і віднімання, діти вчаться розв’язувати задачі на знаходження невідомого доданка. Отже, традиційно, задачі вводяться відразу після того, як вивчений „теоретичний” матеріал і є засобом його подальшого засвоєння. Але, застосування сюжетних задач для формування у дітей уявлень про математичні поняття, в тому числі про зміст арифметичних дій, призводить до того, що типізація сюжетних задач і засвоєння процесу їх розв’язування виступає як основний спосіб формування уміння розв’язувати задачі, учні не вчаться міркувати при виборі арифметичної дії, а орієнтуються на зразок, що наданий вчителем. Тому *для попередження шаблонного і тому неадекватного підходу учнів до розв’язання окремих видів задач ми пропонуємо вводити поняття „задача” не лише на задачах на знаходження суми й остачі (різниці), а на матеріалі перших п’яти видів простих задач*. Крім того, як було показано вище, однією з дій, що складають загальне уміння розв’язувати прості задачі, є дія побудови репрезентативної моделі, а саме – схематичного рисунка. Такий підхід вимагає ґрунтовної підготовчої роботи, а саме опрацювання знань і умінь, які є достатніми для засвоєння поняття „задача”:

знання

- конкретного змісту арифметичних дій додавання і віднімання;
- конкретного змісту відношення різницевого порівняння;

уміння

- переходити від *предметної* інтерпретації операції об’єднання елементів двох множин, що не перетинаються (вилучення частини множини і показу решти), *до запису математичного виразу* або рівності і навпаки;
- переходити від *схематичної* інтерпретації операції об’єднання елементів двох множин, що не перетинаються (вилучення частини множини і показу решти), *до запису математичного виразу* або рівності і навпаки;
- переходити від *предметної* до *схематичної* інтерпретації операції об’єднання елементів двох множин, що не перетинаються (вилучення частини множини і показу решти), а від неї до запису математичного виразу або рівності і навпаки;

- знаходити суму і різницю двох чисел;
- знаходити невідомий доданок, користуючись схематичною інтерпретацією дії додавання;
- переходити від *предметної* до *схематичної* інтерпретації відношення різницевого порівняння, а від неї *до математичного виразу або рівності* і навпаки.
- збільшувати (зменшувати) число на кілька одиниць;
- знаходити на скільки одиниць одне число більше (менше) від іншого числа.

Отже, *метою підготовчого етапу* до введення поняття „задача” є формування у молодших школярів поняття про конкретний зміст арифметичних дій додавання і віднімання, а також поняття про конкретний зміст збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, відношення різницевого порівняння та їх схематичного зображення.

Математичною основою пояснення змісту додавання є трактування суми як об’єднання двох множин без спільних елементів. Конкретний зміст дії віднімання розглядається як вилучення частини елементів скінченої множини і перерахунок решти. Це трактування легко перекладається на мову практичних дій, що дозволяє у процесі формування уявлень про зміст додавання і віднімання спиратися на досвід дітей і перерахунок предметів. Співвіднесення предметної, вербальної, схематичної та математичної моделей і перехід від однієї моделі до іншої є основою організації діяльності учнів, спрямованої на засвоєння предметного змісту арифметичних дій додавання і віднімання та відношення різницевого порівняння.

Ознайомлення першокласників з поняттям „задача”

На етапі ознайомлення пропонуємо учням відразу усі п’ять видів простих задач: задачі на знаходження суми, задачі на знаходження остачі (різниці), задачі на знаходження невідомого доданка, задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, задачі на різницеве порівняння.

Саме робота відразу над п’ятьма видами простих задач ставить учнів в умови свідомого вибору арифметичної дії і виключає заучування способу розв’язування задач окремих видів. Необхідність вибору арифметичної дії визначає здійснення аналізу тексту задачі: виділення умови й запитання, числових даних і шуканого, зв’язків між ними, слів-ознак, на які слід спиратися при складанні схематичного рисунка (а пізніше для вибору виду математичного співвідношення) і виборі арифметичної дії для розв’язування задачі.

Метою етапу ознайомлення молодших школярів з поняттям „задача” є формування у молодших школярів: знань про складові задачі (умова і запитання, числові дані і шукане) та етапи її розв’язування; знань про зв’язок умови і запитання задачі; умінь виділяти умову задачі та її запитання; умінь виділяти числові дані і шукане задачі; умінь виконувати схематичний рисунок до задачі; умінь свідомо обирати арифметичну дію, якою розв’язується задача; умінь виконувати розв’язання задачі; умінь відповідати на запитання задачі; умінь оформляти розв’язання задачі.

Істотним в організації діяльності учнів етапі ознайомлення з поняттям „задача” є її *спрямованість не на розв’язання кожної конкретної задачі, а на оволодіння зазначеним комплексом умінь.* Згідно з вимогами до процесу формування розумових дій Л.М.Фрідмана кожна із складових дій загального уміння розв’язувати прості задачі повинна бути опрацьована окремо. Отже, на спеціальних вправах повинні бути сформовані уміння виконувати семантичний аналіз тексту задачі, складати схематичний рисунок за текстом задачі, обґрунтовувати вибір арифметичної дії при розв’язанні задачі.

Для оволодіння кожним умінням застосовуються різноманітні навчальні завдання. Їх варіативність забезпечується використанням в них різноманітних методичних прийомів (вибору, перетворення, конструювання – терміни Н.Б.Істоміної), а також дій, які виконують діти зі структурними компонентами задачі, текстовими конструкціями, способами моделювання, математичними поняттями і відношеннями. На етапі ознайомлення першокласників з поняттям „задача” словесні конструкції пояснення вибору арифметичної дії лише починають засвоюватись, і учні вибирають арифметичну дію, в основному, на основі схематичного рисунка, а словесні пояснення здійснюються учнями при відповіді на запитання учителя. На третьому етапі – при формуванні умінь розв’язувати прості задачі у 1-му та у 2-му класі ця дія набуває подальшого засвоєння.

Крім того, нами врахована вимога розтягненості в часі процесу формування навичок та умінь. Так, на етапі підготовчої роботи було розпочато навчання переходу від словесної до схематичної інтерпретації співвідношень додавання, віднімання та різницевого порівняння, а від неї до математичного запису. На етапі ознайомлення ця робота продовжується з тією відмінністю, що словесний текст тепер містить запитання і називається задачею.

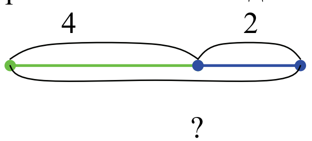
Розглянемо *методику ознайомлення першокласників з поняттям „задача”* докладно. По-перше учні повинні усвідомити **складові частини задачі – умову і запитання**, зв’язок умови і запитання, навчитися виділяти умову і запитання в текстах задач.

Ознайомлення можна здійснити наступним чином:

Дівчинки Маша і Наталка пішли в ліс по гриби. Маша знайшла 4 грибочки, а Наталка 2 грибочки.

Що нам відомо? (Дівчинки Маша і Наталка пішли в ліс по гриби. Маша знайшла 4 грибочки, а Наталка 2 грибочки.) Те, що відомо є умовою. Що нам невідомо? (Скільки всього грибочків знайшли дівчинки?) Про що можна запитати? Це запитання задачі. Умова і запитання складають задачу! Розкажи умову задачі. Розкажи запитання задачі.

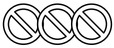
Чи правильно склали схематичний рисунок? Поясни, що означає кожний відрізок. Зелений відрізок позначає скільки грибочків знайшла Маша. Синій відрізок позначає скільки грибочків знайшла Наталка. Цілий відрізок, що складається з двох частин, синьої і зеленої, і позначений знаком запитання, означає скільки всього грибочків знайшли дівчинки.



Всього грибочків більше чи менше, ніж окремо тих, що знайшла Маша? Всього грибочків більше чи менше, ніж окремо тих, що знайшла Наталка? Якою арифметичною дією знаходять більше число? Всього грибочків більше, ніж окремо знайшла Маша; всього грибочків більше, ніж окремо знайшла Наталка; більше число знаходять дією додавання, тому щоб відповісти на запитання задачі слід виконати дію додавання. Або всього грибочків 4 та ще 2, 4 і 2 знаходять дією додавання: $4 + 2 = 6$. Скільки всього грибочків? 6 грибочків всього знайшли дівчинки.

Також з цією метою перші сюжетні задачі з’являються разом із малюнками, при чому умову задачі з’єднано із словом „умова”, а запитання – із словом „запитання”:

Задача

У Андрія , а у Миколи  ← **УМОВА**

Скільки всього печіва у хлоп’ят? ← **ЗАПИТАННЯ**

Засвоєнню структури задачі також сприяють завдання на порівняння двох текстів – маленького оповідання і задачі. Наприклад:

1) У парку гуляло 5 дітей. 2 дитини пішли. Тоді залишилося 3 дитини.	2) У парку гуляло 5 дітей. 2 дитини пішли. Скільки дітей залишилося гуляти у парку?

Аналізуючи різноманітні тексти, які містять і умову і запитання, діти впевнюються: щоб отримати задачу, треба, щоб умова була пов’язана із запитанням. Наприклад:

Розкажи умову. Розкажи запитання. Чи можна цей текст назвати задачею? Чому?

В класі було 7 хлопчиків і 2 дівчинки. Скільки пташок було на дереві?

Усвідомлення зв’язку запитання з умовою відбувається й при виконанні завдань на добір запитання до даної умови або на добір умови до даного запитання, а також при виконанні завдань на зміну умови (запитання), так щоб вона була пов’язана з даним запитанням (умовою).

Добір запитання до даної умови.

Застосування завдань на добір запитання до даної умови стимулює учнів до аналізу тексту, до висловлювання суджень, їх обґрунтування, сприяючи тим самим розвитку учнів. Серед переліку запитань є такі, в яких запитується про вже відоме в умові задачі, і, з’ясувавши це, учні повинні його відкинути, як такі, що не можна поставити до даної умови. Також, серед запитань подаються й кілька різних запитань про невідоме, яке можна знайти за числовими даними умови. При цьому важливо підвести дітей до розуміння того, що до даної умови можна поставити кілька запитань. До переліку запитань вносяться й такі, в яких запитується про те, що невідомо, але поставити його до даної умови не можна, тому що відсутній зв’язок між цим запитанням і запропонованою умовою. Наприклад:

Підбери запитання до даної умови:

В одному кошику 7 груш, а в другому на 3 груші менше.

-Скільки груш в першому кошику?

-На скільки груш в першому кошику більше, ніж в другому?
-Скільки груш в другому кошику?
-Скільки груш в двох кошиках?
- Скільки груш в третьому кошику?

Використання таких завдань сприяє не лише засвоєнню структури задачі, але й ставить учнів перед необхідністю аналізувати зв'язки між даними і шуканим, формує вміння вибирати потрібний зв'язок, який дозволяє відповісти на запитання задачі.

Добір умови до даного запитання

Дана дія є оберненою відносно попередньої і має сенс з логічної точки зору. Наприклад:

Скільки книжок на другій полиці?
„ На одній полиці 7 книжок, а на другій на 2 книжки більше."
„ На одній полиці 5 книжок, а на другій – 8 книжок."
„ На двох полицях 10 книжок, при чому на першій полиці 4 книжки."

Зміна $\dfrac{\textit{запитання}}{\textit{умови}}$ *так, щоб воно було пов'язано з* $\dfrac{\textit{умовою}}{\textit{запитанням}}$

Цей вид завдань, вирішує ті самі завдання, що й попередні, а саме усвідомлення учнями взаємозв'язку між умовою і запитанням та сприяє засвоєнню структури задачі. Наприклад:

1) „На одній тарілці 5 яблук, на другій 4. Скільки груш на двох тарілках?"
Зміни запитання так, щоб воно було пов'язано з умовою. Зміни умову так, щоб можна було відповісти на запитання задачі.
2) „Рибак спіймав 8 карасів, а окунів на 6 більше, ніж карасів."
Зміни умову так, щоб можна було відповісти на запитання:
„Скільки всього риб спіймав рибак?"

Треба зазначити, що при виконанні завдань на: виділення умови і запитання; порівняння задачі і маленького оповідання; аналіз задачі, в якій запитання не пов'язано з умовою; добір запитання до даної умови; добір умови до даного запитання; зміну умови, так щоб вона була пов'язана з даним запитанням; зміну запитання, так щоб воно було пов'язано з даною умовою здійснюється *етап попереднього ознайомлення з дією* виділення умови і запитання.

Корисним буде ознайомлення дітей з поняттями **числові дані й шукане задачі**, на навчання їх **виділення числових даних і шуканого.**

Учні усвідомлюють, що числові дані – це числа, що відомі в задачі, вони містяться в умові, а на шукане число вказує запитання задачі (*здійснюється етап попереднього ознайомлення з дією визначення числових даних і шуканого*). Наприклад:

Розкажи задачу. Розкажи умову. Розкажи запитання.

Задача.

ЗАПИТАННЯ

На болоті було □ жабенят. *3* жаби пішли.

УМОВА

Скільки жабенят залишилось?

Що означає число 7? (Скільки було жабенят). Що означає число 3? (Скільки пішло жабенят). Ці числа нам відомі з умови задачі? (Так, ці числа нам відомі). Числа, які відомі в задачі – це числові дані задачі. Де в задачі містяться числові дані? (Ці числа містяться в умові задачі).

Яке число ми знайшли? (Скільки залишилось жабенят). Це число ми шукали, тому воно називається шуканим числом. Що вказує на шукане число? (Запитання задачі вказує яке число є шуканим).

При роботі над текстом задачі пропонуємо підкреслити умову однією рискою, обвести кружком числові дані і пояснити, що означає кожне числове дане, підкреслити запитання двома рисками і пояснити, що означає шукане (*етап матеріалізованої дії з визначення числових даних і шуканого*). Для чіткого розуміння і виділення в тексті задачі даних та шуканого корисні задачі із зайвими числовими даними та числовими даними, яких бракує.

Завдання з числовими даними, яких бракує та із зайвими числовими даними

В основі вміння моделювати текст задачі на рівні математичного запису (вираз, рівність) лежить вміння моделювати текст задачі на рівні схеми (виділяти величини, залежності між ними, дані, шукане, відношення), а також уміння виділяти невідоме і здійснювати його пошук, який може бути пов’язаний з аналізом не лише відомих відношень. З цією метою застосовуються тексти з даними, яких бракує, що сприяє формуванню уміння визначати, чи є склад даних повним, і доповнювати у разі потреби. Наприклад:

1) Чим схожі тексти задач? Чим вони відрізняються? Яку задачу ти зможеш розв’язати? Яку – ні? Чому?

У вазі лежали черешні і 2 яблука. Скільки всього фруктів лежало у вазі?	У вазі лежало 4 черешні і 2 яблука. Скільки всього фруктів лежало у вазі?

2) Порівняй тексти задач. Чим вони схожі? Чим відрізняються? Чи можна стверджувати, що ці задачі мають однакові розв'язання?

В бабусі було 3 гуся, 5 курок. Скільки птахів було в бабусі?	В бабусі було 3 гуся, 5 курок і 2 кроля. Скільки птахів було в бабусі?

3) Порівняй тексти. Чим вони схожі? Чим відрізняються?

З кошика взяли 4 яблука. Скільки яблук залишилося у кошику?	У кошику було 10 яблук. Скільки яблук залишилося у кошику?

- Доповни умову кожної задачі так, щоб можна було відповісти на поставлене запитання.

4) Вибери дане, якого не дістає з кількох умов:

„ На аеродромі було 7 літаків. Скільки літаків залишилося на аеродромі?"

1) Вранці прилетіло 2 літаки.
2) Улетіло на 2 літаки менше, ніж було.
3) Улетіло 3 літаки.

При виділенні числових даних і шуканого в задачах із зайвими числовими даними і з числовими даними, яких бракує, учні вголос пояснюють, які числа дані в задачі, скільки їх і яке число є шуканим; встановлюють, чи вистачить числових даних для відповіді на запитання задачі або які з трьох числових даних потрібні для відповіді на запитання задачі. Для з'ясування цих фактів застосовується схематична інтерпретація тексту задачі. Таким чином, *дія виділення числових даних і шуканого* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

Вибір запитання до даної умови

Пропонується умова до якої подано кілька варіантів запитань у наступному порядку:

1) відповідь на це запитання не вимагає виконання арифметичної дії,
2) відповідь на це запитання вимагає виконання арифметичної дії.

Наприклад:

1) Рибак спіймав 8 карасів, а окунів на 6 більше, ніж карасів. Щук на 5 менше, ніж окунів.

На які запитання ти зможеш відповісти, не виконуючи арифметичних дій додавання і віднімання. На які запитання можна відповісти, виконавши додавання або віднімання?

- На скільки менше рибак спіймав карасів, ніж окунів?

- Скільки карасів спіймав рибак?
- Скільки окунів спіймав рибак?
- Скільки щук спіймав рибак?
- На скільки більше рибак спіймав окунів, ніж щук?
- Скільки карасів і окунів спіймав рибак?
- Скільки всього риб спіймав рибак?

З метою формування уміння виділяти відомі та невідоме, використовується прийом вибору, в основі якого лежить класифікація запропонованих запитань. Учням пропонується дізнатися, на які запитання можна відповісти, не виконуючи арифметичних дій додавання і віднімання, а на які запитання можна відповісти, виконавши додавання або віднімання. Такі завдання вимагають від учнів великої розумової роботи: вони повинні співвіднести числові дані, які містяться в поданій умові, з шуканим, на яке вказує конкретне запитання. Отже, *дія виділення числових даних і шуканого* тут виконується швидко, в формі „*зовнішнього мовлення про себе*".

Тексти з парадоксальним сюжетом або з парадоксальними даними.

Ці завдання є дуже цікавими для дітей, тому що їм пропонуються „нібито задачі" – ці тексти містять і умову, і запитання, але в умові описується такий сюжет, який не має місця у житті; крім того, доцільно застосовувати тексти з парадоксальними даними (такі числові дані, які суперечать логіці або здоровому глузду). Після аналізу таких текстів учні можуть змінити сюжет або числове дане так, щоб задачу можна було розв'язати. Наприклад:

1. Мама купила 9 лампочок. 5 лампочок з'їли. Скільки лампочок залишилося?

Розкажи умову. Розкажи запитання. Це задача? Чому? Тут є й умова й запитання!

2. На двох лавках сиділо 5 дівчинок. На одній з них 7. Скільки дівчинок сиділо на іншій лавці?

Зміни числове дане так, щоб задачу можна було розв'язати.

При виконанні завдань, в яких пропонуються парадоксальні дані, діти повинні встановити числові дані задачі і шукане, зіставити числові дані і дійти висновку, що при даному сюжеті такі дані не можливі. Отже, *дія виділення числових даних і шуканого* набуває подальшого засвоєння в формі *„зовнішнього мовлення про себе"*. Завдання з парадоксальним сюжетом надають можливість здійснити *попереднє ознайомлення з дією виділення об'єкта задачі*, а саме що в задачі події мають відбуватися з одним і тим самим предметом і про нього потрібно запитувати, і це повинно мати місце у житті.

Засвоєнню структури задачі сприяють завдання типу:

Аналіз різних конструкцій задачі, коли частина умови міститься у запитанні, коли запитання стоїть перед умовою тощо.

В міру усвідомлення дітьми структури задачі пропонуємо завдання, які спонукають дітей активно застосовувати ті уявлення, якими вони оволоділи, а також вимагають використання змістовних ознак в аналізі текстів завдань. Це тексти задач, що мають неканонічну конструкцію, тобто є розходження між змістовою та формальною структурою: частина умови міститься у запитанні; вимога задачі сформульована розповідним реченням і містить частину умови; текст задачі являє собою одне складне запитальне речення; текст задачі являє собою одне складне розповідне речення, в якому спочатку йде вимога. Наприклад:

Чи можна цей текст назвати задачею? Що в ньому незвичайного? Розкажи умову. Розкажи запитання.

- Скільки вагонів залишилося у поїзді, якщо в ньому було 10 вагонів, а на станції відчепили 3 вагони?
- У відрі було 7 л води. Скільки літрів води залишилося у відрі, якщо з нього взяли 4 л води?
- У кравчині було 8 м тканини. З 6 м вона пошила плаття. Знайди остачу тканини.

У таких текстах правильно виділити умову і запитання можна, лише спираючись на змістовні ознаки. *Дія виділення умови і запитання* виконується в формі „*зовнішньої мовлення про себе*”.

Вибір виразу, який відповідає тексту задачі.

Мама купила 10 зошитів. З них 6 у клітинку, решта у лінійку. Скільки зошитів у лінійку купила мама?
Вибери вираз, який дозволяє відповісти на запитання задачі: 10 – 6, 10 + 6.

Вибір тексту задачі, який відповідає математичному виразу.

Вибери текст, якому відповідає даний вираз 4 + 3:

„Марійка висадила на клумбу 4 тюльпана, а Мишко на 3 тюльпана більше. Скільки тюльпанів висадив Мишко?” (На 3 більше – це значить стільки ж, скільки й Марійка – 4, та ще 3; 4 і 3 знаходять дією додавання. Тому цей текст підходить до даного виразу).

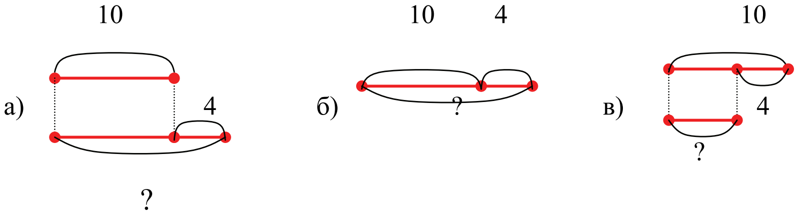
„Марійка висадила 3 тюльпана, а Мишко – 4 тюльпана. На скільки тюльпанів більше висадив Мишко, ніж Марійка?” (Щоб дізнатися на скільки одне число більше або менше за інше число, треба від більшого числа відняти менше. Тому ця задача до даного виразу не підходить).

„Марійка висадила на клумбу 4 тюльпана, а Сашко 3. Скільки всього тюльпанів висадили діти? (Всього тюльпанів 4 і 3; 4 і 3 знаходять дією додавання. Тому ця задача підходить до даного виразу).

Вибір схеми, яка відповідає тексту задачі.

Вибери схему, яка відповідає тексту задачі:

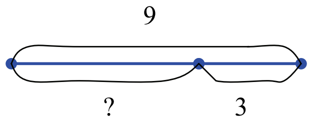
На одній полиці 10 книг, а на другій на 4 книжки менше. Скільки книжок на другій полиці?



До даної задачі підійде схема, на якій два відрізки накреслені один під одним, тому що „на більше або менше” – це значить стільки ж та ще або без... Тому схема б) не підходить. Вибиратимемо серед схем а) і в). На другій полиці на 4 книги менше, ніж на першій. Це значить стільки ж, скільки й на першій, 10, але без 4; 10 без 4. Тому на схемі шуканий відрізок повинен бути одержаний в результаті виключення з відрізку, який позначає стільки ж, відрізку який позначає на скільки менше. Це схема в).

Вибір тексту задачі, який відповідає схемі.

Вибери текст задачі, яка відповідає схемі:



1) У Наталки 9 цукерок, а у Надійки на 3 цукерки менше. Скільки цукерок у Надійки? (На схемі до цієї задачі повинно бути два відрізка – один під одним. Тому, що на 3 менше – це значить стільки ж, скільки й в Наталки, 9, але без 3. Ця задача до даної схеми не підходить).

2) На озері плавало 9 гусок і 3 качки. Скільки птахів плавало на озері? (Щоб показати усіх птахів на кресленні, треба до відрізку, який позначає гусок, 9, приєднати відрізок, який позначає качок, 3. На даній схемі, навпаки, з 9 виключають 3. Ця задача до схеми не підходить).

3) В коробці 9 олівців, серед них 3 прості, решта кольорові. Скільки кольорових олівців у коробці? (Щоб показати скільки кольорових олівців, треба з усіх олівців, 9, виключити прості олівці, 3. Якщо на даній схемі дещо інакше

позначити дужками відрізки. То вона підійде до даної задачі. Можна говорити, що ця схема підходить до даної задачі).

4) На дитячому майданчику було 9 дітей, 3 дитини пішли. Скільки дітей залишилося на майданчику? (Щоб показати скільки дітей залишилось, треба з відрізку, який позначає скільки дітей було, 9, виключити відрізок, який позначає скільки дітей пішло, 3. Ця задача підходить до даної схеми).

5) Столяр виготовив 9 стільців та 3 столи. На скільки більше стільців, ніж столів зробив столяр? (Щоб показати на скільки більше, або менше, треба креслити два відрізка один під одним. Тому ця задача до схеми не підходить.

На підставі сформованих уявлень про задачу, її структуру, а також уміння встановлювати взаємозв'язки між умовою і запитанням, формується вміння аналізувати, а потім інтерпретувати текст задачі (моделювати різноманітні текстові конструкції на рівні схем, виразів, рівностей) і здійснювати переклад одних моделей у інші. З цією метою використовуються прийоми вибору, в яких дії учнів спрямовуються вказівкою „Вибери..", що дозволяє здійснювати іншу, на відміну від традиційної, подачу зразка, коли він не копіюється сліпо, а виявляється дітьми самостійно. Так, учням пропонується текст задачі і кілька виразів або кілька схем, складених з числовими даними задачі, серед яких слід вибрати той вираз, який є математичною моделлю задачі.

До певного виразу або схеми пропонуємо по кілька текстів задач, з метою усвідомлення учнями того факту, що один і той самий вираз може бути математичною моделлю різних за математичною структурою задач.

При виконанні завдань на вибір схеми до даного тексту задачі або на вибір задачі до даної схеми, набуває подальшого засвоєння *дія зображення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретування довжини відрізка як деякої величини, подання одного відрізка через інші* (дія засвоюється *в матеріалізованій формі*).

Завдання на вибір виразу до даного тексту задачі та вибір тексту задачі до даного математичного виразу передбачають опрацювання *дії визначення числових даних і шуканого* в формі „*зовнішнього мовлення про себе*" та засвоєння *дії обґрунтування вибору арифметичної дії*, якою розв'язується задача, в *матеріалізованій формі*.

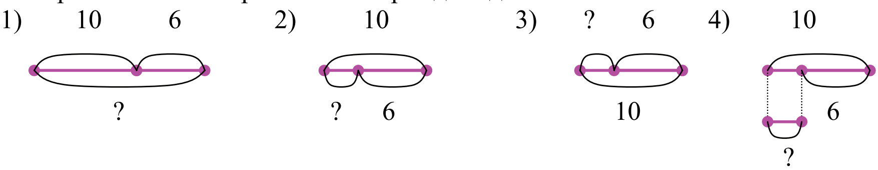
Вибір схеми і виразу до даного тексту задачі.

В процесі аналізу схем, математичних записів з метою „вибору" у дітей формується уміння читати текст задачі (виділяти умову, запитання, встановлювати взаємозв’язки між ними), а також накопичується досвід у перекладі одних моделей у інші (як словесної в схематичну, математичну, так і навпаки), але центральне місце при виконанні таких завдань належить опрацюванню *в матеріалізованій формі* дії *обґрунтування вибору арифметичної дії*.

Наприклад:

У святковому подарунку 10 цукерок. Скільки шоколадних цукерок у подарунку, якщо карамелей 6?

Вибери схематичне креслення і вираз до задачі:



До даної задачі підходить третя схема. На ній відрізок, позначений знаком запитання означає кількість шоколадних цукерок – це перший доданок, відрізок позначений дужкою з числом 6 – кількість карамелей – це другий доданок. А цілий відрізок, що складається з двох частин – означає кількість всіх цукерок: і шоколадних і карамелей – це сума.

1) 10 + 6 2) 10 + 3 + 3 3) 10 – 6

Невідомий перший доданок. Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок. Тому підходить до даної задачі третій вираз.

Подальша робота в цьому напрямку пов’язана з формуванням уміння виконувати моделі на рівні схеми.

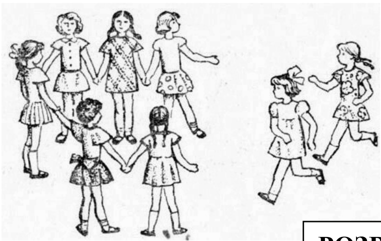
При виконанні завдань на вибір виразу до даного тексту задачі та завдань на вибір тексту задачі до даного виразу, вибір схеми і виразу до даного тексту задачі, учні знайомляться з тим, що вибір арифметичної дії залежить від певних слів-ознак, які містяться в тексті задачі. Отже, тут відбувається *попереднє ознайомлення з визначенням слів-ознак окремих видів співвідношень*. Так, із словом „всього” або „було-стало” пов’язано співвідношення додавання, із словом „було-залишилося” – співвідношення віднімання, із словами „на... більше (менше)” – співвідношення різницевого порівняння.

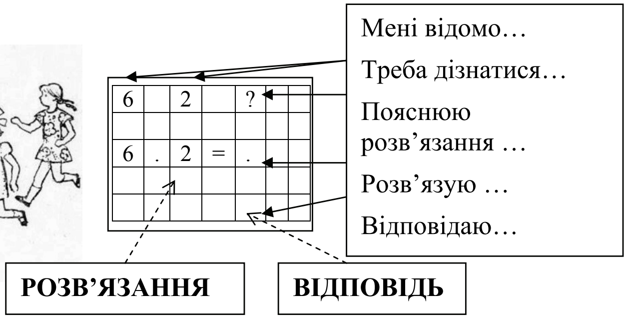
Моделювання задачного формулювання є однією з домінуючих евристик, що сприяє самостійному розв’язанню задачі, тому певну увагу слід приділити **складанню схематичного рисунка до задачі.**

Ця робота була розпочата ще на ступені підготовчої роботи до введення поняття „задача”: учні вчилися переходити від словесної до схематичної інтерпретації операцій об’єднання або вилучення, а від неї до математичного запису. Відмінністю виконуваних при цьому завдань є лише те, що текст доповнюється запитанням і називається задачею; учень пояснює кожний власний крок із складання схематичного рисунка, тут *дія складання схематичного рисунка* засвоюється в *формі голосного мовлення*.

Ознайомлення з порядком роботи над задачею та записом її розв'язання. Наприклад:

Склади задачу за малюнком. Розв'яжи задачу, міркуючи за пам'яткою.





Уважно розглянь картинку. Що ти бачиш на малюнку? (Дівчинки стоять. До них прибігли ще дівчинки). Скільки було дівчинок? (6 дівчинок було). Скільки прибігло дівчинок? (2 дівчинки прибігли).

Розкажи, що зображено на малюнку? (Було 6 дівчинок. До них прибігли 2 дівчинки).

Це задача? (Ні). Чому? (Це лише умова. Тут нема запитання. Задача складається з умови і запитання.)

Чи можна поставити будь-яке запитання ? (Ні запитання повинно бути пов'язаним з умовою).

Яке запитання можна поставити, виходячи з ситуації? (Скільки стало дівчинок?).

Розкажи всю задачу.

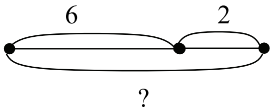
Розкажи умову задачі. Виділи числові дані. Розкажи запитання задачі. Яке число є шуканим?

Розв'язувати задачу будемо за пам'яткою № 1.Запитувати вас я буду по пам'ятці. Тому відповідаючи на запитання ви повинні починати відповідь зі слів, що є в запитанні.

Що нам відомо?(Нам відомо, що було 6 дівчинок, до них прибігли ще 2 дівчинки). Запишемо ці числа у рядок через клітинку. Вчитель виконує запис на дошці.

Про що треба дізнатися? (Треба дізнатися скільки стало дівчинок?) В цьому ж рядку поставимо через клітинку знак запитання.

Складемо схематичний малюнок до задачі. (На дошці). Накреслимо відрізок, який позначає дівчинок, які були спочатку. Накреслимо відрізок, який позначає, що прибігли ще 2 дівчинки? Треба об’єднувати чи виключати? (Об’єднувати). Як це показати на схемі? (Треба до відрізку, що означає дівчинок, які були спочатку, приєднати відрізок, що означає кількість дівчинок, які до них прийшли; отриманий таким чином, великий відрізок й позначатиме скільки стало дівчинок).



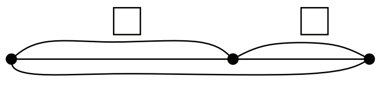
Пояснюй розв’язання. Більше чи менше число є шуканим в задачі? Пояснювати розв’язання слід так: стало дівчинок більше, ніж було, а більше число знаходимо дією додавання. Або стало дівчинок 6 та ще 2, 6 та ще 2 знаходять дією додавання, тому задачу розв’язуємо дією додавання.)

Розв’язуй. (Розв’язую: 6 + 2 = 8.) Запишемо рівність у другому рядку.

Повтори запитання задачі. (Скільки стало дівчинок?) Відповідай: (Відповідаю: 8 дівчинок стало). В третьому рядку, під значенням виразу запишемо число 8.

Н. О. Менчинською було висунуто тезу про те, що основною дією при розв’язанні простих задач є *дія вибору арифметичної дії*, тому вже з розв’язування першої задачі починається її опрацювання у *формі голосного мовлення*. Вчитель повідомляє, що при знаходженні значень виразів дія, яку слід виконати із числами, заздалегідь відома, а при розв’язанні задачі відомі лише числові дані. Дію, якою розв’язується задача, слід визначити, виходячи із запитання задачі та певних слів-ознак, які містяться в умові задачі. Пояснити вибір арифметичної дії можна наступним чином:

Задачі на знаходження суми

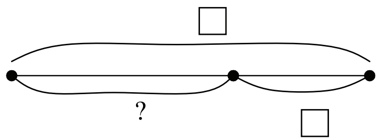


Якщо в задачі запитується, скільки $\frac{\textit{стало}}{\textit{всього}}$*, то міркуємо так:*

1) $\frac{\textit{Стало}}{\textit{Всього}}$ більше, ніж $\frac{\textit{було}}{\textit{окремо...та.окремо...}}$, а більше число знаходимо дією додавання.

2) $\frac{\textit{Стало}}{\textit{Всього}}$ - $\square$ та ще $\square$, $\square$ та $\square$ знаходять дією додавання. Тому задачу розв’язуємо дією додавання.

Задачі на знаходження остачі

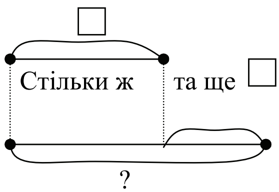


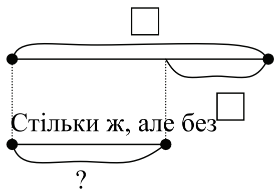
Якщо в задачі запитується скільки, залишилось, то міркуємо так:

1) Залишилось менше ніж було, а менше число знаходять дією віднімання.

2) Залишилось $\square$ але без $\square$, $\square$ без $\square$ знаходимо дією віднімання, тому задачу розв’язуємо дією віднімання.

Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць



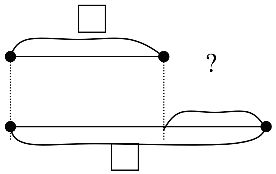


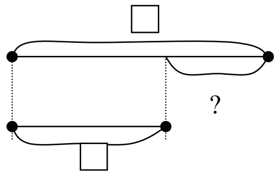
Якщо в задачі є шуканим число, яке на кілька одиниць більше чи менше за дане, то міркуємо так:

1) Шукане число на $\square$ $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ за дане . На $\square$ $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ – це означає стільки ж $\frac{\textit{та.ще}}{\textit{але.без}}$ $\square$. Стільки ж $\frac{\textit{та.ще}}{\textit{але.без}}$ $\square$знаходимо дією $\frac{\textit{додавання}}{\textit{віднімання}}$.

2) Шукане число $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ за дане, а $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ число знаходять дією$\frac{\textit{додавання}}{\textit{віднімання}}$. Тому задачу будемо розв’язувати дією $\frac{\textit{додавання}}{\textit{віднімання}}$.

Задачі на різницеве порівняння

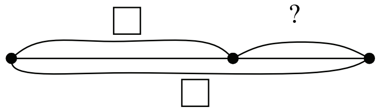




Якщо в задачі треба знайти, на скільки одне число більше чи менше за інше, то міркувати слід так:

1) Щоб дізнатися, на скільки одне число $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ за дане, треба від більшого числа відняти менше число.

Задачі на знаходження невідомого доданка



Якщо в задачі відомо, скільки $\frac{\textit{всього}}{\textit{стало}}$ *– суму і треба знайти невідомий доданок, то міркуємо так:*

1) $\frac{\textit{Стало}}{\textit{Всього}}$ – це сума, $\frac{\textit{було}}{\textit{одне.число}}$ – це відомий доданок. Треба знайти невідомий доданок. Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок.

2) Шукане число менше, ніж $\frac{\textit{всього}}{\textit{стало}}$, а менше число знаходимо дією віднімання. Тому задачу будемо розв'язувати дією віднімання.

Закріплення поняття „задача". Формування умінь розв'язувати прості задачі в 1-му класі

Розглянуті типи завдань є переважно підготовчими для формування повноцінного уміння розв'язувати прості задачі. На цьому етапі навчання формування загального уміння здійснюється на основі операційного складу загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом (на матеріалі простих задач). На етапі ознайомлення були сформовані такі дії: виділення умови задачі; виділення запитання задачі; виділення об'єкта (об'єктів) задачі; виділення числових даних і шуканого задачі; зображення значення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретування довжини відрізка як деякої величини, подання одного відрізка через інші; складання схематичного рисунка задачі. Почала засвоюватися дія виділення слів-ознак окремих видів співвідношень і обґрунтування вибору арифметичної дії.

Розглянемо докладно ***формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати прості задачі***.

Робота над задачами відбувається за пам'яткою № 1, причому запис здійснюється у три рядки. З метою розуміння сюжету задачі до кожного тексту пропонується малюнок, причому цей малюнок активно застосовується дітьми, тому що одне з числових даних задачі треба „взяти" з малюнка. Таким чином, ми привчаємо дітей кожного разу при читанні або прослуховуванні формулювання задачі уявляти її ситуацію. Запропоновані малюнки до текстів задач дозволяють наочно „побачити" об'єкт задачі, таким чином, *дія виділення об'єкта задачі* засвоюється в *матеріальній формі*.

На даному етапі основним видом завдань є розв'язання задач. При роботі над текстом задачі учитель вимагає повторити умову задачі, підкреслити її олівцем, повторити запитання задачі; визначити числові дані та шукане, пояснити, що вони означають. Після цього числові дані записуються у рядок через клітинку, і через клітинку записується знак запитання. Пояснивши, що означають числа задачі, переходимо до складання схематичного рисунка задачі: учні кожне числове дане позначають відрізком, довільної довжини, але такої, щоб зберігалося співвідношення за величиною. За схематичним рисунком учні пояснюють, що означає кожний відрізок і з яких відрізків „складається" шуканий відрізок. Спираючись на наочну модель, переходимо до пояснення вибору арифметичної дії, через запитання вчителя привчаємо учнів обґрунтовувати вибір арифметичної дії словесно; після чого у другому рядку записуємо рівність, а в третьому рядку, під значенням виразу, записуємо число, яке було шуканим і даємо словесну відповідь на запитання задачі. Для усвідомлення і застосування в активному словнику термінів „розв'язання" і „відповідь" радимо учням підкреслити олівцем та прочитати ще раз розв'язання або відповідь.

Наприклад:

Задача.

ЗАПИТАННЯ

На одній полиці ☐ книг. На другій полиці ☐ книги.

УМОВА

На скільки менше книг на другій полиці, ніж на першій?

Розкажи задачу. Розкажи умову. Розкажи запитання. З’єднай лінією складові частини задачі з їх назвами. Обведи числові дані у кружок та поясни, що вони означають. (Число 6 означає скільки книжок було на першій полиці. Число 3 означає скільки книжок на другій полиці). Мені відомо, що на першій полиці було 6 книжок, а на другій полиці було 3 книжки. Запишемо це у рядок через клітинку. Яке число є шуканим? (На скільки менше книжок на другій полиці, ніж на першій?) Треба дізнатися на скільки менше на другій полиці, ніж на першій. Запишемо знак запитання через клітинку.

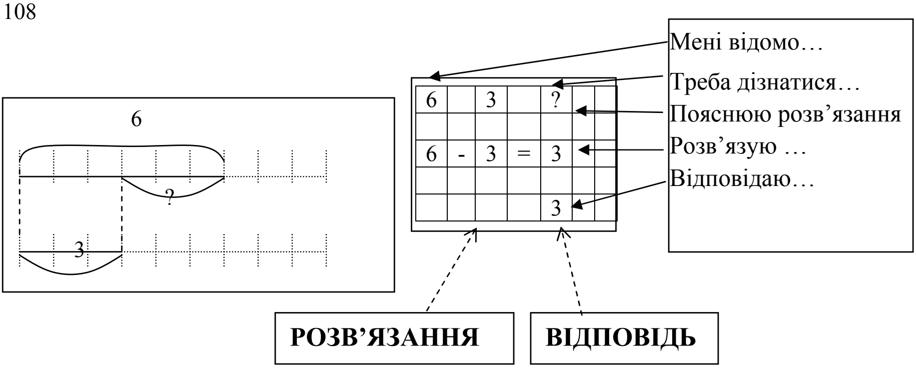
Виконуємо схематичний рисунок. Як позначити, що на першій полиці 6 книжок? Креслимо відрізок, довжиною у 6 одиничних відрізків. Як позначити, що на другій полиці 3 книжки? Креслимо відрізок, довжиною у 3 одиничні відрізки, нижче під першим відрізком, тому що ми повинні показати різницю між цими числами. Показуємо стільки ж, і частину першого відрізка, яка лишається праворуч, позначаємо знаком запитання.

За схематичним рисунком пояснюємо, що означає кожний відрізок. Верхній відрізок, означає скільки книжок на першій полиці – 6. Нижній відрізок позначає скільки книжок на другій полиці – 3. Відрізок, позначений знаком запитання, означає на скільки менше книжок на другій полиці, ніж на першій.

Пояснюємо розв’язання. Для того, щоб дізнатися на скільки одне число більше або менше за інше число, треба від більшого числа відняти менше число. Тому задачу будемо розв’язувати дією віднімання.

Розв’язуємо: 6 – 3 = 3 – записуємо розв’язання у другому рядку.

Повтори запитання. Дай відповідь на запитання задачі. Відповідаю: на 3 книжки менше на другій полиці, ніж на першій. Записуємо це число у третьому рядку.



На даному етапі особливе місце займає словесне пояснення вибору арифметичної дії. Отже, *дія вибору арифметичної дії засвоюється в формі зовнішнього мовлення*.

Дії виділення умови і запитання, числових даних і шуканого були сформовані на етапі ознайомлення, а дія складання схематичного рисунка і перехід від схематичної інтерпретації до математичного запису почала опрацьовуватися на етапі підготовки і набула подальшого засвоєння під час ознайомлення. Отже, майже усі складові дії, виконання яких передбачено пам'яткою № 1 для розв'язання задачі, засвоєні дітьми на попередньому етапі. *Метою даного етапу* є засвоєння саме *порядку роботи над задачею* з опорою на текст пам'ятки. Треба зазначити, що робота над задачею проводиться фронтально – вчитель ставить запитання, а учні на них відповідають. Запитання вчителя конструюються так, що вони відтворюють завдання пам'ятки №1. Тут здійснюється *етап матеріалізованої дії засвоєння порядку роботи над задачею* – дітям пропонується текст пам'ятки, щоб відповідаючи на запитання вчителя, вони починали речення із відповідного завдання пам'ятки.

У багатьох школах учні в 1-му класі виконують короткий запис задачі, але це викликає в них певні труднощі. Справа в тому, що складанню короткого запису слід спеціально навчати дітей. Розглянемо методику **навчання першокласників складання короткого запису**.

Спочатку учням пропонуються задачі у вигляді тексту разом з коротким записом задачі, а розв'язання задачі відбувається за пам'яткою № 1. Наприклад:

Про що або про кого говориться в задачі? Це ключові слова. Розглянь короткий запис задачі. Що в ньому записується? Як позначається запитання?

1) У бабусі **4 качки** і **3 гусей**. Скільки **всього** птахів у бабусі?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Качки - 4 шт.}\\ \\ \text{Гуси - 3 шт.}\end{array}\right\}\ ?$$

- Розкажи всю задачу. Розкажи умову задачі. Яке запитання задачі?
- Поясни, що означають числові дані задачі.

Що означає число 4? Що означає число 3? Що означає шукане число?
- Про кого говориться в задачі? В задачі говориться про качок та гусей. Качки і гуси – це ключові слова задачі.
- Розгляньте у тексті задачі вони виділені червоним кольором. Ці слова записані у короткому записі задачі одне під одним – у стовпчик.
- Чи відомо нам скільки качок у бабусі? Відомо, 4. Розгляньте, де у тексті задачі стоїть це числове дане, розгляньте де у короткому записі записано це числове дане. *Відповідне числове дане записується поряд з ключовим словом*.
- Чи відомо скільки гусей в бабусі? Відомо 3. Де у тексті задачі записано це числове дане? Де у короткому записі записано це числове дане?
- Яке запитання задачі? Запитання задачі містить слово „*всього*”, для позначення цього слова є спеціальний знак – *фігурна дужка*. Отже фігурна дужка позначає слово „*всього*”. Запитується „*скільки всього*”, тому біля носика фігурної дужки ставлять знак запитання.
- За коротким записом поясни числа задачі. Що означає число 4? Що означає число 3? Яке число є шуканим?

Основним видом завдань є розв’язування задач. На цьому етапі *уміння визначати об’єкт (об’єкти) задачі* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*: учні пересказують задачу, з’ясовують, про що в ній говориться, і виділяють об’єкт або об’єкти задачі. Нагадаємо, що об’єктом задачі може бути: предмет, явище, подія, процес. З об’єктом задачі пов’язані ключові слова, при чому ключовими словами можуть бути діючі особи (наприклад, Сашко і Микола). Якщо в сюжеті задачі відбуваються якісь дії з об’єктом задачі, то ключовими словами будуть характеристики цієї події (наприклад: було, витратили, залишилось). Для визначення ключових слів ми пропонуємо наступну пам’ятку:

Пам’ятка

1) Про що розповідається в задачі?
2) Чи є в задачі кілька діючих осіб? Це ключові слова!

Або

3) Що відбувається по сюжету задачі? Що було спочатку? Що зробили потім? Що сталося нарешті? Це ключові слова!

При визначенні ключових слів діти спираються на поданий (готовий) короткий запис задачі і вчаться їх відшукувати в тексті задачі: підкреслюють ключові слова і обводять кружком числові дані, які відповідають цим ключовим словам, з’ясовують, яке число є шуканим і якому ключовому слову воно відповідає. Далі за карткою з друкованою основою (де подано частину короткого запису – записані у стовпчик ключові слова) діти розглядають, як розташовуються ключові слова у короткому записі, і відповідно кожного з них записують числові дані або знак запитання, якщо це число є шуканим. Вчитель повідомляє, що отримано *короткий запис задачі* (*здійснюється етап попереднього ознайомлення з дією*). Наприклад:

2. Закінчи складання короткого запису. Розв’яжи задачі.

Задача.

В класі було 5 дівчинок і 4 хлопчика. На скільки більше дівчинок, ніж хлопчиків було в класі?

Дівчинки - □

На ?

Хлопчики - □

Короткий запис задачі (в даному разі схематичний) є репрезентативною моделлю задачі, і його складання передбачає дії кодування тексту задачі. У короткому записі в явному вигляді подані всі істотні ознаки даної задачі, числові дані і зв’язки між ними. Далі передбачається виконання дії перекодування і складання іншої, більш абстрактної, моделі – схематичного рисунка. Але спочатку, ми вчимо дітей за коротким записом пояснювати числа задачі і що означає шукане. Числові значення позначаються відповідними відрізками, учні пояснюють, що означає кожний відрізок і який з відрізків є шуканим. На основі вже сформованої дії переходу від схематичного рисунка до запису математичного виразу, а також обґрунтовуючи вибір арифметичної дії словесно, учні записують вираз і знаходять його значення (*дія обґрунтування вибору арифметичної дії виконується у формі голосного мовлення*). Незважаючи на те, що вводиться поняття короткого запису, діти ще продовжують записувати задачу у три рядки і працюють над задачею за пам’яткою № 1.

На цьому етапі учні опрацьовують *дію розв'язання простих задач за пам'яткою № 1* у *формі голосного мовлення*, промовляючи по пам'яті кожний крок, і поступово переходять до самостійного розв'язання задач, пояснюючи власні дії про себе (*етап „зовнішнього мовлення про себе"*). Подальші вправи у розв'язанні задач призводять до того, що дія максимально скорочується і автоматизується, учень вже не зупиняється на окремих етапах цього процесу і не пояснює кожний крок розв'язання (*етап виконання дії в розумовому плані*). Зрозуміло, що не всі діти одночасно переходять на певний етап засвоєння дії, слабші учні довше затримуються на перших етапах засвоєння, а у дітей з високою научуваністю скорочення і автоматизація дії відбувається швидше, про це свідчить швидкість виконання завдань.

Описаним вище способом було здійснено попереднє ознайомлення з дією складання короткого запису. Для виконання цієї дії в матеріалізованій формі дітям потрібно надати можливі зразки коротких записів, тому учні знайомляться з опорними схемами простих задач, які будуть застосовуватись у якості матеріальних опор при самостійному складанні короткого запису до задачі. Ця дія передбачає визначення ключових слів, числових даних та шуканого і знання певних символів позначення окремих слів.

В методиці роботи над задачею на цьому етапі відбуваються наступні зміни: учні повинні самостійно, спираючись на надану пам'ятку, визначити ключові слова, знайти опорну схему задачі і записати ключові слова у потрібній опорній схемі; далі визначити числові дані і записати їх в опорній схемі, відповідно ключовим словам; звернути увагу, як позначено на короткому записі шукане; за коротким записом пояснити, що означає кожне число (*дія складання короткого запису виконується в матеріалізованій формі*). Далі йде робота за звичайним планом. Треба зазначити, що не кожну задачу слід пропонувати учням для розв'язання, можна обмежитися лише аналізом тексту задачі, результатом якого буде короткий запис або короткий запис і схематичний малюнок.

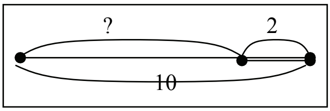
При переході до етапу „*голосного мовлення*", учні повинні пояснити власні кроки із самостійного *складання короткого запису* задачі: пояснити, які слова є ключовими, як їх слід записати; визначити опорну схему даної задачі, біля яких слів слід записати певні числові дані, як позначити шукане; пояснити за коротким записом, що означають числові дані й шукане.

Нова форма запису задачі. Після того, як учні усвідомили процес складання короткого запису задачі, змінюється форма запису – задача записується не в три рядки, як це було раніше, а виконується стандартний запис: записується слово „Задача”, під цим словом зліва записується короткий запис, праворуч від нього виконується схематичний рисунок. В наступному вільному рядку в центрі записується слово „Розв’язання”, під яким ліворуч – рівність, а нижче слово „відповідь” і записується речення, яке є відповіддю на запитання задачі.

Наприклад, розглянемо методику роботи над задачею на знаходження невідомого доданка: „ В корзині і на тарілці разом 10 яблук. На тарілці 2 яблука. Скільки яблук в козині?”

Розкажіть всю задачу. Розкажіть умову задачі. Виділіть числові дані. Розкажіть запитання задачі. Яке число є шуканим. Запишіть в зошитах посередині рядку слово “Задача”. Складемо короткий запис задачі. Знайдіть її опорну схему. Які ключові слова можна виділити? (В корзині, на тарілці). Чи відомо, скільки яблук лежить в корзині? (Ні). Тому напроти цього ключового слова поставимо знак запитання. Чи відомо, скільки яблук на тарілці? (Так, 2). Запишемо це напроти цього ключового слова. Що ще відомо із умови задачі? (Всього 10 яблук і в корзині, і на тарілці). Як це показати на короткому записі? (Треба поставити фігурну дужку і за нею число 10).

В козині - ? } ?
На тарілці – 2 ябл.



- За коротким записом поясніть числа задачі. Що означає число 10? (Число 10 означає, скільки яблук всього і в корзині і на тарілці). Що означає число 2? (Число 2 означає, скільки яблук на тарілці). Яке число є шуканим? (Число, яке означає, скільки яблук в корзині).
- Виконаємо схематичний рисунок. Накресліть відрізок, що позначає скільки яблук у козині і поставте над ним знак запитання. Покажіть за допомогою відрізка, що яблука ще лежать на тарілці. Що треба написати над ним? Покажіть відрізок, який позначає всі яблука. Запишіть під ним відповідне число.
- Перекладіть цю задачу на мову математики. (Число 10 – це сума; число 2 – це другий доданок; треба знайти перший доданок).
- Згадайте правило, за яким можна знайти невідомий доданок. (Якщо із суми двох чисел відняти один доданок, то залишиться інший

доданок. Або: щоб знайти невідомий доданок, треба із суми відняти відомий доданок).
- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією віднімання).
- Запишіть посередині рядка слово "Розв'язання", відступіть 1 клітинку вниз, і з лівого краю рядку запишіть рівність. (10 – 2 = 8 (шт.)).
- Відступіть 1 клітинку вниз, і з лівого краю рядку запишіть слово "Відповідь", поставте за ним двокрапку, і після неї напишіть відповідь, починаючи зі знайденого числа. (Відповідь: 8 яблук в корзині).
- Зверніть увагу на те, як ми оформили запис задачі у зошиті. Ми написали слова "Задача", "Розв'язання" і "Відповідь"; ми склали короткий запис задачі і написали повну відповідь на запитання задачі.

На цьому етапі *дія складання короткого запису* набуває подальшого засвоєння *у формі голосного мовлення*. Зрозуміло, що учні з високою научуваністю можуть самостійно складати короткий запис задачі, не промовляючи кожний крок цієї дії (етап „*зовнішнього мовлення про себе*").

Задачі на знаходження невідомого зменшуваного, невідомого від'ємника

Підготовча робота. На цьому етапі треба актуалізувати знання компонентів та результату дії віднімання; уміння розв'язувати задачі на знаходження остачі (різниці). А також, на етапі підготовчої роботи діти повинні познайомитися з правилами знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника і навчитися знаходити невідомий компонент. Досягти розуміння цього правила усіма учнями можливо, якщо застосовувати схематичний рисунок відношення віднімання: цілий відрізок – це зменшуване, від нього вилучили частину – від'ємник і залишається – остача (різниця). Таким чином, учні наочно бачать, що зменшуване складається із остачі та від'ємника: щоб знайти ціле, слід додати його частини – і формулюють правило знаходження невідомого зменшуваного. На цьому ж рисунку діти показують зменшуване, вилучають з нього різницю і впевнюються, що залишається від'ємник; і таким чином формулюють правило знаходження невідомого від'ємника. Далі сформульовані правила засвоюються через виконання завдань на знаходження невідомих компонентів.

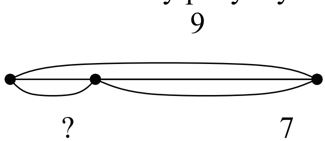
Також на етапі підготовчої роботи розв'язуються прості задачі на знаходження остачі, зміст цих задач перекладається на мову математики: визначається, яке число є зменшуваним, яке – від'ємником, а яке – остачею.

***Ознайомлення** з задачами на знаходження невідомого зменшуваного та невідомого від’ємника. Поняття „обернена задача”.* Після розв’язання задачі на знаходження остачі учні виписують числа задачі у рядок і пояснюють числові дані й шукане число на мові математики. Наприклад:

Під берізкою росло 9 грибочків. 7 грибочків зрізали. Скільки грибочків залишилося?

Про що розповідається в задачі? Що відбувалося з грибами? Які ключові слова можна виділити? Запишіть ключові слова у стовпчик. Чи відомо скільки було грибочків? Запишіть. Чи відомо скільки зрізали грибочків? Запишіть. Про що запитується в задачі? Поставте знак запитання. Покажіть опорну схему задачі. Яка це задача? Це задача на знаходження різниці.

За коротким записом пояснюємо числа задачі. Що означає число 9? Як позначити відрізком, що було 9 грибків? Що означає число 7? Як показати на схематичному кресленні, що 7 грибків зрізали? Яке число є шуканим? Покажіть відрізок, що йому відповідає на схематичному рисунку.



Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? Дією віднімання, тому що залишилось менше, ніж було, а менше число знаходимо дією віднімання.

Або залишилось 9 без 7; 9 без 7 знаходять дією віднімання.

Розв’язуємо задачу: 9 – 7 = 2 (шт.)

Відповідаємо: 2 грибка залишилось під березою.

Пояснимо, що означають числа задачі:

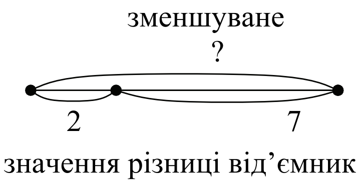
Що позначає число 9? (Число 9 позначає скільки грибків було). Як воно називається „на мові математики”? (Це зменшуване.) Що позначає число 7? (Число 7 позначає, скільки грибків зрізали). Як воно називається „на мові математики”? (Це від’ємник). Що позначає число 2? (Число 2 позначає скільки грибків залишилось.) Як воно називається „на мові математики”? (Це різниця).

Складемо задачу, в якій шуканим буде зменшуване число 9.

Після того, як зрізали 7 грибочків, під берізкою залишилося 2 грибочка. Скільки грибочків було під берізкою?

Які зміни у короткому записі попередньої задачі треба зробити? Треба число 9, замінити знаком запитання, а замість знака запитання, що стоїть біля слова „залишилось” поставити число 2. Що означає знак запитання? Що означає число 7? Що означає число 2?

Які зміни треба виконати у схематичному кресленні? Треба цілий відрізок, який позначає скільки було – зменшуване позначити знаком запитання, а відрізок який позначає скільки залишилось – різницю позначити дужкою з числом 2.



Якою арифметичною дією будемо розв’язувати задачу? Дією додавання бо в цій задачі треба знайти скільки було – зменшуване, а щоб знайти невідоме зменшуване треба до різниці додати від’ємник.

Або, було більше, ніж залишилось, а більше число знаходять дією додавання.

Розв’язуємо 2 + 7 = 9 (шт.).

Відповідаємо: 9 грибків було під березою. Ми одержали те число, яке було дано в першій задачі!

Порівняй цю задачу з попередньою. Чим цікаві ці задачі? (В цих задачах одна й та сама ситуація – росли грибки під березою. Одній й ті самі ключові слова: було, зрізали, залишилось. Одній й ті самі числа: 9, 7, 2. Але в першій задачі шуканим було число 2, а у другій – число 9). Те, що було відоме в попередній задачі, стало невідомо в даній задачі і навпаки! Такі задачі називаються оберненими задачами! Якщо в задачах описаний один й той самий сюжет, які містять одній й ті самі числа, але шуканим стає те, що було дано, а даним стає шукане, то такі **задачі є оберненими**.

Якою дією ми розв’язали першу задачу? (Дією віднімання). А другу? (Дією додавання). Чому першу задачу ми розв’язали дією віднімання, а другу – додавання? (Тому що в першій задачі ми шукали різницю, а у другій – зменшуване).

Особлива увага приділяється обґрунтуванню вибору арифметичної дії: при першому способі застосовується правило знаходження невідомого зменшуваного, а при другому – спираємося на те, що шукане число більше за дане. Після розв’язання задачі на знаходження невідомого зменшуваного діти порівнюють ці дві задачі і доходять висновку: те, що було відомим в першій задачі, стало невідомим у другій задачі, а те, що було невідомим – стало відомим. Вчитель повідомляє, що такі задачі називаються оберненими, здійснюється *етап попереднього ознайомлення з дією складання і розв'язування обернених задач*.

Далі пропонується скласти ще одну обернену задачу так, щоб невідомим був від'ємник. Наприклад:

Під берізкою росло 9 грибочків. Після того, як кілька грибочків зрізали, під берізкою залишилося 2 грибочки. Скільки грибочків зрізали?

Над цією задачею працюємо аналогічно попередній. Після розв'язання задач учні порівнюють усі три задачі і з'ясовують, чому дві задачі розв'язуються дією віднімання, а одна – дією додавання. Учням надаються опорні схеми трійки взаємно обернених задач на знаходження остачі, на знаходження зменшуваного, на знаходження від'ємника, і здійснюється подальше засвоєння поняття про співвідношення віднімання: усі три задачі містять одні й ті самі ключові слова – „було – залишилось", слово „було" відповідає зменшуваному, слово „зрізали" відповідає від'ємнику, слово „залишилось" – різниці; в залежності від того, який компонент є шуканим й вибирається арифметична дія. Отже, *дія визначення слів-ознак окремих видів співвідношень* набуває подальшого засвоєння у *формі матеріалізованої дії*.

На цьому етапі розпочинається опрацювання *дії порівняння задач, математична структура яких схожа на дану, встановлення, як відмінність між ними впливає на розв'язання задач* (етап *попереднього ознайомлення з дією*).

Під час подальшої роботи над простими задачами у 2-4-му класі, уміння у виконанні зазначених дій вдосконалюються при розв'язуванні задач нових видів. Також діти вчаться визначати числові дані, які потрібні для відповіді на запитання задачі; складати і розв'язувати обернені задачі; встановлювати відповідність шуканого числа області своїх значень, що зроблено під час прикидки очікуваного результату; порівнювати задачі схожих математичних структур.

Формування умінь розв'язувати прості задачі в 2-му класі

На початку навчального року слід узагальнити і систематизувати знання дітей про задачі. Учні повторюють істотні ознаки поняття „задача” на прикладі завдань на порівняння текстів маленького оповідання та задачі, завдань з парадоксальними даними, завдань, в яких умова не пов’язана із запитанням, завдань на постановку запитання до даної умови, на зміну запитання, так щоб при відповіді на нього потрібно було виконати певну арифметичну дію. Діти розв’язують прості задачі перших семи видів (міркування за пам’яткою № 1, запис розв’язання за новою формою), користуючись опорними схемами називають види задач, а також на основі опорних схем класифікують задачі за арифметичною дією, якою вони розв’язуються, – називають види задач, які розв’язуються дією додавання та які розв’язуються дією віднімання.

У зв’язку з тим, що до 2-го класу молодші школярі оволоділи навичками читання та письма, у структуру процесу розв’язування задач вводяться новий елемент, а саме складання короткого запису задачі. Крім того, з метою підготовки до введення складених задач, учні засвоюють мовні конструкції, які відповідають аналітичним міркування. Ці фактори визначають новий порядок роботи над простою задачею – за пам’яткою № 2. Отже, ця пам’ятка передбачає виконання наступних дій: уявлення, про що розповідається в задачі (виділення об’єкта та сюжету); складання короткого запису і пояснення за ним чисел задачі; визначення того, які числові дані потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі; запису розв’язання; запису відповіді.

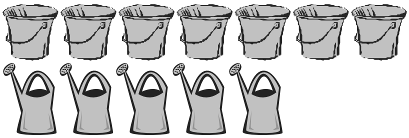
Усі дії, крім визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі, вже засвоєні дітьми на попередньому етапі навчання. Тому на опорних схемах та при розв’язанні задач учні перед обґрунтуванням вибору дії, визначають, які числові дані їм потрібні, щоб відповісти на запитання задачі. Бесіда будується наступним чином:

- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: перше - ... та друге - ...).
- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ... Тому, що...)

Отже, відбувається *попереднє ознайомлення з дією визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі*.

При розв’язанні наступних задач учні перед обґрунтуванням вибору дії, застосовуючи надані мовні конструкції, визначають, які числові дані потрібні для відповіді на запитання задачі, і вчаться зображати це схематично – кружками. Наприклад:

У підготовчій групі дитячого садка було:



Купили ще 4 поливальниці і 3 відерця. Скільки стало відерець? Скільки стало поливальниць?

Уважно розглянь малюнок, що ти бачиш? (Ми бачимо відерці та поливальниці). Скільки відерець? Скільки поливальниць? (Відерець 7 штук, поливальниць 5 штук).

Прочитай речення, яке пояснює, що це за відерці та поливальниці. (У підготовчій групі дитячого садка було…). Продовжуй речення. (У підготовчій групі дитячого садка було 7 відерець та 5 поливальниць).

Прочитай речення, яке розповідає, що сталося потім. (Купили ще 4 поливальниці і 3 відерця).

Розкажи про що розповідається в задачі? (В задачі розповідається про те, що було 7 відерець та 5 поливальниць, купили ще 4 поливальниці і 3 відерця).

Прочитай, про що запитується в задачі. (Скільки стало відерець? Скільки стало поливальниць?) Що тут незвичайного? (В задачі два запитання). Чи можна відразу відповісти на два запитання? (Ні, не можна). Тому відповімо спочатку на перше запитання, а потім на друге запитання.

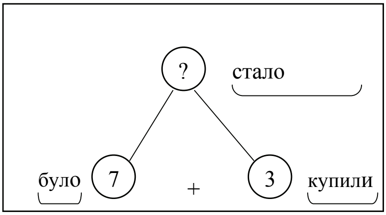
Яке перше запитання? (Скільки стало відерець?).

Ця задача цікава тим, що тут є чотири числові значення, а для відповіді на запитання треба два числових значення, тому слід спочатку обміркувати, які з них слід вибрати… Для відповіді на запитання “Скільки стало відерець?” слід взяти числа, які стосуються кількості відерець.

Що потрібно знати, для того щоб дізнатися “Скільки стало відерець?” (Для того, щоб відповісти на це запитання, треба знати скільки відерець було (7) та скільки відерець купили (3).)

Проілюструємо це в таблиці (вставляємо картки з словами, цифрами та знаком арифметичної дії):

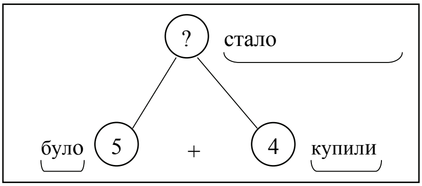
Якою дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання, тому що відерець стало більше.) Запишемо розв'язок.



Повтори друге запитання. (Скільки стало поливальниць?) Що потрібно знати, щоб на нього відповісти? – відповідай за пам'яткою. (Потрібно знати два числових значення:

I – скільки було поливальниць (5) та II – скільки купили поливальниць (4).) Проілюструємо це в таблиці (вставляємо картки з словами, цифрами та знаком арифметичної дії). Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання, тому що поливальниць стало більше.)

Запиши розв’язання і відповідь.



Розв'язання

1) 7 + 3 = 10 (в.)
2) 5 + 4 = 9 (п.)

Відповідь: 10 відерець і 9 поливальниць стало.

Отже, дія *визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі,* набуває подальшого засвоєння в *матеріалізованій формі*. Для свідомого визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі, корисні завдання із зайвими числовими даними та числовими даними, яких бракує.

З поняттям про обернену задачу діти вже знайомі (в 1-му класі задачі на знаходження невідомого зменшуваного та невідомого від’ємника вводилися як обернені до задач на знаходження остачі (різниці)), тому *дія складання обернених задач* здійснюється в *матеріалізованій формі*: після розв’язання прямої задачі учні виписують числа задачі і пояснюють, що вони означають; потім одне з числових даних прикривається (замінюється) знаком запитання і учні складають задачу, так щоб шуканим було число, яке позначено знаком запитання – це перша обернена задача; далі, прикриваючи (замінюючи) знаком запитання друге числове дане, діти складають другу обернену задачу. При цьому учні з’ясовують, що обернених задач буде стільки, скільки числових даних в прямій задачі. В простих задачах (в стандартному вигляді) є двоє числових даних, тому до простої задачі можна скласти дві обернені задачі. Діти порівнюють математичні структури задач і визначають їх вид та доходять висновку, що спільним, наприклад, у трійки взаємно обернених задач на знаходження остачі - на знаходження невідомого зменшуваного - невідомого від'ємника або на знаходження суми – на знаходження першого доданка – на знаходження другого доданка або на різницеве порівняння – на збільшення числа на кілька одиниць – на зменшення числа на кілька одиниць, є слова-ознаки. Ці слова визначають вид співвідношення відповідно віднімання або додавання або різницевого порівняння. В залежності від того, який член співвідношення є шуканим, вибирається і арифметична дія, за допомогою якої розв'язується задача. Таким чином, здійснюється *попереднє ознайомлення з дією встановлення виду співвідношення.* Крім того, на основі порівняння опорних схем трійок взаємно обернених задач: на знаходження суми, першого доданка, другого доданка або на знаходження остачі, на знаходження зменшуваного та на знаходження від'ємника, відбувається опрацювання дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі в матеріалізованій формі*.

Новий порядок роботи над задачами за пам'яткою № 2. *Здійснюється попереднє ознайомлення з дією розв'язання простих задач за пам'яткою № 2*. Всі дії, виконання яких передбачає ця пам'ятка, вже засвоєні або знаходяться в процесі формування (а саме – вибір числових даних). Тому достатньо вчителю пояснити учням, що відтепер над задачею будемо працювати за новою пам'яткою, і запропонувати учням прочитати текст пам'ятки і з'ясувати, чи все їм зрозуміло, чи вміють вони виконувати усі завдання цієї пам'ятки.

Пам'ятка №2

1. Прочитай задачу та уяви про що в ній ідеться. Про що ідеться в задачі?
2. Виділи ключові слова та відповідні їм числові дані; яке число є шуканим? Склади короткий запис задачі.
3. За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання. Зроби схематичний малюнок.
4. Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти?

   Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі?
5. Запиши розв'язок задачі.
6. Запиши відповідь.

7. Перевір розв'язок: склади і розв'яжи обернену задачу.

Отже, всі задачі розв'язуються за пам'яткою №2: запитання учителя будуються на підставі пунктів пам'ятки, а учні слідкують за текстом пам'ятки (*засвоєння дії роботи над задачею за пам'яткою № 2 в матеріалізованій формі*). Внаслідок такої роботи можна очікувати, що здійсниться мимовільне запам'ятовування тексту пам'ятки, без прикладання спеціальних зусиль з боку учнів. Схематичний малюнок до задачі складається в разі потреби у ньому або за вимогою учителя. Самостійна робота над задачею здійснюється також за пам'яткою №2 з безпосереднім використанням тексту пам'ятки.

На цьому етапі відбувається подальше засвоєння *дії визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі*, яка опрацьовується у *формі голосного мовлення*.

Розглянемо приклад методики роботи над задачею за пам'яткою №2.

У господарки було 13 морквин, 3 морквини вона віддала козеняті. Скільки морквин залишилося?

Про що розповідається в задачі? (В задачі розповідається про морквини: було 13 морквин, віддали 3 морквини; запитується, скільки залишилося морквин).

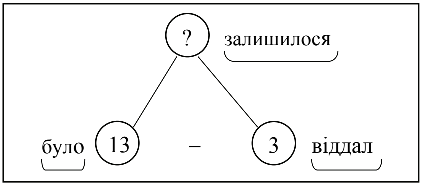
Виділи ключові слова та склади короткий запис задачі. Які слова розкривають ситуацію, описану в задачі? (Було, віддали, залишилося). Запишемо їх. Чи відомо, скільки морквин було? (Було – 13 морквин.) Чи знаємо ми із умови задачі, скільки віддали морквин? (Знаємо, віддали – 3 морквини). Чи відомо, скільки морквин залишилося? (Ні не відомо, поставимо знак запитання – це є запитання задачі.)

Було – 13 м.
Віддали – 3 м.
Залишилося -?

За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання. Що позначає число 13? (Число 13 позначає, скільки було морквин.) Що позначає число 3? (Число 3 позначає скільки віддали морквин.) Яке запитання задачі? (Скільки залишилося морквин?)

Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти? (Потрібно знати два числових значення: І – скільки було морквин (13) та ІІ – скільки віддали морквин (3).)

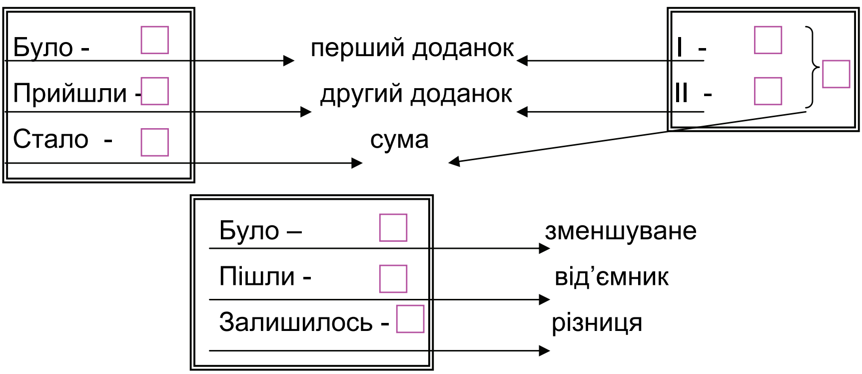
Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (На запитання задачі відповімо дією віднімання, тому що залишилося менше, ніж було.) Процес аналізу ілюструємо схемою:



- *Запиши розв'язання задачі*. (Розв'язання: 13 – 3 = 10 (м.)) *Запиши відповідь*. (Відповідь: 10 морквин залишилося.)

Згідно пропозиціям Л.М.Фрідмана молодших школярів корисно познайомити із словами-ознаками окремих видів співвідношень і, виходячи з цього, з вибором арифметичної дії, за допомогою якої розв’язується задача. **Співвідношення додавання і віднімання. „Переклад” задач на мову математики.** На основі розгляду опорних схем трійок взаємно обернених задач на співвідношення додавання (віднімання) учні встановлюють, що в них однакові слова-ознаки: було – стало, після того, як щось додали, або всього і є перше та друге число (було – залишилося, після того, як щось витратили). Відрізняються вони шуканим: в одній задачі невідомо, скільки стало, в другій – скільки було, а в третій – скільки додали (різні шукані: скільки залишилося, скільки було, скільки витратили). Усі три задачі містять співвідношення додавання (віднімання), але шуканими є різні члени співвідношення.

Далі ці задачі „перекладаються” на мову математики, тобто визначають яким компонентам відповідають певні слова (рис. 6).



Мал. 6. Відповідність ключових слів задач компонентам співвідношення додавання та віднімання

Таким чином, *дія визначення виду співвідношення та визначення слів-ознак окремих видів співвідношень* засвоюється в *матеріалізованій формі*.

Учні визначають, якою арифметичною дією вони відповідатимуть на запитання задачі, якщо шуканими будуть різні компоненти співвідношення додавання (віднімання).

У подальшому, учням пропонуються завдання на визначення виду співвідношення в задачах. При розв'язанні цих завдань учні міркують вголос, отже, дії *визначення виду співвідношення та визначення слів-ознак окремих видів співвідношень* засвоюються у *формі голосного мовлення*.

Співвідношення різницевого порівняння. В аналогічний спосіб йде робота над засвоєнням співвідношення різницевого порівняння. Слова-ознаки співвідношення різницевого порівняння – „на" „більше" чи „менше". Якщо шуканим є число, яке позначає на скільки одне число більше чи менше за друге число, то його знаходять за правилом: щоб дізнатися на скільки одне число більше чи менше від другого, треба від більшого числа відняти менше число. Якщо шукане число на кілька одиниць більше за дане, того знаходять дією додавання. Якщо число на кілька одиниць менше даного, то його знаходять дією віднімання.

Задачі на знаходження суми трьох доданків

Задача на знаходження суми трьох доданків вводяться на основі порівняння із задачею на знаходження суми двох доданків. Учням пропонується розв'язати задачу на знаходження суми двох доданків, а потім порівняти її з наступною задачею – задачею на знаходження суми трьох доданків. Наприклад:

1) В 2–А класі 4 відмінника, в 2-Б класі 6 відмінників. Скільки всього відмінників в цих класах?
2) В 2–А класі 4 відмінника, в 2-Б класі 6 відмінників, а в 2–В 5 відмінників. Скільки всього відмінників в цих класах?

При порівнянні учні встановлюють відмінні ознаки і виконують зміни у короткому записі і схематичному рисунку першої задачі. Далі з'ясовується, як ця відмінність вплине на розв'язання задачі: для відповіді на запитання задачі потрібно не два, а три числових значення. Учням дається опорна схема задач на знаходження суми трьох доданків, і вони переходять до розв'язання задач цього виду, в тому числі й задач, які вимагають переформулювання запитання. Такий методичний підхід має на меті ще й опрацювання *у матеріалізованій формі* дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв’язання задачі*.

На цьому етапі вдосконалюється уміння у виконанні дії *вибору числових даних для відповіді на запитання задачі*, ця дія виконується у *формі голосного мовлення*.

З метою підготовки до введення задач на конкретний зміст добутку, серед задач на знаходження суми трьох доданків можна пропонувати дітям задачі на знаходження суми однакових доданків, з обов'язковим аналізом виразу до задачі.

Задачі на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел

На етапі ***підготовчої роботи*** до ознайомлення з цим видом простих задач учням пропонуються завдання типу: на столі лежать 2 трикутники і 3 круги, намалюйте в зошиті стільки квадратів, скільки трикутників і кругів разом. Тут учні повинні усвідомити, що для того, щоб дізнатися, скільки слід намалювати квадратів, треба міркувати так: квадратів стільки, скільки трикутників і кругів разом; трикутників і кругів разом 2 та 3,тобто 5; тому квадратів теж 5. Або учні можуть діяти практично: покласти на парті трикутники і круги у рядок, а під ними покласти квадрати так, щоб кожному трикутнику і кожному кругу відповідав тільки один квадрат, тобто учні складають пари. Але після такої практичної роботи вчитель разом з учнями відтворює вголос міркування.

Ознайомлення. Після ґрунтовної підготовчої роботи учням пропонується задача на знаходження третього числа за сумою двох даних, яку учні розв’язують під керівництвом учителя. Особливість полягає тут у тому, що під час аналізу розв’язання з’ясовується, що для відповіді на запитання задачі потрібно знати: скільки всього ... та те, що шукане число складає стільки ж; відповісти на запитання задачі відразу ми не можемо, тому що не знаємо скільки всього...; щоб дізнатися скільки всього, треба знати два числових значення: перше – ... та друге ...; відповімо на запитання задачі дією додавання.

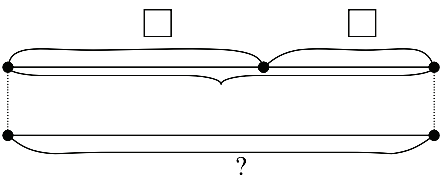
Приклад роботи над задачами цього виду поданий у додатку А (задача 1).

З метою усвідомлення істотних особливостей задач даної математичної структури пропонуємо учням для розв'язання пари задач: задачі на знаходження суми і задачі на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел, а також пропонується виконати зміни в задачі на знаходження третього числа по сумі двох даних, так щоб одержати задачу на знаходження суми. Наприклад:

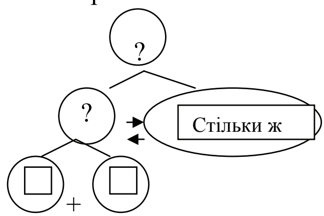
1) Для годування кролів на фермі приготували 7 кг моркви, 3 кг буряків. Скільки всього кілограмів овочів приготували для годування кролів?

2) Для годування кролів на фермі приготували 7 кг моркви, 3 кг буряків, а капусти стільки, скільки моркви і буряків разом. Скільки кілограмів капусти приготували для годування кролів?

Аналіз умови



Аналіз розв'язання



В результаті усвідомлення істотних ознак задач цього виду учні будуть змозі виконати завдання на постановку запитання до даної умови і отримати задачу на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел.

На цьому етапі вдосконалюється уміння у виконанні *дії вибору числових даних для відповіді на запитання задачі – вона виконується у формі голосного мовлення. Дії порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі - у формі голосного мовлення*.

Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, що сформульовані у непрямій формі

На етапі ***підготовки*** до ознайомлення з задачами даного виду, які сформульовані в непрямій формі розв'язуються задачі на різницеве порівняння з двома запитаннями, наприклад: "У класі 13 хлопчиків та 16 дівчат. На скільки більше дівчат, ніж хлопчиків? На скільки менше хлопчиків, ніж дівчат?". Після розв'язання цієї задачі учні роблять висновок: “Дівчат на стільки більше, ніж хлопчиків, на скільки менше хлопчиків, ніж дівчат.” І узагальнюють його: “на скільки одне число $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ за друге число, на стільки ж друге число $\frac{\textit{менше}}{\textit{більше}}$ за перше.” Також корисними є вправи на розв’язання задач даного виду, які сформульовані в прямій формі.

Ознайомлення відбувається на основі перетворення задачі, що сформульована в прямій формі, у задачу, в якій зв’язок між числами сформульований в непрямій формі. Наприклад,

“З першої ділянки зібрали 54 кг моркви, а з другої – на 12 кг більше. Скільки кілограмів моркви зібрали з другої ділянки?”. Розв’язавши цю задачу учні встановлюють, що тут знайшли число, яке на 12 більше за 54, виконавши додавання. Звертаємо увагу учнів на те, якщо знайдене число на 12 більше за число 54, то число 54 на 12 менше за знайдене число.

Цю задачу можна перетворити в задачу, сформульовану в непрямій формі: „З першої ділянки зібрали 54 кг моркви, це на 12 кг менше, ніж з другої ділянки. Скільки кілограмів моркви зібрали з другої ділянки?” Учні порівнюють зміст обох задач і встановлюють, що вони відрізняються лише тим, що в першій задачі говорилося про те, що з другої ділянки зібрали на 12 кг більше, а в даній задачі сказано, що з першої зібрали 54 кг, а це на 12 кг менше, ніж з другої ділянки. Тобто в першій задачі дається числове значення маси моркви, яку зібрали з першої ділянки, а числове значення маси моркви, яку зібрали з другої ділянки, невідоме, але говориться, що з неї зібрали на 12 кг більше, ніж з першої. У другій задачі також дано числове значення маси моркви, яку зібрали з першої ділянки, і зовсім нічого не дано стосовно маси моркви, яку зібрали з другої ділянки; тим часом про масу моркви, яку зібрали з першої ділянки, додатково розповідається, що це на 12 кг менше, ніж з другої ділянки. Ці дві задачі відрізняються своєю структурою (мал. 7).

Пряма форма	Непряма форма
I - □ II - ? , на □ більше	I - □, це на □ менше II - ?

Пряма форма *Непряма форма*

Мал. 7. Опорні схеми задач на збільшення або зменшення числа на кілько одиниць, що сформульовані у прямі та у непрямій формі

У першій задачі до кожного випадку (І чи ІІ) подані числові значення, а в другій задачі – до першого випадку пропонуються два числових значення, а до другого – жодного (здійснюється *в матеріалізованій формі* опрацювання дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі)*.

Розв'язуючи отриману задачу, слід запитати "Більше чи менше кілограмів моркви зібрали з другої ділянки?", "На скільки більше кілограмів моркви зібрали з другої ділянки, ніж з першої?", "Якою дією знаходимо більше число?". Таким чином, учні встановлюють, що тут треба знайти число, яке теж на 12 більше за 54: з першої ділянки зібрали на 12 кг менше, ніж з другої, тому з другої ділянки зібрали на 12 кг більше, ніж з першої; це означає, що для розв'язання задачі треба виконати дію додавання.

Порівнюючи розв'язання обох задач, доходимо висновку, що вони мають однакове розв'язання. Тобто основним є визначення: яке число ми знаходимо – більше чи менше, що обумовлює вибір арифметичної дії.

Зазначимо, що з метою попередження помилок корисно пропонувати учням саме пари задач у прямій та непрямій формі та проводити порівняльний аналіз їх умов та розв'язань. Крім того, завдання на зіставлення задач корисні з точки зору формування дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі* (дія виконується у *формі голосного мовлення*).

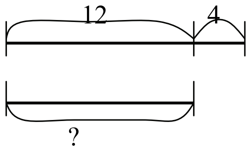
Так, учням пропонується пара задач: задача на збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць, що сформульована в прямій формі, та аналогічна задача, що сформульована у непрямій формі, і дві схеми; діти повинні вибрати схему за текстом кожної задачі. Вони з'ясовують, що обом задачам відповідає одна й та схема, незважаючи на різницю у формулюванні умов.

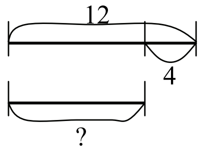
Наприклад: Чим схожі тексти задач? Чим відрізняються?

1) На першій полиці 12 книжок. Це на 4 книжки більше, ніж на другій полиці. Скільки книжок на другій полиці?

2) На першій полиці 12 книжок. На другій полиці на 4 книжки менше, ніж на першій. Скільки книжок на другій полиці?

Вибери для кожної задачі схематичний малюнок:

а) 

б) 

Далі подаються для розв'язання пари задач, розв'язки яких порівнюються і учні встановлюють їх відмінність: в першій зв'язок між числами (різницеве відношення чисел) сформульований прямо, а в другій – непрямо. Таким чином, учні усвідомлюють, що не завжди з словом "менше" треба пов'язувати дію віднімання, а з словом "більше" – додавання. Тому при виборі арифметичної дії в задачах даного виду слід міркувати так:

1. *Встановити, яке число слід знайти - більше чи менше.*
2. *На цій підставі обрати арифметичну дію.*

На цьому етапі опрацьовується у *формі зовнішнього мовлення* дія *вибору арифметичної дії при розв'язанні задачі.*

Задачі на конкретний зміст дії множення і ділення

Підготовча робота. Традиційно задачі на конкретний зміст дії множення і на конкретний зміст дії ділення на рівні частини і на вміщення вивчаються окремо, послідовно одна за одною. Дія множення розуміється як додавання однакових доданків. А дію ділення на вміщення можна розглядати як віднімання однакових чисел доки не одержимо нуль. Познайомивши учнів з цими теоретичними положеннями ми озброюємо учнів методом знаходження результатів арифметичних дій множення і ділення, навіть тоді, коли вони ще не знають таблиць множення і ділення, способів позатабличного множення і ділення.

Тому ми змінили традиційний порядок вивчення цих задач і, виходячи з теорії укрупнення дидактичних одиниць при навчанні математики П. М. Ерднієва, пропонуємо вивчати ці задачі ***за двома циклами:***

1. *Задачі на конкретний зміст дії множення і ділення на вміщення.*
2. *Задачі на конкретний зміст дії ділення на рівні частини та ділення на вміщення.*

Цей підхід надає можливість розв'язувати задачі на конкретний зміст арифметичних дій множення і ділення на вміщення не притримуючись вивчення відповідних таблиць множення і ділення [93].

На етапі ***підготовчої роботи*** *до ознайомлення з задачами на конкретний зміст дії множення* пропонуємо учням задачі на знаходження суми однакових доданків, на складання задач за даним виразом – сумою однакових доданків, на складання задач за малюнком, на перерахування великої кількості предметів, способом групування. Розв'язуючи завдання на перерахунок великої кількості предметів учні переконуються, що рахувати їх дуже довго. Тоді вчитель розбиває їх на п'ятірки, зрозуміло що п'ятірками рахувати легше. Таким чином учні усвідомлюють роль групової лічби, засвоюють цю техніку, розв'язують завдання на знаходження суми однакових доданків. Практична вагомість групової лічби показується на прикладах із життя: лічба вишень по три (3+3+3=9), лічба грошей п'ятикопійочними монетами (5+5+5+5=20), лічба паличок із яких складено чотирикутники (4+4+4+4+4=20). Далі пропонуємо учням порахувати двійками, трійками, четвірками, п'ятірками тощо. З цією метою застосовуємо стрічку чисел від 1 до 100, в кожній клітинці якої записані числа, по порядку. Саме за допомогою цієї стрічки учні рахують групами: вся стрічка перегинається на смужки по певній кількості клітинок і читаються всі числа на кінцях риски.

Окрему групу підготовчих завдань до введення дії множення складають завдання на обчислення суми однакових доданків. Увага при виконанні завдань звертається на те, що доданки однакові, і визначається число однакових доданків. Розв'язок записуємо так:

$$\underbrace{4+4+4+4+4}_{5\ \text{разів}} = 20$$

Застосовуючи запис такої форми, розв'язуємо задачі на знаходження суми трьох, чотирьох і більше однакових доданків.

Під час ***підготовчої роботи*** *до ознайомлення з дією ділення на вміщення* учні виконують практичні завдання типу:

„12 зошитів роздали учням по 4 зошити. Скільки учнів отримали зошити?"

- По скільки зошитів повинні отримати учні? (По 4 зошити). Візьміть 4 зошити і дайте першому учню. Якщо ми віддаємо зошити, то зошитів лишається більше чи менше? Якою арифметичною дією дізнаємось скільки зошитів залишилось, якщо ми віддали 4 зошити? Дією віднімання, запишемо це : 12 – 4
- Чи всі зошити ми роздали?
- Візьміть ще 4 зошити і дайте другому учню. Продовжимо записувати вираз: 12 – 4 – 4

- Чи всі зошити роздали? (Ні, не всі). Візьміть ще 4 зошити і дайте ще одному учню. Запишемо: 12 – 4 – 4 – 4.
- Чи всі зошити ми роздали? Запишемо це : 12 – 4 – 4 – 4 = 0.

Скільки учнів отримали зошити? (3 учня отримали зошити.) Учнів буде стільки, скільки в 12 зошитах вміщується по 4 зошити. Запишемо це:

$$12 \underbrace{- 4 - 4 - 4}_{\text{3 рази}} = 0$$

Читаємо так: в 12 вміщується по 4 три рази. Отже, 3 учні отримали зошити.

Особливе місце займає на етапі підготовчої роботи розв’язання задач, аналогічних розглянутим, причому, учні переходять від практичних дій до малюнків, а від них до схематичного рисунка і записують розв’язання задачі у вигляді різниці, яку інтерпретують певним чином.

На етапі підготовчої роботи до введення дій множення і ділення, учні вчаться ілюструвати додавання однакових доданків та віднімання однакових чисел, доки не отримаємо нуль, у вигляді схематичного рисунка. Отже, на цьому етапі здійснюється подальше опрацювання *дії складання схематичного малюнку та інтерпретування відрізків як деякої величини* у *формі голосного мовлення*.

Ознайомлення із задачами на конкретний зміст дії множення відбувається під час ознайомлення з цією дією. Ми пропонуємо учням для порівняння пару задач: обидві задачі на знаходження суми, але перша задача на знаходження суми неоднакових доданків, а друга – на знаходження суми рівних доданків. Наприклад:

1) На трьох тарілках лежать пиріжки: на першій 4 пиріжка, на другій – 3 пиріжка, а на третій – 5 пиріжків. Скільки всього пиріжків лежить на трьох тарілках?

2) На трьох тарілках лежать пиріжки по 4 пиріжка на кожній тарілці. Скільки всього пиріжків лежить на трьох тарілках?

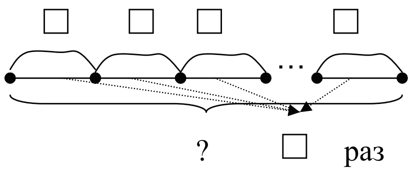
Порівнявши розв’язання цих задач, учні доходять висновку, що вираз, який є розв’язанням другої задачі являє собою суму однакових доданків, а першої – суму неоднакових доданків. Для усвідомлення відмінності між двома цими сумами вчитель пропонує учням записати по кілька прикладів до кожного виду сум. Отже, в окрему групу виділяються суми однакових доданків. Після чого вчитель повідомляє, що суму однакових доданків можна замінити новою арифметичною дією – множенням. Вводиться знак дії множення, і учні вчаться замінювати суму рівних доданків дією множення і читати записані вирази.

Аналогічно, для ***ознайомлення з дією ділення на вміщення*** пропонується задача, яку діти на етапі підготовчої роботи розв'язували відніманням, після її розв'язання учням повідомляється, що віднімання однакових чисел, доки не одержимо нуль, можна замінити дією ділення. Діти виконують вправи на заміну віднімання діленням і читають записані рівності.

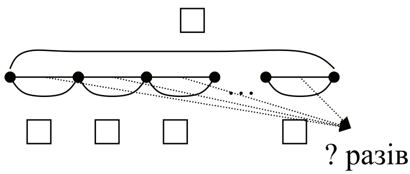
Далі задачі цих видів розв'язуються двома способами: додаванням і множенням або відніманням і діленням. До прямої задачі, наприклад на конкретний зміст дії множення (знаходження суми однакових доданків) складається і розв'язується обернена задача на конкретний зміст дії ділення на вміщення.

На даному етапі вводяться слова-ознаки співвідношення переходу від меншої одиниці лічби або вимірювання до більшої (по ... взяти ... разів) та співвідношення розбиття цілого на рівні частини (... розділили по...).

По □ взяти □ разів - ?



В □ вміщується по □ - ?



Мал.8. Опорні схеми і схематичні рисунки задач на конкретний зміст дії множення і ділення на вміщення

Якщо в задачі говориться про те, що щось

$\frac{\textit{взяли}}{\textit{розсипали, розрізали, розклали....}}$ **по** ... , то треба виконати дію $\frac{\textit{множення}}{\textit{ділення}}$.

Засвоєння дії *виділення слів-ознак окремих видів співвідношень* йде від *матеріалізованої* форми, коли діти підкреслюють в тексті задачі слова-ознаки до промовляння їх вголос, після переказу задачі. Отже, ця *дія* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*. На основі виділених слів-ознак вибирається арифметична дія, за допомогою якої розв’язується задача, тому *дія обґрунтування вибору арифметичної дії* засвоюється у *формі голосного мовлення*.

Задачі на конкретний зміст дії ділення на рівні частини вводяться на основі порівняння пари задач: перша задача на ділення на вміщення, а друга на ділення на рівні частини. Наприклад:

1) У Наталки 12 цукерок. Вона роздала ці цукерки по 3 кожній подрузі. Скільки подруг отримали цукерки?

2) У Наталки 12 цукерок. Вона роздала ці цукерки порівну трьом подругам. По скільки цукерок отримала кожна подруга?

Учням пропонується розв’язати задачу, яку вони вже вміють розв’язувати (ділення на вміщення), а для відповіді на запитання другої задачі зробити малюнок і зобразити на ньому ці дії. Відповідь на запитання задачі отримано і вчитель показує запис розв’язання, звертаючи увагу, що ця задача теж розв’язується дією ділення, але ділення на рівні частини.

Далі порівнюються опорні схеми таких задач і слова-ознаки, які визначають вид ділення (мал. 9).

Ділення на вміщення	**Ділення на рівні частини**
В □ вміщується по □ - ?	**□ розділити на □ порівну - ?**
□ розділити по □ - ?	

Мал.9. Опорні схеми задач на конкретний зміст дії ділення

Таким чином, *дія виділення слів-ознак окремих видів співвідношень* опрацьовуються у *формі голосного мовлення*, а дія *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв’язання задачі в матеріалізованій формі*.

Якщо в задачі говориться про те, що щось розклали, розрізали, розсипали…

по… , то треба виконати дію ділення **на вміщення** .
порівну **на рівні частини**

Відтепер учням пропонуються для розв’язання трійки взаємно обернених задач: задача на конкретний зміст дії множення, на конкретний зміст дії ділення на вміщення та на конкретний зміст дії ділення на рівні частини. Або учні розв'язують пряму задачу і складають до неї дві обернені задачі. Отже, *дія складання обернених задач* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

Прості задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів

На етапі ***підготовчої роботи*** до введення задач даного виду необхідно актуалізувати конкретний зміст дії множення і ділення, конкретний зміст відношень „більше на кілька одиниць", „менше на кілька одиниць". А також, через спеціальні вправи підвести учнів до усвідомлення конкретного змісту виразів "більше в" та "менше в". З цією метою учням пропонується покласти у рядок три кружечки, а під ними два рази по три кружечки; з'ясовується, де кружків більше, скільки разів у нижньому рядку поклали по стільки кружків, скільки в першому. При цьому вчитель повідомляє, що в нижньому рядку кружечків в 2 рази більше, ніж в першому. Далі ставиться запитання „Де кружечків менше?". Діти пояснюють, що в першому рядку лише один раз по 3 кружечки, а в другому – два рази, у першому рядку у 2 рази менше кружечків, ніж в другому. Наступна вправа передбачає практичні дії з вимогою покласти ліворуч 2 квадрати, а праворуч у 4 рази більше. Діти відповідають, що треба зробити, щоб отримати в 4 рази більше, ніж 2: треба по 2 квадрати взяти 4 рази, про що дізнаємося дією множення ($2 \cdot 4 = 8$), і кладуть праворуч 8 квадратів. В результаті такої роботи маємо висновок: для того, щоб дізнатися про число, яке у кілька разів більше за дане, треба дане число помножити на число, яке показує, у скільки разів шукане більше за дане. Або: про число, яке у кілька разів більше даного, дізнаємося дією множення. Аналогічно працюємо над зменшенням числа у кілька разів.

На етапі підготовки розв'язуються завдання на знаходження числа, яке у кілька разів (або на кілька одиниць) більше чи менше за дане число. На підставі розв'язання таких задач робиться узагальнення: „Більше число знаходимо дією додавання або множення. Додаємо тоді, коли число більше даного **на** кілька **одиниць**. Множимо тоді, коли число більше даного **у** кілька **разів**"; "Менше число знаходимо дією віднімання або ділення. Віднімаємо тоді, коли число менше даного **на** кілька **одиниць**. Ділимо тоді, коли число менше даного **у** кілька **разів**." Таким чином, засвоюються слова-ознаки співвідношення кратного порівняння: „більше (менше) у кілька разів”, а *дія виділення слів-ознак окремих видів співвідношень* засвоюється в *формі голосного мовлення*.

Від практичних дій учні переходять до схематичного зображення відношення „більше (менше) у кілька разів”. Ці завдання мають на меті усвідомлення учнями особливостей схематичного зображення даного відношення і подальшого формування в них *дії складати схематичний малюнок в формі голосного мовлення*.

Після засвоєння відношень „більше у кілька разів”, „менше у кілька разів” відбувається ***ознайомлення*** із задачами даного виду на основі розв’язання пари задач: перша задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, а друга задача на збільшення або зменшення числа у кілька разів (здійснюється *у матеріалізованій формі* формування дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв’язання задачі*). Наприклад:

1) У Сашка 8 марок, а у Толі на 4 марки більше. Скільки марок у Толі?

2) У Сашка 8 марок, а у Толі в 4 рази більше. Скільки марок у Толі?

Перед розв’язанням учні порівнюють задачі, встановлюють їх відмінність і з’ясовують, як ця відмінність вплине на короткий запис задачі, на схематичний рисунок та на розв’язання задачі. Ця відмінність впливає на вибір арифметичної дії: перша задача розв’язується дією додавання, а друга – дією множення. Отже *дія обґрунтування вибору арифметичної* дії набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

При ознайомленні з даним видом простих задач опорні схеми задач на збільшення або зменшення числа у кілька разів подаються у порівнянні з опорними схемами задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.

В результаті порівняння відповідних опорних схем, учні встановлюють їх подібність, тому складання короткого запису задач розглянутого виду не викликає в них труднощів. *Дія складання короткого запису* набуває подальшого засвоєння у *формі „зовнішнього мовлення про себе”*.

Задачі на збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць	**Задачі на збільшення (зменшення) числа у кілька разів**
I – $\square$ **II - ? , на** $\square$ **більше** → $\boxed{+}$	**I –** $\square$ **II - ? , в** $\square$ **р. більше** → $\boxed{*}$
I – $\square$ **II - ? , на** $\square$ **менше** → $\boxed{-}$	**I –** $\square$ **II - ? , в** $\square$ **р. менше** → $\boxed{:}$

Прості задачі на кратне порівняння

Методикою введення нового виду задач передбачено ***підготовчу роботу***, метою якої є засвоєння правила: щоб знайти, у скільки разів одне число більше або менше від іншого числа, треба більше число поділити на менше число.

Правила кратного порівняння можна також ввести на підставі додаткових завдань після розв’язання задач на збільшення або зменшення числа у декілька разів. Наприклад, після розв’язання задачі “Маса індика 15 кг, а гуски – в 3 рази менше. Яка маса гуски?”, можна запропонувати додаткові запитання:

- Яка маса індика?(15 кг). Яка маса гуски? (5 кг).
- Маса якої птиці менша?(Менша маса гуски). У скільки разів маса гуски менша, ніж маса індика?(У 3 рази).
- Маса якої птиці більша? (Більша маса індика). У скільки разів маса індика більша маси гуски? (У стільки ж, у 3 рази).
- Як ви про це дізналися? (В умові задачі, яку ми розв’язали сказано, що маса гуски в 3 рази менша, ніж маса індика).
- Як можна про це дізнатися обчисленням? Яку дію слід виконати між числами 15 та 5, щоб отримати 3? (Про це можна дізнатися дією ділення: 15 : 5 = 3). Що ми зробили, щоб дізнатися, у скільки разів одне число більше другого? (Ми більше число поділили на менше). Який висновок можна зробити про те, як знайти, у скільки разів одне

число більше, ніж друге число? (Щоб знайти, у скільки разів одне число більше другого, треба більше число поділити на менше).

Аналогічно отримуємо висновок: щоб знайти у скільки разів одне число менше другого, треба більше число поділити на менше.

Кратне порівняння слід вводити, зіставляючи з різницевим порівнянням (на цьому етапі здійснюється засвоєння *у матеріалізованій формі* дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі*). Учні визначають, які слова-ознаки визначають дію віднімання (на скільки більше (менше)), а які – дію ділення (у скільки разів більше(менше)). Таким чином, працюємо над формуванням *дії виділення слів-ознак* співвідношення кратного порівняння (*етап голосного мовлення*).

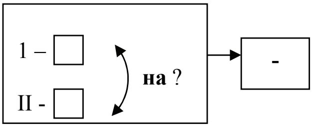
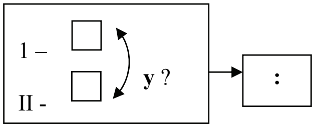
На ступені підготовчої роботи опрацьовуємо дію складання схематичного рисунка до співвідношення кратного порівняння, тому *дія складання схематичного рисунка* набуває подальшого опрацювання у *формі голосного мовлення*.

При ***ознайомленні із задачами на кратне порівняння*** можна застосувати два методичні підходи. Перший полягає у розв'язанні задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів і складання оберненої задачі на кратне порівняння. Ми реалізуємо інший варіант, який полягає у порівнянні пари задач: на різницеве порівняння та на кратне порівняння. Наприклад:

1) Довжина кімнати 6 м, а вітальні 3 м. На скільки метрів довжина кімнати більша за довжину вітальні? На скільки метрів довжина вітальні менша за довжину кімнати?

2) Довжина кімнати 6 м, а вітальні 3 м. У скільки разів довжина кімнати більша за довжину вітальні? У скільки разів довжина вітальні менша за довжину кімнати?

Порівнюючи ці задачі, учні встановлюють, що вони відрізняються запитаннями, а саме, в першій задачі запитується „**На** скільки більше (менше)?", а в другій „**У** скільки разів більше (менше)?". З'ясовуємо, як ця відмінність вплине на короткий запис другої задачі, її схематичний рисунок та розв'язання. Виділені слова-ознаки визначають вибір арифметичної дії, тому перша задача розв'язується дією віднімання, а друга – дією ділення. Таким чином, здійснюється подальше засвоєння *у формі голосного мовлення* дії *обґрунтування вибору арифметичної дії*.

Задачі на різницеве порівняння	**Задачі на кратне порівняння**
	

При закріпленні цих задач учням пропонують в тексті задачі підкреслити слова, які допоможуть вибрати опорну схему задачі і арифметичну дії при її розв’язанні, таким чином *дія виділення слів-ознак співвідношення* кратного порівняння формується у *матеріалізованій формі*.

Пропозиція завдань на складання і розв’язання обернених задач до задачі на кратне порівняння має на меті подальше опрацювання *у формі голосного мовлення* дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв’язання задачі*.

Формування уміння розв'язувати прості задачі в 3-му класі

При ознайомленні з простими задачами, що містять пропорційні величини, учні опрацьовують дії, що відповідають аналізу задачної ситуації (виділяти величини, що містяться в задачі, виділяти ключові слова і виділяти числові значення відповідних величин; записувати задачу у вигляді таблиці); прикидки очікуваного результату на основі знання характеру зміни однієї величини від зміни другої величини при сталій третій величині і її перевірки.

Прості задачі, що містять пропорційні величини

Задачі з пропорційними величинами вводяться тоді, коли учні вже добре засвоїли конкретний зміст дій множення і ділення. Але, вони стикаються з певними труднощами, щоразу зустрічаючись з новими величинами. Виходячи з цього, вважаємо за необхідне проводити спеціальну роботу з ознайомлення школярів з пропорційними величинами [103].

Отже, знайомимо учнів з групами пропорційних величин:

- маса одного предмета, кількість предметів, загальна маса,
- об’єм однієї посудини, кількість посудин, загальний об’єм,

- довжина одного відрізу, кількість відрізів, загальна довжина,
- ціна товару, кількість товару, вартість,
- продуктивність праці, час роботи, загальний виробіток;
- витрата на один виріб, кількість виробів, загальна витрата, та зв'язками між ними.

Ці групи пропорційних величин вводимо за планом:

1. Ознайомлення з термінами: "загальна маса", "загальна довжина", "загальний об'єм". Прямо пропорційна залежність між величинами; знаходження загального значення величини.
2. Обернено-пропорційна залежність між величинами. Знаходження значення величини однієї одиниці виміру та знаходження кількості за відомими двома значеннями.
3. Прості задачі з пропорційними величинами.
4. Зміна загальної величини в залежності від зміни іншої величини (величини однієї одиниці або кількості) при сталій третій величині (кількості або величини однієї одиниці).
5. Зміна кількості в залежності від зміни величини однієї одиниці при сталій загальній величині. Зміна кількості в залежності від зміни загальної величини при сталій величині однієї одиниці.
6. Зміна величини однієї одиниці в залежності від зміни загальної величини при сталій кількості. Зміна величини однієї одиниці в залежності від зміни кількості при сталій загальній величині .
7. Ознайомлення з величинами: вартість, ціна одного предмету, кількість предметів.
8. Задачі з величинами: вартість, ціна, кількість. Зміна однієї величини в залежності від іншої при однаковій третій величині.
9. Величини: продуктивність праці, час роботи, загальний виробіток.
10. Ознайомлення з іншими пропорційними величинами.

Ознайомлення з пропорційними величинами здійснюється через розв'язування простих задач. Наприклад:

Мама купила на базарі 2 кг огірків, 1 кг помідорів та 3 кг картоплі. Знайдіть масу всіх овочів.

Зробіть схематичний рисунок і покажіть масу усіх овочів. Як можна дізнатися про масу всіх овочів? (Слід додати: 2+ 1 + 3 = 6 (кг)

- всього овочів купила мама). Масу всіх овочів можна назвати “*загальна маса* овочів”.

Мама купила 3 пачки сілі по 1 кг кожна, знайдіть *загальну масу* солі.

Зробіть схематичний рисунок. Порівняйте ці задачі? Чим вони схожі? (В обох задачах йдеться про масу декількох предметів і треба знайти *загальну масу*). Чим вони відрізняються? (В першій задачі говориться про предмети, що мають різну масу, а в другій – про предмети, що мають однакову масу). Як можна знайти *загальну масу* однакових предметів – однакових пачок солі? (Щоб визначити *загальну масу* солі можна додати: 1 + 1 + 1 = 3 (кг) – *загальна маса* солі; але тут маємо суму однакових доданків, а в математиці суму однакових доданків називають множенням, тому цю задачу можна розв’язати дією множення: 1 · 3 = 3 (кг) – *загальна маса* солі).

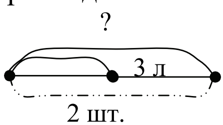
Уважно розгляньте останню рівність. Що означає число 1? (Маса однієї пачки солі). Що означає число 3? (Скільки купили пачок солі). Як це можна інакше сказати? “Скільки предметів?” – це кількість предметів. Виходячи з цього, розкажіть правило про те, як дізнатися про *загальну масу* декількох однакових предметів. (Щоб знайти *загальну масу* декількох однакових предметів, треба *масу одного предмету помножити на кількість предметів*).

У аналогічний спосіб здійснюється ознайомлення з величинами „загальна довжина” та „загальний об’єм”. Таким чином, здійснюється *етап попереднього ознайомлення з дією виділення величин, що містяться в задачі*. Аналізуючи розв’язки, виводимо правила знаходження числового значення загальної величини за двома відомими числовими значеннями інших величин.

Загальна	маса довжина об’єм	=	маса довжина об’єм	1	·	кількість

Мал. 10. Правило знаходження загальної величини

Застосовуючи це правило учні розв’язують задачі, в яких подано вимогу знайти загальну величину і до яких наведений схематичний рисунок. Наприклад:



У двох бутлях по 3 л соку. Знайдіть загальний об’єм соку.

Також пропонуються завдання на переформулювання запитання задачі так, що в ньому було явно вказано значення якої величини слід знайти:

Порівняй задачу з попередніми. Переформулюй запитання задачі. Батько приніс дві сітки по 4 кг картоплі. Скільки всього кілограмів картоплі приніс батько?

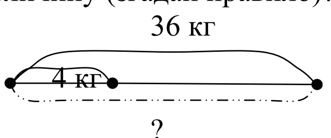
Після розв'язування задачі пропонуємо учням додаткові запитання: „Що станеться із загальною масою картоплі, якщо кількість сіток збільшиться? Зменшиться?”.

Школярам радимо не розв'язуючи задачі змінити числові значення величин, так, щоб у відповіді отримати більше (менше) число:

1. Мама купила 4 пакети соку по 2 літри в кожному. Скільки всього літрів соку купила мама?
2. Для виготовлення закладок дівчинка відрізала від стрічки 5 разів по 2 дм. Скільки всього дециметрів відрізала від стрічки дівчинка?
3. Восьмеро школярів збирали полуницю, при чому кожний із них назбирав по 2 кг полуниці. Скільки всього кілограмів полуниці назбирали школярі?

Таким чином, спочатку вводяться правила знаходження загальних величин (маси, довжини, об'єму), і лише після цього, на основі правил знаходження невідомих множників вводяться правила знаходження величини однієї одиниці та правила знаходження кількості. Учні вчаться застосовувати ці правила при розв'язуванні задач. Наприклад:

Числове значення якої величини є шуканим? Як знайти невідому величину (згадай правило)?



В супермаркеті розфасували 36 кг цукру по пакетах по 4 кг у кожний. Скільки отримали пакетів з цукром?

Далі учні вчаться у задачах виділяти певну групу величин, з'ясовувати якими числовими даними вони подані і значення якої величини є шуканим, записувати задачу коротко в формі таблиці і актуалізувати правило знаходження шуканої величини та застосовувати його для розв'язання задачі. На цьому етапі пропонуються задачі з трьома групами пропорційних величин (маса одного предмета, кількість предметів, загальна маса; об'єм однієї посудини, кількість посудин, загальний об'єм; довжина одного відрізу, кількість відрізів, загальна довжина). Розв'язуючи задачі на знаходження загальної величини або на знаходження величини однієї одиниці або на знаходження значення кількості з опорою на наочне подання відповідних правил або груп величин, учні опрацьовують *у матеріалізованій формі* дію *виділення величин*, що містяться в задачі.

При розв'язанні задач на знаходження однієї з трьох величин учням спочатку подаються зразки коротких записів у формі таблиці, а потім вони складають короткий запис самостійно, на основі знання груп пропорційних величин та володіючи загальним підходом до їх визначення:

1) на основі найменувань, що стоять поряд з числами задачі, визначити, про яку величину йде мова в задачі: якщо в задачі є іменоване число, подане у кілограмах, грамах, тонах тощо, то в задачі йдеться про масу; якщо іменоване число подано у сантиметрах, метрах, дециметрах тощо – то йде мова про довжину; якщо іменоване число подано у літрах – то йде мова про об'єм;

2) згадати групу пропорційних величин, що пов'язана із масою, або довжиною, або об'ємом.

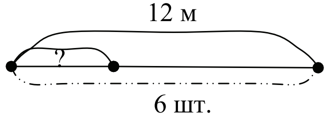
Таким чином, здійснюється опрацювання *у матеріалізованій формі* дії *складання короткого запису задачі у вигляді таблиці*. Після того, як діти поступово відходять від застосування зразків, а самостійно вголос промовляють усі міркування по виділенню величин та запису числових значень цих величин в таблиці, *дія складання короткого запису у вигляді таблиці* набуває подальшого засвоєння в *формі голосного мовлення*. Після розв'язання достатньої кількості задач з пропорційними величинами, ця дія поступово згортається, і учень, прочитавши задачу, відразу визначає групу пропорційних величин, яка міститься в даній задачі і записує числові значення цих величин в таблиці (*етап „зовнішнього мовлення про себе”*), а якщо учень відразу після читання задачі без додаткових пояснень записує короткий запис у вигляді таблиці, то це свідчить про те, що дія перейшла у *внутрішній план*.

Широко застосовується складання і розв'язанні трійок взаємно *обернених задач* з даною групою пропорційних величин (*етап „зовнішнього мовлення про себе”*).

Розглянемо методику роботи над задачею:

Теслярі розпиляли колоду довжиною 12 метрів на 6 рівних частин. Яка довжина кожної частини?

- Прочитайте задачу та уявіть, про що в ній говориться? (В задачі говориться про те, що теслярі розрізали колоду довжиною 12 метрів на 6 рівних частин).
- Яке запитання задачі? (Яка довжина кожної частини?).



- Як ви думаєте, які величини можна виділити в задачі? (Можна виділити довжину всієї колоди, тобто його загальну довжину, і на скільки частин його розрізали, тобто – кількість частин).
- Яке запитання задачі? (Яка довжина кожної частини – тобто довжина 1 частини).
- Давайте запишемо умову задачі за допомогою таблиці і з використанням виділених величин.

Загальна довжина	Довжина 1 частини	Кількість частин
12 м	?	6 шт.

- По короткому запису поясніть числа задачі.
- Що означає число 6? (Означає кількість частин на які розрізали колоду).
- Що означає число 12? (Означає загальну довжину колоди, виражену в метрах).
- Яке запитання задачі? (Яка довжина 1 частини?)
- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Нам потрібно знати два числові значення: загальну довжину колоди, відомо – 12 метрів та кількість частин, на які розрізали колоду, відомо – 6 частин).
- Якою дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Так) Чому? (Тому що відомі обидва числові значення).
- Запишемо розв’язання. Як слід міркувати, щоб 12 поділити на 6? (12 поділити на 6 – це означає знайти таке число, яке при множенні на 6 дає 12. Це число 2, тому що $2 \cdot 6 = 12$). $12 : 6 = 2$ (м).
- Запишемо відповідь

Відповідь: 2 метра довжина 1 частини колоди.

- Значення якої величини ми знайшли в цій задачі? Розкажіть правило, як знайти довжину 1 частини. Як ви його вивели? (На підставі розв’язання цієї задачі). А як можна міркувати не спираючись на розв’язок цієї задачі? Чому дорівнює загальна довжина? (Загальна довжина – дорівнює добутку довжини 1 частини і кількості частин. Тобто загальна довжина – це добуток, довжина 1 частини – це 1 множник, кількість частин – це 2 множник).

Загальна довжина	=	довжина 1 предмету	·	кількість
Добуток	=	1 множник	·	2 множник

Мал. 11. Правило знаходження загальної довжини

- Як на підставі взаємозв'язку між добутком і множником вивести це правило для знаходження довжини 1 частини? (Якщо добуток – загальну довжину поділити на другий множник – кількість, то отримаємо перший множник – довжину 1 предмету). Розкажіть правило, як знайти довжину 1 предмету.
- Розкажіть правило, як знайти кількість предметів.
- Випишіть числа даної задачі: 12, 2, 6. Поясніть, що означають ці числа.
- Складіть обернену задачу так, щоб невідомою була кількість частин. Розв'яжіть цю задачу.
- Складіть обернену задачу так, щоб невідомою була загальна довжина. Розв'яжіть цю задачу.

Потім обговорюється питання про прямо пропорційну залежність загальної величини від зміни однієї з двох інших величин при сталій третій та обернено пропорційну залежність величини однієї одиниці від зміни кількості при сталій загальній величині (*етап попереднього ознайомлення з* дією *прикидки значення шуканої величини*). Спираючись на наочне подання виведених правил знаходження загальної величини, величини однієї одиниці і кількості, дітям пропонуються завдання на зміну числового даного задачі так, щоб відповідь збільшилася або зменшилася (*дія прикидки значення шуканої величини* засвоюється в *матеріалізованій формі*).

Наприклад, розглянемо *зміну кількості в залежності від зміни величини однієї одиниці при сталій загальній величині*.

- Уявіть собі, що 24 кг борошна спочатку розсипали у пакети по 3 кг кожний, а потім таку ж саму масу розсипали у пакети по 4 кг кожний. В якому випадку отримали більшу кількість пакетів борошна? В якому – меншу?
- Якщо маса 1 предмету збільшиться (зменшиться), то що стане з кількістю предметів (при однаковій загальній масі)?

Знайдіть підтвердження висновку у таблиці. Уважно розгляньте три випадки таблиці. Значення якої величини не змінюється? Значення якої величини змінюється? Це змінна величина. Значення якої величини треба відшукати? Знайдіть кількість предметів у кожному випадку.

Загальна маса (кг)	Маса 1 предмета (кг)	Кількість предметів (шт.)
12 кг	2 кг	? шт.
12 кг	3 кг	? шт.
12 кг	4кг	? шт.

- Розгляньте отримані результати. В якому випадку кількість найбільша? Найменша? Чому? Яка існує залежність між кількістю та масою 1 предмету при однаковій загальній масі?

Далі учні виконують аналогічні завдання з іншими групами пропорційних величин.

Після ознайомлення з групами пропорційних величин, які пов'язані з масою, довжиною та об'ємом, водиться наступна група величин: ***вартість, ціна, кількість***. На підставі порівняння відомих трьох груп величин, учні встановлюють, що в кожній групі є загальна величина, величина однієї одиниці та кількість. Вчитель повідомляє, що якщо об'єктом задачі є процес купівлі або продажу, то вона містить величини: вартість, ціну і кількість товару. Далі йде пояснення, що вартість – це кількість грошей, яку сплачують за всю покупку, а ціна – це вартість однієї речі. Таким чином, уся покупка характеризується вартістю або загальною вартістю – кількістю грошей, що заплачено за неї; також ціною – вартістю однієї речі – кількістю грошей за одну річ; та кількістю речей. Учні порівнюють цю групу величин з кожною з трьох розглянутих раніше груп та визначають, що спільним є наявність загальної величини (вартість, загальна маса, загальна довжина, загальний об'єм), величини однієї одиниці (ціна, маса одного предмета, довжина одного відрізу, об'єм однієї посудини) та кількість. Далі згадується, що загальна величина – це добуток величини однієї одиниці і кількості і робимо висновок про знаходження вартості покупки. На основі правила знаходження невідомого множника, з правила знаходження вартості отримуємо правила знаходження ціни і кількості. Це можна зробити наступним чином:

1. Склади задачі з числами: ?, 5, 9, з кожною групою величин.

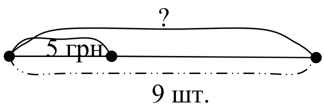
- Якою дією знаходять загальне значення величини? Чому? Чи можна такою самою дією знайти загальну вартість покупки? Сформулюйте це правило.

Щоб знайти загальну вартість, треба ціну помножити на кількість.

загальна вартість = ціна · кількість

2. Склади задачу з цими ж числами, але про покупку.
Запиши її коротко в формі таблиці.

Загальна вартість (грн.)	Ціна – вартість 1 речі (грн.)	Кількість речей (шт.)
? грн.	5 грн.	9 шт.



- За коротким записом поясніть числа задачі. Як запитання задачі?
- Більше чи менше число за 5 отримаємо у відповіді? Чому?
- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: 1 – ціну (5 грн.) та ІІ – кількість (9 шт.)). Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення). Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Так, нам відомі обидва числові значення).
- Запишіть розв’язання задачі: $5 \cdot 9 = 54$ (грн.) Запишіть відповідь: 54 гривень – вартість покупки. Таким чином, ми розглянули чотири основних правила на знаходження загального значення величини. Розкажіть їх. Які правила можна з них отримати і на підставі чого? Чи є щось спільне у знаходженні величини (маси, довжини, об’єму) 1 одиниці? (Так, щоб знайти величину (масу довжину об’єм) 1 предмету треба загальне значення (маси, довжини, об’єму) поділити на кількість).
- Чи можна так само знайти вартість 1 предмету – ціну? Розкажіть правило.

Щоб знайти ціну, треба загальну вартість поділити на кількість.

ціна = загальна вартість : кількість

- Чи є щось спільне у знаходженні кількості? (Так, щоб знайти кількість треба загальне значення величини (маси, довжини, об'єму) поділити на значення величини (маси, довжини, об'єму) 1 предмету). Як можна знайти кількість предметів, що купили? Сформулюйте правило.

Щоб знайти кількість, треба загальну вартість поділити на ціну.   кількість = загальна вартість : ціна

Учні розв'язують задачі на знаходження вартості або ціни або кількості. Далі можна розглянути питання про зміну вартості в залежності від зміни кількості або ціни; про зміну ціни в залежності від зміни вартості або кількості; про зміну кількості в залежності від зміни вартості або ціни.

Величини: ***загальний виробіток, продуктивність праці та час роботи*** вводимо на основі порівняння двох задач, в яких дуже схожа ситуація (йде мова про кравчиню), але в одній містяться величини однієї з відомих груп (загальна довжина (витрата) тканини, довжина (витрата) тканини на один виріб, кількість виробів), а в другій – описується процес роботи, тому міститься нова група величин – загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи:

1) Кравчиня пошила 8 наборів серветок, витрачаючи на кожний набір по 3 м тканини. Скільки всього тканини втратила на серветки кравчиня?
2) Кравчиня кожної години шиє по 4 набори серветок. Скільки наборів серветок пошиє кравчиня за 3 години роботи?

Над другою задачею працюємо аналогічно, і виділяємо групу величин, яку поки ще називаємо відповідно їх смислу: загальна кількість виробів, кількість виробів за 1 годину і час роботи. Далі учитель повідомляє, що загальна кількість виробів називається загальним виробітком, кількість виробів за одиницю часу – продуктивністю праці. Отже, учні знайомляться з новою групою пропорційних величин: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи. Після розв'язання другої задачі, діти „включають" нову групу величин до узагальненої таблиці пропорційних величин (мал. 12).

Школярі формулюють правила знаходження загального виробітку, продуктивності праці і часу роботи. Закріплення цих правил здійснюється при розв'язанні задач, які описують роботу різних виконавців: друкарки, робітника, насосу тощо, а також при складанні і розв'язуванні задач за поданими схематичними рисунками. Широко застосовуємо спосіб перевірки правильності розв'язання задачі на основі складання і розв'язання обернених задач.

Мал. 12. Групи пропорційних величин. Взаємозв'язок між величинами

Крім поданих груп пропорційних величин, задачі містять ще й інші групи пропорційних величин. Методикою роботи над задачами з пропорційними величинами передбачено під час ознайомлення зі змістом задачі і аналізу умови проводити спеціальну роботу по виділенню величин, які містить задача. Наприклад, розглянемо методику роботи над задачею:

Щоб отримати 1 кг заліза, треба 3 кг залізної руди. Скільки кілограмів заліза отримаємо із 18 кг руди?

- Прочитайте задачу та уявіть, про що в ній говориться. Про що розповідається в задачі? (В задачі розповідається про виготовлення заліза із залізної руди: беруть залізну руду і з неї виплавляють залізо. Не із всієї залізної руди дістають залізо, а тільки із частини, тому що під час переробки залізної руди отримають не тільки залізо, але й інші продукти. Відомо: для того, щоб отримати 1 кг заліза потрібно витратити 3 кг залізної руди. Запитується, скільки кілограмів заліза отримаємо із 18 кг залізної руди).
- Які величини містяться в задачі? 3 кг – це значення якої величини? (В кілограмах вимірюється маса, тому 3 кг – це маса залізної руди, яку потрібно витратити на 1 кг заліза.) 18 кг – це значення якої величини? (В кг вимірюється маса, тому 18 кг – це маса залізної руди). Щоб відрізнити ці величини, домовимося 18 кг називати загальною масою залізної руди.
- Про що запитується в задачі? (В задачі запитується “Скільки кілограмів заліза отримають?”). Яка величина вимірюється в

кілограмах? (Маса). Тому про яку величину запитується? (Про масу заліза).

Таким чином, ми виділили величини: загальна маса залізної руди, маса залізної руди на 1 кг заліза, маса заліза.

У подібних задачах загальною величиною буде величина вихідного продукту, величиною однієї одиниці – величина вихідного продукту на одиницю нового продукту, і третьою є величина нового продукту.

Отже, на підставі простих задач з пропорційними величинами навчаємо школярів виділяти величини задачі, записувати такі задачі коротко у вигляді таблиці, пояснювати числові дані і запитання відповідно до виділених величин, встановлювати зв'язок між шуканою величиною і даними в задачі величинами. Та частина узагальненої пам'ятки, що стосується аналізу змісту задачі доповнюється новим пунктом:

1. Прочитай задачу і уяви про що в ній говориться;
2. Виділи величини, про які йдеться в задачі; виділи ключові слова;
3. Запиши задачу коротко в формі таблиці;
4. За коротким записом поясни числа задачі; яка величина є шуканою.
5. Визнач зв'язок шуканої величини з даними величинами.

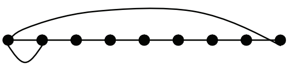
Прості задачі на знаходження частини від числа та числа за числовим значенням його частини

Для засвоєння задач даного виду в учнів повинно бути сформоване поняття про частини, про спосіб отримання частин, про кількість частин в цілому. Безпосередньою ***підготовкою*** до введення задач цього виду є засвоєння учнями *правила знаходження частини від числа*, яке вводиться на основі уявлень учнів про частини та знань про отримання частин [104]. Учням пропонується накреслити відрізок, наприклад, довжиною 12 см, показати четверту частину цього відрізку, пояснюючи цей процес: четверта частина – це одна з чотирьох рівних частин цілого, тому щоб отримати чверть, треба довжину цілого відрізку 12 см поділити на 4 рівні частини, показати одну таку частину і назвати її довжину. Потім вчитель радить виміряти довжину однієї четвертої частини відрізку і повідомляє, що ми знайшли величину однієї чверті від 12 см. Учні з'ясовують, якою арифметичною дією знаходять чверть від 12 см, і формулюють правило знаходження частини від числа. Далі правило знаходження частини від числа застосовується при розв'язанні завдань, і лише після його засвоєння учням пропонуються сюжетні задачі на знаходження частини від числа і показується схематичний короткий запис. Наприклад:

В магазин привезли 56 кг огірків. До обіду продали $\frac{1}{8}$ всіх огірків. Скільки кілограмів огірків продали до обіду?

- Що означає число 56? (Масу усіх огірків, що привезли).
- Що означає число $\frac{1}{8}$? (Яку частину огірків продали до обіду). Що означає знаменник 8? (Що усі 56 кг огірків поділили на 8 рівних частин.) Що означає чисельник 1? (Що 1 таку частину продали до обіду). Що в цій задачі грає роль цілого? (56 кг огірків). Ціле в математиці позначається, як 1. Запишемо це.
- Що треба знайти в цій задачі? (Треба знайти $\frac{1}{8}$ від 56 кг).
- Як знайти частину від числа?

1 - 56



$\frac{1}{8}$ - ?

1 – 56 кг
$\frac{1}{8}$ - ? кг

Розв'язання

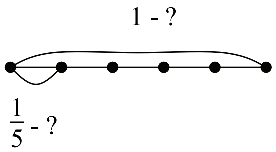
56 : 8 = 7 (кг)

Відповідь: 7 кг огірків продали до обіду.

Правило знаходження числа за числовим значенням його частини вводиться аналогічно. Учням пропонується накреслити відрізок довжиною 3 см і повідомляється, що це чверть цілого відрізку, треба знайти довжину цього відрізка. Спираючись на уявлення учнів про частини, а саме про кількість рівних частин в цілому: для отримання цілого учні пропонують послідовно накреслити чотири таких відрізки, тобто по 3 см взяти 4 рази. З'ясовується, якою арифметичною дією дізнаємося про величину цілого відрізка, і формулюється правило знаходження цілого за числовим значенням його частини. Після засвоєння правила на конкретних прикладах діти розв'язують сюжетні задачі на знаходження цілого за значенням його частини. Наприклад:

Дівчинка прочитала 12 сторінок, що складає $\frac{1}{5}$ книги. Скільки сторінок містить ціла книга?

- Що означає число 12? (Скільки сторінок прочитала дівчинка). Що ще означає число 12? (Величину $\frac{1}{5}$ книги). Що означає число $\frac{1}{5}$? (Яку частину книги прочитала дівчинка).
- Що означає знаменник 5? (На скільки рівних частин поділили цілу книгу).
- Що означає чисельник 1? (Скільки таких частин прочитала дівчинка).
- Що треба знайти в цій задачі? (Величину цілої книги).
- Як в математиці позначається ціле? (1)
- Запишемо задачу коротко:



1 - ? стор.
$\frac{1}{5}$ - 12 стор.

Розв’язання

$12 \cdot 5 = 60$ (стор.)

Відповідь: 60 сторінок в книзі.

- Що треба знайти в цій задачі? (Треба знайти число за величиною його частини.)
- Як знайти число за величиною його частини?

При розв’язанні задач із застосуванням схематичного рисунка відбувається засвоєння обґрунтування вибору дії в матеріалізованій формі. При переході до застосування відповідного правила ця дія переходить у форму голосного мовлення. Після розв’язання певної кількості задач обґрунтування вибору арифметичної дії набуває подальшого засвоєння у формі „зовнішнього мовлення про себе”, а далі переходить у внутрішній план.

Дія прикидки відповіді: виходячи із ситуації задачі визначати, більше чи менше шукане число за одне з даних, набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*. Перед розв’язанням задачі учні міркують так: частина менша за ціле, тому в задачі будемо шукати менше число або ціле більше за його частину, тому в задачі будемо шукати більше число. Зрозуміло, що такі пояснення виконуються при розв’язанні достатньої кількості задач, після чого міркування згортаються і дія переходить в форму *„зовнішнього мовлення про себе”*, а потім у *„внутрішній план”*.

Формування уміння розв'язувати прості задачі в 4-му класі

Прості задачі з величинами: швидкість, відстань і час

Задачі даного виду містять функціональний зв'язок між величинами: відстань, швидкість та час. У третьому класі були розглянуті задачі з пропорційними величинами: вартість, ціна, кількість; загальна маса, маса одного предмета, кількість предметів; загальна довжина, довжина одного відрізу, кількість відрізів; загальний об'єм, об'єм однієї посудини, кількість посудин; загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи тощо. Отже, прості задачі з величинами: відстань, швидкість і час – мають ту саму математичну структуру, що й і будь-які прості задачі на знаходження однієї величини за відомими значеннями двох пов'язаних з нею величин. З цього випливає, що задачі з величинами відстань, швидкість і час, можна розглядати, як і задачі з будь–якими пропорційними величинами, а також порівнювати їх з задачами з іншими величинами.

Особливе місце в ***підготовчій роботі*** повинно займати розв'язування простих задач на функціональну залежність величин, в тому числі задач на знаходження величини „однієї одиниці”. Під час розв'язування таких задач актуалізуємо знання про взаємозв'язок між пропорційними величинами.

На етапі підготовчої роботи у молодших школярів формується уявлення про швидкість як про відстань, що проходить тіло, яке рухається рівномірно, за одиницю часу. Діти вже знайомі з величинами: час та відстань. Чули вони й слово „швидкість”. Але, перед тим, як перейти до розгляду залежності між відстанню, швидкістю та часом при рівномірному русі, поняття про швидкість руху треба ввести [108].

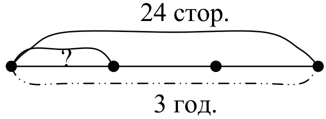
Спостерігаючи за рухом кількох тіл, учні помітили, що:

- за один і той самий час два тіла можуть пройти різну відстань;
- одну й ту саму відстань два тіла можуть подолати за різний час.

Чому так відбувається? Учні можуть відповісти, виходячи з власного життєвого досвіду: „Тому що у цих тіл різні швидкості!”. Що таке швидкість? На це запитання діти навряд чи дадуть чітку відповідь... Поняття про швидкість вводиться на задачі, яка розв'язується на основі конкретного змісту дії ділення на рівні частини. Але спочатку пропонуємо допоміжну задачу з відомою групою величин на знаходження продуктивності праці з тими самими числами. Наприклад:

Задача 1. За 3 години друкарка надрукувала 24 сторінки, друкуючи рівну кількість сторінок кожної години. Скільки сторінок друкувала друкарка за кожну годину?

- Схематично проілюструємо умову задачі: накреслимо відрізок, який позначає загальний виробіток – 24 стор. Друкарка надрукувала ці сторінки за 3 години, друкуючи однакову кількість сторінок кожної години, тому 24 сторінки поділимо на 3 рівні частини ; кожна частина ілюструє кількість сторінок, яку друкувала друкарка за 1 годину (продуктивність праці).



Загальний виробіток (стор.)	Продуктивність праці. Кількість сторінок за 1 годину.	Час роботи (год.)
24 стор.	? стор.	3 год.

Розв’язання

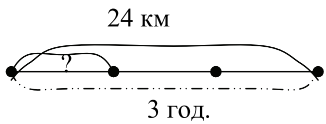
24 : 3 = 8 (стор.)

Відповідь: 8 сторінок друкувала друкарка за 1 годину.

Задача 2. За 3 години хлопчик проїхав на велосипеді 24 км, кожного часу проїжджаючи однакову відстань. Скільки кілометрів проїздив хлопчик за кожну годину?

Учні порівнюють ці задачі і встановлюють їх відмінність. Вчитель пропонує виконати зміни у короткому записі задачі і схематичному рисунку.

Загальна відстань (км)	Відстань за 1 годину (км)	Час руху (год.)
24 км	? км	3 год.



Розв’язання „нової” задачі не викликає труднощів у дітей, і вчитель повідомляє, що в цій задачі знайшли відстань, що подолало тіло за одиницю часу, тобто швидкість тіла. На основі аналізу розв'язання учні виводять ***правило знаходження швидкості руху тіла***: щоб знайти швидкість тіла, треба відстань поділити на час руху. Встановлюється, що швидкість – це теж величина однієї одиниці, і це правило вноситься до загального банку правил знаходження величини однієї одиниці.

Далі йде робота по закріпленню фізичного змісту швидкості:

1. Що означає, що: равлик повзе зі швидкістю 6 $\frac{м}{год}$? (Швидкість равлика 6 $\frac{м}{год}$ означає, що за кожну годину равлик проповзає по 6 м); літак летить зі швидкістю 950 $\frac{км}{год}$? (Швидкість літака 950 $\frac{км}{год}$ означає, що за кожну годину літак пролітає по 950 км.)
2. Чому дорівнює швидкість руху : пішоходу , якщо він проходить по 5 км за 1 годину? (5 $\frac{км}{год}$); меч-риби, якщо вона щогодини пропливає по100 км? (100 $\frac{км}{год}$); бджоли, якщо вона за кожну секунду пролітає по 7 м? (7 $\frac{м}{с}$).

Для закріплення правила знаходження швидкості тіла розв'язуються сюжетні задачі на знаходження швидкості при рівномірному русі. Спочатку ці задачі містять два запитання, наприклад: „Скільки метрів долав бігун за одну секунду? З якою швидкістю біг бігун?", а потім – з одним запитанням.

Корисно розглянути *залежність швидкості від зміни відстані або часу*. Учням пропонуються пари задач, аналізуючи розв'язки яких діти роблять відповідні висновки про прямо пропорційну залежність між швидкістю та відстанню (при сталому часі) та обернено пропорційну залежність між швидкістю та часом при сталій відстані. Наприклад, для усвідомлення залежності швидкості від зміни відстані учням пропонуються для порівняння пари задач:

1) Пішохід за 4 години пройшов 20 км. Знайдіть швидкість пішоходу.
2) Лижник за 4 години подолав 60 км. Знайдіть швидкість лижника.

Після розв'язання і порівняння цих двох задач пропонуємо учням запитання:

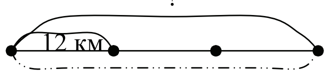
Чия швидкість більша? (Лижника). Чому швидкість лижника більша за швидкість пішоходу? (Швидкість лижника більша, тому що він за один й той самий час, що й пішохід, подолав більшу відстань). Який висновок можна зробити про залежність між швидкістю і шляхом? (Чим більша швидкість, тим більший шлях долає тіло за один й той самий час). Отже, швидкість і відстань змінюється в однаковому напрямі, якщо час залишається сталим. Як зміниться відстань, якщо швидкість збільшиться? Зменшиться? Як зміниться швидкість, якщо відстань збільшиться? Зменшиться?

На матеріалі задачі, яка розв'язується на основі конкретного змісту дії множення, вводиться ***правило знаходження відстані*** за відомими швидкістю і часом, а правило знаходження часу – на основі задачі на конкретний зміст дії ділення на вміщення. На основі аналізу розв'язань цих задач формулюються відповідні правила, які засвоюються при розв'язанні спеціальних завдань.

Задача. Лижник був у дорозі 3 години, рухаючись зі швидкістю 12 $\frac{км}{год}$. Яку відстань пройшов лижник?

- Про що розповідається в задачі? (Про рух лижника. Відомо, що він йшов зі швидкістю 12 $\frac{км}{год}$. Це означає, що за кожну годину лижник проходив по 12 км. Відомий час руху лижника 3 год.).
- Яку відстань пройшов лижник за першу годину? (12 км). За другу годину? (12 км). За третю годину? (12 км).
- Схематично проілюструємо умову задачі.

?



3 год.

- Запишемо задачу коротко у формі таблиці:

Загальна відстань (км)	Швидкість ($\frac{км}{год}$)	Час руху (год.)
? км	12 $\frac{км}{год}$	3 год.

- Якою дією дізнаємося про загальну відстань, яку подолав велосипедист за 3 години? (Дією множення, треба по 12 км взяти 3 рази).

Розв'язання

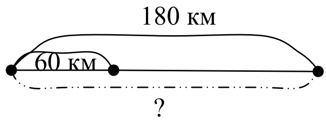
$12 \cdot 3 = 36$ (км).

Відповідь: 36 км подолав лижник за 3 години.

- Звернемося до розв'язання задачі. Що означає число 12? (Це швидкість лижника.) Що означає число 3? (Це час руху). Що ми знайшли в задачі? (Відстань). Як ми знайшли відстань? (Ми швидкість помножили на час). Зробіть висновок про те, як знайти відстань.

Задача. Пасажир проїхав автобусом 180 км. Швидкість автобуса 60 $\frac{км}{год}$. Скільки часу їхав пасажир автобусом?

- Про що розповідається в задачі? (Про рух автобусу. Відомо, що автобус проїхав 180 км зі швидкістю 60 $\frac{км}{год}$. Це означає, що за кожну годину автобус проїжджав по 60 км. Треба знайти час руху)
- Яку відстань проїхав автобус за першу годину? (60 км). Чи всю відстань він подолав? (Ні). За другу годину? (60 км). Чи всю відстань він подолав? За третю годину? (60 км). Чи всю відстань він подолав? (Так).
- Отже, автобус витратив на рух стільки годин, скільки в 180 км міститься по 60 км.



- Запишемо задачу коротко у формі таблиці:

Загальна відстань (км)	Швидкість ($\frac{км}{год}$)	Час руху (год.)
180 км	60 $\frac{км}{год}$	? год.

- Якою дією дізнаємося про час руху автобусу? (Годин буде стільки, скільки разів міститься в 180 км по 60 км, щоб це дізнатися треба 180 км поділити по 60 км).

Розв’язання

180 : 60 = 3 рази – тому автобус був у дорозі 3 години.

Відповідь: 3 години пасажир їхав автобусом.

- Звернемося до розв’язання задачі. Що означає число 180? (Це відстань, яку проїхав автобус). Що означає число 60? (Це швидкість автобуса). Що ми знайшли в задачі? (Час). Як ми знайшли час? (Ми відстань поділили на швидкість). Зробіть висновок про те, як знайти час.

Під час формування умінь розв’язувати задачі на знаходження відстані, швидкості й часу ми пропонуємо *узагальнити спосіб одержання формули швидкості і часу з формули відстані* на основі правила знаходження невідомого множника, який закріплюється при розв’язанні трійок взаємно обернених задач (*дія складання і розв’язування обернених задач виконується у внутрішньому плані*).

- Як знайти відстань? Що в цьому запису є добутком? Першим множником? Другим множником?

Відстань	=	Швидкість	·	Час
Добуток	=	1 множник	·	2 множник

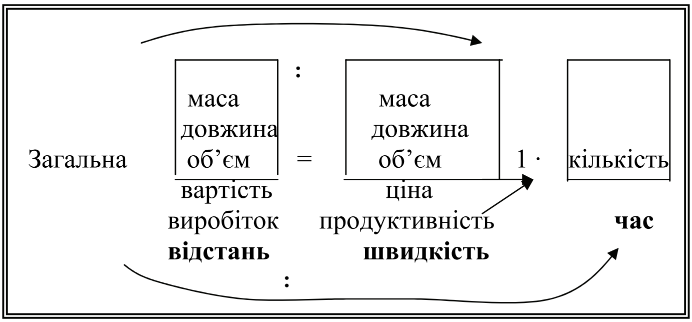
Як знайти перший множник – швидкість? Як знайти другий множник – час?

$$S = V \cdot t$$

$$V = S : t \qquad t = S : V$$

Мал. 13. Взаємозв’язок правил знаходження відстані, швидкості і часу

- Співвіднесемо правила знаходження відстані, швидкості та часу, з правилами знаходження інших груп пропорційних величин:



Мал. 14. Правило знаходження загальної величини

Функціональний зв’язок між величинами відстань, швидкість і час вводиться на основі порівняння пар задач, які відрізняються лише значенням однієї з трьох величин. Встановивши відмінність цих задач і розв’язавши їх, діти визначають як ця зміна вплинула на розв’язання задачі, та роблять висновки про вид залежностей між двома величинами при сталій третій величині. Таким чином, при роботі над задачами з величинами відстань, швидкість і час ми продовжуємо формувати у молодших школярів *у формі зовнішнього мовлення* дії *прикидки значення шуканої величини та встановлення відповідності шуканого числа області своїх значень*.

Наприклад, розглянемо *зміну часу в залежності від зміни швидкості при сталій відстані*:

1) За скільки годин проїде відстань 720 км „Мерседес”, якщо їхатиме зі швидкістю 180 $\frac{км}{год}$?

2) За скільки годин проїде відстань 720 км „Лада”, якщо їхатиме зі швидкістю 90 $\frac{км}{год}$?

- Що в них спільного? (Однакова відстань – 720 км.)
- Чим вони відрізняються? (Різна швидкість: швидкість „Мерседесу” – 180 $\frac{км}{год}$, а швидкість „Лади” – 90 $\frac{км}{год}$).
- Як ви вважаєте, яка машина витратить на дорогу менше часу? Чому? (Менше часу витратить „Мерседес”, тому що одну й ту саму відстань (720 км) він долає з більшою швидкістю. Час і швидкість змінюються в протилежних напрямах!)
- Розв’яжіть задачі і перевірте власне передбачення.
- Порівняйте швидкості. У скільки разів більше швидкість „Мерседесу”?
- Порівняйте час руху. У скільки разів час руху „Мерседесу” менше?
- Який висновок можна зробити? (Якщо швидкість збільшити в 2 рази, то час, навпаки, зменшиться в 2 рази).
- Як ви вважаєте, як зміниться час, якщо швидкість зменшити в 2 рази? (Час, навпаки, збільшиться в 2 рази).

Прості задачі на час: знаходження тривалості події, знаходження часу початку або часу закінчення події

Задачі на час містять три компоненти: час початку події, тривалість події і час закінчення події. Ці задачі записуються коротко в формі таблиці (див. мал. 15):

Час початку події	Тривалість події	Час закінчення події
☐	☐	☐

Мал. 15. Опорна схема задач на час

☐ - числове дане або шукане

Ці задачі розв’язуються на основі застосування ***правил***:

1) щоб знайти час закінчення події, треба до часу початку події додати тривалість події;

2) щоб знайти тривалість події, треба від часу закінчення події відняти час початку події;

3) щоб знайти час початку події, треба від часу закінчення події відняти тривалість події.

Пропонуємо учням після розв'язання задачі складати і розв'язувати ще дві обернені задачі. Такі задачі не становлять труднощів для молодших школярів і розв'язуються на основі вже сформованих дій, що складають загальне уміння розв'язувати задачі. Наприклад:

Уроки в школі починаються о 8 год. Тривалість уроків 4 год. У скільки годин закінчуються заняття?

Час початку події	Тривалість події	Час закінчення події
8 год.	4 год.	?

- Що означає число 8? (Час початку занять у школі).
- Що означає число 4? (Тривалість уроків).
- Яке запитання в задачі? (У скільки годин закінчуються заняття?)
- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: час, коли починаються заняття, відомо – 8 год., та скільки годин тривають заняття, відомо – 4 год.).
- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Так, відомі обидва числові значення).

Розв'язання: 8 + 4 = 12 (год.)

Відповідь: о 12 годині закінчуються заняття.

Складаємо обернені задачі.

8 , 4 , $\boxed{12}$ - *пряма задача*.

$\boxed{8}$, 4 , 12. – *1-ша обернена задача*.

Уроки в школі тривають 4 години і закінчуються о 12 годині. О котрій годині розпочинаються заняття в школі?

Розв'язання: 12 – 4 = 8 год.

Відповідь: о 8 годині розпочинаються заняття.

8, $\boxed{4}$, 12 – *2 –га обернена задача*.

Уроки в школі розпочинаються о 8 –й годині і закінчуються о 12-й годині. Скільки годин тривають заняття в школі?

Розв'язання: 12 – 8 = 4 (год.)

Відповідь: 4 години тривають заняття в школі.

Таким чином, ми розглянули послідовність формування уміння розв'язувати прості задачі в початковій школі. Як бачимо, усі дії, що складають загальне уміння на матеріалі простих задач, формуються в основному в 1-му та 2-му класах, і набувають подальшого засвоєння в 3-му та 4-му класах. Повноцінне уміння розв'язувати прості задачі є фундаментом формування уміння розв'язувати складені задачі.

Завдання для самоперевірки:

1. На якому задачному матеріалі відбувається формування загального вміння розв'язувати задачі?
2. На якому задачному матеріалі відбувається формування окремих вмінь розв'язувати задачі?
3. В чому полягає зміст підготовчого етапу до ознайомлення першокласників з поняттям „задача"?
4. На яких видах задач відбувається ознайомлення першокласників з поняттям „задача"?
5. Скласти методику роботи над задачею за пам'яткою №1:

У Миколи було 8 олівців. 3 олівця від подарував сестрі. Скільки олівців залишилось у Миколи?

Вінні-Пух з'їв 8 банок меду, а Карлсон 3. Хто з них з'їв більше банок меду і на скільки?

Фрекен Бок випекла 8 плюшок і 3 пиріжка. Скільки всього плюшок і пиріжків випекла Фрекен Бок?

У вогнища на привалі сиділо 8 хлопчиків, а дівчинок на 3 більше. Скільки дівчинок сиділо біля вогнища на привалі?

У Поліни було 8 шпильок. Скільки шпильок стало у Поліни, після того як мама їй купила ще 3 шпильки?

6. Скласти методику роботи над задачами за пам'яткою № 2

1) Для виготовлення 1 кг крохмалю потрібно 6 кг картоплі. Скільки кілограмів крохмалю отримаємо з 30 кг картоплі?

2) 56 ц помідорів фермер перевозить з поля. Скільки рейсів він повинен зробити, якщо на машину він навантажує по 8 ц?

3) Господарка купила 27 кг помідорів. $\frac{1}{3}$ усіх помідорів вона засолила. Скільки кілограмів помідорів засолила господарка?

4) Вінні-Пух пройшов 8 м, це складає $\frac{1}{7}$ частину шляху від будиночка Вінні-Пуха до будиночка П'яточка. Яка відстань між будиночками Вінні-Пуха та П'яточка?

5) Столяр виготовив 56 табуретів за 4 дні. По скільки табуретів виготовляв столяр щодня?

6) За який час машина, яка їде зі швидкістю 80 $\frac{км}{год}$ проїде відстань 240 км?

7) Перерва розпочалася о 9 год. 15 хв. і тривала 10 хв. Коли закінчилася перерва?

3.1.2. Методика формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі складених задач

Формування загального уміння розв'язувати складені задачі відбувається за етапами:

І етап – підготовча робота до введення поняття „складена задача”;

ІІ етап – ознайомлення з поняттям „складена задача” та процесом її розв'язування;

ІІІ етап – формування загального уміння розв'язувати будь-які складені задачі.

Підготовча робота

На ***етапі підготовчої роботи*** у дітей формуються уявлення:

- про те, що за двома певними числовими даними можна відповісти на кілька запитань (постановка запитань до даної умови, вибір запитання до даної умови);
- про те, що різні задачі можуть мати однакові розв'язання (завдання на складання задач, розв'язанням яких є певний вираз);
- про неможливість відповісти на запитання задачі, якщо числових даних бракує (розв'язання задач з недостатньою кількістю числових даних);
- про необхідність вибору числових даних для відповіді на запитання задачі (розв'язання задач із зайвими числовими даними);
- про існування задач, на запитання яких не можна відповісти одразу (постановка додаткового запитання до задач із зайвими числовими даними, об'єднання двох послідовних простих задач, відповідь на друге запитання при розв'язанні задач з двома запитаннями);
- про існування задач, що складаються з двох простих задач, які пов'язані за змістом (при розв'язанні двох послідовних простих задач);
- про те, що аналіз може складатися з двох циклів – кожний з яких відповідає певній з двох простих задач (при розв'язанні задач з зайвими числовими даними, при розв'язанні двох послідовних простих задач, при розв'язанні задач із двома запитаннями) [109].

Постановка запитання до даної умови. Метою цих завдань є навчання учнів ставити запитання до даної умови, на яке можна відповісти за числовими даними, що в ній містяться; закріплення мовних конструкцій: “Для відповіді на запитання задачі потрібно знати два числові значення... На запитання задачі відповімо арифметичною дією ...”; навчання знаходження спільного і відмінного в текстах задач.

При розв’язанні завдань цього виду проводиться подальша робота над структурою задачі – щоб одержати задачі діти повинні поставити до даної умови запитання, яке пов’язано з нею. При цьому вони впевнюються, що до однієї і тієї самої умови можна поставити кілька запитань. Отже, учні опиняються перед необхідністю визначення запитання, на яке можна відповісти за двома числовими даними. Наприклад: постав запитання до даної умови:

1) В каструлі 5 л молока, а в бідоні 9 л молока.
2) В їдальні на сніданок витратили 7 кг картоплі, а на обід 9 кг картоплі.

Виділи числові дані. Про що можна дізнатися за цими числовими даними? Склади задачу, в якій це число буде шуканим. Про що ще можна дізнатися за цими числовими даними. Розкажи задачу, в якій це число буде шуканим. Чим схожі ці задачі? Чим вони відрізняються? Що треба знати, щоб дізнатися “Скільки всього ...?” Що треба знати, щоб дізнатися “На скільки більше (менше)...?” Що цікавого ти помітив? (Для відповіді на обидва запитання треба знати одні й ті ж самі числові дані). Чому? (Тому що в задачах однакові умови.) Умови однакові, але запитання різні! Значить і розв’язки будуть різні! Чим будуть відрізнятися розв’язання? (На запитання першої задачі відповімо дією додавання, а на запитання другої задачі відповімо дією віднімання). Чому? (Тому, що в цих задачах задані різні співвідношення – співвідношення додавання та співвідношення різницевого порівняння).

Корисними є завдання на вибір запитання до даної умови або на вибір умови до даного запитання. Наприклад:

Подумай, які з даних запитань можна поставити до даної умови? „У білочки було 17 горішків. Вона з’їла 5 горішків вранці, а в обід ще 2 горішки.”

1) Скільки всього горішків з’їла білочка?

2) На скільки більше горішків з'їла білочка вранці, ніж в обід?
3) На скільки менше горішків з'їла білочка в обід, ніж вранці?
4) Скільки грибочків з'їла білочка?
5) Скільки горішків залишилося в білочки?

2. Підбери умову до даного запитання: Скільки всього дітей займаються танцями?

1) Танцями займаються 24 дитини. З них 13 хлопчиків.
2) Танцями займаються хлопчики і дівчинки. Хлопчиків на 5 менше, ніж дівчинок.
3) Танцями займаються 12 хлопчиків і 13 дівчинок.
4) Танцями займаються 7 хлопчиків, а дівчинок на 2 більше.
5) Танцями займаються 11 хлопчиків, а дівчинок на 4 менше.

При виконанні таких завдань ми продовжуємо працювати над засвоєнням дій виділення умови і запитання задачі, числових даних і шуканого, виділення слів-ознак окремих видів співвідношень, виділення виду співвідношення.

Складання задач з даними числами, які розв'язуються арифметичними діями додавання і віднімання, або складання задач, розв'язком яких є даний вираз. Мета – розвиток варіативності мислення: учні впевнюються, що однією й тією ж арифметичною дією над даними числами можна розв'язати багато задач, які відтворюють різноманітні життєві ситуації; діти вчаться визначати значення числових даних та підбирати запитання, відповідь на яке знаходять певною арифметичною дією. На цьому етапі відбувається подальше навчання школярів порівнювання задач; закріплюються мовні конструкції: "Для відповіді на запитання задачі потрібно знати два числові значення... На запитання задачі відповімо арифметичною дією ...".

Задачі, що складені школярами, порівнюються між собою, і вони впевнюються, що в них є спільними лише числові дані, а умови та запитання – різні. Таким чином, розв'язком різних задач може бути один й той самий вираз.

При складанні задачі за даним виразом учням пропонується перевірити себе і встановити, чи всі з поданих запитань вони використали при складанні задач. Наприклад:

Склади задачі, розв'язання яких записується виразом: 12 + 6. Перевір себе: чи є в тебе задачі, у яких запитується:

1) Скільки всього ... ?
2) Скільки стало ... ?
3) Скільки ... , якщо на 6 більше, ніж ... ?
4) Скільки було ... ?

Які числові дані повинні міститися в умові задачі? Яке число є шуканим: більше чи менше? Чому? Постав запитання так, щоб шукане було більшим числом. Яка ситуація повинна описуватися в задачі з таким запитанням? Яким членом і якого співвідношення повинно бути шукане, щоб його знаходили дією додавання? Покажи опорну схему цієї задачі. Розкажи задачу. Яке ще запитання можна поставити, щоб шукане було більшим числом?... Порівняй ці задачі.

Також корисними є завдання на постановку запитання до даної умови, на яке можна відповісти за поданим числовим виразом. Наприклад:

У Наталки 8 шоколадних цукерок і 7 карамелей. Подумай, на які запитання ти відповіси за даними виразами: 8 + 7   8 – 7.

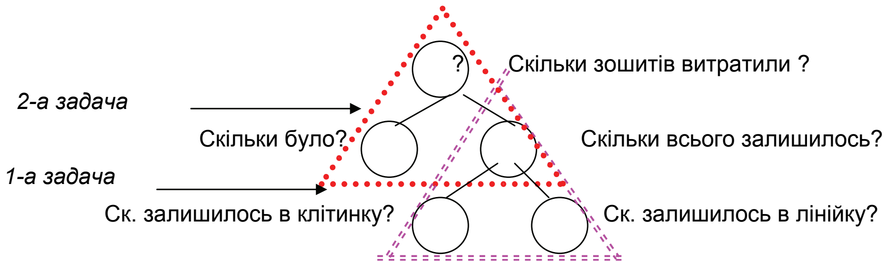
Так само, як і в попередніх завданнях, ми продовжуємо формувати дії, що були засвоєні учнями при навчанні розв’язування простих задач.

Задачі із зайвими числовими даними. Під час розв’язання задач із зайвими числовими даними відбувається навчання вибору числових даних, які необхідні для відповіді на запитання задачі. Діти впевнюються, що не всі числові дані використано у розв’язанні задачі, тому вчитель пропонує поставити додаткове запитання, на яке можна відповісти, використавши зайве дане та отриманий розв’язок. Формулюється задача з даною умовою, але з новим запитанням, поєднуються схеми аналізу розв’язання при відповіді на два запитання. Отже, з’являється схема аналізу, яка складається з двох циклів і учням пропонується повторити міркування за цією схемою. Таким чином, здійснюється формування прийому розумової дії – аналізу, та уміння аналізувати при пошуку розв’язування задачі, коли аналіз складається з двох циклів (*етап попереднього ознайомлення з дією аналізу - міркування від запитання задачі до числових даних*). Також на цьому етапі продовжується формування уміння порівнювати задачі і решта дій, що були сформовані у процесі навчання розв’язання простих задач. Наприклад:

Наталці мама купила 27 зошитів. Наприкінці навчальної чверті в неї залишилося 2 зошити у лінійку та 5 зошитів у клітинку. Скільки всього зошитів залишилося в Наталки?

Яке число не брало участь у розв'язанні задачі? Що воно означає? Яке повинно бути запитання, щоб число 27 брало участь у розв'язанні задачі? Склади задачу з числом, яке ми знайшли при розв'язанні задачі та числом 27. Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання цієї задачі?

Постав запитання до даної умови, щоб число 27 приймало участь у розв'язанні задачі. Чи можна відразу відповісти на запитання цієї задачі? Чому? Прокоментуй міркування за схемою аналізу. Зверни увагу, схема аналізу складається з двох „трикутників" – циклів. Як ти вважаєш, чому?



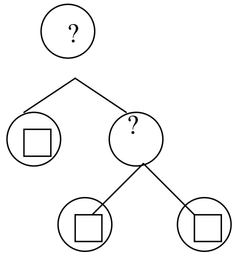
Мал. 16.Картка з друкованою основою, на якій подано схему аналізу

Задачі, в яких бракує числових даних. Метою розв'язання задач з недостатньою кількістю числових даних є формування у дітей уявлення про те, що не завжди можна відповісти на запитання задачі через відсутність числового даного. Це числове дане можна дібрати, але тоді учні отримують різні розв'язки, тому слід добирати додаткову умову, за якою дізнаємось про потрібне число. Далі учні поєднують умову даної задачі й додаткову умову і формулюють задачу, а вчитель поєднує схеми аналізу в одну, яка містить два цикли. Таким чином, на даному етапі продовжуємо вчити учнів аналізувати розв'язування задачі, коли аналіз складається з двох циклів (*етап попереднього ознайомлення з дією аналізу – міркування від запитання задачі до числових даних*) і застосовуємо уміння, які були сформовані у навчанні розв'язування простих задач Наприклад:

На клумбі розцвіло 15 квітів. Для букету зрізали ☐ квітки. Скільки квіток залишилося?

Розкажи умову. Розкажи запитання. Що цікавого ти помітив? (В умові не дістає числового даного). Залишилося більше чи менше, ніж було? (Менше). Задай додаткову умову. Про що ми дізнаємося спочатку?

Що треба знати, щоб відповісти на це запитання? Про що ми дізнаємося потім? Що треба знати, щоб відповісти на це запитання? Розкажи задачу з додатковою умовою. Чи можна відповісти відразу на її запитання? Чому? Розкажи її розв'язання за схемою:



Мал. 17.Картка з друкованою основою, на якій подано схему аналізу

Послідовне розв'язання двох простих задач. При послідовному розв'язанні простих задач, таких що друга задача є продовженням першої, здійснюється формування у дітей уявлення про складену задачу як таку, що містить дві або більше прості задачі. Діти вчаться складати задачу із двох пов'язаних між собою простих задач. Наприклад:

1. У дівчинки було 8 олівців. Вона купила ще 4 олівці. Скільки олівців стало у дівчинки?
2. У дівчинки □ олівців. Вона подарувала подрузі 6 олівців. Скільки олівців в неї залишилося?

Після розв'язання пари простих задач, учні встановлюють, що відповісти на запитання другої задачі неможливо, не відповівши на запитання першої задачі; вчитель радить поєднати ці дві задачі в одну та за поданою схемою аналізу, яка містить два цикли, пропонує учням пояснити міркування (*дія аналізу – міркування від числових даних до запитання - опрацьовується в матеріалізованій формі)*. На схемі аналізу виділяються трикутниками прості задачі, діти формулюють кожну з них і визначають їх порядок: перша проста задача – це задача, на запитання якої можна відповісти одразу; друга проста задача – це задача, на запитання якої не можна відповісти, не розв'язавши першу задачу (здійснюється *етап попереднього ознайомлення з діями розбиття задачі на прості та встановлення порядку простих задач, які складають складену задачу)*.

Задачі з двома послідовними запитаннями. Мета – продовжувати формувати у дітей уявлення про те, що існують такі запитання до даної умови, відповісти на які одразу не можна; формувати уявлення про складену задачу, як таку, що складається з двох або більшого числа простих. Продовжувати формувати прийом аналізу у процесі пошуку розв'язання задачі. Наприклад:

В парку гуляло 6 дівчинок, а хлопчиків на 4 більше. Скільки хлопчиків гуляло в парку? Скільки всього дітей гуляло в парку?

Проаналізуй текст задачі. Що тут незвичайного? Чи можна відразу відповісти на обидва запитання? На яке запитання можна відповісти відразу? Чому? Що треба знати, щоб відповісти на перше запитання? Якою арифметичною дією на нього відповімо? На яке запитання ще треба відповісти? Що треба знати, щоб відповісти на друге запитання? Якою арифметичною дією на нього відповімо?

Після розв'язання таких задач учні з'ясовують, що відповісти на друге запитання задачі, не можливо не відповівши на перше запитання, – тому схеми аналізу, що стосуються відповідей на кожне запитання, поєднуються, і учні пояснюють міркування за поєднаною схемою. На цих завданнях опрацьовується *дія аналізу – міркування від запитання задачі до числових даних – у матеріалізованій формі*. Далі учні визначають, на яке запитання можна відповісти одразу? Це запитання першої простої задачі, її на поєднаній схеми показано трикутником. А на яке потім? Це запитання другої простої задачі, її теж показано на схемі трикутником. Отже, здійснюється попереднє ознайомлення з *діями розбиття складеної задачі на прості*, та *встановлення порядку простих задач*.

Ознайомлення із складеною задачею

Традиційно ознайомлення з поняттям „складена задача" здійснюється в 2-му класі на задачах на знаходження остачі, які містять просту задачу на знаходження суми і ці задачі пропонуються учням протягом майже усієї теми. Але учні запам'ятовують спосіб їх розв'язування і при розв'язанні нової задачі наслідують його, не вдаючись до розгорнених міркувань. Для попередження цього, ознайомлення з поняттям „складена задача" та процесом її розв'язування слід проводити на різноманітних математичних структурах складених задач.

На етапі підготовчої роботи опрацьовувались мовні конструкції, які застосовуються при аналітичному пошуку розв'язування, учні побачили, як на схемі аналізу можна виділити прості задачі і спробували їх сформулювати. Всі ці уміння вдосконалюються на етапі ознайомлення і набувають подальшого засвоєння. Крім того, нами було виділено операційний склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичними способами на матеріалі складених задач. Зрозуміло, що окремі складові дії цього уміння були сформовані в учнів під час формування загального уміння на матеріалі простих задач (1-4, 8_1, 8_3, 10). Тому, **метою етапу ознайомлення молодших школярів з поняттям „складена задача”** є *опрацювання трьох нових дій*:

- проведення аналітичного пошуку розв’язування задачі, під час якого слід вибирати пару числових даних для відповіді на певне запитання;
- виділення, спочатку на схемі аналізу, а потім словесне формулювання кожної простої задачі, із яких складається дана задача;
- складання плану розв’язування задачі.

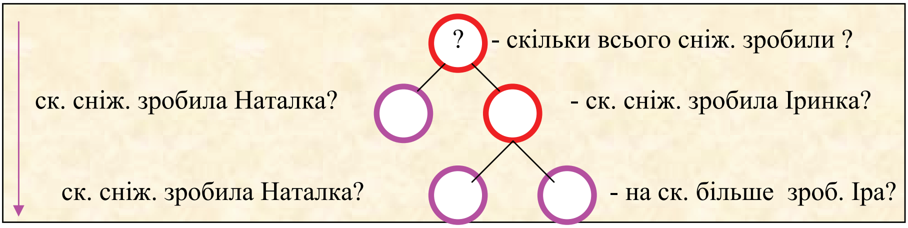
Істотним в організації діяльності учнів на даному етапі є її *спрямованість не на розв’язання кожної окремої задачі, а на оволодіння даним комплексом умінь.* Згідно з вимогами до процесу формування розумових дій (за Л.М.Фрідманом) кожна із складових дій загального уміння розв’язувати складені задачі повинна бути опрацьована окремо, причому формування певної дії має бути розтягненим у часі. Тому на етапі підготовчої роботи і здійснюється попереднє ознайомлення та опрацювання в матеріалізованій формі *дії аналізу* – міркування від запитання задачі до числових даних, а також попереднє ознайомлення з *розбиттям задачі на прості та визначенням порядку простих задач*.

Поняття „складена задача”. Ознайомлення з процесом розв’язання складених задач. На цьому етапі починається формування поняття про складену задачу як про задачу, що складається з кількох простих задач; про розв’язання складеної задачі як послідовне розв’язання простих задач, що вона містить. Крім того, тут певну увагу приділено формуванню уміння аналізувати текст задачі та проводити аналітичний пошук розв’язування задачі і розбиття складеної задачі на прості.

Поняття „складена задача” можна ввести на основі порівняння двох задач, перша з яких – задача з двома послідовними запитаннями, а друга – складена задача. Наприклад:

1) Наталка зробила 7 сніжинок, а Іринка на 5 сніжинок більше. Скільки сніжинок зробила Іринка? Скільки всього сніжинок зробили дівчата?	2) Наталка зробила 7 сніжинок, а Іринка на 5 сніжинок більше. Скільки всього сніжинок зробили дівчата?

Учні визначають, що обидва тексти – це задачі, але вони відрізняються тим, що перша задача містить два запитання, а друга – одне. Але ці задачі мають однакові умови і однакові запитання: друге запитання першої задачі таке саме, як запитання другої задачі. Вчитель пропонує з'ясувати, що необхідно знати, щоб відповісти на це запитання. Учні пояснюють міркування за поданою схемою аналізу, в якій слід вписати потрібні числові дані та проставити знаки арифметичний дій, за допомогою яких відповімо на певне запитання (мал. 18).



Мал. 18. Картка з друкованою основою, на якій подано схему аналізу

Таким чином, дія *аналізу – міркування від запитання задачі до числових даних* продовжує виконуватись у *матеріалізованій формі*. Вчитель вимагає від учнів показати трикутниками на схемі прості задачі і сформулювати їх показавши опорні схеми, та визначити послідовність простих задач (*дія розбиття задачі на прості та визначення порядку простих задач відбувається в матеріалізованій формі*). Після розбиття складеної задачі на прості дітям повідомляється, що на запитання першої простої задачі відповімо першою дією, а на запитання другої простої задачі – другою дією, таким чином складається план розв'язування задачі (*попереднє ознайомлення з дією складання плану розв'язування задачі*).

З ***метою формування поняття „складена задача"*** корисні завдання на порівняння пари задач, які мають однакові умови, але різні запитання. Наприклад:

1) Щоб прикрасити класну кімнату, учні принесли 8 червоних кульок, а зелених на 4 більше. Скільки зелених кульок принесли діти?	1) Щоб прикрасити класну кімнату, учні принесли 8 червоних кульок, а зелених на 4 більше. Скільки всього кульок принесли діти?

На запитання першої задачі можна відповісти одразу однією арифметичною дією, а на запитання другої задачі не можна відповісти, виконавши лише одну арифметичну дію. Учні порівнюють ці задачі, і перед ними ставиться запитання: „Чи матимуть ці задачі однакові розв'язання?", „На яке запитання можна відповісти одразу?". Після розв'язання простої задачі учні з'ясовують, які зміни треба виконати в короткому записі та схематичному рисунку першої задачі, щоб одержати короткий запис та схематичний рисунок другої задачі, пояснюють числа задачі. Таким чином, *дія складання короткого запису* набуває подальшого засвоєння і *переноситься в нову ситуацію – на складені задачі*. Подальші міркування йдуть від запитання другої задачі: „Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання другої задачі?", і за поданою схемою аналізу, вставляючи (або записуючи) відповідні числові дані та знаки арифметичних дій, учні виконують *аналітичний пошук розв'язування в матеріалізованій формі*. На схемі аналізу учні показують трикутниками *прості задачі і визначають їх порядок* та формулюють їх (*виконання дії в матеріалізований формі*), і, виходячи з порядку та запитань простих задач, перевіряють чи правильно сформульований план розв'язування задачі, що <u>подано у готовому вигляді</u> (*дія формулювання плану розв'язування задачі* виконується в *матеріалізований формі*). Далі учні знайомляться із записом розв'язання задачі двома діями – за зразком учні записують розв'язання даної задачі і пояснюють кожну дію (відбувається *попереднє ознайомлення з діями запису розв'язання задачі і пояснення виконаних дій*).

Таким чином здійснюється *попереднє ознайомлення з поняттям „складена задача"*; учні впевнюються, що існують задачі, на запитання яких не можна відповісти одразу, однією арифметичною дією – такі задачі називаються складеними. Складені задачі складаються з кількох простих задач.

Для повноцінного засвоєння цього поняття слід пропонувати завдання на: підведення під поняття; вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнавання об'єкта; виведення наслідків про належність або не належність предмета до поняття.

Вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнавання складеної задачі

Орієнтуючись на зроблений висновок про те, що на запитання складеної задачі не можна відповісти одразу однією дією, пропонуємо учням завдання на вибір серед поданих задач складених. Ці завдання подаються не лише на даному етапі, а й у подальшому (коли учні вже навчаться самостійно розв'язувати складені задачі). Таким чином, формулюється істотна ознака поняття „складена задача" – неможливість розв'язання однією арифметичною дією. Зазначимо, що ця ознака є необхідною взагалі, а достатньою для множини задач, що є розв'язними.

Наприклад: Серед запропонованих задач вибери і розв'яжи тільки складені задачі:
1) На дереві сиділо 7 горобців, а сорок на 8 більше. Скільки сорок сиділо на дереві?
2) На дереві сиділо 7 горобців, а сорок на 8 більше. Скільки всього птахів сиділо на дереві?

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання першої задачі? Чи можна відразу відповісти на запитання першої задачі? Чому? Яка це задача? Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання другої задачі? Чи можна відразу відповісти на запитання другої задачі? Чому? Яка це задача? На яку ознаку слід орієнтуватися, щоб визначити вид задачі?

Підведення під поняття „складена задача"

Користуючись визначеною ознакою поняття „складена задача" – неможливістю її розв'язання однією арифметичною дією, учні виконують завдання на встановлення виду, до якого належать певні задачі, або на розпізнавання задач. Наприклад: До якого виду належать задачі? Чому?

1) Бабуся випекла 7 пиріжків з капустою і 9 пиріжків з вишнями. 12 пиріжками вона пригостила онуків. Скільки пиріжків залишилося в бабусі?
2) На святі у дитячому садку в хорі співало 5 дівчинок і 7 хлопчиків. Скільки дітей співало в хорі?
3) Столяр виготовив 14 стільців, а табуретів на 5 менше. Скільки виробів зробив столяр?

Виведення наслідків про належність або неналежність задачі до поняття „складена задача”

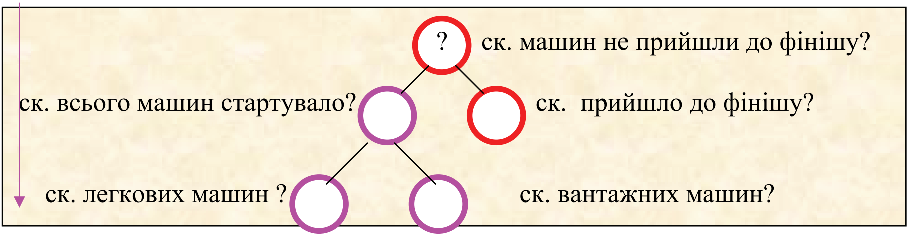
За допомогою запитань вчителя учні спонукаються до висновків:

- Якщо задача складена, то її не можна розв’язати однією арифметичною дією;
- Якщо задача проста, то її можна розв’язати однією арифметичною дією;
- Якщо задача складена, то для її розв’язання треба виконати не менш, ніж дві арифметичні дії;
- Якщо задача не проста, то вона складена.

Після того, як учні усвідомили відмінність складеної задачі від простої слід перейти до навчання процесу розв’язування складених задач. Згідно вимог до процесу формування розумових дій, що забезпечують високу ефективність навчання навичкам і вмінням Л.М.Фрідмана, кожна дія з розв’язування складених задач повинна бути опрацьована окремо. Перейдемо до розгляду методики формування цих дій (операцій).

Формування уміння проводити аналітичний пошук розв’язування задачі. Спочатку *дія аналізу – міркування від запитання задачі до числових даних* формується *в матеріалізованій формі* (за допомогою карток з друкованою основою), але поступово переводимо її у *форму голосного мовлення*. У завданнях, що подані на картках з друкованою основою, поки ще подано схеми аналізу із записами про відповідні числові дані і шукані, але не всі учні читають їх – вони відповідають на запитання вчителя самостійно (форма голосного мовлення). Наведемо приклад картки з друкованою основою:

1. В автоперегонах стартувало 43 легкові машини і 21 вантажна машина. До фінішу прийшли 60 машин. Скільки машин не прийшло до фінішу?



Мал. 19. Схема аналізу, що подана на картці з друкованою основою

Треба зазначити, що для формування уміння виконувати аналітичний пошук розв’язування задачі повинні пропонуватися різноманітні математичні структури задач, з тим, щоб попередити формальний підхід, обмежити запам’ятовування способу розв’язування і ставити учнів, кожного разу, в умови свідомого вибору числових даних для відповіді на запитання задачі. Тому на даному етапі застосовуються задачі: на знаходження суми, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць; на знаходження остачі, які містять просту задачу на знаходження суми; на знаходження суми, які містять просту задачу на знаходження суми; на різницеве порівняння, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.

За допомогою цих завдань продовжуємо формувати *у матеріалізованій формі* дії *розбиття складеної задачі на прості та визначення порядку простих задач*, при цьому ми спираємось на виділення трикутниками простих задач на схемі аналізу. Зазначимо, що *дія формулювання плану* розв’язування також виконується в *матеріалізованій формі*, спираючись на виділені трикутниками прості задачі та на пояснення вчителя: „Першою дією відповімо на запитання першої простої задачі. Назви запитання першої простої задачі. Про що дізнаємося першою дією? Другою дією відповімо на запитання другої простої задачі. Назви запитання другої простої задачі. Про що дізнаємося другою дією?”.

Далі учні вчаться *виділяти прості задачі* не лише на схемі аналізу розв’язування, а й на короткому записі задачі. Тепер задачі подаються у вигляді тексту без схематичного зображення аналізу розв’язування задачі. Діти самі промовляють словесні конструкції аналізу, складають схему аналізу і коментують її. При формулюванні простих задач показуємо не їх опорні схеми, а виділяємо прямокутниками на короткому записі задачі (мал. 20).

?, 2 кг і 9 кг

Було - ?,
Витратила – 3 кг
Залишилось - ?

Мал. 20. Зразок показу простих задач на короткому записі складеної задачі

Таким чином *дії розбиття складеної задачі на прості та визначення порядку простих задач* починають засвоюватися у *формі голосного мовлення*.

Учням повідомляється, що при розв'язуванні складеної задачі визначають план розв'язування задачі, тому що складена задача містить в собі кілька простих задач і треба визначити послідовність відповіді на запитання цих простих задач. Таким чином, *дія формулювання плану розв'язування задачі* продовжує засвоюватися в *матеріалізованій формі*. Далі дітям подається пам'ятка № 3, в якій відображений порядок роботи над задачею.

Пам'ятка №3

1. Прочитай задачу та уяви про що в ній розповідається. Про що розповідається в задачі?
2. Виділи ключові слова та склади короткий запис задачі.
3. За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання.
4. Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти?

- Потрібно знати два числових значення: І - … (□ , чи невідомо) та ІІ - … (□ ,чи невідомо).

Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі?

- *Чи можна відразу відповісти на запитання задачі?*

Можна **Не можна**

- *Чому не можна?*
- Що потрібно знати, щоб відповісти на *це запитання?*

Потрібно знати два числових значення: І - ..□ ,чи невідомо) та ІІ - .□ , чи невідомо)

Якою арифметичною дією відповімо на *це запитання* задачі?

- *Чи можна відразу відповісти на це запитання?*
- *Чому можна?*
- *Таким чином ми від запитання задачі перейшли до числових даних.*

Аналіз закінчено.

5. *Розбий задачу на прості. Сформулюй кожну просту задачу. Покажи опорні схеми до кожної.*
6. *Склади план розв'язування задачі. Про що ми дізнаємося 1-ю дією? Про що дізнаємося 2-ю дією?*
7. Запиши розв'язання задачі.
8. Запиши відповідь.

Учні читають завдання пам'ятки і встановлюють, які з них вони навчилися виконувати при розв'язанні простих задач, а які – при ознайомленні зі складеною задачею. Особливу увагу приділено 4-му пункту пам'ятки: залежно від відповіді на його запитання, міркування йдуть різними шляхами – якщо на запитання задачі можна відповісти відразу, то задача проста, і ми переходимо до 7-го пункту; а якщо, не можна, то це складена задача, і слід послідовно виконати розпорядження пунктів 5 і 6. Починаючи з цього моменту, робота над усіма задачами проводиться за пам'яткою № 3, учні спочатку читають завдання пам'ятки , а потім їх виконують.

Наприклад:

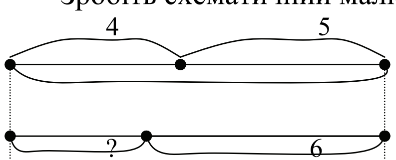
Мама зірвала з одного куща 5 помідорів, а з другого 4. 6 помідорів вона віддала дітям. Скільки помідорів залишилося?

- Про що йде мова в задачі? (В задачі говориться про помідори. Спочатку мама зірвала помідори з одного куща – 5, і з другого куща – 4, потім вона відала 6 помідорів дітям. Запитується скільки помідорів залишилося.)
- Проаналізуємо задачу. Розкажіть умову задачі. Розкажіть запитання задачі. Виділіть числові дані. Яке число є шуканим?
- Розглянемо короткий запис задачі (на дошці подається схематичний короткий запис). Прочитайте ключові слова. (Зірвала, віддала, залишилося). Чи відомо нам, скільки помідорів зірвала мама? (відомо, що мама зірвала 5 помідорів і ще 4 помідори) Чи знаємо ми скільки помідорів вона віддала дітям? (Відомо – 6 помідорів.)Яке запитання задачі?(Скільки помідорів залишилося у мами?).

Зірвала – ?, 5 п. і 4 п.
Віддала – 6 п.
Залишилося - ?

За коротким записом поясніть числові дані задачі. (Число 5 позначає, скільки помідорів зірвала мама з першого куща, число 4 позначає, скільки помідорів зірвала мама з другого куща, число 6 позначає , скільки

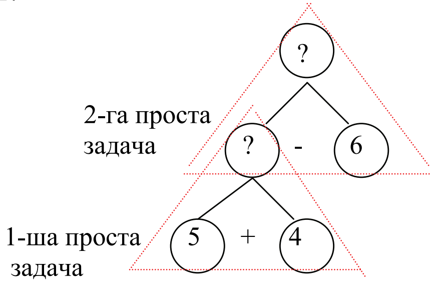
помідорів віддала мама дітям.) Про що запитується в задачі? (В задачі запитується скільки помідорів залишилося у мами).
- Покажіть опорну схему, яку нагадує ця задача. (Це опорна схема задачі на знаходження остачі).
- Зробіть схематичний малюнок:



- За схематичним малюнком поясніть, що означає кожний відрізок.

- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі “Скільки помідорів залишилося?” (Для того, щоб відповісти на запитання задачі треба знати два числові значення: 1 – скільки всього помідорів зірвала мама, поки ще не знаємо, та II – скільки помідорів вона віддала дітям, відомо – 6.)
- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією віднімання.) Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, не множна, тому що ми не знаємо скільки помідорів зірвала мама.)
- Що потрібно знати, щоб дізнатися скільки помідорів зірвала мама? (Треба знати два числові значення: I – скільки помідорів вона зірвала з першого куща, відомо – 5, та II – скільки помідорів вона зірвала з другого куща ,відомо – 4). Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією додавання). Чи можна відразу відповісти на це запитання?

(Можна, тому що ми знаємо обидва числові дані). Ми перейшли від запитання задачі до числових даних, тому аналіз закінчено.



Розкладемо цю задачу на дві прості задачі.
- Сформулюйте першу просту задачу. (З першого куща мама зірвала 5 помідорів, а з другого 4 помідори. Скільки всього помідорів зірвала мама?)

Зірвала – ?, $\boxed{\text{5 п. і 4 п.}}$
Віддала – 6 п.
Залишилося - ?

Покажемо її на короткому записі.

Зірвала – □
Віддала – 6 п.
Залишилося -

Сформулюйте другу просту задачу (Мама зірвала всього … помідорів, 6 помідорів вона віддала дітям. Скільки помідорів залишилося у мами?) Покажемо її на короткому записі.

- Складемо план розв’язування задачі. Про що ми дізнаємося в першій простій задачі? (Ми дізнаємося скільки всього помідорів зірвала мама). Про що ми дізнаємося в другій простій задачі? (Скільки помідорів залишилося у мами?)
- Запишіть розв’язання по діях з поясненням.

1) 5+4=9 (п.) всього зірвала мама, 2) 9-6=3 (п.) залишилося

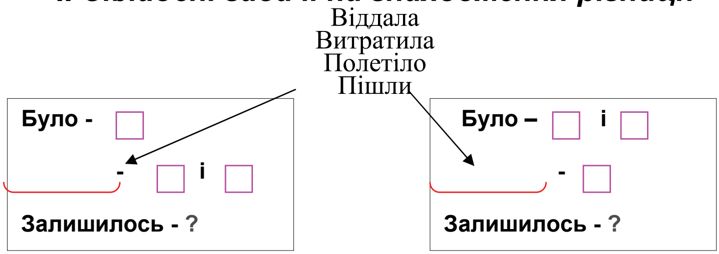
- Повторіть запитання задачі. Розкажіть відповідь на запитання задачі. (Відповідь: 3 помідора залишилося у мами). Скільки числових даних в умові цієї задачі? З яких простих задач складається дана задача. Яка задача є першою? Скільки числових даних вона містить? Яка задача є другою? Що можна сказати про її числові дані?

Складені задачі на знаходження суми і остачі

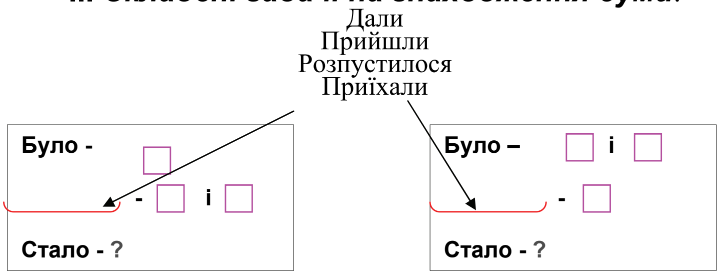
Основним видом завдань на цьому етапі є розв'язування задач. При цьому *дія аналізу* набуває подальшого опрацювання у *формі голосного мовлення*, а центральну увагу приділено *виділенню простих задач і формулюванню плану розв'язування задачі* – ці дії також продовжують засвоюватись у *формі голосного мовлення*.

Також учні розглядають опорні схеми складених задач на знаходження остачі або суми. Учні виділяють прості задачі на опорних схемах і порівнюють опорні схеми складених задач на знаходження остачі або суми, схожої математичної структури, визначаючи їх відмінність (перша проста задача на знаходження суми відповідає різним ключовим словам), на цій підставі вони складають задачі з даними числами і формулюють план розв'язування кожної складеної задачі.

I. *Складені задачі на знаходження різниці*:

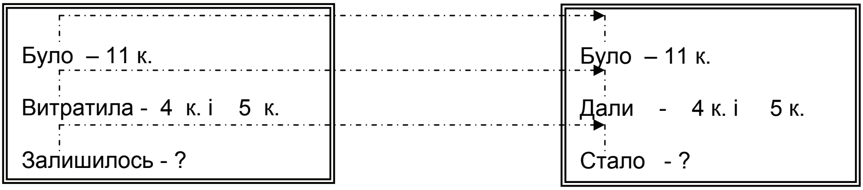


II. *Складені задачі на знаходження суми*:



Мал. 21. Опорні схеми складених задач на знаходження суми і остачі

Корисні також завдання на перетворення задачі на знаходження остачі у схожу задачу на знаходження суми (або складену задачу на знаходження суми перетворити у іншу задачу на знаходження суми) і, виділивши на короткому записі прості задачі, з'ясувати, як вплине ця зміна на план розв'язання задачі. Таким чином, здійснюється *попереднє ознайомлення з дією дослідження впливу зміни сюжету задачі на її розв'язання.* Наприклад:



- Не розв'язуючи задачу, скажіть, чим буде відрізнятися її розв'язання від розв'язання попередньої задачі? Чому? Від чого це залежить?

З метою засвоєння дії виділення простих задач, визначення їх порядку і формулювання плану розв'язування пропонуються також завдання на складання складеної задачі з двох простих. Тут встановлюється зв'язок між кількістю дій, якими розв'язується задача, і кількістю простих задач, з яких вона складається.

Формування вмінь розв'язувати складені задачі

Формування загального уміння розв'язувати складені задачі пропонуємо здійснювати на різноманітних математичних структурах складених задач, не зосереджуючись на відпрацюванні розв'язання задачі певної структури. Істотним у методиці ознайомлення із задачами нової математичної структури є введення їх на основі порівняння з схожими простими задачами або на основі продовження сюжету простої задачі, або на основі зміни запитання простої задачі до даної умови, або на основі зміни умови або запитання складеної задачі відомої математичної структури. Таким чином, досліджується вплив цих змін на розв'язання задачі; задачі нової математичної структури співставляються з задачами вже відомими, що полегшує їх засвоєння (психологами доведено, що знання, які пропонуються у порівнянні з іншими, засвоюються міцніше). Крім того, застосовується й такий методичний прийом, коли задача нової структури подається без зіставлення з відомими структурами. У цьому випадку учні опиняються в умовах необхідності відтворення повного складу дій, які містить загальне уміння розв’язувати складені задачі.

Отже, якщо учень зустрічається з задачею, яку він не вміє розв’язувати, то він виконує поступово, одну за одною, дії, що складають загальне уміння. А якщо математична структура задачі дитині відома, то відразу після виконання короткого запису та (або) схематичного рисунка, вона розбиває задачу на прості і формулює план її розв’язування.

В другому класі ми формуємо наступні дії, що складають загальне уміння розв’язувати складені задачі: міркувати від запитання задачі до числових даних – аналіз; розбивати задачу на прості; встановлювати порядок простих задач; формулювати план розв’язування задачі; записувати розв’язання по діях з поясненням; складати вираз, який є розв’язанням задачі; переходити до розв’язання задачі іншим способом; досліджувати вплив зміни умови або запитання задачі на її розв’язання.

У третьому класі зосереджуємо увагу на опрацюванні дій: міркувати від числових даних до запитання – синтез; визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру; узагальнювати спосіб розв’язування задач даної математичної структури. Визначені дії ми формуємо на основі вивчених видів складених задач, а також задач нової математичної структури.

Як бачимо, усі основні дії, які дозволяють учневі самостійно розв’язувати складені задачі, формуються до 3-го класу (дії: міркувати від числових даних до запитання задачі, розбивати задачу на прості та встановлювати порядок простих задач, формулювати план розв’язування, записувати розв’язання по діях та виразом); у 3-му класі опрацьовується дія міркування від числових даних до запитання задачі, а уміння розв’язувати задачі набуває подальшого засвоєння, скорочується – учні від короткого запису задачі переходять до виділення простих задач і плану розв’язування задачі. На прикладі задачі на знаходження невідомих трьох доданків за сумою трьох та сумами двох чисел здійснюється попереднє ознайомлення з діями визначення істотних ознак задач, узагальнення їх математичних структур та способу розв’язування; формування цих дій відбувається на задачах на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток. Отже, усі складові загального уміння розв'язувати складені задачі формуються до ***4-го класу***, тому у цей час увага зосереджується на формуванні умінь розв'язувати задачі окремих видів, а загальне уміння розв'язувати складені задачі набуває подальшого засвоєння на прикладі задач нових математичних структур і задач, які містять дроби. Розглянемо докладно методику формування вміння розв'язувати складені задачі по роках навчання [109].

Формування уміння розв'язувати складені задачі в 2-му класі

Тепер можна познайомити школярів із **записом розв'язування виразом**.

Наприклад: Софійка та Наталка прикрашали зачіску шпильками. У Софійки було 7 шпильок, а у Наталки на 4 шпильки більше. Скільки шпильок у Софійки та в Наталки разом?

Учні самостійно розв'язують задачу, міркуючи за пам'яткою № 3. Вони записують задачу коротко, виконують схематичний рисунок, зображають схематично аналітичні міркування, показують прості задачі на схемі й на короткому записі, складають план розв'язування про себе і записують розв'язання по діях з поясненням та відповідь на запитання задачі. Таким чином, *дії аналізу, розбиття складеної задачі на прості та визначення їх порядку, складання плану розв'язування задачі* виконуються у формі *зовнішнього мовлення про себе*.

Після розв'язання задачі учням пропонується розглянути запис розв'язання виразом: 7 + (7 + 4), визначити в ньому порядок виконання дій і співвіднести його з записом розв'язання по діях. Учні впевнюються, що це інша форма запису розв'язання задачі. Таким чином, відбувається *попереднє ознайомлення з дією запису розв'язання задачі виразом*. Щодо наступних задач, після їх розв'язання пропонується скористатися або схемою аналізу або схематичним рисунком або записом розв'язання по діях, виходячи з останньої дії, і записати вираз за поданою схемою, або вибрати вираз (*дія запису розв'язання виразом* засвоюється в *матеріалізованій формі*). Відтепер кожна задача записується двома способами: по діях і виразом.

Розв'язування задач двома способами. Задачі на знаходження суми і остачі, які містять просту задачу на

знаходження суми. Учням пропонується задача, до якої вже поданий план розв'язування, але вчитель радить поки ще не звертати на нього увагу. Наприклад:

1. У шкільній їдальні було 16 л олії. На сніданок витратили 5 л олії, а на обід 8 л. Скільки літрів олії залишилося?

План розв'язування
1) Скільки літрів олії залишилося після сніданку?
2) Скільки літрів олії залишилося після обіду?

Діти розв'язують задачу, міркуючи за пам'яткою № 3: першою дією дізнаємося скільки всього літрів олії витратили на сніданок і на обід, другою дією дізнаємось скільки літрів олії залишилось. А потім вчитель пропонує прочитати поданий план і з'ясувати, чи так вони розв'язували задачу, з'ясовується, що не так. Діти виконують схематичний рисунок, який відповідає даному плану, і розв'язують задачу іншим способом. Таким чином здійснюється *попереднє ознайомлення з дією переходу до розв'язання задачі іншим способом*. При розв'язанні задач двома способами за поданими планами розв'язування або за поданими розв'язаннями, відбувається опрацювання у *матеріалізованій формі* дії *переходу до розв'язання задачі іншим способом*. Далі, учні під керівництвом вчителя розв'язують задачі двома, а далі й трьома способами (дія засвоюється в *формі голосного мовлення*). Слід зазначити, що при розв'язанні цих завдань учні встановлюють умови, за яких задача даної математичної структури має лише один спосіб розв'язання, а за яких – два способи, а за яких – три.

Задачі на знаходження суми і остачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

На клумбі росло 7 червоних троянд, а жовтих на 5 більше. Для букету зрізали 3 жовті троянди. Скільки троянд залишилось на клумбі?

При складанні короткого запису до задач цього виду діти мають труднощі: в задачі є два об'єкти, але події відбуваються лише з одним. Тому зосереджуємо увагу на навчанні складання короткого запису задачі. За допомогою спеціальної бесіди вчитель допомагає учням виділити об'єкт задачі, з яким відбуваються події, і визначити ключові слова та відповідні ним числові дані.

Про що розповідається в задачі? Які троянди росли на клумбі? Скільки було червоних? Чи відомо нам скільки росло жовтих? А що ми про них знаємо? Що означає, що жовтих троянд було на 5 більше, ніж червоних? (Це означає, що жовтих троянд було стільки ж, скільки й жовтих – 7 – та ще 5). Зроби схематичний малюнок. В чому полягає ситуація задачі? Що відбувалося? З якими трояндами відбувалися події? Про які троянди запитується в задачі? Які ключові слова можна виділити? Чи відомо, скільки було жовтих троянд? А що ми встановили? (Жовтих троянд було 7 та ще 5). Чи відомо скільки зрізали жовтих троянд? Запишемо це. Яке запитання задачі? Позначимо його на короткому записі. Розглянь, як склали короткий запис задачі:

Було - ?, 7 шт. та ще 5 шт.	або	Було - ?, на 5 шт. б., ніж 7 шт.
Зрізали – 3 шт.		Зрізали – 3 шт.
Залишилось -?		Залишилось - ?

Складені задачі, які містять чотири ключових слова. Задачі цього виду вводяться на основі порівняння простої задачі та складеної, причому в складеній задачі події, що відбуваються з об'єктом задачі, продовжуються. Наприклад:

1) На льотному полі було 12 літаків. 4 літака полетіли. Скільки літаків залишилось?	2) На льотному полі було 12 літаків. 4 літаки полетіли, а 3 літаки прилетіли. Скільки літаків стало?

Учні спочатку розв'язують просту задачу, а далі, через зміни в короткому записі і схематичному рисунку, отримують короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. Отже, складену задачу, яка містить чотири ключових слова, отримано за допомогою зміни ситуації задачі, що відображується в короткому записі та на схематичному рисунку. Порівнюючи ці наочні опори, учні встановлюють як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Таким чином *дія дослідження задачі засобом зміни сюжету* набуває подальшого засвоєння у *матеріалізованій формі*.

Складені задачі на різницеве порівняння, які містять просту задачу на знаходження суми. Складання і розв'язання обернених задач. Складені задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, які містять просту задачу на знаходження суми. Ознайомлення з задачами цього виду здійснюється на основі порівняння пари задач: перша задача складається з двох задач на знаходження суми, а друга – задача на різницеве порівняння, в якій перша проста задача на знаходження суми. Наприклад:

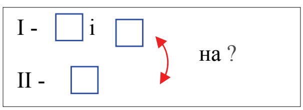
1) В Андрія 9 марок з тваринами та 2 марки з містами світу. А у Сашка 8 марок. Скільки всього марок у Андрія і Сашка разом?	2) В Андрія 9 марок з тваринами та 2 марки з містами світу. А у Сашка 8 марок. На скільки менше марок у Сашка, ніж у Андрія?

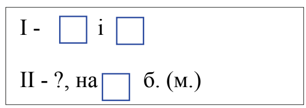
Учні встановлюють, що ці задачі мають однакові умови, але різні запитання. Діти розв'язують першу задачу і вносять зміни у її короткий запис і схематичний рисунок, щоб одержати короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. Далі встановлюється, як ця зміна вплине на розв'язання задачі – зміниться друга дія. Розв'язання другої задачі здійснюється за пам'яткою № 3. Після чого розв'язання порівнюються і з'ясовується, чому другі дії різні. Отже, дія *дослідження впливу зміни запитання задачі на її розв'язання* набуває подальшого засвоєння в *матеріалізованій формі*.

Після розв'язання задачі на різницеве порівняння пропонуємо учням скласти і розв'язати обернену задачу на збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць. Таким чином, дія складання і розв'язання обернених задач набуває подальшого засвоєння.

9, 6, 8, ? – пряма задача. 9, 6, ?, 7 – перша обернена задача

Внесіть зміни в короткий запис. Розв'яжіть обернену задачу. Порівняйте короткі записи цих задач. Покажіть опорну схему прямої задачі. Покажіть опорну схему оберненої задачі.





Покажіть на опорній схемі прості задачі, з яких вона складається. Яка проста задача в них спільна? Якими простими задачами вони відрізняються? Як можна назвати ці складені задачі? Складіть задачі з числами 12, 45, 34, які мають дані опорні схеми. Чим будуть відрізнятися їх розв'язання?

Складені задачі на знаходження третього невідомого доданку. Підготовкою до введення цих задач є розв'язання простих задач на знаходження невідомого доданка. Тому задачі цього виду вводяться на основі порівняння двох задач: перша – проста задача на знаходження невідомого доданка, а друга – складена задача на знаходження невідомого третього доданка, яка містить просту задачу на знаходження суми. Наприклад:

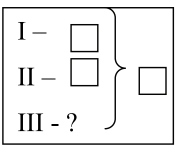
1) За альбом і ручку заплатили 20 гривень. Скільки коштує ручка, якщо альбом коштує 8 гривень?	2) За альбом, ручку та олівці заплатили 27 гривень. Альбом коштує 8 гривень, а ручка - 12 гривень. Скільки коштують олівці?

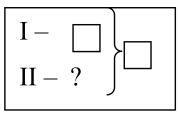
Порівнявши ці задачі, діти встановлюють, що в другій задачі продовжується ситуація першої задачі. Учні розв’язують першу задачу. А далі виконуються зміни у короткому записі та схематичному рисунку так, щоб одержати короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. З’ясовується, як ці зміни вплинуть на розв’язання задачі, чи можна скористатися правилом знаходження невідомого доданка при розв’язанні другої задачі. Друга задача розв’язується за пам’яткою № 3, а після її розв’язання визначається, який компонент був невідомий в першій та другій задачі. Учні роблять висновок, що обидві задачі – на знаходження невідомого доданка, але перша задача проста, а друга – складена.

Така методика ознайомлення з новим видом задач дозволяє здійснити подальше формування *у матеріалізованій формі* дії *дослідження впливу зміни сюжету задачі на її розв’язання*. Треба зазначити, що ці задачі мають два способи розв’язування, тому *дія переходу до іншого способу розв’язування задачі* набуває подальшого засвоєння. Визначити цей спосіб можна, якщо по-іншому скласти схематичний малюнок до задачі.

Задачі на знаходження невідомого доданка

складена **проста**





Мал. 22. Опорна схема та схематичний рисунок задач на знаходження невідомого доданка

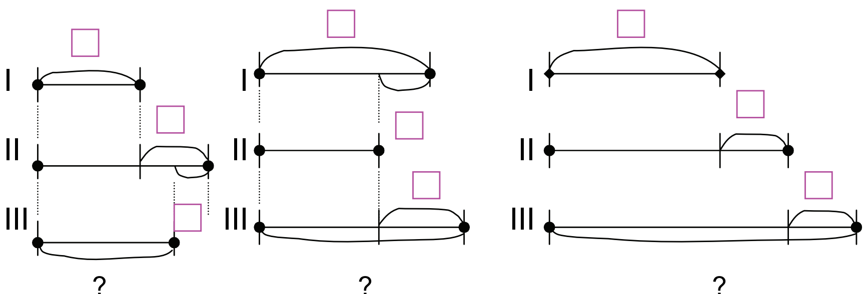
Складені задачі, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Задача цього виду вводиться на основі продовження ситуації простої задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

1) Мишко спіймав 8 окунів, а Сашко на 6 окунів більше. Скільки окунів спіймав Сашко?	2) Мишко спіймав 8 окунів, а Сашко на 6 окунів більше, ніж Мишко. Петро спіймав на 5 окунів більше, ніж Сашко. Скільки окунів спіймав Петро?

Так само, як і в попередніх випадках, учні досліджують вплив продовження ситуації задачі на короткий запис, схематичний рисунок, і, головне, на розв’язання задачі. *Дія дослідження впливу зміни сюжету задачі* продовжує засвоюватися в *матеріалізованій формі* або у *формі зовнішнього мовлення* (для тих учнів, які відразу після читання бачать ці зміни і можуть відразу пояснити, як вони вплинуть на розв’язання задачі).

Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

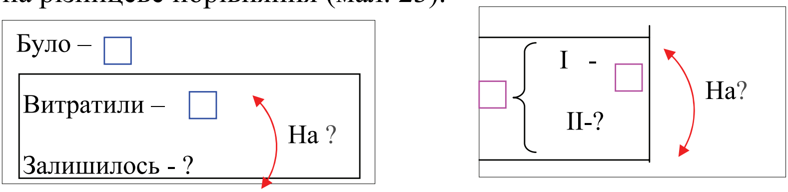
складена	**проста**
I – □ II - ?, на □ б. (м.), чем I III - ? , на □ б. (м.), чем II	I – □ II - ?, на □ б. (м.)



Складені задачі на різницеве порівняння, які містять просту задачу на знаходження остачі або невідомого доданка. Наприклад: У класній бібліотеці було 56 книжок. 37 книжок видали учням для читання. На скільки більше книжок видали, ніж залишилося в бібліотеці?

Робота над задачами нової математичної структури здійснюється за пам'яткою № 3. Під керівництвом учителя учні поступово виконують усі складові дії загального уміння розв'язувати задачі, а тому ці дії засвоюються й далі.

На основі розгляду опорних схем та виділення на них простих задач учні знайомляться з новими математичними структурами задач на різницеве порівняння (мал. 23).



Мал. 23. Опорні схеми складених задач на різницеве порівняння

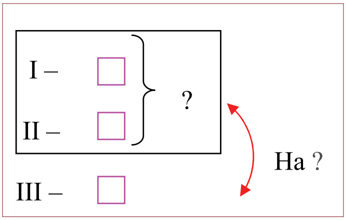
Учні самостійно складають задачі за поданими опорними схемами, розбивають їх на прості, визначаючи їх порядок, формулюють план розв'язування і записують розв'язання та відповідь. Отже, дії *розбиття складеної задачі на прості, визначення порядку простих задач та складання плану розв'язування* набувають подальшого засвоєння *у формі зовнішнього мовлення про себе.*

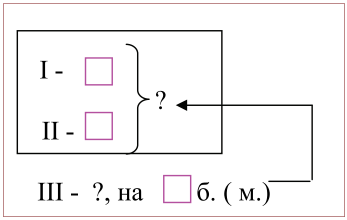
Складені задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, які містять просту задачу на знаходження суми та обернені до них складені задачі на різницеве порівняння. Наприклад:

Діти прикрашали класну кімнату до свята. Тетянка зробила 24 ліхтарика, Іринка – 25 ліхтариків, а Сашко – 59 ліхтариків.

Це задача? Що треба зробити, щоб отримати задачу? Чи можна поставити до цієї умови запитання: „На скільки більше зробив ліхтариків Сашко, ніж Тетянка та Іринка разом?". Розв'яжи задачу міркуючи за пам'яткою № 3. Склади і розв'яжи обернену задачу, так щоб шуканим було число 59.

Математичні структури прямої та оберненої задач аналізуються, порівнюються, і досліджується вплив відмінності на розв'язання оберненої задачі. Це дає можливість на прикладі однієї задачі познайомити дітей з задачами на різницеве порівняння та на знаходження числа, яке на кілька одиниць більше чи менше за дане. Отже, продовжуємо формувати *уміння досліджувати вплив зміни умови задачі на її розв'язання у формі голосного мовлення*.





Мал. 24. Опорні схеми обернених задач, що містять відношення різницевого порівняння

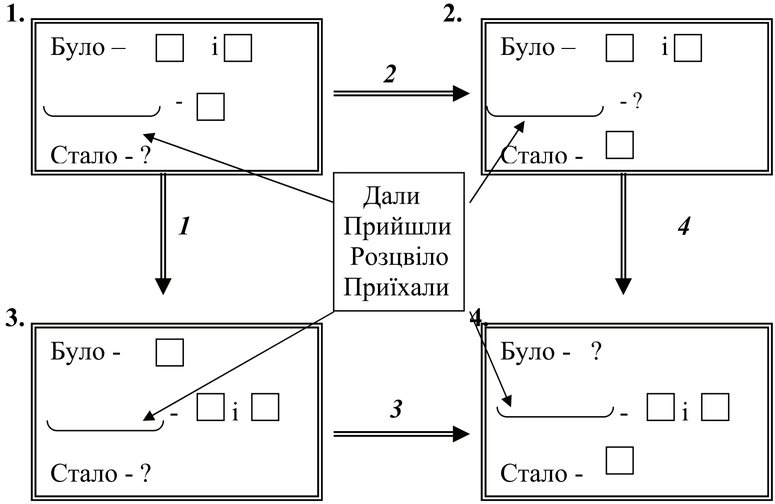
З яких простих задач складається кожна задача? Що в них спільного?
Чим вони відрізняються? Як ця відмінність впливає на розв'язання задачі?

Складені задачі на знаходження невідомого доданка, які містять просту задачу на знаходження суми. Задачі цього виду вводяться на основі порівняння двох взаємно обернених задач, перша з яких містить дві прості задачі на знаходження суми. Наприклад:

1) В Андрія було 12 марок з тваринами і 14 марок з містами світу. Тато йому подарував 13 марок. Скільки марок стало в Андрія?	2) В Андрія було 12 марок з тваринами та 14 марок з містами світу. Після того, як тато подарував йому кілька марок, в нього стало 39 марок. Скільки марок подарував Андрію тато?

Розв'язання першої задачі не викликає у дітей труднощів, і вони можуть відразу виділити прості задачі, та сформулювавши план розв'язування, записати розв'язання та відповідь. Далі з'ясовуємо, чим відрізняється друга задача від першої, і як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

На даному етапі пропонуємо порівняти пари задач (по стрілочках) визначаючи спільне та відмінне.

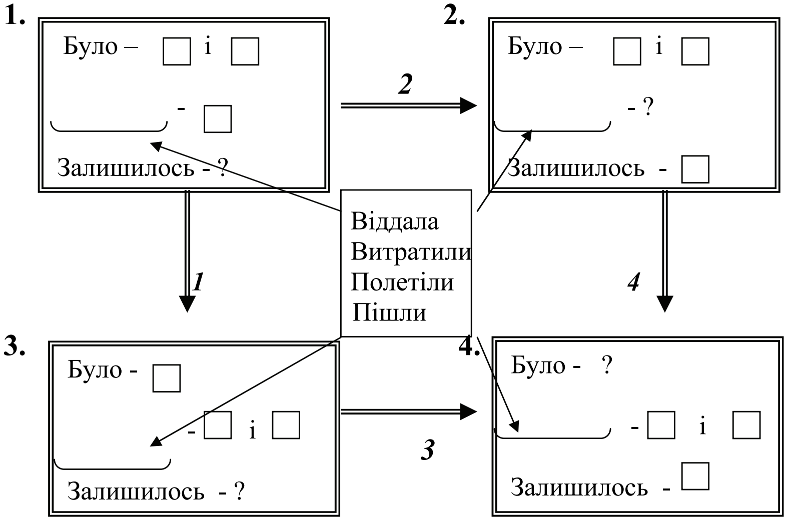


Мал. 25. Схема порівняння пар задач

Діти помічають, що задачі, з’єднані стрілочками 2 та 3, взаємообернені, а задачі, з’єднані стрілочкою 1, – задачі на знаходження суми, а стрілочкою 4 – задачі на знаходження невідомого доданка. Але спільним в усіх цих задач є наявність простої задачі на знаходження суми. Таким чином, дії складання і розв’язання обернених задач, порівняння задач і дослідження впливу зміни на розв’язання задачі набувають подальшого засвоєння.

Зазначимо, що ці задачі можна розв’язувати кількома способами, тому здійснюється опрацювання *дії переходу до розв’язання задачі іншим способом в формі „зовнішнього мовлення про себе”*.

Складені задачі на знаходження зменшуваного та від’ємника, які містять просту задачу на знаходження суми. Діти вже знайомі з математичними структурами задач на знаходження остачі, що містять просту задачу на знаходження суми (1 і 3). Ознайомлення з новим видом задач здійснюється за допомогою розв’язання прямої відповідної задачі й складання та розв’язування оберненої задачі або на знаходження невідомого від’ємника (2), або на знаходження зменшуваного (4). Крім того, після порівняння задачних формулювань та розв’язування прямих й обернених задач, корисно спів ставити математичні їхні структури, визначити відмінності й встановити, як ця відмінність вливає на розв’язання (мал. 26). Діти роблять аналогічні висновки, що й при порівнянні задач на знаходження суми та на знаходження невідомого доданка.



Мал. 26.Схема порівняння пар задач

Крім того, на матеріалі задач цього виду доцільно продовжувати роботу із навчання учнів запису розв’язання задачі виразом. Наприклад:

1. Після того, як в автобус увійшли 7 чоловіків та 5 жінок, в автобусі стало їхати 25 осіб. Скільки осіб їхало в автобусі спочатку? Розв’яжи задачу, міркуючи за пам’яткою № 3. Склади схему аналізу.

- Уважно розглянь схему аналізу. Подумай, як скласти вираз до цієї задачі?
- Якщо тобі важко скористатися схемою аналізу, скористайся схематичним малюнком задачі.
- Якщо тобі важко, то поглянь на розв’язання. Прочитай останню дію. Що означають числа? Яке число не дано за умовою задачі? Як ми про нього дізналися? Замість цього числа слід записати цей вираз. Число 25 дано за умовою задачі? Якщо так, то запиши його на відповідному місті. Число 12 дано за умовою задачі? А як ми його знайшли? Напиши на відповідному місті вираз та візьми його у дужки.
- Склади вираз за схемою: □ - □ = □

Ти записав розв’язання задачі виразом. Простав в ньому порядок дій і обчисли його значення.

2. У великій фруктовій вазі лежали червоні і жовті яблука. Після того, як з'їли 6 червоних і 5 зелених яблук, в вазі залишилося ще 8 яблук. Скільки яблук було в вазі?

Розв'яжи задачу. Склади вираз за схемою: $\square + \square = \square$

3. Мама випекла 8 пиріжків з вишнями та 7 пиріжків з яблуками. Після того, як Михайлик з'їв кілька пиріжків, залишилося ще 9. Скільки пиріжків з'їв Михайлик?

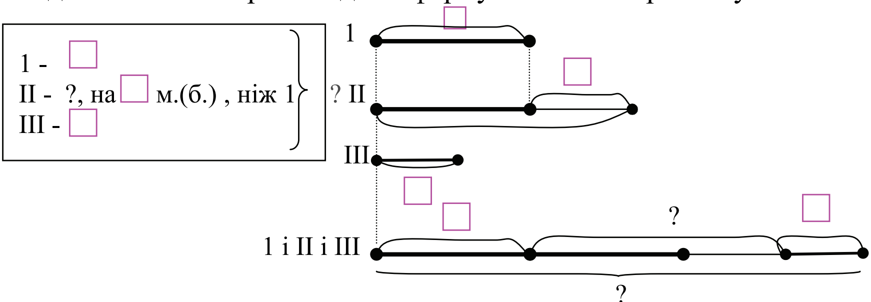
Розв'яжи задачу. Склади вираз за схемою: $\square - \square = \square$

Задачі на знаходження суми трьох доданків, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Задачі нової математичної структури вводяться на основі порівняння простої задачі на знаходження суми трьох доданків і складеної задачі на знаходження суми трьох доданків, яка містить просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

1) У Марійки 8 цукерок, у Віті 7, а у Сашка 9 цукерок. Скільки всього цукерок у дітей?	2) У Марійки 8 цукерок, у Віті на 4 цукерки більше, ніж у Марійки. У Сашка 9 цукерок. Скільки всього цукерок у дітей?

При порівнянні цих задач встановлюється спільність і відмінність. Діти розв'язують першу задачі, а далі виконують зміни в короткому записі і схематичному рисунку, так щоб одержати короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. З'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання другої задачі. Таким чином, *дія дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

Учні розглядають опорну схему задач нової математичної структури, виділяють на ній прості задачі і формулюють план розв'язування.

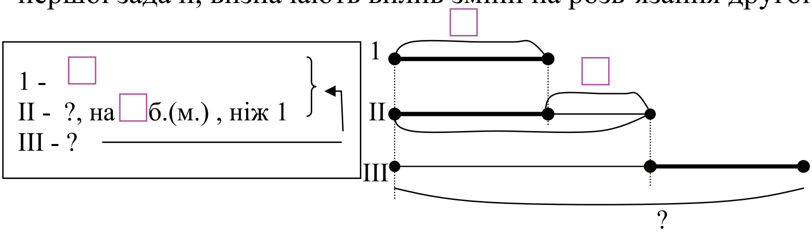


Мал. 28. Опорна схема та схематичний рисунок задачі на знаходження суми трьох доданків, що містить просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Складені задачі на знаходження третього числа по сумі двох даних, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Ознайомлення зі складеними задачами цього виду відбувається аналогічно введенню задач на знаходження суми трьох доданків, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

1) Першого дня туристи пройшли 12 км, а другого 9 км. Третього дня вони подолали стільки, скільки за перші два дні разом. Скільки кілометрів подолали туристи третього дня?	2) Першого дня туристи пройшли 12 км, а другого на 3 км менше. Третього дня вони подолали стільки, скільки за перші два дні разом. Скільки кілометрів подолали туристи третього дня?

Але на цьому етапі *дія дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання* формується в формі „*зовнішнього мовлення про себе*" - учні відразу встановлюють відмінність цих задач і, не розв'язуючи першої задачі, визначають вплив зміни на розв'язання другої.

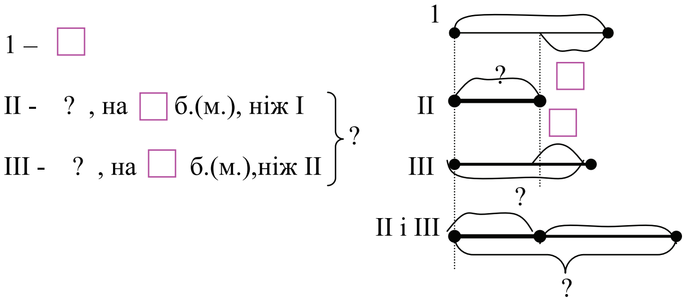


Мал. 29.Опорна схема та схематичний рисунок задачі на знаходження третього числа по сумі двох даних, яка містить просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Задачі на знаходження суми, які містять дві задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Ці задачі ми пропонуємо для розв'язання без допоміжних задач, хоча можна було б застосувати й реалізований нами у багатьох випадках методичний прийом – порівняння двох задач, перша з яких має відому структуру (задача на знаходження суми трьох доданків, яка містить збільшення або зменшення числа на кілька одиниці), а друга дещо ускладнена (задача на знаходження суми двох доданків, яка містить дві прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць). Оскільки тут відмінність полягає не лише у застосуванні другої простої задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, а ще й у зміні суми трьох доданків на суму двох доданків, то ми обмежилися поданням задачі нової математичної структури і розв’язанням її за пам’яткою № 3. Наприклад: У причалу стояло 12 скутерів, а яхт на 7 менше, ніж скутерів, а катерів – на 8 більше, ніж яхт. Скільки яхт та катерів стояло у причалу?

Вважаємо таку роботу корисною, тому що учні ще раз повертаються до розгорнених міркувань при розв’язанні складених задач, отже, усі складові дії загального уміння розв’язувати складені задачі й далі засвоюються.

Ускладнення задач даної математичної структури йде засобом знаходження суми не двох, а трьох доданків.



Мал. 30. Опорна схема та схематичний рисунок задачі на знаходження суми, що містить дві задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

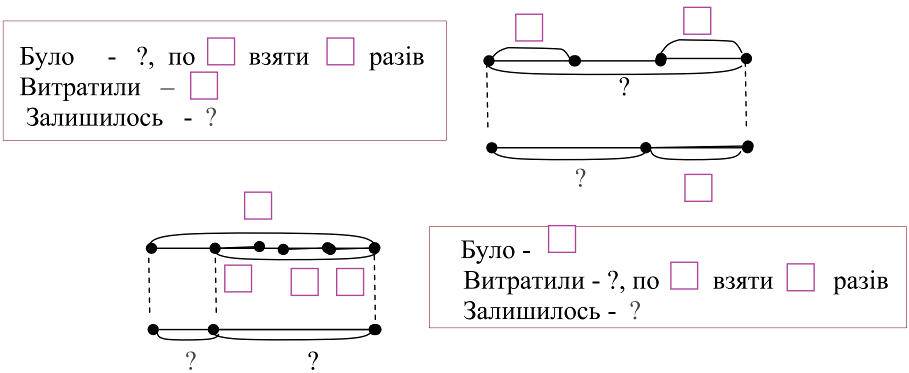
Сформульовані у непрямій формі задачі на дворазове збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. На етапі підготовчої роботи розв’язуються прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, але сформульовані у непрямій формі. Саме уміння розв’язувати такі прості задачі є основою для розв’язання відповідних складених задач. Задача нової математичної структури пропонується у порівнянні з відповідною складеною задачею, яка містить дві прості задачі на збільшення числа на кілька одиниць, що сформульовані у прямій формі. Наприклад:

1) Композитор Моцарт написав першу оперу у 10 років, а Гайдн на 4 роки пізніше Моцарта, а Прокоф’єв – на рік раніше Моцарта. У скільки років написав першу оперу Прокоф’єв?	2) Композитор Гайдн написав першу оперу в 14 років, що на 4 роки пізніше, ніж Моцарт, а Прокоф’єв на 1 рік раніше Моцарта. У скільки років написав першу оперу Прокоф’єв?

Учні встановлюють відмінність, але ця відмінність не вплине на розв’язання другої задачі. Таким чином, продовжуємо формувати *дію* *дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання у формі „зовнішнього мовлення про себе”.*

Задачі на знаходження остачі, які містять задачу на конкретний зміст дії множення. На етапі підготовчої роботи до ознайомлення з задачами цієї математичної структури актуалізується уміння розв'язувати прості задачі на конкретний зміст дії множення. Задача нової математичної структури вводиться без допоміжної задачі, одразу, і пропонується розглянути опорну схему таких задач. Наприклад:

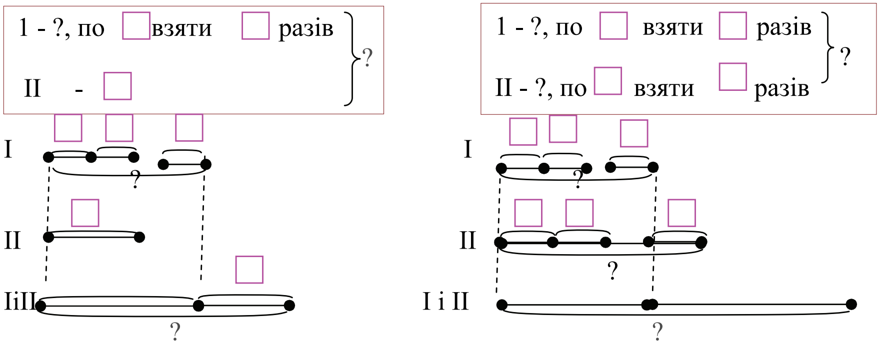
1. Для шкільного свята мама купила 4 пакета соку по 2 л в кожному. Діти випили 7 л соку. Скільки літрів соку залишилося?
2. Бабуся надоїла від корови 16 л молока. Частину молока вона розлила у 6 банок по 2 л в кожну. Скільки літрів молока залишилося у бабусі?



Мал. 31. Опорні схеми та схематичні рисунки задач на знаходження остачі, що містять просту задачу на конкретний зміст дії множення

Опорні схеми (мал. 31) у наступній роботі над задачами є зразками коротких записів, з яких учні обирають потрібний. Задачі розв'язуються за пам'яткою № 3, учні виконують повний аналіз. Отже, всі складові дії загального уміння розв'язувати задачі набувають подальшого засвоєння. Звертаємо увагу на прикидку очікуваного результату: у відповіді повинні отримати менше число, тому що залишилося менше, ніж було, та на встановлення відповідності між знайденим числом та числовими даними задачі.

Задачі на знаходження суми, які містять задачу на конкретний зміст дії множення або дві прості задачі на конкретний зміст добутку. Робота над задачами на знаходження суми, які містять просту задачу на конкретний зміст добутку, проводиться аналогічно.



Мал. 32. Опорні схеми та схематичні рисунки задач на знаходження суми, які містять прості задачі на конкретний зміст множення.

А задачі на знаходження суми, які містять дві прості задачі на конкретний зміст добутку, вводяться як ускладнення ситуації попередньої задачі. Наприклад:

1. Кравчиня пошила 6 платтів, витрачаючи по 2 м на кожне, і пальто, на яке вона витратила 3 м тканини. Скільки всього метрів тканини витратила кравчиня?
2. Кравчиня пошила 6 платтів, витрачаючи по 2 м на кожне, та 2 пальто, витрачаючи по 3 м на кожне. Скільки всього метрів тканини витратила кравчиня?

Також задачі на знаходження суми, які містять слова ознаки „було - стало”, вводяться як зміна ситуації відповідної задачі на знаходження остачі („було – залишилося”). Наприклад:

1) У Іринки було 5 купюр по 2 гривні. Вона купила коробку цукерок за 7 гривень. Скільки грошей залишилося в Іринки?	2) В Іринки було 5 купюр по 2 гривні. Тато дав їй ще 7 гривень. Скільки грошей стало в Іринки?

Таким чином, учні ставляться в умови необхідності *дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задачі*, тому ця дія набуває подальшого засвоєння в *формі „зовнішнього мовлення про себе”*.

Задачі на знаходження остачі, які містять задачу на конкретний зміст дії ділення. Робота над задачами цього виду проводиться аналогічно попереднім: подаються опорні схеми, якими учні користуються для розв’язання задач, вибираючи потрібну.

Задачі, які містять просту задачу на ділення на вміщення, подаються у порівнянні з задачами, які містять просту задачу на ділення на рівні частини, досліджується вплив цієї зміни на розв'язання задачі. Наприклад:

1) До шкільної їдальні привезли 27 л молока в трилітрових бутлях. На сніданок витратили 7 бутлів молока. Скільки бутлів молока залишилося?	2) До шкільної їдальні привезли 27 л соку в 9 бутлях порівну в кожному. Для приготування млинців з бутля відлили 2 л молока. Скільки літрів молока залишилось в бутлі?

Було - ?, у $\square$ вміщується по $\square$ Витратили – $\square$ Залишилось - **?**	Було в 1 - ?, $\square$ розділили на $\square$ порівну Витратили – $\square$ Залишилось - **?**

Мал. 33. Опорні схеми задач на знаходження остачі, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення

Задачі на різницеве порівняння, які містять дві прості задачі на конкретний зміст добутку. Вводяться у порівнянні з відповідними задачами на знаходження суми. Наприклад:

1) Софійка розв'язала три стовпчики прикладів по 7 прикладів у кожному. А Оленка розв'язала чотири стовпчики прикладів по 5 прикладів у кожному. Скільки всього прикладів розв'язали дівчата?	2) Софійка розв'язала три стовпчики прикладів по 7 прикладів у кожному. А Оленка розв'язала чотири стовпчики прикладів по 5 прикладів у кожному. На скільки більше прикладів розв'язала Софійка, ніж Оленка?

Встановивши відмінність цих задач, учні досліджують вплив цієї зміни на розв'язання другої задачі, формулюють план її розв'язуванні і записують його. Дія дослідження впливу зміни запитання задачі набуває подальшого засвоєння.

Задачі на різницеве порівняння, які містять дві прості задачі на конкретний зміст ділення (частки). Задача нової математичної структури вводиться одразу, без порівняння з відомими задачами, і розв'язується за пам'яткою № 3. Наприклад:

I - ?, розділили на □ порівну на ? II - □

У двох однакових каструлях 10 л молока, а в банці 3 л. На скільки літрів молока більше в одній каструлі, ніж у банці?

Але задача на різницеве порівняння, яка містить дві прості задачі на конкретний зміст частки, вводиться у порівнянні з задачею, яка містить лише одну просту задачу на знаходження частки:

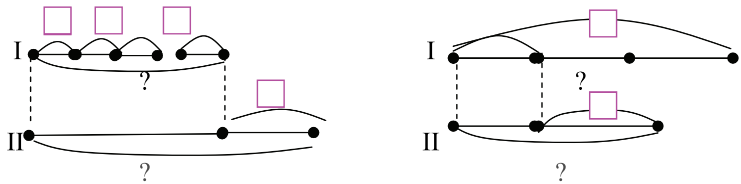
1) Один чабан настриг з 3 овець 18 кг вовни, порівну з кожної, а інший з однієї вівці настриг 7 кг вовни. Хто настриг з однієї вівці більше вовни і на скільки?	2) Один чабан настриг з 3 овець 18 кг вовни, порівну з кожної, а інший з 4 овець – 28 кг вовни, порівну з кожної. Хто настриг з однієї вівці більше шерсті і на скільки?

Учні розв'язують першу задачу, працюючи за пам'яткою № 3, потім порівнюють другу задачу з першою, встановлюють, що змінилося, і з'ясовують, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Після чого формулюється план розв'язування другої задачі, записується її розв'язання та відповідь.

Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, що містять просту задачу на конкретний зміст дії множення. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, що містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення (частки). Подаються опорні схеми цих задач, якими учні користуються для складання коротких записів при розв'язанні задач за пам'яткою № 3.

1. У ларьок привезли 4 ящика помідорів по 9 кг у кожному, а огірків на 7 кг менше, ніж помідорів. Скільки кілограмів огірків привезли в магазин?
2. На три плаття кравчиня витратила 6 м тканини, а на один костюм витрачається на 1 м тканини більше, ніж на одне плаття. Скільки метрів тканини необхідно на костюм?

I - ?, по □ взяти □ разів II - ? , на □ м.(б.)	I - ?, □ розділили на □ порівну II - ? , на □ б.(м.)



Мал. 34. Опорні схеми та схематичні рисунки задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, що містять просту задачу на конкретний зміст дії множення або ділення

Складені задачі на знаходження частки, які містять просту задачу на конкретний зміст суми. Задача нової математичної структури подається у порівнянні з простою задачею на знаходження суми. Наприклад:

1) Першого дня мати зробила 11 л соку, а другого 10 л соку. Скільки всього літрів соку зробила матуся за два дні?	2) Першого дня мати зробила 11 л соку, а другого 10 л соку. Весь сік вона розлила в трилітрові банки. Скільки отримала банок із соком матуся?

Зіставивши ці задачі, діти впевнюються, що складена задача є продовженням простої задачі. І далі досліджується вплив цієї зміни на розв'язання задачі: добавляється ще одна арифметична дія, і це дія ділення. Таким чином, діти, які одразу помічають цю відмінність і висловлюють припущення, як вона вплине на розв'язання складеної задачі, виконують *у внутрішньому плані* дію *дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання*.

Далі діти складають і розв'язують обернену задачу, в якій шуканим буде число 3: Першого дня мати зробила 11 л соку, а другого 10 л соку. Весь сік вона розлила в 7 банок порівну у кожну. Скільки літрів соку у кожній банці?

Після розв'язування цієї задачі діти порівнюють короткі записи (опорні схеми) та розв'язання прямої та оберненої задачі і досліджують вплив зміни шуканого на розв'язання (мал. 35).

I – □ II - □ } ?, розділили на □ порівну	I – □ II - □ } ?, вміщується по □ - ?

Мал. 35. Опорні схеми задач на конкретний зміст дії ділення, які містять просту задачу на знаходження суми

Складені задачі на знаходження суми, які містять просту задачу збільшення або зменшення числа у кілька разів. Задачі на різницеве порівняння, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів. Вводяться аналогічно: пропонуються для порівняння дві задачі – проста задача на збільшення або зменшення числа у кілька разів та складена задача нової математичної структури. Наприклад:

1) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Скільки дерев посадив Сашко?	2) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Скільки всього дерев посадили Сашко і тато?

Діти визначають, що складена задача є продовженням простої, тому для її розв’язання потрібно буде виконати ще одну дію – і це дія додавання, тому що в задачі запитується „скільки всього?”.

Задача аналогічної математичної структури на різницеве порівняння подається після розв’язання задачі на знаходження суми:

Порівняй задачу з попередньою: Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. На скільки менше дерев почадив Сашко, ніж тато?

Учні визначають, що змінилося запитання і ця зміна вплине на другу дію – друга дія зміниться і буде дією віднімання, тому що запитується „На скільки більше чи менше?”.

Складені задачі, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів. Задачі нової структури вводяться у порівняння із складеними задачами, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

1) Сашко посадив 4 дерева, а тато на 3 дерева більше. Мама посадила на 2 дерева менше, ніж тато. Скільки дерев посадила мама?	2) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Мама посадила в 2 рази менше, ніж тато. Скільки дерев посадила мама?

Учні з’ясовують, що задачі відрізняються умовами, а саме – в першій задачі було задано два співвідношення різницевого порівняння, а в цій два співвідношення кратного порівняння. Тому зміняться арифметичні дії, але план розв’язування лишиться тим самим.

Задачі на знаходження суми, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів. Вводяться у порівнянні з задачами попередньої математичної структури. Наприклад:

1) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Мама посадила в 2 рази менше, ніж тато. Скільки дерев посадила мама?	2) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Мама посадила в 2 рази менше, ніж тато. Скільки всього дерев посадили?

При цьому виявляється, що задачі мають однакові умови, але різні запитання, причому друга задача є продовженням першої. Тому ця зміна викликає необхідність виконання ще однієї арифметичної дії – додавання (запитується „Скільки всього?”).

Складені задачі на кратне порівняння, які містять дві прості задачі на конкретний зміст добутку. Задачі подаються у порівнянні зі складеною задачею на різницеве порівняння, яка містить дві прості задачі на конкретний зміст добутку. Наприклад:

1) У Миколи 4 купюри по 10 гривень, а в Іринки 4 купюри по 2 гривні. На скільки менше грошей в Іринки, ніж у Миколи?	1) У Миколи 4 купюри по 10 гривень, а в Іринки 4 купюри по 2 гривні. У скільки разів менше грошей в Іринки, ніж у Миколи?

Учні встановлюють, що ці задачі відрізняються лише запитаннями – в першій задачі запитується „На скільки більше чи менше?” і ми відповідаємо на це запитання дією віднімання, а в другій – „У скільки разів більше менше?” і ми відповідаємо на це запитання дією ділення. Отже будуть різні останні дії.

Задачі на кратне порівняння, які містять першу просту задачу на конкретний зміст дії ділення, а другу – на конкретний зміст остачі. Застосовується підхід аналогічний до попереднього. Учням пропонується пара задач: перша – складена задача на різницеве порівняння, яка містить першу просту задачу на конкретний зміст дії ділення, а другу на знаходження остачі; інша задача – задача на кратне порівняння аналогічної математичної структури. Наприклад:

1) В магазині 16 кг цукру розсипали у пакети по 2 кг в кожний. 6 пакетів продали. На скільки менше пакетів залишилось, ніж продали?	2) В магазині 16 кг цукру розсипали у пакети по 2 кг в кожний. 6 пакетів продали. У скільки разів менше пакетів залишилось, ніж продали?

Після розв'язання першої задачі, порівнявши другу задачу з першою, і визначивши їх відмінність, діти встановлюють, як ця зміна вплине на розв'язання задачі; та виконують зміни у розв'язанні попередньої задачі.

Складені задачі на знаходження невідомого доданка, які містять просту задачу на конкретний зміст дії множення. Складені задачі на знаходження невідомого доданка, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення. Застосовується метод зміни умови задачі і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі. Учням пропонується проста задача на знаходження невідомого доданка, яка порівнюється з задачею даної математичної структури. Наприклад:

1) Тарас за три дні повинен розв'язати 32 приклади. Скільки прикладів він розв'язав в третій день, якщо за два дні він розв'язав 18 прикладів.	2) Тарас за три дні повинен розв'язати 32 приклади. Скільки прикладів він розв'язав в третій день, якщо перші два дні він розв'язував по 9 прикладів?

Діти встановлюють, що другу задачу отримано засобом надання додаткової умови, а тому ця зміна викличе необхідність виконання ще однієї арифметичної дії.

Складені задачі на знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника, які містять просту задачу на конкретний зміст дії множення. Складені задачі на знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення. Застосовується аналогічний підхід попередньому. Дітям пропонується пара задач: перша – проста задача на знаходження зменшуваного (або від'ємника), а друга – складена задача з тим самим запитанням, але із ускладненою умовою. Наприклад:

1) Садівник обкопав 16 дерев і йому залишилось ще обкопати 18 дерев. Скільки дерев він повинен був обкопати?	2) Садівник обкопав 2 рядки по 8 дерев в кожному і йому ще залишилось обкопати 18 дерев. Скільки дерев він повинен був обкопати?
1) До їдальні привезли 35 л олії. Через тиждень залишилось 28 л олії. Скільки літрів олії витратили за тиждень?	2) До їдальні привезли 7 п'яти літрових каністр олії. Через тиждень залишилось 28 л олії. Скільки літрів олії витратили за тиждень?
1) В бутлі було 3 л соку. Після того, як з бутля відлили кілька літрів в ньому залишилось ще 1 л. Скільки літрів соку відлили з бутля?	2) Мама купила 12 л соку в 4 бутлях порівну в кожному. Після того, як з бутля відлили кілька літрів в ньому залишилось ще 1 л. Скільки літрів соку відлили з бутля?

Після розв'язання першої задачі, порівнявши другу задачу з першою, і визначивши їх відмінність, діти встановлюють, як ця зміна вплине на розв'язання задачі.

Незважаючи на різноманіття видів складених задач, на матеріалі яких здійснюється формування загального уміння розв'язувати задачі, до обов'язкового мінімуму 2-го класу входять лише задачі, що розв'язуються двома арифметичними діями першого ступеню.

Формування уміння розв'язувати складені задачі в 3-му класі

На початку навчального року слід провести спеціальну роботу з узагальнення поняття „складена задача" та окремих видів складених задач [106; 112].

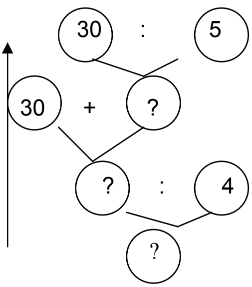
В 2-му класі діти в процесі пошуку розв'язування задачі виконували аналітичні міркування. Тепер можна перейти до навчання **міркування від числових даних до запитання задачі – синтезу.**

Учням пропонується для розв'язання задача нової математичної структури на збільшення або зменшення числа у кілька разів, яка містить першу просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів і другу просту задачу на знаходження суми:

На дослідній ділянці у господарстві посіяли 30 кг пшениці, жита – в 5 разів менше, ніж пшениці, а гречки в 4 рази менше, ніж пшениці та жита разом. Скільки посіяли гречки?

Учні виконують повний аналіз і розбивають задачі на прості. Вчитель показує інший спосіб міркування – від числових даних до запитання задачі – синтез:

- Знаючи, що посіяли 30 кг пшениці, а жита в 5 разів менше, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? (Про масу жита). Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією ділення).
- Знаючи, що пшениці посіяли 30 кг і знаючи скільки посіяли жита, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? (Скільки всього посіяли жита і пшениці разом.) Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією додавання).



- Знаючи скільки всього посіяли пшениці і жита разом та знаючи, що гречки посіяли в 4 рази менше, ніж пшениці і жита разом, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? (Скільки посіяли гречки). Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією ділення). Отже, ми від числових даних, перейшли до запитання задачі. Ми здійснили синтез.

Порівняйте аналіз і синтез. Чим вони відрізняються? (Напрямками міркування. При аналізі ми міркуємо від запитання до числових даних, то при синтезі, навпаки, – від числових даних до запитання.)

Таким чином відбувається *попереднє ознайомлення з дією міркування від числових даних до запитання задачі.* До наступних задач учні отримують картки з незаповненими схемами синтезу, в яких вони повинні вставити числові дані та знаки арифметичних дій, *дія міркування від числових даних до запитання задачі* формується *в матеріалізованій формі*. Поступово учні запам'ятовують словесні конструкції, які застосовуються при синтезі, і ця дія набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*. Зауважимо, що при розв'язанні задач учні також можуть міркувати від запитання задачі до числових даних. Діти самостійно обирають спосіб міркувань. Але, як свідчить практика, при розв'язанні задач в три та більше дій учні застосовують переважно синтез.

Складені задачі на знаходження трьох невідомих доданків за сумами двох та сумою трьох чисел. На етапі підготовчої роботи актуалізується уміння розв'язувати прості задачі на знаходження невідомого доданка та уміння розв'язувати складені задачі на знаходження невідомого третього доданка.

Ознайомлення з обговорюваним видом задач можна провести наступним чином. Розглядаємо дві послідовні задачі на знаходження невідомого доданку, а далі з них утворюється складена задача на знаходження невідомого третього числа, на підставі перетворення якої отримується задача нового виду. Наприклад:

1. Сума двох чисел дорівнює 72. Знайдіть другий доданок, якщо перший доданок 24.
2. Сума двох чисел (II та III) дорівнює 76. Знайдіть третє число, якщо друге число 48.
3. Сума трьох чисел 100. Знайдіть третє число, якщо перше число 24, а друге число 48.
4. Сума першого та другого числа 72. Сума другого та третього числа 76. Знайдіть третє число, якщо перше число 24.
5. Сума трьох чисел 100. Знайдіть кожне число, якщо сума першого та другого числа 72, другого та третього числа – 76.

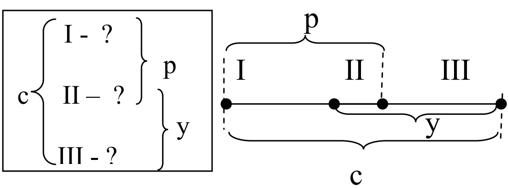
Для того, щоб діти усвідомили спосіб розв'язування задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами, пропонуємо порівнювати одержану задачу з попередніми, визначати що потрібно зробити, щоб отримати одну з попередніх задач, яка розв'язується дуже просто. Отже, визначається спосіб розв'язування задач даної математичної структури.

Для усвідомлення істотних ознак задач цього виду і узагальнення способу їх розв'язування учням пропонується завдання на складання задачі з тими ж самими числами, але з іншою ситуацією, наприклад: про ціну плаття, костюма та штанів. Учні записують задачу коротко, пояснюють числа задачі і складають план розв'язування задачі. Вчитель запитує "Чи треба розв'язувати цю задачу? Може розв'язання вже записане на дошці? Чому ці задачі мають однакові розв'язання?" Учні з'ясовують, що обидві задачі містять однакові числа і мають однакову структуру короткого запису, а значить і склад з простих задач, тому вони мають однакові розв'язання. Школярі „виправляють" лише пояснення до арифметичних дій.

Далі вчитель пропонує задачу про ціну костюма, плаття та штанів з іншими числами, і учні виконують зміни в короткому записі попередньої задачі, щоб одержати короткий запис даної задачі. Діти помічають, що обидві задачі мають однакові ключові слова, так само дані три суми (але різні числові значення), задачі мають однакову математичну структуру. Далі досліджується, як ця зміна вплине на розв'язання – розв'язання зміниться, тому що числові дані інші, а план розв'язування – не зміниться, тому що ця задача має таку саму структуру, склад з простих задач. Школярі пояснюють план розв'язування і роблять висновок: якщо в запитання задачі входить слово "кожний", то вона містить кілька шуканих чисел. Якщо в задачі три шуканих числа треба знайти за трьома сумами, то вона розв'язуватиметься так:

1) із суми трьох чисел віднімемо суму першого та другого числа, отримаємо третє число;
2) із суми трьох чисел віднімемо суму другого та третього числа, отримаємо перше число;
3) із суми першого та другого числа віднімемо перше число, отримаємо друге число; або із суми другого та третього числа віднімемо третє число, отримаємо друге число.

Таким чином узагальнюється математична структура задач даного виду і формулюється узагальнений план розв'язування (мал. 36). На матеріалі цих задач ми здійснили *попереднє ознайомлення з діями визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури та узагальнення способу розв'язання задач даного виду*. Наступне опрацювання зазначених дій відбуватиметься на матеріалі задач з пропорційними величинами.



Розв'язання

(c – y) – перше число
(c – p) – третє число
p – (c – y) – друге число
або
y – (c – p) – друге число

Мал. 36.Опорна схема, схематичний рисунок та спосіб розв'язання задач на знаходження трьох чисел за сумами двох та сумою трьох доданків

Потім діти на підставі істотних ознак вчаться впізнавати задачі даного виду і застосовувати для них узагальнений спосіб розв'язування.

На етапі формування умінь розв'язувати задачі на знаходження трьох доданків за трьома сумами учні складають короткий запис задачі, "впізнають" її, розказують план розв'язування задачі, записують розв'язання і відповідь до задачі, виконують перевірку правильності розв'язання, додаючи знайдені числові значення трьох шуканих величин, і якщо отримують числове дане суми трьох чисел, то роблять висновок про правильність розв'язання задачі. На цьому ступені пропонуються різноманітні види завдань [90]:

1) Запиши задачу коротко і зроби схематичний малюнок. Встанови, до якого виду вона належить. Згадай спосіб розв'язання таких задач. Розв'яжи задачу і зроби перевірку.

2) Зроби схематичний малюнок і поясни, про що дізнаємося, обчисливши значення даних виразів.

3) Оціни правильність розв'язання задачі, якщо є помилки, то виправи їх.

4) Постав запитання до даної умови і розв'яжи одержану задачу.

5) На які із запропонованих запитань можна відповісти за даною умовою?

6) До даного запитання добери умову з поданих.

7) Зміни запитання задачі так, щоб задача розв'язувалась двома діями.

8) Вибери з поданих числові дані і розв'яжи задачу.

9) Розв'яжи задачу і порівняй цю задачу з наступною (оберненою).

Складені задачі, що містять частини. Пропонуємо учням різноманітні математичні структури складених задач, які містять частини:

- задачі на знаходження остачі, які містять задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: З дослідної ділянки зібрали 100 кг картоплі. П'яту частину відібрали для посадки на наступну весну, а решту здали в шкільну їдальню. Скільки кілограмів картоплі здали в їдальню?);
- задачі на знаходження суми, які містять дві прості задачі на знаходження частини від числа (Наприклад: В шкільному саду 60 дерев. $\frac{1}{3}$ дерев – яблуні і $\frac{1}{4}$ – груші. Скільки в саду яблунь і груш разом?);

- задачі на конкретний зміст дії ділення, що містять просту задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: В парку 96 дерев. Третю частину цих дерев складають клени та липи. Скільки кленів і лип в парку окремо, якщо їх там порівну?);
- задачі на збільшення числа на кілька одиниць, які містять просту задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: Школярі запланували зробити для лісопарку 36 годівниць для птахів, а зробили на третину більше. Скільки годівниць зробили школярі?);
- задачі на знаходження остачі, які містять дві прості задачі на знаходження частини від числа та задачу на знаходження суми (Наприклад: В бочці 27 л води. Спочатку в бочку долили третю частину того, що в ній було, а потім відлили третину того, що в ній стало. Скільки літрів води залишилося в бочці?);
- задачі на знаходження частини від числа, які містять просту задачу на знаходження числа, яке у кілька разів більше чи менше за дане, та просту задачу на знаходження суми (Наприклад: В перший день виставку відвідали 120 школярів, а в другий – в 3 рази більше. Учні третіх класів складали $\frac{1}{6}$ частину усіх відвідувачів. Скільки третьокласників відвідало виставку?).

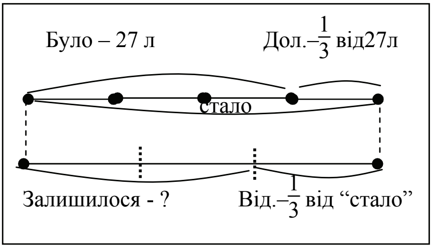
Робота над задачами йде за пам’яткою № 3, тобто усі складові дії загального уміння розв’язувати задачі набувають подальшого засвоєння. Наприклад:

В бочці 27 л води. Спочатку в бочку долили третю частину того, що в ній було, а потім відлили третину того, що в ній стало. Скільки літрів води залишилося в бочці?

- Прочитайте задачу та уявіть про що в ній розповідається. Про що розповідається в задачі? (Про воду).
- Що з нею відбувалося? (Вода була в бочці. Потім воду спочатку долили в бочку, потім з неї відлили. І після цього в бочці ще залишилася вода).
- Які ключові слова виділимо в задачі? (Було, долили, відлили, залишилося).
- Складіть короткий запис зо задачі.
- За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 27 означає, скільки літрів води було спочатку в бочці. Число $\frac{1}{3}$ означає яку частину від того, що було долили. Знаменник цього дробу означає,

що всю воду, що була в бочці, розділили на три рівні частини. Чисельник цього дробу позначає, що долили одну таку частину. Число $\frac{1}{3}$ означає яку частину від того, що стало в бочці, відлили. Знаменник цього дробу означає, що всю воду, що стала в бочці, розділили на три рівні частини. Чисельник цього дробу позначає, що відлили одну таку частину).

- Яке запитання задачі? (Скільки літрів води залишилося в бочці?)
- Зробіть схематичний малюнок.



Було – 27 л

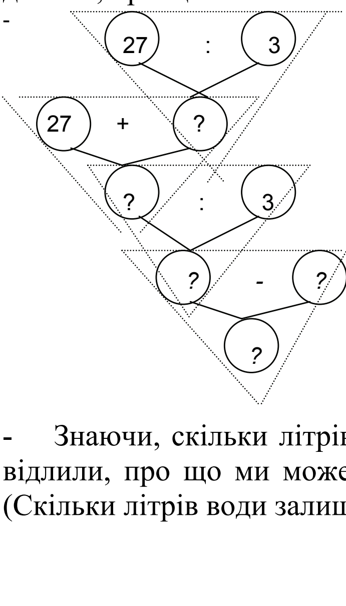
Долили - ?, $\frac{1}{3}$ від 27 л

Відлили - ?, $\frac{1}{3}$ від того, що стало

Залишилося - ?

- Проведемо синтетичні міркування – від числових даних до запитання задачі.
- Знаючи, що було 27 л води і знаючи, що третину від цього числа долили, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? (Скільки літрів води долили). Якою дією? (Дією ділення: щоб знайти частину від числа, треба це число поділити на кількість частин в ньому).
- Знаючи, що в бочці було 27 л води, і знаючи, скільки літрів долили, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними?

-



- (Скільки літрів води стало в бочці). Якою арифметичною дією? (Дією додавання).
- Знаючи, скільки літрів води стало в бочці, і знаючи що третю частину від того, що стало відлили, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? (Скільки літрів води відлили з бочки.) Якою арифметичною дією? (Дією ділення).

- Знаючи, скільки літрів води стало в бочці та скільки літрів води відлили, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? (Скільки літрів води залишилося в бочці).

Якою арифметичною дією? (Дією віднімання).

- Отже ми від числових даних задачі перейшли до її запитання. Синтез закінчено. Складіть план розв’язування задачі. (Першою дією скільки літрів води долили в бочку. Другою дією дізнаємося скільки літрів води стало в бочці. Третьою дією дізнаємося, скільки літрів води відлили з бочки. Четвертою дією дізнаємося скільки літрів води залишилося в бочці.)
- Запишіть розв’язання і відповідь.

Розв’язання.

1) 27 : 3 = 9 (л) – долили;
2) 27 + 9 = 36 (л) – стало;
3) 36 : 3 =12 (л) – відлили;
4) 36 – 12 = 24 (л) – стало.

Відповідь: 24 л води стало в бочці.

Докладно система завдань та методика роботи над задачами, які містять частини подана в роботах автора [104; 105].

Формування уміння розв’язувати складені задачі в 4-му класі

У третьому класі ми сформували дію міркування від числових даних до запитання задачі – синтез і почали формувати дії визначення істотних ознак задач та узагальнення їх математичної структури та способу розв’язування, які набули подальшого засвоєння під час роботи над задачами з пропорційними величинами в 3-му класі. Таким чином, до четвертого класу всі складові дії загального уміння розв’язувати складені задачі практично мають бути засвоєні, тому на цьому етапі зосереджено увагу на формуванні умінь розв’язувати задачі певних видів. Водночас на задачах, які містять дроби, і на інших задачах першої групи відбувається подальше вдосконалення загального уміння. Розглядаючи методику роботи над складеними задачами першої групи в 4-му класі, обмежимося лише розглядом складених задач, які містять дроби.

Задачі, які містять знаходження дробу від числа:

- задачі на знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: Урок триває 45 хвилин $\frac{3}{5}$ уроку учні писали самостійну роботу. Скільки часу вона тривала?);

Складені задачі, які містять знаходження дробу від відомого числа

- задачі на знаходження остачі, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: В Оленки 14 гривень. На сніданок вона витратила $\frac{3}{7}$ грошей, що в неї були. Скільки коштував сніданок? Скільки грошей в неї залишилося?);
- задачі на знаходження остачі, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: У куску тканини було 96 метрів. На скатертини витратили $\frac{3}{8}$ цього куску, а на серветки – $\frac{5}{12}$ куску. Скільки метрів тканини залишилося у куску?);
- задачі на знаходження суми, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: У магазині було 720 кг рису. За перший день продали $\frac{2}{9}$, а за другий $\frac{3}{5}$ всього рису. Скільки кілограмів рису продали за два дні?);
- задачі на знаходження невідомого доданка, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: На будівництво доставили 24000 штук цегли. Бій склав $\frac{2}{8}$ усієї цегли. Скільки було цілих цеглин?);
- задачі на знаходження невідомого доданка, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: Рибалки спіймали 240 т риби. Окуні становили $\frac{5}{24}$ всієї риби, судаки – $\frac{7}{12}$ всієї риби, а решта були коропчуки. Скільки було коропчуків?;
- задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: Розмелювали 3 т 600 кг пшениці. $\frac{4}{5}$ усієї пшениці становило борошно, манки було у 40 разів менше, решта – висівки. Скільки одержали манних крупів?);
- задачі на різницеве порівняння, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: Мама відрізала Олі $\frac{7}{10}$ м стрічки, а Лесі $\frac{4}{5}$ м. У кого з дівчаток коротша смужка і на скільки?);
- задачі на знаходження частки, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: Іа-Іа випік до дня народження 46

пиріжків. $\frac{3}{23}$ усіх пиріжків він з'їв сам, а решту розклав порівну на 4 тарілки. Скільки пиріжків на кожній тарілці?);

- задачі, в яких треба знайти число, яке на дріб від даного числа більше чи менше (Наприклад: Буратіно вирішив купити для папи Карло новий будинок за 420 сольдо. Але поки він накопичував гроші, ціна будинку збільшилася на $\frac{2}{7}$. Скільки зараз повинен заплатити Буратіно за цей будинок? Скільки грошей треба йому додатково?).

Складені задачі, які містять знаходження дробу від невідомого числа

- задачі на знаходження суми, в яких треба двічі знаходити дріб від числа, в тому числі й від невідомого (Наприклад: При розмелюванні пшениці на борошно маса чистого борошна становить $\frac{9}{10}$ маси пшениці. Після випікання хліба припічка дорівнює $\frac{4}{10}$ маси борошна. Скільки хліба одержали з 5 тонн пшениці?);
- задачі на знаходження дробу від невідомого числа, яка містить знаходження дробу від даного числа (Наприклад: Вихід вершків з молока становить $\frac{4}{25}$ маси молока, а вихід масла з вершків – $\frac{2}{9}$ маси вершків. Скільки масла можна одержати з 9 т молока?);
- задачі на знаходження невідомого доданка, в яких перша проста задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, друга – на знаходження площі прямокутника, третя – на знаходження дробу від невідомого числа (Наприклад: Довжина садиби 100 м, а ширина на 60 м менше. $\frac{3}{8}$ площі садиби займають будівлі, двір і сад, а решту – город. Яку площу займає город?);
- задачі на знаходження дробу від решти, які містять просту задачу на знаходження остачі (Наприклад: Фермер виростив і зібрав 1445 ц картоплі. 245 ц він залишив для годівлі тварин, а $\frac{5}{6}$ решти продав на базарі. Скільки центнерів картоплі продав фермер?);
- задачі на знаходження дробу від решти, які містять знаходження дробу від відомого числа та задачу на знаходження остачі (Наприклад: У майстерні було 2826 м тканини. $\frac{4}{9}$ тканини витратили

на пошиття жіночих костюмів. На пошиття чоловічих костюмів витратили $\frac{4}{5}$ решти тканини. Скільки пішло на чоловічі костюми?);

- задачі на знаходження дробу від решти, які містять просту задачу на знаходження площі прямокутника і просту задачу на знаходження остачі (Наприклад: Розміри пришкільної ділянки, що має форму прямокутника, 125 м і 350 м. 14950 м^2 займає сад, а $\frac{2}{3}$ решти площі відведено для дослідних ділянок. Знайди площу дослідних ділянок);
- задачі на знаходження дробу від решти, які містять просту задачу на конкретний зміст дії множення та просту задачу на знаходження остачі (Наприклад: Для школи завезли 1750 зошитів у пачках. 6 пачок, по 50 зошитів у кожній пачці, виділили для учнів початкових класів. $\frac{9}{10}$ решти зошитів продали учням старших класів. Скільки зошитів продали учням старших класів?).

Задачі, які містять знаходження числа за його дробом:

- задачі на знаходження числа за його дробом (Наприклад: В кіоск привезли 240 зошитів в клітинку, це становило $\frac{2}{6}$ усіх зошитів. Скільки зошитів привезли в кіоск?);
- задачі на знаходження остачі, які містять знаходження числа за його дробом (Наприклад: Хлопчик прочитав 160 сторінок, що складає $\frac{4}{9}$ всієї книги. Скільки сторінок йому залишилося прочитати?);
- задачі на різницеве порівняння, які містять знаходження числа за його дробом (Наприклад: Тривалість життя лева 35 років, що складає $\frac{7}{10}$ життя ведмедя. На скільки років довше може жити ведмідь, ніж лев?);
- задачі, в яких треба кілька разів знаходити число за його дробом (Наприклад: Зріст Сашка 120 см, що складає $\frac{5}{6}$ росту Тараса. А зріст Оленки складає $\frac{3}{4}$ зросту Тараса. Який ріст у кожної дитини?).

Система завдань і методика роботи над складеними задачами, що містять дроби, подані в роботі автора [104;105]. Розглянемо приклад роботи над задачею, що містить знаходження дробу від числа:

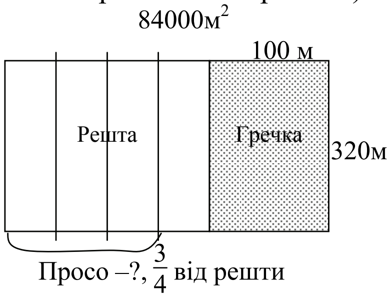
Площа дослідного поля становила 84000 м^2. Частину цього поля у вигляді прямокутної ділянки зі сторонами 320 м і 100 м засіяно гречкою. $\frac{3}{4}$ решти поля засіяно просом. Яку площу засіяно просом?

- За коротким записом поясніть числа задачі. Що означає число 8400? Число 320? Число 100?
- Що означає число $\frac{3}{4}$? (Яку частину від решти засіяли просом).
- Що означає знаменник 4? (На скільки рівних частин поділили решту поля).
- Що означає чисельник 3? (Що 3 такі частини засіяли просом).
- Яке запитання задачі? (Скільки кв. метрів засіяли просом?)

Площа всього поля – 84000 м^2

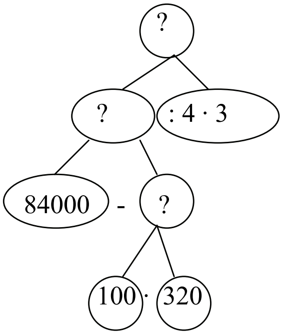
Площа гречки - ?, а = 320 м, в = 100 м

Площа проса - ? , $\frac{3}{4}$ від решти.



- Що треба знати, щоб на нього відповісти? (Треба знати два числові значення: І – площу решти, невідомо, та ІІ – яку частину становить від решти просо, відомо $\frac{3}{4}$).
- Як відповімо на запитання задачі? (Розділимо на знаменник і помножимо на чисельник).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо площу решти).
- Що треба знати. Щоб про це дізнатися? (Треба знати два числові значення: І – загальну площу ділянки, відомо 84000 м^2; та ІІ – площу гречки, не відомо).
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією віднімання).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо, площу гречки).

- Що треба знати, щоб про це дізнатися? (Треба знати два числові значення: І – довжину ділянки гречки, відомо, 100 м; та ІІ – ширину, відомо 320 м).



- Як відповімо на це запитання? (Дією множення).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Так). Аналіз закінчено.
- Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією дізнаємось про площу гречки. Другою – дізнаємося про величину решти площі. Третьою дією дізнаємося про площу проса).
- Запишіть розв'язання по діях і виразом.

1) 320 · 100 = 32000 (м^2) – площа гречки
2) 84000 – 32000 = 52000 (м^2) – площа решти
3) 52000 : 4 · 3 = 39000 (м^2) – площа проса.
(84000 - 320 · 100) : 4 · 3 = 39000 (м^2)
Відповідь: 39000 м^2 засіяно просом.

Таким чином, ми розглянули підготовчу роботу до введення поняття „складена задача", ознайомлення з цим поняттям та формування уміння розв'язувати складені задачі в 2-му, 3-му та 4-му класах.

3.1.3. Методика формування загального уміння на матеріалі задач з пропорційними величинами на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток

На задачах на знаходження суми чи різницеве (кратне) порівняння двох добутків або часток дедалі вдосконалюється загальне уміння розв'язувати задачі згідно теорії поетапного формування розумових дій і понять (П. Я. Гальперін, Н. Ф. Тализіна) на основі ІІІ-го типу навчання (П. Я. Гальперін) з системним типом орієнтування (З. О. Решетова). Такий підхід надає можливість на наступному етапі навчання побудувати методику роботи над „типовими" задачами на основі їх всебічного дослідження та узагальнення математичної структури і способу розв'язування на основі теорії змістовних узагальнень (В. В. Давидов) та її застосування до навчання учнів розв’язування задач певних видів.

Щоб реалізувати поставлену мету вважаємо необхідним *змінити традиційний порядок розгляду складених задач, що містять пропорційні величини*. Так, традиційно, „типові” задачі на знаходження четвертого пропорційного пропонуються раніше задач на знаходження суми двох добутків та обернених до них. Це пояснюється тим, що задачі на знаходження четвертого пропорційного розв’язуються двома арифметичними діями, а задачі на знаходження суми двох добутків – трьома; в традиційній методиці притримуються розгляду задач за збільшенням кількості арифметичних дій. Але задачі на знаходження четвертого пропорційного належать до „типових” задач, прямі і обернені задачі мають подібну математичну структуру, яку учні легко впізнають, а тому й згадують загальний спосіб їх розв’язування. Тим часом задачі на знаходження суми двох добутків з оберненими до них задачами мають дещо відмінну математичну структуру і різні плани розв’язування. Хоча й існує можливість узагальнити способи розв’язування і цих задач, проте робота над ними, в основному, відбувається у загальному порядку, який передбачає виконання операцій, що складають загальне уміння розв’язувати сюжетні задачі. Тому видається доцільним спочатку сформувати в учнів уміння розв’язувати задачі на знаходження суми чи різницеве (кратне) порівняння двох добутків або часток і лише потім перейти до типових задач.

На цьому етапі навчання, усі основні складові дії загального уміння сформовано, а лишається опрацювати дії, що стосуються аналізу задачного формулювання, яке містить групу пропорційних величин; прикидки відповіді на основі знання зміни однієї величини у залежності від зміни іншої при сталій третій, та перевірки правильності очікуваного результату (які, до речі, опрацьовуються у розумовій формі); а також дії визначення істотних ознак та узагальнення математичної структури та способу розв’язування (у формі голосного мовлення та „зовнішнього мовлення про себе). Таким чином, на матеріалі задач з пропорційними величинами, на знаходження суми чи різницеве (кратне) порівняння двох добутків або часток, основна увага приділяється опрацюванню дій визначення істотних ознак та узагальнення математичної структури і способу розв'язування задач, що можливо на основі III типу навчання за П. Я. Гальперіним з системним типом орієнтування (З. А. Решетова).

Істотним, на даному етапі є не лише опрацювання визначених дій, що складають загальне уміння розв'язувати задачі, а й організація спеціальної роботи із дослідження задач з метою визначення істотних ознак їх математичних структур та планів розв'язування.

Так, *дослідження задач* відбувається за наступними факторами:

- за зміною групи пропорційних величин;
- за зміною числових даних;
- за зміною шуканих задачі;
- за зміною співвідношень, що задані в задачі: сума значень величини замінюється їх різницевим, а потім й кратним співвідношенням;
- за зміною величини для значень яких дано або треба знайти суму, різницеве чи кратне відношення,

і визначивши вплив цих змін на план розв'язування задач ми виділяємо істотні ознаки математичних структур задач та узагальнюємо плани їх розв'язування.

Треба зазначити, що на цьому етапі робота над окремою задачею здійснюється згідно загальному підходу: виконується повноцінний аналіз тексту задачі (змістовий та логіко-семантичний), виконується репрезентативна модель задачі, пошук розв'язування здійснюється аналітично або синтетично, формулюється план розв'язування і записується розв'язання по діях або виразом, крім того передбачається робота над задачею після її розв'язання, яка полягає, переважно, у складанні і розв'язуванні обернених задач. Але, описаний порядок роботи може бути дещо скорочений, якщо учень відразу, після складання репрезентативної моделі задачі, здатен сформулювати план розв'язування; в цьому випадку аналітичні або синтетичні міркуванні при пошуку розв'язування задачі зайві. Таким чином, хоча й проведена певна робота з узагальнення математичних структур задач та способів їх розв'язування, результати цієї роботи не застосовуються активно при роботі над задачами.

Зміст і методика підготовчої роботи

На етапі підготовчої роботи до введення цих задач ми пропонуємо актуалізувати у молодших школярів уміння розв'язувати прості задачі з пропорційними величинами та перенести їх на задачі з пропорційними величинами на дві дії, що містять різницеве чи кратне відношення. Основну увагу при розв'язуванні задач зазначених видів слід приділити вдосконаленню уміння виділяти величини, що містяться в задачі (що було сформовано на матеріалі простих задач), формуванню уміння виділяти дискретні (допоміжні) величини задачі та їх числові значення, записувати задачу коротко в формі таблиці. Паралельно йде подальше опрацювання уміння зображати значення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретувати довжину відрізка як деяку величину, виражати один відрізок через інші, складати схематичний рисунок до задачі.

Актуалізація знань про пропорційні величини та вмінь розв'язувати прості задачі з пропорційними величинами. Пропонуємо учням згадати основні величини, які вони знають, і пов'язані з ними групи пропорційних величин. Встановлюємо зв'язок пропорційних величин та узагальнюємо окремі правила.

Перед розв'язанням задач діти визначають, які пропорційні величини містяться в задачі та їх числові значення, записують задачу коротко в формі таблиці, роблять схематичний малюнок, і лише після цього розв'язують задачу. Перевіркою правильності розв'язання є складання і розв'язування обернених задач. Далі подаються завдання на складання задачі за даним схематичним рисунком. Метою цих завдань є актуалізація різноманітних груп пропорційних величин, їх взаємозв'язків, а також актуалізація умінь виконання табличної форми короткого запису задач, що містять пропорційні величини і схематичного рисунка.

Наприклад:

1. Визнач, які пропорційні величини містяться в задачі та їх числові значення. Запиши задачу коротко. Зроби схематичний малюнок. Розв'яжи задачу. Склади і розв'яжи обернені задачі.

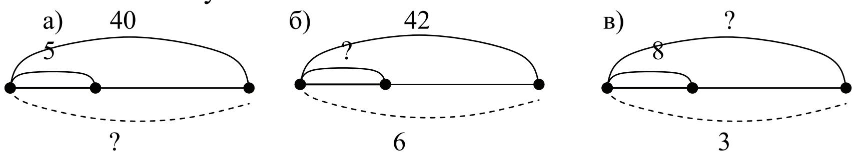
1) 27 л соку розлили по 3 л у кожну банку. Скільки отримали банок із соком.

2) Кравчиня пошила 4 халати, витрачаючи на кожний халат по 2 м тканини. Скільки всього метрів тканини витратила на халати кравчиня?

3) 36 кг винограду розклали порівну у 4 ящики. Скільки кілограмів винограду в 1 ящику?

2. Склади задачу з кожною групою пропорційних величин за схематичним кресленням. Порівняй тексти задач. Що в них

спільного? Чим вони відрізняються? Що можна сказати про розв'язання? Чому?



3. Визнач, які пропорційні величини містяться в задачі та їх числові значення. Запиши задачу коротко. Зроби схематичний малюнок. Розв'яжи задачу. Склади і розв'яжи обернені задачі.

1) З 42 кг картоплі виготовили 7 кг крохмалю. Скільки кілограмів картоплі треба на виготовлення 1 кг крохмалю?

2) З 12 кг соняшникового насіння намагаються отримати олію. Скільки літрів олії отримають, якщо для виготовлення 1 л олії потрібно 2 кг насіння.

3) Скільки кілограмів залізної руди потрібно для виготовлення 7 кг заліза, якщо на виготовлення 1 кг заліза вистачають 3 кг залізної руди.

- З чого виготовляють зазначений продукт? Яка величина є загальною?
- В яких одиницях вимірюється величина зазначеного продукту? Про яку величину йде мова? Яка величина пов'язує загальну величину з цією величиною? Яку групу пропорційних величин містить ця задача? Назви значення кожної величини.

Вдосконалення уміння виділяти величини, що містяться в задачі та числові значення відповідних величин, записувати задачу коротко у вигляді таблиці. Уміння виділяти величини, що містяться в задачі, та записувати задачу коротко у вигляді таблиці було сформовано у формі „зовнішнього мовлення про себе" на матеріалі простих задач. Тому на задачах з пропорційними величинами це уміння повинно набути розумової форми, і для цього ми пропонуємо спеціальну роботу над складеними **задачами, які містять відношення різницевого або кратного порівняння**.

Задачі, які містять різницеве відношення, – це перші складені задачі з пропорційними величинами, тому їх введення вимагає спеціально продуманої системи навчальних задач. Спочатку учням пропонуються дві підготовчі прості задачі, з яких далі складається задача нового виду. Наприклад:

1. Запиши коротко кожну задачу і зроби схематичний рисунок.

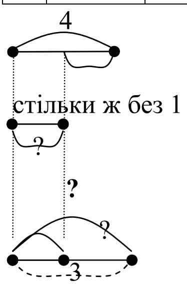
1) Один тесляр може зробити за день 4 табуретки, а другий на 1 табуретку менше. Скільки табуреток за день може зробити другий тесляр?
2) Другий тесляр за день виготовляє ☐ табуреток. Скільки табуреток він виготовить за 3 дні?
- Чим відрізняються короткі записи цих задач? В якій формі записується коротко перша задача? Друга задача?

2. Порівняй задачу з попередніми. Що цікавого ти помітив?
Один тесляр може зробити за день 4 табуретки, а другий на 1 табуретку менше. Скільки табуреток другий тесляр виготовить за 3 дні?

На матеріалі задач цього виду діти вперше зустрічаються з тим, що в задачі є кілька об’єктів – ключових слів і три пропорційні величини. Вчитель повідомляє їм, що в цьому випадку задача записується коротко в формі таблиці, яка містить три рядки, два з них для ключових слів, та чотирьох стовпчиків, три з них для трьох пропорційних величин. Далі в тексті задачі виділяються числові значення окремих величин і з’ясовується, до якого об’єкта (ключового слова) вони відносяться, і усе це записується в таблиці на відповідних місцях.

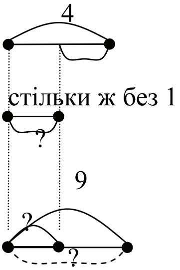
	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		4 шт	
II	**?**	?, на 1 шт.м	3 год.

За готовим коротким записом школярі пояснюють числа задачі і промовляють назви дискретних величин (наприклад, загальний виробіток другого тесляра, час роботи другого тесляра, продуктивність праці другого тесляра тощо).



Далі здійснюється аналітичний пошук розв’язування, розбиття задачі на прості та формулювання плану розв’язування, запис розв’язання за діями або виразом і запис відповіді.

Перевірити правильність розв’язання вчитель радить шляхом складання і розв’язування оберненої задачі. Учні складають обернену задачу, вносять відповідні зміни у короткий запис прямої задачі, розбивають її на прості і порівнюють склад з простих задач оберненої та прямої задач; досліджують, як ця зміна вплине на розв’язання оберненої задачі, формулюють план її розв’язування.



	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
1		4 шт	
II	9 шт.	?, на 1 шт. м.	**?**

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
1		4 шт.	
II	9	?, на 1 шт. м.	?

Отже, за допомогою складання і розв’язання обернених задач учні знайомляться з можливими математичними структурами задач, які містять різницеве відношення (мал. 37).

а)

	Загальний	... 1	*кількість* / *час*
I		□	
II	**?**	?, на б.(м.) □	□

б)

	Загальний ...	... 1	*кількість* / *час*
I		□	
II	□	?, на б.(м.) □	**?**

в)

	Загальний	... 1	*кількість* / *час*
I		□	
		На?	
II	□	?	□

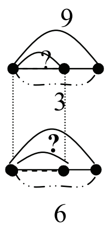
Мал. 37. Опорні схеми задач, що містять відношення різницевого порівняння

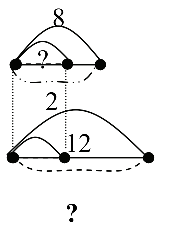
Учні складають задачі за поданими короткими записами і розв’язують їх усно. Далі у коротких записах змінюється відношення різницевого порівняння на відношення кратного порівняння, і учням пропонується встановити, що змінилося, та з’ясувати, як ця зміна вплине на розв’язання задачі. Таким чином, перетворюючи математичні структури задач, які містять різницеве відношення, у відповідні структури задач, які містять кратне відношення, учні знайомляться з задачами дещо іншої математичної структури – задачами з пропорційними величинами, які містять кратне відношення.

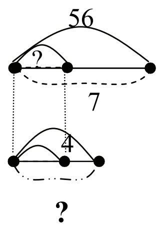
Потім іде робота над задачами, які містять кратне відношення. Школярі виділяють ключові слова та величини задачі, записують її коротко, розглядають поданий схематичний рисунок, розбивають задачу на підзадачі (прості задачі) і формулюють план розв’язування, після чого записують розв’язання. Дітям пропонується додаткове завдання: змінити умову або запитання задачі так, щоб змінилася перша або друга дія на задану. Таким чином здійснюється перетворення задачі, яка містить кратне відношення у відповідну задачу, яка містить різницеве відношення. Крім того, перевірка правильності розв’язання задачі здійснюється шляхом складання і розв’язання обернених задач.

Наприклад:

Визнач ключові слова. Виділи величини, які містяться в задачі. Запиши задачу коротко в формі таблиці. Розглянь схематичне креслення. Розбий задачу на під задачі і покажи їх на короткому записі. Розв’яжи задачу. Випиши числа задачі і поясни їх значення. Склади і розв’яжи можливі обернені задачі.







1. Маса індика 9 кг, а маса гуски у 3 рази менше. Знайди масу 6 таких самих індиків. Зміни умову задачу так, щоб перша дія була дією віднімання.	2. Батько обкопав за годину 8 дерев, а син у 2 рази менше. За скільки годин обкопає син 12 дерев? Зміни умову задачі так, щоб перша дія було дією множення.	3. На 7 комплектів постільної білизни швачка витратила 56 м полотна, а на скатертину – 4 м. У скільки разів більше полотна витратила швачка на 1 комплект постільної білизни, ніж на скатертину? Зміни запитання задачі так, щоб друга дія була дією віднімання.

Отже, *уміння виділяти величини, які містяться в задачі, виділяти ключові слова і відповідні числові значення дискретних величин, записувати задачу у вигляді таблиці, складати схематичний рисунок задачі* набуває подальшого засвоєння у *розумовій формі*.

Задачі, що містять знаходження суми двох добутків та обернені до них

На матеріалі задач цього виду здійснюється формування уміння визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру; узагальнювати спосіб розв'язування задач даної математичної структури.

Попереднє ознайомлення з дією визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури було здійснено в 3-му класі при ознайомленні з задачами на знаходження трьох чисел за сумами двох та трьох доданків. Продовжити цю роботу слід при введенні задач на знаходження суми двох добутків [87; 107].

Ознайомлення з задачами даного виду здійснюється шляхом розв'язання системи навчальних задач: учням пропонуються дві прості задачі з пропорційними величинами на знаходження загальної величини, а потім вони поєднуються в одну складену задачу нового виду – на знаходження суми двох добутків. Наприклад:

1. Розв'яжи дві прості задачі. Чи пов'язані вони між собою?

1) В магазин привезли 7 ящиків білого винограду по 8 кг в кожному. Скільки кілограмів білого винограду привезли до магазину?

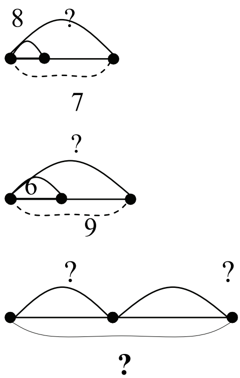
2) В магазин привезли 9 ящиків чорного винограду по 6 кг в кожному ящику. Скільки кілограмів чорного винограду привезли до магазину?

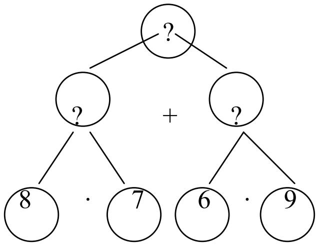
2. Порівняй задачу з попередніми. Що цікавого ти помітив?

В магазин привезли 7 ящиків білого винограду по 8 кг в кожному та 9 ящиків чорного винограду по 6 кг в кожному ящику. Скільки всього кілограмів винограду привезли до магазину?

	Загальна маса (кг)	Маса 1 ящика (кг)	Кількість ящиків (шт.)
1	?	8 кг	7 шт.
	?		
II	?	6 кг	9 шт.

Робота над задачею здійснюється за пам'яткою № 3 – учні визначають об'єкти задачі (ключові слова), величини, які містяться в задачі, значення цих величин і записують задачу коротко; після пояснення чисел задачі складається





схематичний рисунок. Якщо після проведеної роботи учні можуть відразу перейти до розбиття задачі на підзадачі, то складається план розв'язування і діти переходять до його запису; в іншому разі учні виконують аналітичний або синтетичний пошук розв'язування задачі і лише після цього розбивають задачу на підзадачі і так далі.

Робота над задачею після її розв'язання передбачає її дослідження шляхом *зміни величин задачі або числових даних* з метою формування уміння узагальнювати математичну структуру задачі і спосіб її розв'язування. Пропонуємо учням розглянути короткий запис аналогічної задачі, яка містить ті самі числові дані, але інші величини, і визначити, як ця зміна вплине на розв'язання задачі.

	Вартість (грн.)	Ціна (грн.)	Кількість (шт.)
Л.	?	8 грн.	7 шт.
	?		
М.	?	6 грн.	9 шт.

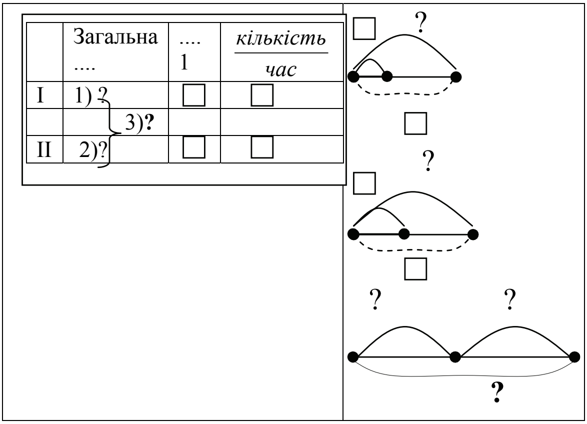
Учні впевнюються, що її розв'язувати немає необхідності: розв'язання ми вже маємо, лишилося лише змінити пояснення.

Потім учням пропонується короткий запис аналогічної задачі з тими самими величинами, що й попередня, але з іншими числовими даними і дослідити, як ця зміна вплине на план розв'язування задачі.

	Вартість (грн.)	Ціна (грн.)	Кількість (шт.)
Л.	?	9 грн.	5 шт.
	?		
М.	?	4 грн.	7 шт.

Школярі з'ясовують, що ця зміна вимагає змінити відповідні числа у арифметичних діях, а пояснення залишити тими самими.

Але і в першому, і в другому випадках загальний план розв'язування задачі не змінюється. Отже, зміна величин задачі та зміна числових даних при заданих зв'язках між ними не впливають на спосіб розв'язування задачі: першою дією знаходимо значення загальної величини у першому випадку (дією множення), другою дією знаходимо значення загальної величини у другому випадку (дією множення), а третьою дією знаходимо суму значень загальних величин у двох випадках (дією додавання). Учні визначають істотні ознаки задач даної математичної структури та формулюють узагальнений план розв'язування (мал. 38).



План розв'язування
1) значення загальної величини у першому випадку, дією множення;
2) значення загальної величини у другому випадку, дією множення;
3) суму загальних значень, відповімо на запитання задачі.

Мал. 38. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження суми двох добутків

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

3) шуканим є сума загальних значень величин для обох випадків.

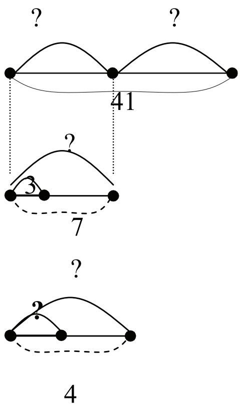
Далі учні застосовують узагальнений план при розв'язуванні задач на знаходження суми двох добутків, а також *складають і розв'язують чотири обернені задачі* – дві на знаходження величини однієї одиниці (в першому або в другому випадках) та дві – на знаходження кількості або часу (в першому або в другому випадках). Наприклад:

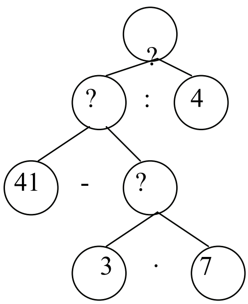
Пряма задача. Хлопчик купив 7 олівців по 3 гривні за кожний та 4 ручки по 5 гривень. Скільки грошей заплатив хлопчик за всю покупку?

Перша обернена задача. Хлопчик купив 7 олівців по 3 грн. за кожний та 4 ручки. Скільки грошей коштувала ручка, якщо за всю покупку хлопчик заплатив 41 грн.?

	Вартість (грн.)	Ціна (грн.)	Кількість (шт.)
Олівці	?	3 грн.	7 шт.
	41 грн.		
Ручки	?	?	4 шт.

Робота над задачею будується за пам'яткою №3.





Першою дією дізнаємося про вартість олівців. Покажемо це на короткому записі. Другою дією дізнаємося про вартість ручок. Покажемо це на короткому записі. Третьою дією дізнаємося про ціну ручки. Покажемо це на короткому записі.

	Вартість (грн.)	Ціна (грн.)	Кількість (шт.)
1)	?	3 грн.	7 шт.
	41 грн.		
2)	?	3) ?	4 шт.

Друга обернена задача. Хлопчик купив 7 олівців та 4 ручки по 5 грн. за кожну ручку. Скільки коштує олівець, якщо за всю покупку він заплатив 41 грн.?

Складаємо короткий запис цієї задачі. Показуємо прості задачі на короткому записі і розказуємо план розв'язування задачі.

	Вартість (грн.)	Ціна (грн.)	Кількість (шт.)
	2) ?	3) ?	7 шт.
	41 грн.		
	1) ?	5 грн.	4 шт.

Порівнявши першу та другу обернені задачі, встановлюємо, що в обох задачах шуканою є ціна, але в першій – ціна ручок, а в другій – ціна олівців. Тому, першою дією дізнаємося про вартість в одному випадку; другою дією дізнаємося про вартість в іншому випадку; третьою дією відповімо на запитання задачі і дізнаємося про ціну.

Далі учням пропонується розглянути таблицю і встановити, що змінилося і що залишилося без змін; дослідити як ця зміна вплине на розв'язання задачі.

	Загальний виробіток (шт.)	Продуктивність праці (шт. за 1 год.)	Час (год.)
	2) ?	3) ?	7 год.
	41 шт.		
	1) ?	5 шт.	4 год.

(Власно розв'язання не зміниться, але пояснення слід поправити. Загальний план розв'язування не змінюється).

Аналогічне завдання ставиться і до наступної таблиці:

	Загальний виробіток (шт..)	Продуктивність праці (шт.. за 1 год.)	Час (год.)
	2) ?	3) ?	6 год.
	70 шт.		
	1) ?	8 шт.	5 год.

(План розв'язування, арифметичні дії не зміняться, але слід замінити відповідні числа).

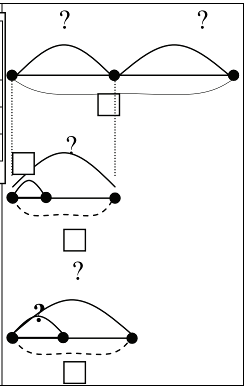
Порівнявши короткі записи та плани розв'язування першої та другої обернених задач, учня розглядають, як узагальнили їх математичну структуру і плани розв'язування (мал. 39).

Істотні ознаки обернених задач на знаходження величини однієї одиниці:

1) Для одного з випадків дані значення двох величин: величини 1 одиниці та кількості або часу;
2) Для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини 1 одиниці є шуканим;

3) Дано значення суми двох загальних величин.

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
1	1) ?	□	□
	□		
II	2)?	3)**?**	□



План розв'язування
1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією віднімання;
3) значення величини 1 одиниці, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Мал. 39. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на знаходження суми двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці

Аналогічно працюємо над наступними оберненими задачами:

Третя обернена задача. Хлопчик купив олівці по 3 грн. за кожний та 4 ручки по 5 грн. за кожну ручку. Скільки олівців купив хлопчик, якщо за всю покупку він заплатив 41 грн.?

Четверта обернена задача. Хлопчик купив 7 олівців по 3 грн. за кожний та 4 ручки. Скільки грошей коштувала ручка, якщо за всю покупку хлопчик заплатив 41 грн.?

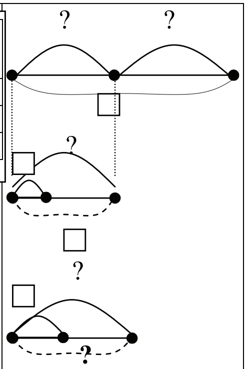
Істотні ознаки обернених задач на знаходження суми двох добутків, в яких шуканою є кількість або час:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано лише значення величини однієї одиниці, а кількість або час є шуканим;

3) дано значення суми двох загальних величин.

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
	} □		
II	?	□	**?**



План розв’язування
1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією віднімання;
3) значення величини однієї одиниці, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Мал. 40. Опорна схема та план розв’язування обернених задач на знаходження суми двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

На наступному етапі на основі порівняння між собою узагальненої математична структури і плану розв’язування прямої задачі та обернених задач, можна узагальнити математичну структуру таких задач, визначаючи їх істотні ознаки, та сформулювати узагальнений план розв’язування (мал.41).

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
	} ***р***		
II	?	***с***	***к***

План розв’язування
1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Мал.41 Опорна схема задач на знаходження суми двох добутків та обернених до них

або *а,* або *в,* або *с,* або *к,* або *р* – шукане число.

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано або значення двох величин – величини однієї одиниці та кількості або однієї з них, тоді інша є шуканою;

3) сума значень загальних величин є шуканою або її значення дано.

Треба зазначити, що учням пропонуються узагальнені таблиці, істотні ознаки задач даної математичної структури та узагальнені плани розв'язування задач у готовому вигляді; від них вимагається їх розглянути, звернути увагу на узагальнені формулювання. Таким чином здійснюється *етап попереднього ознайомлення* з дією *визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури та з дією узагальнення способу розв'язування задачі даної математичної структури*.

Засвоєння цих дій у *матеріалізованій формі* відбувається під час ознайомлення з задачами на різницеве порівняння двох добутків та оберненими до них задачами.

Задачі на різницеве порівняння двох добутків та обернені до них

Задачі нової математичної структури вводяться на основі перетворення задачі на знаходження суми двох добутків у задачу на різницеве порівняння двох добутків. Наприклад: Коню на день потрібно 8 кг вівса і 4 кг сіна. Скільки кілограмів вівса та сіна потрібно коню на тиждень?

Після розв'язання задачі відомого виду (на знаходження суми двох добутків) учням пропонується змінити запитання так, щоб остання дія стала дією віднімання. Наприклад: Коню на день потрібно 8 кг вівса і 4 кг сіна. На скільки більше вівса, ніж сіна потрібно коню на тиждень?

Діти вносять зміни у короткий запис попередньої задачі, а також у схематичний рисунок, і після цього розбивають її на підзадачі та формулюють кожну, складають план розв'язування і записують його. Далі йде робота з узагальнення математичної структури задачі та способу її розв'язування на основі зміни величин задачі та числових даних. На відміну від попереднього етапу, учні вже самі обирають групу пропорційних величин, замінюють назви у відповідних стовпчиках таблиці і вносять відповідні корективи у розв'язання задач, а також роблять висновки щодо плану розв'язування задач, що містять одній й ті самі величини, але різні числові дані (це здійснюється на картках з друкованою основою, де вже подана таблиця з даними числами але без відповідних величин – мал. 42).

Самостійно порівнявши короткі записи розглянутих задач, діти складають узагальнену таблицю і на її основі формулюють істотні ознаки задач даної математичної структури. Порівнявши плани розв’язування цих задач, складають узагальнений план розв’язування (мал. 43).

	....		
	?	8	7
	на ?		
	?	4	7

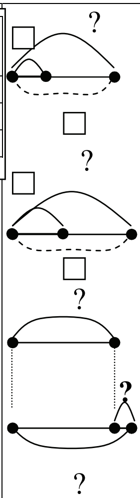
Розв’язання:
1) 8 · 7 = 56 __________
2) 4 · 7 = 28 _________
3) 56 - 28 = 28 ________
Відповідь:________________________________

	....		
	?		
	на ?		
	?		

Розв’язання:
1) _ · _ = __ ___________
2) _ · _ = __ ___________
3) __ - __ = __ _________
Відповідь:__________________

Мал. 42. Зразок карток з друкованою основою

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	$\square$	$\square$
	на ?		
II	?	$\square$	$\square$



План розв’язування

1) значення загальної величини у першому випадку, дією множення;
2) значення загальної величини у другому випадку, дією множення;
3) різницю загальних значень, відповімо на запитання задачі.

Мал. 43.Опорна схема та план розв’язування задач на різницеве порівняння двох добутків

Істотні ознаки задач на різницеве порівняння двох добутків:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
3) шуканим є різниця загальних значень величин для обох випадків.

Можна запропонувати порівняти короткі записи та плани розв’язування задач на знаходження суми двох добутків та на різницеве порівняння двох добутків і з’ясувати що в них спільного та чим вони відрізняються, результатом такої роботи є узагальнений план розв’язування.

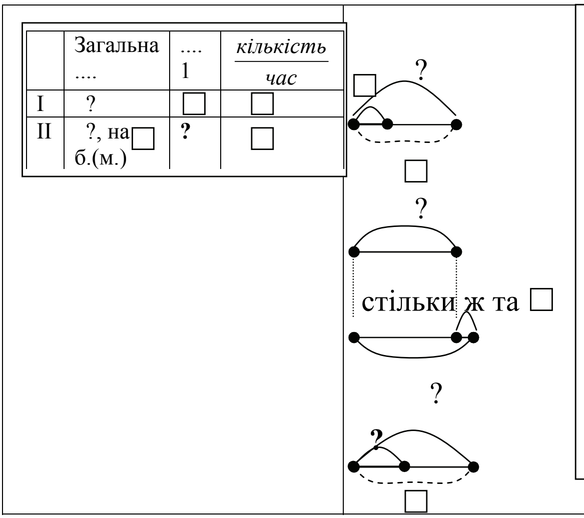
На наступному етапі учням пропонується розв’язати задачу на різницеве порівняння двох добутків, користуючись узагальненим планом, та скласти і розв’язати чотири обернені задачі. Наприклад:

Пряма задача. Майстер за годину виготовляє 6 деталей, а учень – 2 деталі. Майстер працював повний робочий день – 8 годин, а учень – 4 години. На скільки менше деталей за день зробив учень, ніж майстер?

Перша обернена задача. Майстер працював повний робочий день – 8 годин, а учень – 4 години. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки деталей за годину роботи виготовляв учень, якщо майстер за годину виготовляє 6 деталей?

Друга обернена задача. Майстер працював повний робочий день – 8 годин, а учень – 4 години. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки деталей за годину роботи виготовляв майстер, якщо учень за годину виготовляє 2 деталі?

Порівнявши першу і другу обернені задачі на знаходження величини однієї одиниці і узагальнивши їх математичну структуру, визначаємо їх істотні ознаки та плани розв’язування (мал.44).



План розв’язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;

2) значення загальної величини в іншому випадку, дією додавання або віднімання;

3) значення величини однієї одиниці, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Мал. 44. Опорна схема та план розв’язування обернених задач на різницеве порівняння двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення різниці двох загальних величин.

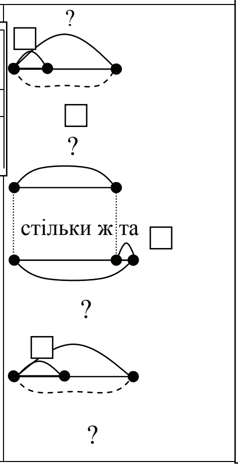
Можна порівняти розглянуту обернену задачу до задачі на різницеве порівняння двох добутків з відповідною оберненою задачею на знаходження суми двох добутків і узагальнити їх математичні структури, істотні ознаки та план розв’язання.

Третя обернена задача. Майстер за годину виготовляє 6 деталей, а учень – 2 деталі. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки годин працював майстер, якщо учень працював 4 години?

Четверта обернена задача. Майстер за годину виготовляє 6 деталей, а учень – 2 деталі. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки годин працював учень, якщо майстер працював 8 годин?

Робота над оберненими задачами здійснюється за пам’яткою №3. Після розв’язання, порівнявши дві обернені задачі до задач на різницеве порівняння двох добутків на знаходження часу або кількості, узагальнюємо їх математичну структуру та план розв’язування (мал. 45).

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
II	?, на □ б.(м.)	□	**?**



План розв’язування
1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією додавання або віднімання;
3) значення величини кількості або часу, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Мал. 45. Опорна схема та план розв’язування обернених задач на різницеве порівняння двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано лише значення величини однієї одиниці, а кількість або час є шуканим;

3) дано значення різниці двох загальних величин.

Далі можна порівняти обернені задачі на знаходження кількості або часу до задач на різницеве порівняння двох добутків та на знаходження суми двох добутків, узагальнюємо їх математичну структуру.

У подальшому навчанні можна здійснити узагальнення на більш високому рівні – узагальнити математичну структуру та план розв'язування задач на різницеве порівняння двох добутків та обернених до них (мал. 46).

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
II	?, на ***р*** б.(м.)	***с***	***к***

План розв'язування
1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Мал. 46.Опорна схема та план розв'язання задач на різницеве порівняння двох добутків та обернених до них

Або *а,* або *в,* або *с,* або *к,* або *р* – шукане число.

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано або значення двох величин – величини однієї одиниці та кількості або однієї з них, тоді інша є шуканою;

3) різниця значень загальних величин є шуканою або її значення дано.

Можна здійснити узагальнення вищого порядку – запропонувати учням узагальнити математичні структури задач на знаходження суми або різницеве порівняння двох добутків та обернених до них і плани їх розв'язування.

Таким чином, на матеріалі задач на різницеве порівняння двох добутків та обернених до них відбувається *формування у матеріалізованій формі* дії *визначення істотних ознак задачі та* *узагальнення її математичної структури та дії узагальнення способу розв'язування задачі певної математичної структури*. Подальше опрацювання цієї дії у формі голосного мовлення відбувається на задачах на кратне порівняння двох добутків.

Задачі на кратне порівняння двох добутків та обернені до них

Задачі на кратне порівняння двох добутків вводяться на основі зміни запитання до задачі на різницеве порівняння двох добутків і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі. Наприклад: Дві кози дали по 6 л молока, а три корови – по 8 л молока. Чи від кіз чи від корів надоїли більше молока і на скільки?

	Загальний об'єм молока (л)	Об'єм молока від 1 тварини (л)	Кіль-кість тва-рин (шт.)
К.	?	6 л	2 шт.
	на **?**		
Кор.	?	8 л	3 шт.

Розв'язання

1) 6 · 2 = 12 (л) загальний об'єм молока від кіз;
2) 8 · 3 = 24 (л) загальний об'єм молока від корів;
3) 24 – 12 = 12 (л) на стільки більше молока надоїли від корів, ніж від кіз

Змінимо запитання задачі: „У скільки разів більше молока надоїли від корів, ніж від кіз?". Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

Отримавши задачу на кратне порівняння двох добутків і розв'язавши її, діти далі вивчають математичну структуру, змінюючи величини або числові дані задачі. Отримані задачі промовляються вголос, і школярі з'ясовують вплив цих змін на розв'язання задачі та план розв'язування. Далі можна узагальнити математичну структуру та план розв'язування задач на кратне порівняння двох добутків (мал. 47).

Істотні ознаки задач на кратне порівняння двох добутків:

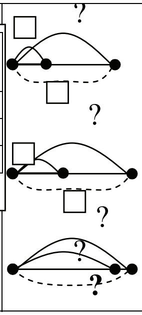
1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

3) шуканим є частка загальних значень величин для обох випадків.

Можна підвести учнів до узагальнення більш високого порядку – на основі порівняння узагальнити математичні структури задач на різницеве та кратне порівняння та плани їх розв'язування. Більш високий ступінь узагальнення усіх трьох видів математичних структур задач за їх істотними ознаками подано на малюнку 48.

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
	У ?		
II	?	□	□



План розв'язування
1) значення загальної величини у першому випадку, дією множення;
2) значення загальної величини у другому випадку, дією множення;
3) частку загальних значень, відповімо на запитання задачі.

Мал. 47. Опорна схема та план розв'язування задач на кратне порівняння двох добутків

Задача на знаходження суми двох добутків

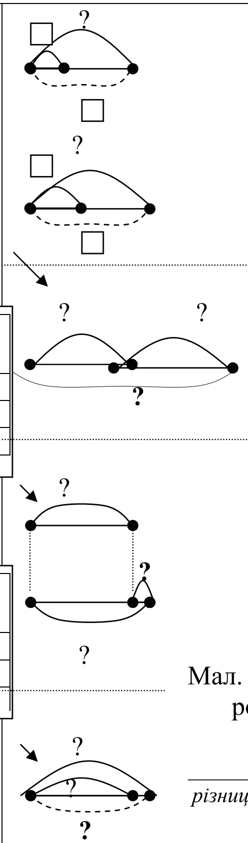
	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
	?		
II	?	□	□

Задачі на різницеве порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
	на ?		
II	?	□	□

Задачі на кратне порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
	У ?		
II	?	□	□



План розв'язування

1) значення загальної величини у першому випадку, дією множення;
2) значення загальної величини у другому випадку, дією множення;
3) $\dfrac{\textit{суму}}{\textit{різницю..або..частку}}$ загальних значень, відповімо на запитання задачі.

Мал. 48. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження $\dfrac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ двох добутків

Істотні ознаки задач на знаходження $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ *двох добутків*:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

3) шуканим є $\frac{\textit{сума}}{\textit{різниця..чи..частка}}$ загальних значень величин для обох випадків.

Подальша робота над задачами на кратне порівняння двох добутків зводиться до складання і розв’язання обернених задач, порівняння двох обернених задач на знаходження величини однієї одиниці вимірювання чи лічби. Можна узагальнити відповідні математичні структури обернених задач на знаходження суми двох добутків, різницеве чи кратне порівняння двох добутків (мал. 49).

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1)для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2)для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини однієї одиниці є шуканим;

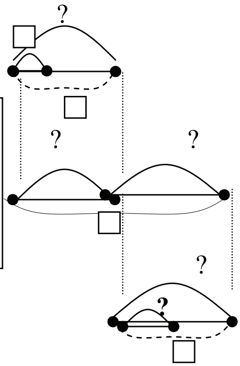
3) дано значення $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..відношення}}$ двох загальних величин.

При порівнянні двох обернених задач на знаходження кількості до задач на кратне порівняння двох добутків, узагальнюємо їх математичні структури та плани розв’язування. При узагальненні можна піти далі, порівнявши математичні структури обернених задач на знаходження кількості або часу для задач на знаходження суми двох добутків, на різницеве чи кратне порівняння двох добутків (мал. 50).

При порівнянні прямої та обернених задач на кратне порівняння двох добутків здійснюється узагальнення задач даної математичної структури за їх істотними ознаками та формулюється загальний план розв’язування. І, нарешті, можна порівняти узагальнені математичні структури усіх трьох видів задач та сформулювати узагальнений план розв’язування (мал. 51).

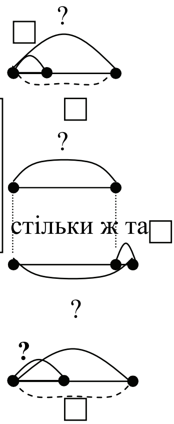
Обернені задачі до задач на знаходження суми двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	1) ?	□	□
	□		
II	2)?	3)**?**	□



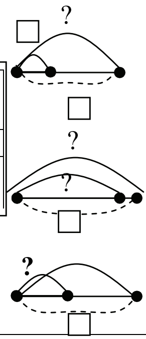
Обернені задачі на різницеве порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
II	?, на □ б.(м.)	**?**	□



Обернені задачі на кратне порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
II	?, у □ р. б.(м.)	**?**	□



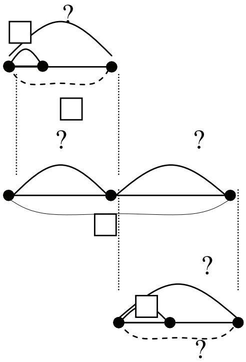
План розв'язування

1)значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2)значення загальної величини в іншому випадку,
дією $\frac{\textit{додавання}}{\textit{множення}}$ або $\frac{\textit{віднімання}}{\textit{ділення}}$;
3)значення величини однієї одиниці, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Мал. 49. Опорні схеми та план розв'язування обернених задач на знаходження $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці

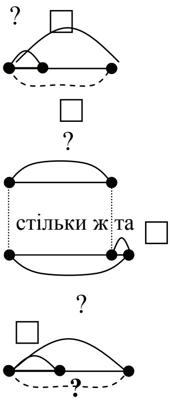
Обернені задачі до задач на знаходження суми двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	1) ? } □	□	□
II	2)?	□	3)**?**



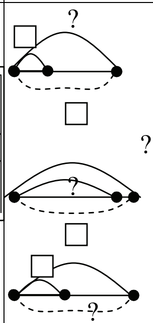
Обернені задачі на різницеве порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	1) ?	□	□
II	2)?, на □ б.(м.)	□	3)**?**



Обернені задачі на кратне порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	1) ?	□	□
II	2)?, у □ р. б.(м.)	□	3)**?**



План розв’язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією $\frac{\textit{додавання}}{\textit{множення}}$ або $\frac{\textit{віднімання}}{\textit{ділення}}$;
3) значення величини кількості або часу, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Мал. 50.Опорні схеми та план розв’язування обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

Задачі на знаходження суми   Задачі на різницеве/кратне порівняння двох добутків та обернені до них

	Загальна	 1	$\frac{\textit{кількість}}{\textit{час}}$
I	?	***а***	***в***
	р		
II	?	***с***	***к***

	Загальна	 1	$\frac{\textit{кількість}}{\textit{час}}$
I	?	***а***	***в***
II	?, на/у ***р*** б.(м.)	***с***	***к***

План розв’язування
1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Мал. 51. Опорні схеми задач на знаходження $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ двох добутків та обернених до них

Або *а* або *в* або *с* або *к* або *р* – шукане число.

Таким чином, згідно з описаною методикою відбувається формування *дії визначення істотних ознак математичної структури задачі та її узагальнення, і дії узагальнення способу розв’язування у формі голосного мовлення*. Зрозуміло, що не усі діти одночасно засвоюють ці дії у певній формі; їх подальше опрацювання здійснюється на матеріалі задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток.

Задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (кількості або часу)

Задачі на знаходження суми двох часток вводяться на основі порівняння з задачами на знаходження суми двох добутків і з’ясування впливу зміни тексту задачі на її розв’язання. Отже, учням пропонується перша задача на знаходження суми двох добутків, а друга задача – на знаходження суми двох значень кількості або часу. Наприклад:

1) Господарка привезла на базар 4 великих ящика помідорів по 9 кг у кожному і 8 маленьких ящиків по 4 кг у кожному. Скільки всього кілограмів помідорів привезла господарка на базар?	2) Господарка привезла на базар 36 кг помідорів у великих ящиках по 9 кг у кожному та 32 кг у маленьких ящиках по 4 кг у кожному. Скільки всього ящиків з помідорами привезла на базар господарка?

Учні визначають, що змінюються перші дві дії – множення змінюється на ділення, а третя дія лишається додаванням. Записавши вираз і прочитавши його учні з’ясовують назву задач цієї математичної структури – задачі на знаходження суми двох часток.

Подальша робота відбувається шляхом зміни запитання другої задачі і отримання третьої задачі на різницеве порівняння двох часток. Наприклад:

3) Господарка привезла на базар 36 кг помідорів у великих ящиках по 9 кг у кожному та 32 кг у маленьких ящиках по 4 кг у кожному. На скільки більше маленьких ящиків з помідорами, ніж великих привезла на базар господарка?

Досліджується вплив зміни запитання на розв’язання задачі: змінилася третя дія – дія додавання замінюється дією віднімання. Ще раз змінюємо запитання третьої задачі і отримуємо четверту задачу на кратне порівняння двох часток. Наприклад:

4) Господарка привезла на базар 36 кг помідорів у великих ящиках по 9 кг у кожному та 32 кг у маленьких ящиках по 4 кг у кожному. У скільки разів більше маленьких ящиків, ніж великих привезла на базар господарка?

Вивчаємо вплив цієї зміни на розв’язання задачі: змінюється остання дія – дія віднімання замінюється на дію ділення. Порівнявши усі задачі (2,3,4) та їх розв’язання, діти узагальнюють математичну структуру таких задач на основі визначення істотних ознак і план їх розв’язування (мал. 52).

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

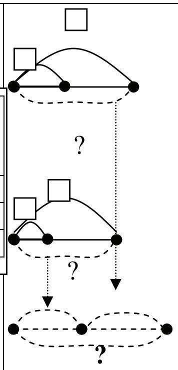
1) для першого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи рахунку;

2) для другого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи рахунку;

3) шуканим є $\frac{\textit{сума}}{\textit{різницеве..чи..кратне..выдношення}}$ значень кількості або часу для обох випадків.

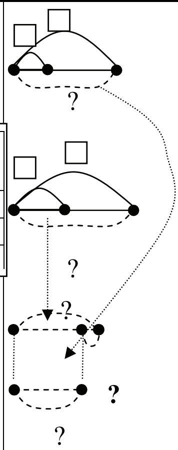
До кожної задачі складаємо і розв’язуємо обернені задачі і здійснюємо узагальнення більш високого порядку, наприклад, Задачі на знаходження суми двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	?
			?
II	□	□	?



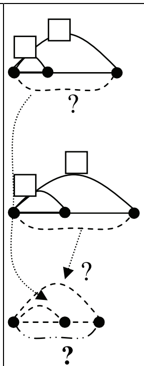
Задачі на різницеве порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	?
			На ?
II	□	□	?



Задачі на кратне порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	?
			У?
II	□	□	?



План розв'язування

1) кількість або час в одному випадку, дією ділення;
2) кількість або час в іншому випадку, дією ділення;
3) $\frac{\textit{суму}}{\textit{різницеве..чи..кратне..відношення}}$ двох числових значень кількості або часу.

Мал. 52.Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ двох часток порівнявши обернені задачі на знаходження $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ двох часток, в яких шуканою є величина однієї одиниці, узагальнюємо їх математичні структури та плани розв'язування (див. мал. 53).

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи лічби;

2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення величини однієї одиниці є шуканим;

3) дано значення $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..відношення}}$ відношення кількостей або часу в обох випадках.

Таким чином, нами запропонована робота із перетворення задач однієї математичної структури в іншу, із порівняння аналогічних математичних структур задач, визначення їх спільних істотних ознак та узагальнення планів розв'язування. Під час цієї роботи можна очікувати, що в деяких учнів дія *визначення істотних ознак та узагальнення математичної структури задачі та дія узагальнення способу розв'язування задачі* набуває подальшого засвоєння в формі *зовнішнього мовлення про себе*. Решта учнів засвоює ці дії в формі голосного мовлення на матеріалі задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру чи лічби).

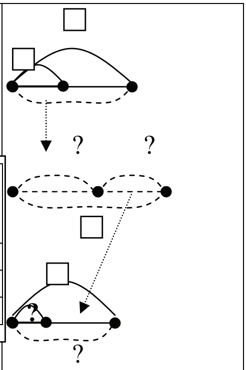
Задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру або лічби)

Методика аналогічна описаній вище. Учням пропонуються дві задачі: перша – на різницеве порівняння двох кількостей, а друга – на різницеве порівняння значень величин однієї одиниці. Наприклад:

1) Господарка від кіз надоїли 10 л молока по 5 л від кожної, а від корів 30 л молока, по 10 л від кожної. На скільки більше корів, ніж кіз подоїла господарка?	2) Від двох кіз надоїли 10 л молока, а від трьох корів – 30 л молока. Коза чи корова дає молока більше і на скільки?

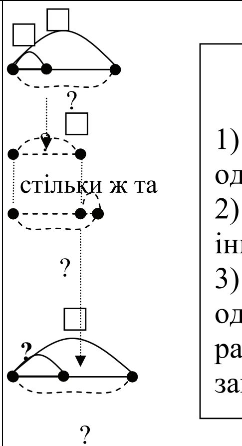
Обернені задачі до задач на знаходження суми двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	?
			} □
II	□	**?**	?



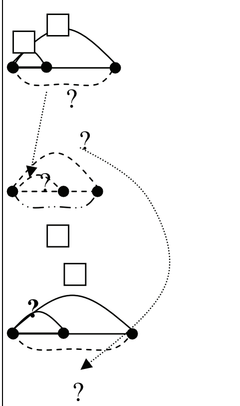
Обернені задачі до задач на різницеве порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	?
II	□	**?**	?, на □ б.(м.)



Обернені задачі до задач на кратне порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	?
II	□	**?**	?, у □ р. б.(м.)



План розв'язування

1) кількість або час в одному випадку;
2) кількість або час в іншому випадку;
3) величину однієї одиниці вимірювання чи рахунку, відповімо на запитання задачі.

Мал. 53. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на знаходження *суми* / *різницевого..чи..кратного..порівняння* двох часток, в яких шуканою є величина однієї одиниці

Учні записують обидві задачі коротко, розв’язують першу задачу і порівнюють другу задачу з першою. Визначають відмінності другої задачі від першої, і з’ясовують як ці відмінності впливають на розв’язання другої задачі: в цій задачі так само слід знайти різницеве відношення двох часток, але це інші частки, арифметичні дії та їх порядок у розв’язанні не змінюється, але змінюється їх зміст.

Подальше перетворення другої задачі йде шляхом зміни її запитання, і отримання задачі на кратне порівняння двох часток (величин однієї одиниці), а потім й на знаходження суми двох часток (величин однієї одиниці).

3) Від двох кіз надоїли 10 л молока, а від трьох корів – 30 л молока. Коза чи корова дає молока більше і у скільки разів більше?

4) Від двох кіз надоїли 10 л молока, а від трьох корів – 30 л молока. Скільки літрів молока надоїли від корови і кози разом?

Порівнявши математичні структури та розв’язання 2 – 4 задач, узагальнюємо їх математичні структури та план розв’язування (мал. 54).

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;

2) для другого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;

3) шуканим є $\frac{\textit{сума}}{\textit{різницеве..чи..кратне..відношення}}$ значень величин однієї одиниці вимірювання або лічби для обох випадків.

Далі складаємо і розв’язуємо обернені задачі до кожної з трьох задач. Результати узагальнення математичних структур і планів розв’язування задач, обернених до задач на різницеве порівняння двох часток, на знаходження загальної величини подано на малюнку 55.

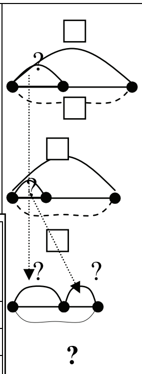
Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано лише значення кількості або часу, а значення загальної величини є шуканим;

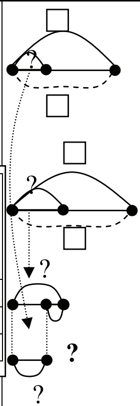
Задачі на знаходження суми двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
		} ?	
II	□	?	□



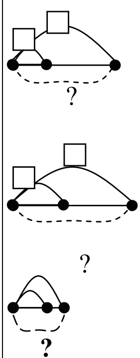
Задачі на різницеве порівняння двох часток

	За-галь на	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
		На ?	
II	□	?	□



Задачі на кратне порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
		У?	
II	□	?	□



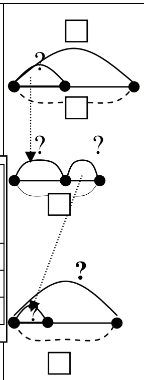
План розв'язування

1) величину однієї одиниці в одному випадку, дією ділення;
2) величину однієї одиниці в іншому випадку;
3) $\frac{\textit{суму}}{\textit{різницеве..чи..кратне..відношення}}$ двох числових значень одиниць вимірювання або лічби.

Мал. 54. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ двох часток (величин однієї одиниці)

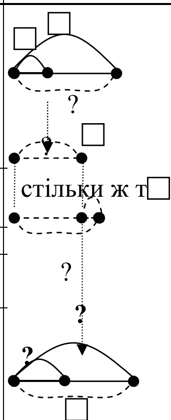
Обернені задачі до задач на знаходження суми двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
		□	
II	**?**	?	□



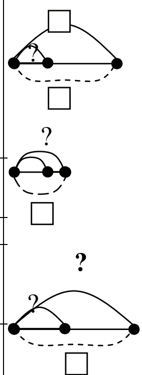
Обернені задачі до задач на різницеве порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
II	**?**	?, на □ б.(м.)	□



Обернені задачі до задач на кратне порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
II	**?**	?, у □ р. б.(м.)	□



План розв'язування

1) Значення величини однієї одиниці в одному випадку;
2) Значення величини однієї одиниці в іншому випадку;
3) Значення загальної величини, відповімо на запитання задачі.

Мал. 55.Опорні схеми обернених задач на знаходження $\frac{\textit{суми}}{\textit{різницевого..чи..кратного..порівняння}}$ двох часток, в якій шуканою є загальна величина

3) дано значення $\frac{\text{суми}}{\text{різницевого..чи..кратного..відношення}}$ відношення значень величини однієї одиниці або вимірювання в обох випадках.

Треба зазначити, що існує можливість подальшого порівняння та узагальнення усіх обернених задач до розглянутих трьох видів задач. Розглянемо їх *спільні істотні ознаки*:

1) для одного з випадків дано значення двох величин: загальної величини та кількості або часу.

2) для другого випадку дано лише одне з значень цих величин, а інше є шуканим.

3) дано значення $\frac{\text{суми}}{\text{різницевого..чи..кратного..відношення}}$ значень величини однієї одиниці вимірювання або лічби в обох випадках.

Тому усі вони мають спільний ***план розв'язування***:

Першою дією дізнаємося про значення величини однієї одиниці вимірювання або лічби в одному з випадків.

Другою дією дізнаємося про значення величини однієї одиниці вимірювання або лічби в іншому випадку.

Третьою діє відповімо на запитання задачі.

Можна узагальнити *спільні ознаки прямих і обернених задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток*:

1) для одного з випадків дано значення двох величин.

2) для другого випадку дано лише одне з значень цих величин, а інше є шуканим або для другого випадку також дані два значення цих величин.

3) дано значення $\frac{\text{суми}}{\text{різницевого..чи..кратного..відношення}}$ значень третьої величини або це значення є шуканим.

Такі задачі розв'язуються за планом: першою дією дізнаємося про значення третьої величини в одному з випадків; другою дією дізнаємося про значення третьої величини в іншому випадку; третьою діє відповімо на запитання задачі.

Завдання для самоперевірки:

1. Розкрити зміст підготовчого етапу до ознайомлення першокласників з поняттям „задача".

2. Розкрити методику ознайомлення першокласників з поняттям „задача” та процесом розв’язування задач.

3. Скласти методику роботи над задачею за пам’яткою №1:

У Миколи було 8 олівців. 3 олівця він подарував сестрі. Скільки олівців залишилось у Миколи?

Вінні-Пух з’їв 8 банок меду, а Карлсон 3. Хто з них з’їв більше банок меду і на скільки?

Фрекен Бок випекла 8 плюшок і 3 пиріжка. Скільки всього плюшок і пиріжків випекла Фрекен Бок?

У вогнища на привалі сиділо 8 хлопчиків, а дівчинок на 3 більше. Скільки дівчинок сиділо біля вогнища на привалі?

У Поліни було 8 шпильок. Скільки шпильок стало у Поліни, після того як мама їй купила ще 3 шпильки?

4. В чому полягає відмінність у роботі над простими задачами в 1-му та 2-му і наступних класах?

5. Скласти методику роботи над простими задачами за пам’яткою №2:

1) Після того, як від сувої відрізали 7 м тканини, то в ньому залишилося 2 м тканини. Скільки метрів тканини було в сувої спочатку?

2) В одному сувої 17 м тканини, а в другому 9 м. У скільки разів тканини менше у другому сувої, ніж в першому?

3) В першому сувої 12 м тканини, а в другому у 2 рази менше. Скільки метрів тканини в другому сувої?

4) У двох сувоях разом залишилося 10 м тканини. Скільки метрів тканини залишилося в другому сувої, якщо в першому сувої залишилося 7 м тканини?

5) Скільки метрів тканини у п’яти однакових сувоях, якщо у кожному по 9 м?

6) У сувої було 27 м тканини. Скільком покупцям відрізали від цієї сувої по 3 м тканини, якщо від сувої нічого не залишилося?

6. Розкрити зміст і методику підготовчої роботи до введення поняття „складена задача”.

7. Розкрити методику ознайомлення учнів 2-го класу з поняттям „складена задача”.

8. Скласти методику роботи над складеними задачами у 2-му класі:

1) У кравчині було в одному свої 12 м тканини, а у другому 15 м тканини. Вона витратила на пошиття платтів 14 м тканини. Скільки метрів тканини залишилося в кравчині?

2) В перший день майстерня відремонтувала 12 пар взуття, а другого дня на 5 пар менше, ніж першого. Скільки пар взуття відремонтувала майстерня третього дня, якщо у третій день відремонтували на 7 пар більше, ніж у другий день?

3) У Наталки було 26 зошитів. Вона списала 9 зошитів¸ а потім мама їй купила 12 зошитів. Скільки зошитів стало у Наталки?

4) У шкільну їдальню привезли 8 трилітрових банок соку. На сніданок витратили 22 л соку. Скільки літрів соку залишилося?

5) В магазині 18 кг цукру розсипали у пакети по 2 кг у кожний. До обіду продали 7 пакетів. Скільки пакетів залишилося?

9. Чим відрізняється методика роботи над складеними задачами у наступних класах?

10. Скласти методику роботи над задачами:

1) Трьом покупцям від сувої відрізали по 9 м тканини, після чого в ньому залишилося 27 м. Скільки метрів тканини було в сувої?

2) Садівники посадили 80 дерев. 44 дерева вони посадили уздовж тротуару, а решту – в парку, в 4 ряди, порівну в кожному. Скільки дерев було в кожному ряду?

3) У хлопчика 5 монет по 3 копійки і 4 монети по 5 копійок. Скільки всього копійок у хлопчика?

4) У їдальню завезли картоплю, буряки і моркву, всього 990 кг. Моркви було 80 кг, буряків 420 кг. На скільки кілограмів більше завезли картоплі, ніж буряків?

5) Один оператор за 8 год набирає на комп’ютері 32 сторінки тексту. Інший оператор за цей самий час набирає 40 сторінок. Який оператор набере за 1 год. більше сторінок і на скільки?

6) У магазин привезли 3 сувої шовку, по 18 м у кожному, і 2 однакових сувої сатину. Разом шовку і сатину привезли 104 м. Скільки метрів сатину в одному сувої?

11. Визначити істотні ознаки задач на знаходження суми двох добутків. За яким узагальненим планом вони розв’язуються?

12. Визначити істотні ознаки обернених задач на знаходження суми двох добутків. За яким узагальненим планом вони розв’язуються?

13. Визначити істотні ознаки задач на різницеве порівняння двох добутків. За яким узагальненим планом вони розв’язуються?

14. Визначити істотні ознаки обернених задач на різницеве порівняння двох добутків. За яким узагальненим планом вони розв’язуються?

ПІСЛЯСЛОВО

Розв'язанню сюжетних задач традиційно належить значна роль у структурі змісту початкової математичної освіти. Результатом навчання математики в початковій школі повинно бути формування загального уміння розв'язувати сюжетні задачі (прості та складені на 2-4 дії, які є комбінаціями відомих видів простих задач), а також формування умінь розв'язувати задачі певних видів (задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на подвійне зведення до одиниці, на спільну роботу, на рух). Досягнення цього результату можливо за умов теоретично обґрунтованої методичної системи навчання учнів початкової школи розв'язування сюжетних задач.

Розроблена методична система принципово відрізняється від існуючих тим, що:

- містить два обов'язкові компоненти – методику формування загального уміння та методику формування окремих умінь розв'язувати задачі певних видів, і реалізується протягом всього навчання у початковій школі. Методика формування загального уміння розв'язувати задачі реалізується через підсистеми, які передбачають таке формування відповідно на матеріалі простих задач і на матеріалі складених задач. Методика формування окремих умінь реалізується через три підсистеми – методику навчання розв'язування задач, що містять однакову (сталу) величину, методику навчання розв'язування задач на процеси (на спільну роботу та на рух); методику навчання розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного. У свою чергу, кожний із зазначених компонентів включає елементи ще нижчого порядку;
- теоретичну основу розробки методичної системи становлять діяльнісні теорії навчання – теорія поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна та теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова (яка є складовою частиною теорії навчальної діяльності Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова);
- запропонована методична система забезпечує спеціальне формування окремих дій та операцій, що складають уміння розв'язувати задачі. Для формування загального уміння розв'язувати задачі опрацьовуються усі дії, які його складають, що відбувається на матеріалі простих і складених задач через застосування спеціальної системи навчальних задач. Зміст навчальних завдань полягає не у

розв'язанні кожної задачі, а у виконанні певних дій, що відповідають аналізу задачного формулювання або пошуку розв'язування задачі;

- при формуванні загального вміння відбувається ознайомлення учнів з моделюванням як задачного формулювання, так і процесу розв'язування задачі;
- в основі методичної системи лежать розроблені нами класифікації простих та складених (не типових і типових) задач;
- нами змінено традиційний порядок уведення поняття задачі в 1-му класі – розширено коло питань підготовчої роботи, що дало змогу реалізувати етап ознайомлення з поняттям задачі на матеріалі простих задач перших п'яти (а не двох, як прийнято) видів;
- при навчанні розв'язування простих задач школярі знайомляться із словами-ознаками певних видів співвідношень (за Л. М. Фрідманом);
- ознайомлення з поняттям „складена задача" та процесом її розв'язування, а також формування уміння розв'язувати складені задачі проводиться на різноманітних математичних структурах задач, а не на складених задачах на знаходження різниці, що містять просту задачу на знаходження суми. Такий підхід спонукає учнів до засвоєння дій з розв'язування задачі, а не до заучування плану розв'язування задачі;
- складені задачі нової математичної структури вводяться на основі або порівняння з простими задачами, або продовження сюжету простої задачі, або зміни запитання простої задачі, або зміни умови чи запитання складеної задачі відомої математичної структури; таким чином, досліджується вплив цих змін на розв'язання задачі. Також застосовується й такий методичний прийом, коли задача нової структури подається без зіставлення з відомими структурами, що спонукає відтворення повного складу дій, які містить загальне уміння розв'язувати складені задачі;
- пропонованою методикою передбачено, що усі основні дії, які дозволяють учневі самостійно розв'язувати складені задачі, формуються до 4-го класу, тому в 4-му класі увага зосереджується на формуванні умінь розв'язувати задачі окремих видів, а загальне уміння розв'язувати складені задачі набуває подальшого засвоєння на прикладі задач нових математичних структур і задач, які містять дроби.

Література

1. Александрова Э.И. Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс. (Система Д.Б.Эльконина – В.В.Давыдова): Пособие для учителя. – 2-е изд. – М.: Вита-Пресс, 2001. – 240 с.
2. Александрова Э.И. Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс. (Система Д.Б.Эльконина – В.В.Давыдова): Пособие для учителя. – 2-е изд. – М.: Вита-Пресс, 2002. – 160 с.
3. Александрова Э.И. Методика обучения математике в начальной школе. 3 класс. (Система Д.Б.Эльконина – В.В.Давыдова): Пособие для учителя. – 2-е изд. – М.: Вита-Пресс, 2002. – 184 с.
4. Александрова Э.И. Методика обучения математике в начальной школе. 4 класс. (Система Д.Б.Эльконина – В.В.Давыдова): Пособие для учителя. – 2-е изд. – М.: Вита-Пресс, 2002. – 112 с.
5. Александрова Э.И. Как учить решать тестовые задачи? // Начальная школа. - 1999. - №7. – С.103-104.
6. Антонова Г.П. Различия в мыслительной деятельности школьников при решении задач // Типичные особенности умственной деятельности младших школьников / Под ред. С.Ф.Жуйкова. – М. : Просвещение, 1968. – С. 71-124.
7. Аргинская И.И. Математика. Методическое пособие к учебнику 1-го класса четырехлетней начальной школы. – М.: ЦОР 1, 2003. – 160 с.
8. Аргинская И.И. Математика. Методическое пособие к учебнику 2-го класса четырехлетней начальной школы. – М.: ЦОР 1, 2003. – 144 с.
9. Аргинская И.И. Математика. Методическое пособие к учебнику 3-го класса четырехлетней начальной школы. – М.: ЦОР 1, 2003. – 129 с.
10. Аргинская И.И. Математика. Методическое пособие к учебнику 4-го класса четырехлетней начальной школы. – М.: ЦОР , 2001. – 80 с.
11. Аргинская И.И., Бененсон Е.П., Итина Л.С. Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е исправл. И дополн. – Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003. Часть 1. – 64 с.: ил.
12. Аргинская И.И., Бененсон Е.П., Итина Л.С. Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е исправл. И дополн. – Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003. Часть 2. – 48 с.: ил.
13. Аргинская И.И., Бененсон Е.П., Итина Л.С. Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е исправл. И дополн. – Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003. Часть 3. – 64 с.: ил.
14. Аргинская И.И., Бененсон Е.П., Итина Л.С. Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е исправл. И дополн. – Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003. Часть 4. – 64 с.: ил.
15. Аргинская И.И., Бененсон Е.П., Итина Л.С. Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е исправл. И дополн. – Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003. Часть 5. – 32 с.: ил.
16. Аргинская И.И.,Ивановская Е.И. Математика: Учебник для 2-го класса – 2-е изд., исправл. и дополн. - Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003 – 192 с.: ил.

17.Аргинская И.И.,Ивановская Е.И. Математика: Учебник для 3-го класса – 2-е изд., исправл. и дополн. - Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003 – 192 с.: ил.
18.Аргинская И.И.,Ивановская Е.И. Математика: Учебник для 4-го класса – 2-е изд., исправл. и дополн. - Самара: Корпорация «Федоров», Издательство «Учебная литература», 2003 – 192 с.: ил.
19.Артемов А.К. Обучение эвристическим приемам решения математических задач в начальных классах // Развитие личности в процессе обучения и воспитания. Межвуз. сб. науч. тр.; Под ред. А.С.Радионова и др. – Пенза: ПГПУ, 1997. – с. 82-91
20.Артемов А.К. Формирование обобщенных умений решать задачи //Начальная школа. – 1992. - №2. – с. 30 -34.
21.Артемов А.К.. Теоретико-методические особенности поиска способов решения математических задач //Начальная школа. – 1998. - № 11-12. – С.48-54.
22.Астряб О.М. Принципи систематизації арифметичних задач. – К.: Рад. шк., 1939. – 55 с.
23.Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.
24.Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М.:Просвещение, 1984. – 335 с.
25.Баринова О.В. Дифференцированное обучение решению математических задач //Начальная школа. - 1999 . - № 2. – С.41-44.
26.Баринова О.В.Уровневая дифференциация в обучении младших школьников решению текстовых математических задач: Дис. канд. ... пед. наук: 13.00.02. – Саранск, 1999. - 187 с.
27.Белошистая А.В. Вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. – 2002. - № 11. – С. 64 - 67
28.Богданович М.В. Математика: підруч. для 1-го кл. – К.: Освіта, 2001. – 128 с.
29.Богданович М.В. Математика: підруч. для 2 кл. – К.: Освіта, 2002. – 160 с.
30.Богданович М.В. Математика: підруч. для 3 кл. – К.: Освіта, 2003 – 160 с.
31.Богданович М.В. Математика: Підруч. для 4 кл. – К.:Освіта, 2004. – 159 с.
32.Богданович М.В. Математика: Підруч. для 4 кл. чотириріч. і 3 кл. триріч. почат. шк. – 2-ге вид. – К.: Освіта, 1995. – 240 с.
33.Богданович М.В. Математика: Підруч. для 1 кл. чотиріч. і 2 кл. триріч. почат. шк.: - 7-ме вид. – К.: Освіта, 1997. – 224 с.
34.Богданович М.В. Математика: Пробн. підруч. для 1 кл. триріч. почат. шк. – К.: Освіта, 1997. – 208 с.
35.Богданович М.В. Математика: Учеб. для 2 кл. четырехлет. нач. шк. – К.: Рад. шк., 1987. – 208 с.: ил.
36.Богданович М.В. Математика: Учеб. для 3 кл. четырехлет. нач. шк. – К.: Рад. шк., 1988. – 256 с.: ил.
37.Богданович М.В., Козак М.В.,Король Я.А. Методика викладання математики в початкових класах. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2001. – 368 с.
38.Богданович М.В.Методика розв'язування задач в початкових класах. – К.: „Вища школа",1990. – 183 с.

39.Бурда М.І. Моделювання сюжетних задач //Розв’язування математичних задач в початкових класах: Зб. Статей / Під ред. канд. пед. наук Т.М.Хмари. – К.: Рад. шк.., 1986. – С.41 – 47.
40.Бухарова Г.Д. Теоретико-методологические основы обучения решению задач студентов вуза: Дис... доктора пед. наук: 13.00.01, 13.00.02 – Екатеринбург, 1996 – 249 с.
41.Гальперин П.Я. Психология: 4 лекции. - М.: Книжн. дом «Университет»: Юрайт, 2000. – 111 с.
42.Гальперин П.Я. К исследованию интеллектуального развития ребенка // Вопросы психологии. - 1969. - № 1. - с.18 - 22.
43.Гальперин П.Я. Общий взгляд на учение о так называемом поэтапном формировании умственных действий, представлений и понятий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. - 1998.- №2.- С. 3-8
44.Гора Т., Логачевська С. Диференційований підхід до розв’язування текстових задач // Початкова школа. – 1998. - №1. – С. 17-22.
45.Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов. – М. : Педагогика, 1972. – 424 с.
46.Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. – М. : Педагогика, 1986. – 240 с.
47.Дубинчук О.С. Математика в 4 і 5 класах: Метод. посібник. – К.: Рад. Шк.., 1986. – 168 с.
48.Дубровина И.В. Изучение математических способностей детей младшего школьного возраста // Вопросы психологи способностей: Сб. Ст.. под ред. В.А.Крутецкого. – М.:Педагогика, 1973. – с. 3 – 60.
49.Зак А.З. Развитие теоретического мышления у младших школьников. – М.: Педагогика, 1984. – 152 с.
50.Истомина Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 288 с.
51.Истомина Н.Б., Шикова Р.Н. Методика обучения решению задач //Методика преподаваниям атематике в начальных классах: Вопр. Частной методики: Учеб. Пособие для студентов-залчников II - IУ курсов фак. Подгот. Учителей нач. классов / Н.Б. Истомина, Е.И. Мишарева, Р.Н.Шикова, Г.Г.Шмырева; Моск. Гос. Заоч. Пед. ин-т. – М.:Просвещение, 1986. – С. 60-108
52.Истомина Н.Б., Шикова Р.Н. Формирование умения решать задачи различными способами// Начальная школа. – 1985. - № 9. – С. 50 – 54.
53.Калмыкова З.И. Психологический анализ формирования понятия о типе задачи // Изв. АПН РСФСР, 1947. - №12. – С.139-154
54.Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения. – М.: Знание, 1979. – 48 с.
55.Колягин Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Автореф. дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02. / Научн.-исслед. ин-т содерж. и методов обучения АПН СССР – М., 1977. – 55 с.

56.Колягин Ю.М. Методические проблемы применения задач в обучении математике // Преподавание алгебры и геометрии в школе. – М.: Просвещение, 1982. – С. 116-123.
57.Кочина Л.П., Листопад Н.П. Математика // Програми для середньої загальноосвітньої школи. 1-2 класи. – К.:Початкова школа, 2002. – С. 65 - 76
58.Кочина Л.П., Листопад Н.П. Математика, 2 кл.: проб. підручник для серед. загально освіт. шк.. – К.: Літера ЛТД, 2002. – 160 с.
59.Кочина Л.П., Листопад Н.П. Математика, 3 кл.: підручник для серед. загальноосвіт. шк.. – К.: Літера ЛТД, 2003 – 176 с.
60.Кочина Л.П., Листопад Н.П. Математика, 4 кл.: Підручник для серед. Загально освіт. Шк.. – К.: Літера ЛТД, 2004. – 176 с.: іл..
61.Кочина Л.П.,Листопад Н.П. Математика: проб. підруч. для 1 кл. чотиріч. почат. шк.. – К.: Літера: А.С.К., 2000 – 144 с.:іл..
62.Крутецкий В.А. Основы педагогической психологии. – М.: Просвещение, 1972. – 255 с.
63.Кузнецов В.И. К вопросу о решении математических задач //Начальная школа. - 1999. - №5. – С. 27-33.
64.Левенберг Л.Ш. Решение задач различными способами// Начальная школа. - 1980. - № 11. – С. 50-55.
65.Лук’янова С.М. Розв’язування текстових задач арифметичними способами в основній школі: Дис. канд. ... пед. наук: 13.00.02. – К., 2005. – 236 с.
66.Люблинская А.А. Учителю о психологии младшего школьника. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.
67.Максименко С.Д., Максименко В.П. Психологія сприймання та розуміння схематичного запису задачі. // Розв’язування математичних задач в початкових класах: Зб. Статей / Під ред. канд. пед. наук Т.М.Хмари. – К.:Рад. шк.., 1986. – С.19 - 22
68.Мельничук Т.Й., Хмара Т.М. Моделювання прямих та обернених задач // Розв’язування математичних задач в початкових класах: Зб. Статей / Під ред. канд. пед. наук Т.М.Хмари. – К.:Рад. шк.., 1986. – С. 47 – 51.
69.Менчинская Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьника: Избранные психологические труды. – М.: Педагогика, 1989. – 224 с.
70.Методика начального обучения математике/ Под ред. Л.Н.Скаткина. – М.:Просвещение, 1972 – 320 с.
71.Методика начального обучения математике: Учеб. Пособие для пед ин-ов / В.Л.Дрозд, А.Т.Катасонова, Л.А.Латонин и др. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 254 с.
72.Мізюк В. А. Формування вмінь учнів початкової школи розв'язувати текстові задачі: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун- т ім. М.П.Драгоманова. — К., 2000. — 19с.
73.Моро М.И., Пышкало А.М. Методика обучения математике в 1-3 классах. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1978. – 336 с. с ил.
74.Никитина М.П. О сознательном усвоении математических понятий //Начальная школа. - 2000. - №3. – С. 39-42.

75.Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. – К., Радянска школа, 1989. -190 с.
76.Побірченко Н.А. Психологічні основи навчання математики в початкових класах: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1985. – 64 с.
77.Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей: Пер. с англ.. В.Г.Звонаревой и Д.Н.Белла; Под ред. Ю.М.Гайдука. Изд. 2-е. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
78.Пчелко А.С. Актуальные вопросы преподавания арифметики // Начальная школа. – 1963. - №3. – С.71-74.
79.Решетова З.А. Структура ориетировочной деятельности и ее особенности при формировании теоретического мышления // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 14. Психология. - 1998. - № 2. – С. 14 – 20.
80.Салмина Н.Г. Виды и функции материализации в обучении. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 135 с.
81.Сафонова Л.А. Обучение учащихся 1- 8 классов решению текстовых задач в условиях преемственности изучения математики: Дисс… канд. пед. наук: 13.00.02. – Саранск, 2000. – 207 с.
82.Семенов Е.М. Арифметические упражнения как средство воспитания логического мышления учащихся восьмилетней школы (Решение арифметических задач, І-УІ классы). Метод. пособие для учителя. - Сверодловск, 1963. - 278 с.
83.Силков В.В., Рибалко А.П. Аналіз структури задачі // Розв’язування математичних задач в початкових класах: Зб. статей /Під ред. канд. пед. наук Т.М.Хмари. – К.:Рад. шк.., 1986. – С.19 – 22.
84.Скаткин Л.Н. Обучение решению простих и составных арифметичеких задач. – М.: Учпедгиз, 1963. – 183 с.
85.Скаткин Л.Н., Жикалкина Т.К. Обучение решению задач с пропорциональными величинами: Учеб.-метод. пособие для студентов-зоочников ІУ–У курсов фак-а подготовки учителей нач. классов. – М.: Просвещение, 1979. – 33 с.
86.Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. – Донецк: изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.
87.Скворцова С.О. Загальна методика навчання молодших школярів розв’язувати задачі, що містять знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків та обернені до них // Наука і освіта. – 2005. – №1-2. – С. 141 – 148.
88.Скворцова С.О. Задачі на знаходження середнього арифметичного //Початкова школа. - 2002. - № 1. - С. 23-28.
89.Скворцова С.О. Задачі на знаходження середнього арифметичного //Початкова школа. - 2002. - № 2. С. 31- 35.
90.Скворцова С.О. Задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами //Наша школа. - 2002. - №5. - с. 67-70.
91.Скворцова С.О. Задачі на подвійне зведення до одиниці //Початкова школа. - 2003. - № 12. – С. 10 -12.

92.Скворцова С.О. Задачі на рух в одному напрямку за чинним підручником „Математика 4(3)" М.В.Богдановича // Початкова освіта. - 2004. - № 11. – С. 2 – 7.
93.Скворцова С.О. Методика роботи над простими задачами на конкретний зміст добутку та частки з елементами теорії укрупнення дидактичних одиниць // Початкова освіта. – 2001. - № 11 (107). – С..6 -7.
94.Скворцова С.О. Методика розв'язування задач на спільну роботу //Наша школа. - 2002. - № 3. С. 25-31.
95.Скворцова С.О. Навчання молодших школярів розв'язуванню задач на знаходження четвертого пропорційного на підставі системного типу орієнтування //Наука і освіта. – 2004. - №1. – С. 136 – 141.
96.Скворцова С.О. Навчання молодших школярів розв'язуванню задач на знаходження четвертого пропорційного на підставі системного типу орієнтування //Наука і освіта. – 2004. - №2. – С. 149-155.
97.Скворцова С.О. Ознайомлення з задачами на рух назустріч та у протилежних напрямках // Початкова школа . - 2004. - № 10. – С.23-27.
98.Скворцова С.О. Ознайомлення з задачами на рух назустріч та у протилежних напрямках // Початкова школа. - 2004. № 11. – С.9-10.
99.Скворцова С.О. Операційний бік процесу розв'язування математичних сюжетних задач (на матеріалі задач на знаходження невідомих за двома різницями) //Наша школа. – 2004. - № 4. – С.83-89
100. Скворцова С.О. Операційний бік процесу розв'язування математичних сюжетних задач (на матеріалі задач на знаходження невідомих за двома різницями) //Наша школа. – 2004. - № 5-6. – С.26-31.
101. Скворцова С.О. Формування умінь розв'язувати задачі на пропорційне ділення //Початкова школа. – 1999. - № 4. - С.16 – 19.
102. Скворцова С.О. Навчання молодших школярів розв'язуванню задач на пропорційне ділення на підставі теорії поетапного формування розумових дій П.Я.Гальперіна та Н.Ф.Тализіної // Наша школа. – 2005. - №4. – С.45-50.
103. Скворцова С.О. Розвиток функціонального мислення молодших школярів під час роботи над задачами з пропорційними величинами //Початкова освіта. – 2001. - № 29. - С.2 - 32.
104. Скворцова С.О. Система завдань з формування поняття про частини величини і дріб // Початкова освіта. – 2003. - № 9. - С.1 – 16.
105. Скворцова С.О. Система завдань з формування поняття про частини величини і дріб // Початкова освіта. – 2003. - № 11. - С.1 – 24.
106. Скворцова С.О. Узагальнення і систематизація знань учнів за 2 клас під час вивчення теми „Повторення матеріалу" //Початкова освіта. - 2001. - № 26-28. – С.1 -63.
107. Скворцова С.О. Загальна методика навчання молодших школярів розв'язувати задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток та обернені до них // Наука і освіта. – 2005. - №3-4. С. 137 - 143
108. Скворцова С.О. Формування у молодших школярів свідомих понять про величини: відстань, швидкість та час //Наша школа. – 2003. - № 2. – С. 45 – 52.

109. Скворцова С.О. Формування у молодших школярів умінь розв'язувати складені задачі //Початкова освіта. - 2003. - №4. - С. 1-16.
110. Сковроцва С.О., Мартинова Г.І., Шевченко Т.О. Математика в 1-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. – Одесса: Автограф, 2001 - 190 с.
111. Скворцова С.О., Мартинова Г.І., Шевченко Т.О. Математика в 2-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. – Одесса: Автограф, 2002 - 220 с.
112. Скворцова С.О., Мартинова Г.І., Шевченко Т.О. Математика в 3-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. – Одесса: Автограф, 2003 - 268 с.
113. Скворцова С.О., Мартинова Г.І., Шевченко Т.О. Математика в 4-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. – Одесса: Автограф, 2003 - 268 с.
114. Скворцова С.О., Мартинова Г.І., Шевченко Т.О. Робота над задачами в 1-му класі трирічної початкової школи //Початкова освіта. - 2000. - № 25 – 28. - С. 2-95.
115. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Радянська школа, 1983. – 192 с.
116. Слугин В.В. Психологические особенности функций и способов формирования у младших школьников умения решать арифметические задачи: Дис. ... канд.. психол. наук: 19.00.07. – Москва, 1995. - 125 с.
117. Смирнова. С.И.Использование чертежа при решении простых задач //Начальная школа. – 1998. - № 5. – С. 53-58.
118. Степанова М.А. Представления о параметрах умственных действий в психологическом учении П.Я.Гальперина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. - 1998.- №3. - С. 95-103.
119. Степанова М.А. Проблема обучения и развития в трудах Л.С.Выготского и П.Я.Гальперина // Вопросы психологии. - 2001. - №4. - С. 106-114.
120. Талызина Н.Ф. Деятельностный подход к механизмам обобщения // Вопросы психологии. - 2001. - № 3.- С. 3-15.
121. Талызина Н.Ф. Развитие П.Я.Гальпериным деятельностного подхода в психологии // Вопросы психологии. - 2002. - №5. - С. 42-49.
122. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников: Книга для учителя. – М. : Просвещение, 1988. – 175 с.
123. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. – Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. – 400с.
124. Тихомиров О.К. Структура мыслительной деятельности человека. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 304 с.
125. Турецкий Е.Н. Формирование у учащихся восьмилетней школы навыков алгебраического метода решения текстових задач: Автореф. дис. ... канд. пед. наук : 732./ Ташк. сос. пед. ин-т им. Низами. - Душанбе, 1968. – 35 с.
126. Унт И. Индивидуализация и дифференциация обучения – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.

127. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
128. Фридман Л.М. Основы проблемологии. Серия „Проблемология”. – М.: СИНТЕГ, 2001. - 228 с.
129. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. - М.: Просвещение, 1983. – 160 с.
130. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике: История, теория, методика. – М.: Школьная Пресса, 2002. – 208 с.
131. Царева С.Е. Обучение решению задач// Начальная школа. – 1998. - № 1. – с. 102-107.
132. Царева С.Е. Обучение решению текстовых задач, ориентированное на формирование учебной деятельности младших школьников. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 1998. – 135 с.
133. Царева С.Е. Различные способы решения текстовых задач// Начальная школа. – 1991. - № 2. – с. 78-84.
134. Царева С.Е. Различные способы решения задач и различные формы записи решения // Начальная школа. - 1982. - № 2. – С. 78-84.
135. Шикова Р.Н. Решение задач различными способами // Начальная школа. – 1979. - № 12. – С.
136. Шикова Р.Н. Способы разбора текстовых задач // Начальная школа. – 1986. - № 12. – С. 38- 43.
137. Эрдниев П.М. Математика. Экспериментальное учебное пособие для III класса. - М.: Педагогика, 1974. - 216 с.: ил.
138. Эрдниев П.М. Обучение математике в начальных классах. (Из опыта работы) М.: Просвещение, 1977 – 192 с.

Додаток А

Приклади роботи над задачами

1. Біля ставка росло 9 верб, 2 осики, а вільх стільки, скільки верб і осик разом. Скільки вільх росло біля ставка?

І. Ознайомлення з умовою задачі. Аналіз умови.

Прочитай задачу та уяви, про що в ній розповідається. Про що розповідається в задачі? (В задачі розповідається про верби, осики і вільхи. Росло 9 верб, 2 осики, а вільх стільки, скільки верб і осик разом. Запитується: скільки росло вільх?)

Розкажи задачу. Розкажи умову. Розкажи запитання. Виділи числові дані. Що вони означають? (Число 9 означає, що росло 9 верб; число 2 означає росло 2 осики). Яке число є шуканим? (Шуканим є число вільх).

Виділи ключові слова та склади короткий запис задачі. (Ключові слова: верби, осики, вільхи.) Запишемо ключові слова у стовпчик. Чи відомо нам, скільки росло верб? (Відомо – 9). Запишемо це поряд з словом "Верби". Чи знаємо ми із умови, скільки росло осик? (Знаємо – 2). Запишемо це поряд з словом "Осики". Чи відомо, скільки було вільх? (Ні не відомо). А що нам відомо із умови задачі про вільхи? (Вільх було стільки, скільки верб і осик разом). Як це позначимо у короткому запису? Якщо говориться "разом", то ми це позначаємо фігурною дужкою, тобто те що стосується верб і осик ми повинні об'єднати фігурною дужкою, і посередині записати що це число дорівнює числу вільх. Тому короткий запис буде такий:

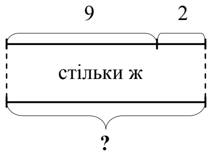
$$\left.\begin{array}{l}\text{Верби – 9 шт.}\\ \\ \text{Осики – 2 шт.}\end{array}\right\}\text{Вільхи – ?}$$

- За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання. Що позначає число 9? (Число 9 позначає, скільки росло верб).

Що позначає число 2? (Число 2 позначає, скільки росло осик). Що позначає фігурна дужка? (Фігурна дужка позначає, що вільх стільки, скільки верб і осик разом). Яке запитання задачі?(Скільки росло вільх?)

- Яким співвідношенням пов'язані числа в задачі? (Тут є слово-ознака „всього", тому тут задано співвідношення об'єднання частин у ціле – співвідношення додавання. Проміжним невідомим є сума, яку знаходять дією додавання. Крім того, вільх стільки, скільки верб і осик разом, тому тут є ще співвідношення рівності).

- Зробимо схематичний малюнок. Скільки верб росло біля ставка? Як показати, що біля ставка росло 9 верб?

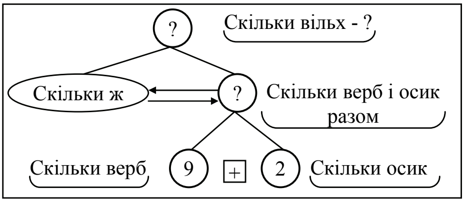


Скільки осик росло? Як це показати: треба об'єднувати чи виключати? Скільки вільх росло біля ставка? (Стільки ж, скільки верб і осик разом). Як це показати на схемі? (Треба нижче накреслити відрізок такої ж довжини, що й відрізок, який показує скільки верб і осик разом).

II. Пошук розв’язування задачі

Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти?

(Потрібно знати: I – що вільх було стільки, скільки верб і осик разом, та II – скільки верб і осик разом (поки не знаємо).) Тут дія не виконується, але здійснюється логічний перехід до запитання “Скільки верб і осик разом?”



- Що потрібно знати, щоб на нього відповісти? (Потрібно знати два числових значення: I – скільки верб (9) та II – скільки осик (2).)

- Якою арифметичною дією відповімо на запитання? (Відповімо дією додавання.)

III. Запис розв’язання і відповіді

- *Запиши розв'язання задачі.* (Розв'язок: 9+2=11 (шт.) – стільки ж вільх).

- *Запиши відповідь.* (Відповідь: 11 вільх росло).

2. Кравчиня за годину шиє 24 мішки для посилок, а її учениця 17 мішків. Скільки мішків для посилок пошиють разом кравчиня і учениця за 2 години?”

I.Ознайомлення з умовою задачі. Аналіз умови

Прочитайте задачу та уявіть про що в ній говориться. Про що розповідається в задачі? (В задачі розповідається про мішки, які шиє кравчиня і її учениця. В задачі говориться скільки мішків шиє за годину кравчиня і її учениця окремо. А запитується, скільки мішків пошиють кравчиня і її учениця за 2 години разом. За одну годину кравчиня шиє 24 мішки, а її учениця за одну годину шиє 17 мішків. Скільки мішків пошиють разом кравчиня і її учениця за 2 години?). Запитання передбачає, що кравчиня і її учениця працювали 2 години.

Розкажіть всю задачу. Розкажіть умову. Розкажіть запитання. Виділіть і поясніть числові дані задачі. Яке число є шуканим?

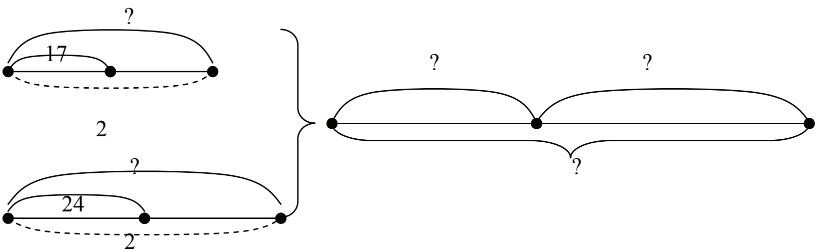
Запишемо задачу коротко, для цього виділимо ключові слова. Які ключові слова можна виділити? (Кравчиня, учениця.) Запишемо їх у стовпчик. Чи відомо скільки мішків пошила кравчиня за 2 години? (Ні, не відомо, але ми знаємо, що за годину вона пошила 24 мішки. Тому за 2 години кравчиня всього пошиє стільки мішків, скільки буде, якщо по 24 мішки взяти 2 рази.) Запишемо це, замість виразу “стільки, скільки” у короткому запису поставимо дві стрілочки. Чи відомо скільки мішків пошиє учениця за дві години? (Ні, не відомо. Але ми знаємо, що вона шиє за одну годину 17 мішків, тому за 2 години вона всього пошиє стільки мішків, скільки буде якщо по 17 мішків взяти 2 рази.) Запишемо це, позначаючи вираз “стільки, скільки” двома стрілочками. Яке запитання задачі? Як його позначити на короткому запису? (В задачі запитується, скільки всього пошили мішків за 2 години кравчиня і учениця разом. Так як, в задачі запитується скільки мішків пошили разом кравчиня і учениця, тому слід поставити фігурну дужку із знаком запитання).

Кравчиня - ?, по 24 м. взяти 2 рази ⎫
⎬ ?
Учениця - ?, по 17 м. взяти 2 рази ⎭

За коротким записом поясніть числові дані задачі.(Число 24 означає кількість мішків, що шиє кравчиня за 1 годину. Число 2 позначає, скільки годин працювала кравчиня. Кравчиня пошила всього мішків стільки, скільки буде, якщо по 24 мішки взяти 2 рази. Число 17 означає, скільки мішків шиє учениця. Число 2 означає, скільки годин працювала учениця. Учениця всього пошила стільки мішків, скільки буде якщо по 17 взяти 2 рази. Фігурна дужка означає, скільки мішків всього пошили за дві години кравчиня і учениця разом).

Які співвідношення задані в задачі? (В задачі є два співвідношення залежності між значеннями пропорційних величин: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи, причому невідомими є значення загальної величини; та одне співвідношення додавання. Або в задачі є два співвідношення переходу від меншої одиниці вимірювання до більшої та одне співвідношення додавання).

Виконаємо схематичний рисунок:



II. Пошук розв’язування задачі

Яке запитання задачі? (Скільки мішків пошиють разом кравчиня і учениця за дві години?)

Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: I – скільки всього мішків за 2 години пошиє кравчиня, невідомо, та II – скільки всього мішків за 2 години пошиє учениця, невідомо.) Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання).

Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, не можна, тому що ми не знаємо, скільки всього мішків пошиє кравчиня і не знаємо скільки всього мішків пошиє учениця).

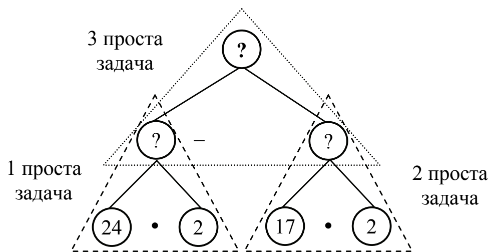
Що треба знати, щоб відповісти на запитання "Скільки всього мішків за 2 години пошиє кравчиня? (Треба знати два числові значення: І – скільки мішків шиє кравчиня за 1 годину, відомо – 24, та ІІ – скільки разів слід взяти по 24,тобто скільки годин вона працювала, відомо – 2.) Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення, тому що по 24 взято 2 рази).

Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Можна, тому що ми знаємо обидва числові значення).

Чи закінчено аналіз? (Ні, тому що ми поки ще не можемо відповісти на запитання задачі). Чому ми поки ще не можемо відповісти на запитання задачі? (Тому, що ми не знаємо, скільки всього мішків за 2 години шиє учениця).

Що треба знати, щоб відповісти на це запитання? (Треба знати два числові значення: І – скільки мішків шиє учениця за 1 годину, відомо – 17, та ІІ – скільки разів слід взяти по 17, тобто скільки годин працювала учениця, відомо – 2.) Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення, тому що по 17 взято 2 рази).

Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Можна, тому що ми знаємо обидва числові значення.) Тепер ми можемо відповісти на запитання задачі? (Можемо, тому що ми від запитання перейшли до числових даних, аналіз закінчено).



Розіб'ємо цю задачу на прості. Як ви вважаєте скільки буде простих задач? (Буде три прості задачі, тому що на схемі три запитання.) Покажемо на схемі кожну просту задачу.
Сформулюйте кожну просту задачу та покажіть опорні схеми до них.

(1 проста задача: "Кравчиня за годину шиє 24 мішки для посилок. Скільки мішків для посилок вона пошиє за 2 години?" 2 проста задача: "Учениця за годину шиє 17 мішків для посилок. Скільки мішків для посилок вона пошиє за 2 години?". 3 проста задача: "Кравчиня шиє за 2 години □ мішків для посилок, а учениця за 2 години шиє □ мішків для посилок. Скільки мішків для посилок пошиють разом кравчиня і учениця за 2 години?").

Якщо задача складається із трьох простих задач, тоді план розв'язування буде складатися із трьох дій. Про що ми дізнаємося першою дією? (Першою дією ми відповімо на запитання першої простої задачі, тому ми дізнаємося скільки мішків пошиє кравчиня за 2 години). Про що ми дізнаємося другою дією? (Другою дією ми відповімо на запитання другої простої задачі, тому ми дізнаємося скільки мішків пошиє учениця за 2 години). Про що ми дізнаємося третьою дією? (Третьою дією ми відповімо на запитання третьої простої задачі і дізнаємося скільки мішків пошиють разом кравчиня і учениця за 2 години).

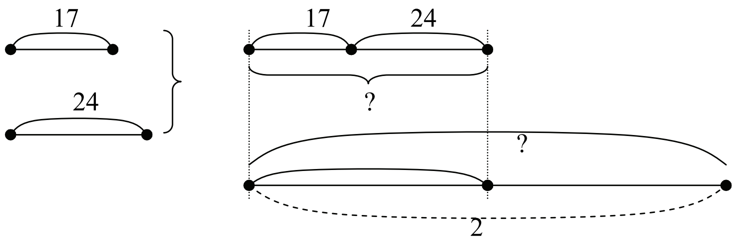
III. Запишемо розв’язання і відповіді

Запишемо розв'язання:
1) 24 · 2 = 48 (м) пошиє кравчиня за 2 год.
2) 17 · 2 = 34 (м) пошиє учениця за 2 год.
3) 48 + 34 = 82 (м) пошиють разом кравчиня і учениця за 2 год.

Запишімо відповідь. (Відповідь: 82 мішки пошиють разом кравчиня і учениця за 2 години).

IV. Робота над задачею після її розв’язання

Розв’яжіть задачу іншим способом. Що означає відрізок, що позначений дужкою з числом 24? Що означає відрізок, що позначений дужкою з числом 17? Що означає відрізок, який є об’єднанням цих відрізків?



Або знаходження іншого способу розв’язування спрямовується додатковим запитанням: Скільки мішків пошиють кравчиня і учениця за 1 годину?

Запишемо розв'язання:
1) 24 + 17 = 41 (м) пошиють кравчиня і учениця за 1 год.
2) 41 · 2 = 82 (м) пошиють разом кравчиня і учениця за 2 год.

Додаток Б

Картки з диференційованою дозою допомоги учням при розв’язуванні задач

<u>*Задача.*</u> *У магазині було 720 кг рису. За перший день продали* $\frac{2}{9}$*, а за другий* $\frac{3}{5}$ *всього рису. Скільки кілограмів рису продали за два дні?*

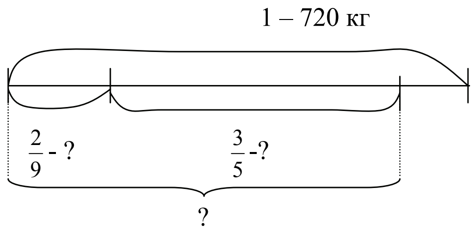
1 варіант

1. Розглянь короткий запис задачі.

Було – 720 кг

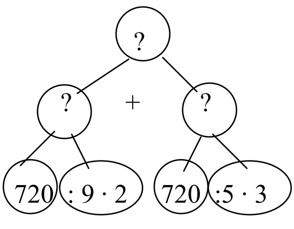
Продали 1 день - ?, $\frac{2}{9}$ від 720 кг; II день - ?, $\frac{3}{5}$ від 720 кг $\Big\}$?

2. Розглянь схему:



- обведи відрізок, що позначає масу рису, що продали у перший день; як про це дізнатися?
- обведи відрізок, що позначає масу рису, що продали у другий день; як про це дізнатися?
- обведи відрізок, що позначає масу рису, що продали за два дні; як про це дізнатися?

1. Розглянь схему аналізу:



- Склади план розв’язування задачі.

4. Запиши розв’язання по діях з поясненням.
5. Запиши відповідь.
6. Перевір себе!

Розв’язання

1) 720 : 9 · 2 = 160 (кг) рису продали в 1 день;

2) 720 : 5 · 3 = 432 (кг) рису продали в II день;

3) 160 + 432 = 592 (кг) рису продали в 1 та II день.

Відповідь: 592 кг рису продали за два дні.

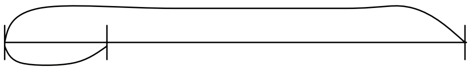
Додаткове завдання.

Дізнайся скільки кілограмів рису залишилося?

II варіант

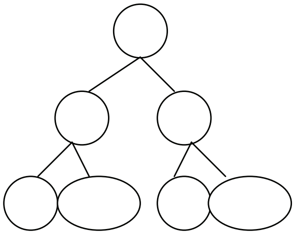
1. Запиши задачу коротко.
2. Добудуй схему:

1 – 720 кг



$\frac{2}{9}$ - ?

3. Заповни схему аналізу:



4. Склади план розв'язування задачі.
5. Запиши розв'язання по діях з поясненням.
6. Запиши розв'язання виразом. Перевір себе:

$170 : 9 \cdot 2 + 720 : 5 \cdot 3 = 592$ (кг)

7. Перевір себе! Відповідь: 592 кг.

Додаткове завдання.

Постав додаткове запитання, щоб задача розв'язувалась чотирма діями.

III варіант

1. Склади схему задачі.
2. Розв'яжи задачу. Запиши розв'язання виразом.
3. Перевір себе! Відповідь: 592 кг.

Додаткове завдання.

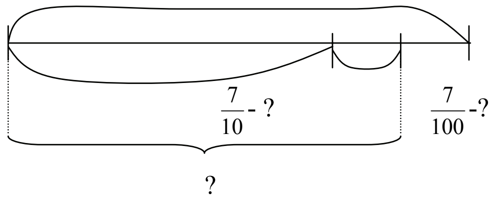
4. Розв'яжи задачу з цією самою умовою, але із запитанням: „Скільки кілограмів рису залишилося?"

<u>Задача.</u> Кроль за день з'їдає 3 кг 500 г продуктів, з них трава становить $\frac{7}{10}$*, а зерно -* $\frac{7}{100}$ *всіх продуктів. Скільки разом трави и зерна з'їдає кріль за день?*

1 варіант

1. Розглянь схему:

1 – 3 кг 500 г



- обведи відрізок, який позначає скільки трави з’їдає кроль, як про це дізнатися? Обчисли це.
- обведи відрізок, який позначає скільки зерна з’їдає кроль, як про це дізнатися? Обчисли це.
- обведи відрізок, який позначає скільки трави і зерна з’їдає кроль, як про це дізнатися? Обчисли це.

2. За схемою склади план розв’язування задачі.
3. Перевір себе” Відповідь: 2695 кг = 2 т 695 кг.

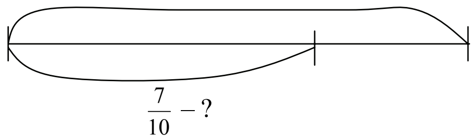
Додаткове завдання.

Дізнайся про масу решти продуктів.

II варіант

1. Добудуй схему:

1 – 3 кг 500 г



2. За схемою склади план розв’язування задачі.
3. Запиши розв’язання по діях з поясненням.
4. Перевір себе! Відповідь: 2695 кг = 2 т 695 кг.

Додаткове завдання

Постав додаткове запитання, щоб задача розв’язувалась чотирма діями.

III варіант

1 . Склади схему задачі.

2. Розв’яжи задачу . Запиши розв’язання виразом.

3. Перевір себе! Відповідь: 2695 г = 2 кг 695 г.

Додаткове завдання

4. Розв’яжи задачу з цією самою умовою, але із запитанням: „Скільки грамів складає решта продуктів?”

5. Порівняй цю задачу з попередньою. Чи це така сама за структурою задача? Розкажи план розв’язання таких задач.

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ I

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ РОВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ

1.1. Структура сюжетної задачі 8

1.2. Класифікація сюжетних задач початкового курсу математики 15

1.2.1. Класифікація простих задач 16
1.2.2. Класифікація складених задач 18

1.3. Діяльність з розв'язування задач 27

1.3.1. Сутність процесу розв'язування задач 27
1.3.2. Зовнішня структура процесу розв'язування задач 28
1.3.3. Психологічна структура діяльності з розв'язування задач..36

1.4. Уміння розв'язувати задачі. Види умінь 42

РОЗДІЛ 2

ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ

2.1. Навчання розв'язування задач з точки зору розвивального навчання 47

2.1.1. Система Л.В. Занкова 47
2.1.2. Система Д.Б.Ельконіна та В.В.Давидова 50
2.1.3. Система „Школа 2100" 53

2.2. Диференціація у навчанні молодших школярів розв'язування сюжетних математичних задач 55

2.2.1. Вікові й індивідуальні відмінності молодших школярів при розв'язуванні задач 56
2.2.2. Напрями у диференціації навчання розв'язування задач …58

2.3. Процес формування умінь розв'язувати задачі з точки зору діяльнісного підходу 65

2.3.1. Вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання вмінням та навичкам ....……66
2.3.2. Теорія поетапного формування розумових дій і понять (за П.Я.Гальперіним) ....……68
2.3.3. Застосування змістовних узагальнень при навчанні розв'язувати задачі ....……74

2.4. Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі та уміння розв'язувати задачі певних видів ....……77

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ

3.1. Методика формування в молодших школярів загального уміння розв'язувати сюжетні задачі ....……87

3.1.1. Методика формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі простих задач ....……87
3.1.2 Методика формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі складених задач ....…...160
3.1.3. Методика формування загального уміння на матеріалі задач з пропорційними величинами на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток ....…...212

ПІСЛЯСЛОВО ....…...248
ЛІТЕРАТУРА...…...250
ДОДАТОК А ....…...258
ДОДАТОК Б ....…...362

Навчальне видання

Скворцова Світлана Олексіївна

Методика навчання розв’язування сюжетних задач у початковій школі:

Навчально-методичний посібник
Частина I

В авторській редакції

Видавник ПП «Фенікс»
Свідоцтво ДК №1022 від 29.02.03
м. Одеса, вул. Зоопаркова, 25. Тел. 7777-591

Віддруковано з готового макету в ТОВ «Абрикос Компани»
м. Одеса, вул.. Зоопаркова, 25. Тел. 357-343

Підписано до друку 25.04.2011.
Формат 60х90/16. Ум. др. арк. 15,58.
Наклад 300 прим. Гарнітура TNR.