Использование системы компьютерной математики Maple для пошагового решения задач линейной алгебры

А. И. Третьяк[1], Т. В. Коваль[2]
/Южноукраинский национальний педагогический университет
инени К. Д. Ушинского
tatiankoval562112@gmail.com

В работе приведены решения типовых примеров по теории матриц как «вручную», так и с использованием системы компьютерной математики Maple с пошаговым анализом решения

, **Ключевые слова:** системы компьютерной математики, Maple, решение задач, линейная алгебра

В настоящее время достижения в области вычислительной техники программного обеспечения и интернета стали существенными помощниками при изучении высшей математики, в частности, линейной алгебры.

С одной стороны, интернет дает свободный доступ к необходимой информации. С другой стороны, современные системы компьютерной математики Maple, MatLAB, Mathematica, MatCAD позволяют избежать трудоемких вычислений при решении задач.

Однако для успешного, глубокого и неформального усвоения различных методов линейной алгебры очень важно не только получить конечный результат, но и пошагово проследить за процессом решения задачи. Такую возможность предоставляет система компьютерной математики Maple. Пакет LinearAlgebre в системе Maple содержит процедуры для создания и обработки матриц и векторов, реализации стандартных операций, решение задач линейной алгебры.

Подробно об этом в [1].

Проиллюстрируем возможность пошагового контроля процесса решения на примере нахождения жордановой формы квадратной матрицы.

Из теории жордановых матриц известно [2], что

1) любая квадратная матрица подобна жордановой;
2) любую квадратную матрицу при помощи преобразований подобия можно привести к нормальной жордановой форме и притом единственной (с точностью до перестановок жордановых клеток)

Метод приведения матрицы к жордановой форме описан в [1, 2].

Найдем жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

непосредственно «вручную» и с помощью Maple, при этом получая информацию о каждом шаге решения.

1. Составим характеристическую матрицу:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

2. Найдем инвариантные множители $e_k(\lambda)$ характеристической матрицы по формулам:

$$e_1(\lambda) = d_1(\lambda), \quad e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \ \ldots, \ e_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)},$$

Где $d_i(\lambda), i = 1,2,...,k$ – наибольший общий делитель миноров i-го порядка характеристической λ-матрицы $A - \lambda E$.

Для этого находим миноры первого порядка:

$M_1^1 = 4 - \lambda$, $M_2^1 = 4$, $M_1^2 = -1$, $M_2^2 = -\lambda$, откуда $d_1 = 1$.

Минор второго порядка, определитель

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \quad \text{поэтому} \quad d_2 = (1-\lambda)^2.$$

Инвариантные множители $e_1(\lambda) = 1$, $e_2(\lambda) = (1-\lambda)^2$.

3. По инвариантным множителям находим элементарные делители характеристической матрицы. Это все отличные от 1 инвариантные множители, т. е. $(1-\lambda)^2$.

4. Находим жорданову форму матрицы A. Для этого по элементарному делителю $(\lambda - 2)^2$ строим жорданову клетку второго порядка $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, а так как элементарный делитель единственен, то эта клетка и будет жордановой формой матрицы A:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Теперь выполним эти же вычисления в Maple с пошаговым выведением результатов

Матрица A

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> A := <<4, -1> | <4, 0>>;
```

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> AE := CharacteristicMatrix(A, lambda);
>
```

$$AE := \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

```
> L := []:
> for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do
      M := Minor(AE, i, j);
      if M <> 0 then L := [op(L), M]; print(M)
 end if end do end do;
```

λ

1

-4

$$\lambda - 4$$

```
> G := L[1]: for q from 2 to numelems(L) do
    P := gcd(G, L[q]); G := P; end do:
> d[1] := G;
```

$$d_1 := 1$$

```
> d[2] := unapply(Determinant(AE), lambda);
```

$$d_2 := \lambda \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

```
> e[1] := unapply(d[1](lambda), lambda);
```

$$e_1 := \lambda \rightarrow 1$$

```
> e[2] := unapply(d[2](lambda)/d[1](lambda),
                          lambda);
```

$$e_2 := \lambda \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

```
> J['A'] := JordanBlockMatrix([[2,2]]);
>
```

$$J_A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приведенные выше два вида решения наглядно показывают как с помощью системы компьютерной математики Maple не только получить конечный результат, но и проследить за самим процессом решения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Третьяк А. И. Теория матриц в системе компьютерной математики Maple.: учебное пособие / А. И. Третьяк, А. В. Усов, А. П. Коновалов. – Одесса: Астропринт, 2017. – 456 с

.2. Кострикин А. И. Введение в алгебру: в 2 ч. Часть 2. Линейная алгебра/ А. И. Кострикин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 368 с.