УДК 517.925

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ШВИДКО ТА ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

О. О. Чепок

Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2, Одеса, 65026, Україна

We find asymptotic representations for solutions of a certain class of second order differential equations with rapidly and regularly varying nonlinearities.

Получены асимптотические представления решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с быстро и правильно меняющимися нелинейностями.

1. Постановка задачі та формулювання основних результатів. Диференціальні рівняння другого порядку, що містять у правій частині як степеневі, так і експоненціальні нелінійності, відіграють важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Такі рівняння також мають безліч застосувань на практиці. Це відбувається, наприклад, при вивченні розподілу електростатичного потенціалу в циліндричному об'ємі плазми продуктів згоряння. Відповідне рівняння можна звести до такого:

$$y'' = \alpha_0 p(t) e^{\sigma y} \left| y' \right|^{\lambda}.$$

У роботах В. М. Євтухова та Н. Г. Дрік (див., наприклад, [1]) при деяких умовах на функцію p отримано результати про асимптотичну поведінку всіх правильних розв'язків цього рівняння. Далі почали розглядати диференціальні рівняння, які містять у правій частині більш широкий клас функцій, ніж експоненціальні, — швидко змінні функції.

Диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y)$$

зі швидко змінною функцією φ було розглянуто у роботі В. М. Євтухова та В. М. Харкова [2]. Але у даній роботі введений клас розв'язків рівняння залежить від функції φ, що не є зручним для практичного використання.

Природним узагальненням попередніх досліджень є розгляд диференціального рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \tag{1.1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$, $i \in \{0,1\}$, є неперервними функціями, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $\left[y_i^0, Y_i\right[^1$, або $\left]Y_i, y_i^0\right]$. Крім того, будемо вважати, що функція φ_1 є правильно змінною при $y \to Y_1$ $(y \in \Delta_{Y_1})$ порядку

[1] При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

σ_1 [3, с. 10–15], а функція φ_0 — двічі неперервно диференційовною, монотонною на Δ_{Y_0} та такою, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{(\varphi_0'(y))^2} = 1. \tag{1.2}$$

Розв'язок y рівняння (1.1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, якщо

$$y^{(i)} \colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad i = 0, 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t) y(t)} = \lambda_0. \tag{1.3}$$

Метою даної роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (1.1), а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку у випадках $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Введемо необхідні для подальшого викладу позначення та означення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \lambda_0^i = \begin{cases} \lambda_0 & \text{при} \quad i = 0, \\ 1 & \text{при} \quad i = 1, \end{cases} \qquad \theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1},$$

$$\Phi_0(y) = \int\limits_{A_\omega^0}^{y} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1 - 1}}\, dy, \quad A_\omega^0 = \begin{cases} y_0^0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_0^0}^{Y_0} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1 - 1}}\, dy = +\infty, \\ Y_0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_0^0}^{Y_0} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1 - 1}}\, dy < +\infty, \end{cases}$$

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi_0(y)}{y},$$

$$\Phi_1(y) = \int\limits_{A_\omega^1}^{y} \frac{\Phi_0(\tau)}{\tau}\, d\tau, \quad A_\omega^1 = \begin{cases} y_0^0, & \text{якщо} \quad \left| \displaystyle\int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{\Phi_0(\tau)}{\tau}\, d\tau \right| = +\infty, \\ Y_0, & \text{якщо} \quad \left| \displaystyle\int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{\Phi_0(\tau)}{\tau}\, d\tau \right| < +\infty, \end{cases}$$

$$Z_1 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi_1(y)$$

та у випадку, коли $y_1^0 \lim\limits_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} = Y_1$,

$$I(t) = |\lambda_0 - 1|^{\frac{1}{1 - \sigma_1}}\, y_1^0 \int\limits_{B_\omega^0}^{t} \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} y_1^0 \right) \right|^{\frac{1}{1 - \sigma_1}}\, d\tau,$$

$$B_\omega^0 = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega \left|\pi_\omega(\tau)p(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} y_1^0\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega \left|\pi_\omega(\tau)p(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} y_1^0\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int\limits_{B_\omega^1}^{t} \frac{\lambda_0 I(\tau)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(\tau)}\, d\tau, \quad B_\omega^1 = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega \frac{\lambda_0 I(\tau)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(\tau)}\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega \frac{\lambda_0 |I(\tau)|}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(\tau)}\, d\tau < +\infty, \end{cases}$$

де $b \in [a;\omega[$ вибрано так, щоб $|\pi_\omega(t))^{\frac{1}{\lambda_0-1}}| \in \Delta_{Y_1}$ при $t \in [b;\omega]$.

Зауваження 1. З умов (1.2) на функцію φ_0 випливає, що $r_0 \in \{0, +\infty\}$ та

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi_0''(y)\cdot\Phi_0(y)}{(\Phi_0'(y))^2} = 1, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi_1''(y)\cdot\Phi_1(y)}{(\Phi_1'(y))^2} = 1.$$

Зауваження 2. Справедливими є такі твердження:

$$\Phi_0(y) = (\sigma_1 - 1)\,\frac{\varphi_0^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}}(y)}{\varphi_0'(y)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \quad (y \in \Delta_{Y_0}),$$

$$\operatorname{sign}\left(\varphi_0'(y)\Phi_0(y)\right) = \operatorname{sign}(\sigma_1 - 1) \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0},$$

$$\Phi_1(y) = \frac{\Phi_0^2(y)}{y\Phi_0'(y)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \quad (y \in \Delta_{Y_0}).$$

Звідси отримуємо

$$\operatorname{sign}(\Phi_1(y)) = y_0^0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}.$$

Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L\colon \Delta_Y \to]0;+\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y$ $(y \in \Delta_Y)$ [3, с. 15], якщо

$$\lim_{\substack{y\to Y_1\\ y\in\Delta_{Y_i}}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0. \tag{1.4}$$

Говорять, що повільно змінна при $y \to Y$ $(y \in \Delta_Y)$ функція $\theta\colon \Delta_Y \to]0;+\infty[$ задовольняє умову S (див., наприклад, [6]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \to Y$ $(y \in \Delta_Y)$ функції $L\colon \Delta_Y \to]0;+\infty[$ має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Встановлено таку теорему.

Теорема. *Нехай* $\sigma_1 \neq 1$, *функція* θ_1 *задовольняє умову* S. *Тоді для існування* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-розв'язків рівняння (1.1), де* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, *необхідно, а якщо мають місце умови*

$$I(t)I_1(t)\lambda_0(\sigma_1 - 1) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]b, \omega[, \tag{1.5}$$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}\right)'' \left(\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}\right)}{\left(\left(\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}\right)'\right)^2} = \gamma_0, \quad \gamma_0 \in R\backslash\{1\}, \tag{1.6}$$

та функція $\dfrac{|\pi_\omega(t)|^{1 - \frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}} I_1'(t)}{I_1(t)}$ *є нормалізованою повільно змінною при* $t \uparrow \omega$, *то й достатньо виконання умов*

$$\pi_\omega(t) y_1^0 y_0^0 \lambda_0(\lambda_0 - 1) > 0, \quad \pi_\omega(t) y_1^0 \alpha_0(\lambda_0 - 1) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a; \omega[, \tag{1.7}$$

$$y_1^0 \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} = Y_1, \tag{1.8}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} I_1(t) = Z_1, \tag{1.9}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1''(t) I_1(t)}{(I_1'(t))^2} = 1, \;\; \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1'(t)\pi_\omega(t)}{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)\Phi_1^{-1}(I_1(t))} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \;\; \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_1''(t)}{I_1'(t)} = \infty. \tag{1.10}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ *мають місце асимптотичні зображення*

$$\Phi_1(y(t)) = I_1(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))} = \frac{I_1'(t)}{I_1(t)}[1 + o(1)]. \tag{1.11}$$

Зауваження 3. Із другої з умов (1.10) випливає, що функція $\dfrac{|\pi_\omega(t)|^{1 - \frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}} I_1'(t)}{I_1(t)}$ є повільно змінною при $t \uparrow \omega$.

Зауваження 4. З (1.6) та (1.2) випливає, що функція $\varphi_0'(y)$ є швидко змінною при $y \to \to Y_0$ [5, с. 139] (п. 3.1.8), проте функція $\dfrac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}$ є правильно змінною при $y \to Y_0$.

2. Доведення теореми. *Необхідність.* Нехай $y\colon [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ є $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком рівняння (1.1), де $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Тоді згідно з властивостями таких розв'язків, встановленими В. М. Євтуховим (див., наприклад, [6]), при $t \uparrow \omega$ маємо

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^{(i)}(t)} = \frac{\lambda_0^i}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad i = 0, 1, \tag{2.1}$$

звідки отримуємо (1.7).

З (2.1) також випливає, що функція $y'(t)$ є правильно змінною функцією порядку $\dfrac{1}{\lambda_0 - 1}$ при $t \uparrow \omega$, а тому [3, с. 10] може бути записана у вигляді

$$y'(t) = |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} L_1(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.2}$$

де $L_1(t)$ — повільно змінна при $t \uparrow \omega$ функція. Звідси з урахуванням властивостей правильно змінних функцій [3, с. 10–15] отримуємо (1.8).

З (1.1) та (2.1) при $t \uparrow \omega$ випливає, що

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_1} \operatorname{sign} y_1^0}{\varphi_0(y(t))} = \alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{-\sigma_1} p(t)[1 + o(1)]. \tag{2.3}$$

Підставляючи (2.2) у (2.3), при $t \uparrow \omega$ одержуємо

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = y_1^0 |\lambda_0 - 1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \left| \pi_\omega(t)\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} L_1(t) y_1^0\right) p(t) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} [1 + o(1)]. \tag{2.4}$$

Оскільки функція L_1 у (2.2) є повільно змінною при прямуванні аргумента до Y_1, то згідно з умовою S, яку задовольняє функція θ_1, з (2.4) при $t \uparrow \omega$ отримуємо

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = y_1^0 |\lambda_0 - 1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \left| \pi_\omega(t)\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} y_1^0\right) p(t) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} [1 + o(1)]. \tag{2.5}$$

З (2.5) у випадку, коли $\displaystyle\int_{B_\omega^0}^{\omega} |\pi_\omega(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} y_1^0\right) p(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty$, маємо

$$\Phi_0(y(t)) = I(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.6}$$

Якщо $\displaystyle\int_{B_\omega^0}^{\omega} |\pi_\omega(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} y_1^0\right) p(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty$, то одержуємо або (2.6), або

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi_0(y(t)) = c \neq 0. \tag{2.7}$$

Покажемо, що (2.7) не може мати місця. З умов (1.2) та вигляду функції Φ_0 випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi_0(y(t)) \in \{0; +\infty\},$$

а це суперечить (2.7). Таким чином, (2.6) має місце у будь-якому випадку.

Поділивши (2.5) на (2.6), з урахуванням (2.1) будемо мати

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} \frac{y(t)\Phi_0'(y(t))}{\Phi_0(y(t))} = \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.8}$$

Оскільки з умов (1.2) випливає, що функція $\Phi_0(y)$ є швидко змінною при $y \to Y_0$ $(Y_0 \in \in \Delta_{Y_0})$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \infty, \tag{2.9}$$

звідки випливає третя з умов (1.10).

З урахуванням (2.6) та (2.1) маємо

$$\frac{y'(t)\Phi_0(y(t))}{y(t)} = \frac{\lambda_0 I(t)}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}\,[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.10}$$

Якщо $\displaystyle\int_a^\omega \left|\frac{I(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\right| d\tau = +\infty$, то

$$\Phi_1(y(t)) = I_1(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.11}$$

При $\displaystyle\int_a^\omega \left|\frac{I(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\right| d\tau < +\infty$ аналогічно з обґрунтуванням (2.6) переконаємось, що (2.11) має місце і у цьому випадку.

Таким чином, мають місце перше із зображень (1.11) та перша з умов (1.9). Розділивши (2.10) на (2.11), отримаємо друге із зображень (1.11).

Запишемо друге із зображень (1.11) у вигляді

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}\,\frac{y(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))} = \frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}\,[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

звідки з використанням (2.1) одержимо

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\,\frac{y(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))} = \frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}\,[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.12}$$

З умов (1.2) на функцію $\varphi_0(y(t))$ та зауваження 2 випливає, що функція $\Phi_1(y)$ є швидко змінною при $y \to Y_0$ $(Y_0 \in \Delta_{Y_0})$. Тому з урахуванням (2.12) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)} = \infty. \tag{2.13}$$

Використовуючи (2.8), (2.9) та (2.12), отримуємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_1''(t)I_1(t)}{(I_1'(t))^2} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}}{\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y(t)\Phi_0'(y(t))}{\Phi_0(y(t))}}{\frac{y(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))}} = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{(\Phi_1'(y))^2} = 1, \tag{2.14}$$

тобто має місце перша з умов (1.10).

Зауважимо, що функція $\Phi_1^{-1}(y)$ є повільно змінною при $y \to Z_0$ як обернена до швидко змінної при $y \to Y_0$ $(Y_0 \in \Delta_{Y_0})$ функції Φ_1. З урахуванням цього та (2.11) при $t \uparrow \omega$ маємо

$$y(t) = \Phi_1^{-1}(I_1(t))[1 + o(1)],$$

звідки випливає друга з умов (1.9).

Зауважимо, що має місце співвідношення

$$\lim_{z\to Z_0}\frac{\Phi_1''(\Phi_1^{-1}(z))z}{(\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z)))^2}=\lim_{y\to Y_0}\frac{\Phi_1''(\Phi_1^{-1}(\Phi_1(y)))\Phi_1(y)}{\left(\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(\Phi_1(y)))\right)^2}=\lim_{y\to Y_0}\frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{\left(\Phi_1'(y)\right)^2}=1.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{z\to Z_0}\frac{z\left(\frac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z))}{\Phi_1(\Phi_1^{-1}(z))}\right)'}{\frac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z))}{\Phi_1(\Phi_1^{-1}(z))}}=\lim_{y\to Z_0}\frac{\Phi_1''(\Phi_1^{-1}(z))z}{(\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z)))^2}-1=0.$$

Отже, функція $\dfrac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1})}{\Phi_1(\Phi_1^{-1})}$ є повільно змінною при прямуванні аргумента до Z_0. Тому (2.12) можна записати у вигляді

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\,\Phi_1^{-1}(I(t))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))=\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}\,[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

звідки випливає виконання другої з умов (1.10). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай функція $\dfrac{|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}I_1'(t)}{I_1(t)}$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t\uparrow\omega$ та виконуються умови (1.5) – (1.10).

До рівняння (1.1) застосуємо перетворення

$$\begin{aligned}\Phi_1(y(t))&=I_1(t)[1+v_1(x)],\\ \frac{y'(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))}&=\frac{I_1'(t)}{I_1(t)}\,[1+v_2(x)],\end{aligned}\tag{2.15}$$

де

$$x=\beta\ln|I_1(t)|,\quad \beta=\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad \lim\limits_{t\uparrow\omega}I_1(t)=\infty,\\ -1, & \text{якщо}\quad \lim\limits_{t\uparrow\omega}I_1(t)=0.\end{cases}\tag{2.16}$$

Зведемо систему (2.15) до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}v_1'&=\beta\left[v_2+v_1v_2\right],\\ v_2'&=\beta G(t)\left[1+v_2\right]\left[\frac{N(t(x),v_1,v_2)}{(\lambda_0-1)}\left(\frac{1}{[1+L(t(x))]}\right)^{\sigma_1-1}\times\right.\\ &\qquad\times(1+v_1)^{\sigma_1-1}(1+v_2)^{\sigma_1-1}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1-1}\times\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\times \left|\left(L(t(x)) + L(t(x))\,\frac{\psi'(Y(t(x),v_1))Y(t(x),v_1)}{\psi(Y(t(x),v_1))} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(I_1'(t))^2}{I_1(t(x))I_1''(t(x))}\,\frac{M(I_1(t(x))(1+v_1)}{M(I_1(t))}\,\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))\Phi_1'(I_1(t(x)))}{\pi_\omega(t(x))I_1'(t(x))}\right)\right|^{\sigma_1-1} +$$

$$+\,\frac{\psi'(Y(t(x),z_1))Y(t(x),v_1)}{\psi(y(t(x)))}\,\frac{Y(t(x),v_1)\Phi_1'(Y(t(x),v_1))}{\pi_\omega(t(x))I_1'(t(x))}\times$$

$$\left.\times\,\frac{M(I_1(t(x))(1+v_1))}{M(I_1(t(x)))}\,(1+v_2) + Q(t(x))\right],$$

у якій

$$G(t) = \frac{I_1(t)}{\pi_\omega(t)I_1'(t)}, \quad Q(t) = \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'}{\frac{I_1(t)}{I_1'(t)}},$$

$$N(t,v_1,v_2) = \frac{\theta_1\left(\frac{I_1'(t)\Phi_1(Y(t,v_1))}{I_1(t)\Phi_1'(Y(t,v_1))}\,(1+v_2)\right)}{\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\operatorname{sign} y_1^0\right)}, \quad Y(t,v_1) = \Phi_1^{-1}(I_1(t)[1+v_1]),$$

$$\psi(y) = \frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}, \quad L(t) = \frac{I_1'(t)}{\pi_\omega(t)I_1''(t)}, \quad M(y) = \Phi_1^{-1}(y)\psi(\Phi_1^{-1}(y)).$$

Оскільки функція $\dfrac{|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}\,I_1'(t)}{I_1(t)}$ є нормалізованою повільно змінною при $t\uparrow\omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}I_1'(t)}{I_1(t)}\right)'}{\frac{|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}I_1'(t)}{I_1(t)}} = 0. \tag{2.18}$$

З іншого боку,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}I_1'(t)}{I_1(t)}\right)'}{\frac{|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}I_1'(t)}{I_1(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}\right)'\,\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}}{|\pi_\omega(t)|^{1-\frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}}\,\frac{I_1'(t)}{I_1(t)}} +$$

$$+\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{I_1'(t)}{I_1(t)}\right)'}{\frac{I_1'(t)}{I_1(t)}} = 1 - \frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)} + \lim_{t\uparrow\omega}Q(t).$$

Звідси з урахуванням (2.18) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} Q(t) = 1 - \frac{(2-\gamma_0)\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}. \tag{2.19}$$

З першої з умов (1.10) випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} G(t) = 0. \tag{2.20}$$

Оскільки, як було обґрунтовано при доведенні необхідності, функція $\Phi_1^{-1}(z)$ є повільно змінною при $z \to Z_0$, то з урахуванням (1.6) та другої з умов (1.9) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,v_1) = Y_0 \quad \text{рівномірно по} \quad |v_1| < \frac{1}{2}. \tag{2.21}$$

Зауважимо, що

$$\left(\frac{\psi(y)}{\psi'(y)}\right)' = 1 - \frac{\psi(y)\psi''(y)}{(\psi'(y))^2}.$$

Тому з (1.6) випливає, що

$$\frac{y\psi'(y)}{\psi(y)} = \frac{1}{1-\gamma_0}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \ (y \in \Delta_{Y_0}). \tag{2.22}$$

З (2.22) випливає, що функція $\psi(y) = \dfrac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}$ є правильно змінною порядку $\dfrac{1}{1-\gamma_0}$ при $y \to Y_0$ $(y \in \Delta_{Y_0})$ та з урахуванням (2.21)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y(t,v_1)\psi'(Y(t,v_1))}{\psi(Y(t,v_1))} = \frac{1}{1-\gamma_0} \quad \text{рівномірно по} \quad |v_1| < \frac{1}{2}. \tag{2.23}$$

Оскільки ψ — правильно змінна функція порядку $\dfrac{1}{1-\gamma_0}$ при прямуванні аргумента до Y_0, а Φ_1^{-1} — повільно змінна при прямуванні аргумента до Z_1, то функція $\psi(\Phi_1^{-1})$ є повільно змінною при прямуванні аргумента до Z_1, а тому, і функція M є повільно змінною при прямуванні аргумента до Z_1 як добуток повільно змінних функцій. Таким чином,

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{M(I_1(t))}{M(I_1(t)(1+v_1))} = 1 \quad \text{рівномірно по} \quad v_1 \colon |v_1| < \frac{1}{2}. \tag{2.24}$$

З другої з умов (1.10) отримуємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_1'(t)}{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}. \tag{2.25}$$

Покажемо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} N(t,v_1,v_2) = 1 \quad \text{рівномірно по} \quad |v_1| < \frac{1}{2},\ |v_2| < \frac{1}{2}. \tag{2.26}$$

Зауважимо, що з урахуванням (2.19) та вигляду функції Q

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{I_1'(t)\,|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}}{I_1(t)}\right)'\pi_\omega(t)}{\frac{I_1'(t)|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}}{I_1(t)}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{I_1'(t)}{I_1(t)}\right)'}{\frac{I_1'(t)}{I_1(t)}}+\frac{1}{1-\lambda_0}=\frac{\lambda_0}{(1-\gamma_0)(\lambda_0-1)}.$$

Оскільки

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))'\pi_\omega(t)}{\Phi_1^{-1}(I_1(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_1'(t)\pi_\omega(t)}{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)\Phi_1^{-1}(I_1(t))}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},$$

то функція $\Phi_1^{-1}(I_1(t))$ є правильно змінною порядку $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}$ при $t\uparrow\omega$. Тому $\dfrac{\Phi_1(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}$ є правильно змінною функцією порядку $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\,\dfrac{1}{\gamma_0-1}$ при $t\uparrow\omega$. Крім того, $\dfrac{\Phi_1(\Phi_1^{-1}(z))}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z))}$ є повільно змінною при $z\to Z_1$ як композиція правильно змінної та повільно змінної функцій.

Отже, на підставі теореми про рівномірну збіжність з теорії повільно змінних функцій (див., наприклад, [3]) маємо

$$\frac{\left(\frac{I_1'(t)\Phi_1(Y(t,v_1))|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}}{I_1(t)\Phi_1'(Y(t,v_1))}\right)'\pi_\omega(t)}{\left(\frac{I_1'(t)\Phi_1(Y(t,v_1))|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}}{I_1(t)\Phi_1'(Y(t,v_1))}\right)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{\Phi_1(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}\right)'\pi_\omega(t)}{\frac{\Phi_1(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}}+$$

$$+\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{I_1'(t)\,|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}}{I_1(t)}\right)'\pi_\omega(t)}{\frac{I_1'(t)|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}}{I_1(t)}}=0$$

рівномірно по $v_1\colon |v_1|<\dfrac{1}{2}$. Тому функція

$$\left(\frac{I_1'(t)\Phi_1(Y(t,v_1))|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{1-\lambda_0}}}{I_1(t)\Phi_1'(Y(t,v_1))}\right)$$

є нормалізованою повільно змінною при $t\uparrow\omega$ рівномірно по $v_1\colon |v_1|<\dfrac{1}{2}$, а (2.26) випливає з того, що функція θ_1 задовольняє умову S.

З урахуванням третьої з умов (1.10) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}L(t)=0. \tag{2.27}$$

На підставі (1.9) існує $t_0 \in [a, \omega[$ таке, що

$$\Phi_1^{-1}(I_1(t)(1+v_1)) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad |v_1| \leq \frac{1}{2}.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (2.17) на множині

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \quad \text{де} \quad x_0 = \beta \ln |\pi_\omega(t_0)|, \quad D = \left\{(v_1, v_2) \colon |v_i| \leq \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right\},$$

та запишемо її у вигляді

$$\begin{gathered} v_1' = \beta[v_2 + z_1 v_2], \\ v_2' = \beta G(t(x))[A_{21} v_1 + A_{22}(x) v_2 + R_1(x, v_1, v_2) + R_2(x, v_1, v_2)], \end{gathered} \tag{2.28}$$

де

$$A_{21} = \frac{\sigma_1 - 1}{\lambda_0 - 1}, \quad A_{22}(x) = \frac{\sigma_1 - 1}{\lambda_0 - 1} + \gamma_0 \frac{\pi_\omega(t) I_1'(t)}{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))},$$

$$\begin{aligned} R_1(x, v_1, v_2) = (1 + v_2)\Bigg[& \frac{N(t(x), v_1, v_2)}{\lambda_0 - 1} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{1}{[1 + L(t(x))]} \times \right. \\ & \times \left(L(t(x)) + L(t(x)) \frac{Y(t, v_1)\psi'(Y(t, v_1))}{\psi(Y(t, v_1))} \frac{(I_1'(t(x)))^2}{I_1(t(x)) I_1''(t(x))} \times \right. \\ & \left. \left. \times \ \frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{\pi_\omega(t) I_1'(t)} \frac{M(I_1(t)(1 + v_1))}{M(I_1(t))} \right) \right)^{\sigma_1 - 1} + Q(t(x)) + \\ & + \frac{Y(t, v_1)\psi'(Y(t, v_1))}{\psi(Y(t, v_1))} \frac{\pi_\omega(t) I_1'(t)}{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))} \frac{M(I_1(t(x)))}{M(I_1(t(x)(1 + v_1))} \Bigg] + \\ & + v_2 \frac{\pi_\omega(t) I_1'(t(x))}{\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t(x))))} \left(\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))\psi'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))\right)}{\psi(y(t))} \times \right. \\ & \left. \times \ \frac{M(I_1(t(x)))}{M(I_1(t(x)(1 + v_1)))} - \frac{1}{1 - \gamma_0} \right) + (v_2 + v_1) \frac{\sigma_1 - 1}{\lambda_0 - 1} \times \\ & \times \Bigg[N(t(x), v_1, v_2) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{1}{[1 + L(t(x))]} \left(L(t(x)) + L(t(x)) \frac{Y(t, v_1)\psi'(Y(t, v_1))}{\psi(Y(t, v_1))} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \ \frac{(I_1'(t(x)))^2}{I_1(t(x)) I_1''(t(x))} \frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{\pi_\omega(t) I_1'(t)} \frac{M(I_1(t)(1 + v_1))}{M(I_1(t))} \right) \right)^{\sigma_1 - 1} - 1 \Bigg], \end{aligned}$$

$$R_2(x,v_1,v_2) = (1+v_2)\,\frac{N(t(x),v_1,v_2)}{\lambda_0-1}\,\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\,\frac{1}{[1+L(t)]}\times\right.$$

$$\times\left(L(t(x))+L(t(x))\,\frac{Y(t,v_1)\psi'(Y(t,v_1))}{\psi(Y(t,v_1))}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(I_1'(t(x)))^2}{I_1(t(x))I_1''(t(x))}\,\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{\pi_\omega(t)I_1'(t)}\,\frac{M(I_1(t)(1+v_1))}{M(I_1(t))}\right)\right)^{\sigma_1-1}\times$$

$$\times\,[(1+v_1)^{\sigma_1-1}-1]\,[(1+v_2)^{\sigma_1-1}-1]+v_2^2\,\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t(x))}{\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t(x))))}\times$$

$$\times\,\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))\psi'(\Phi_1^{-1}(I_1(t(x))))}{\psi(y(t))}\,\frac{M(I_1(t(x)))}{M(I_1(t(x)(1+v_1))}.$$

Із (2.19) – (2.27) і першої та другої з умов (1.10) маємо

$$\lim_{x\to\infty} A_{22}(x) = \frac{\sigma_1-1}{\lambda_0-1}+\frac{\lambda_0\gamma}{\lambda_0-1}, \tag{2.29}$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0}\frac{R_2(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad x\in[x_0,+\infty[, \tag{2.30}$$

$$\lim_{x\to+\infty} R_1(x,v_1,v_2) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad v_1,v_2\colon (v_1,v_2)\in D. \tag{2.31}$$

Тому з урахуванням (2.20) зрозуміло, що гранична матриця коефіцієнтів системи (2.28) має нульове власне значення.

Застосовуючи до системи (2.28) перетворення

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1,\\ z_2 &= \sqrt{|G(t(x))|}w_2, \end{aligned} \tag{2.32}$$

з урахуванням (1.5) отримуємо систему

$$\begin{aligned} w_1' &= \beta\sqrt{|G(t(x))|}\,[w_2+V_1(x;w_1;w_2)],\\ w_2' &= \beta\sqrt{|G(t(x))|}\,[C_{21}w_1+V_2(x,w_1,w_2)+V_3(x,w_1,w_2)], \end{aligned} \tag{2.33}$$

де

$$C_{21} = A_{21}\mathrm{sign}\,((\lambda_0-1)(\sigma_1-1))\,, \quad V_1(x;w_1;w_2) = w_1w_2,$$

$$V_2(x,w_1,w_2) = \sqrt{|G(t(x))|}\,\mathrm{sign}\,((\lambda_0-1)(\sigma_1-1))\left(A_{22}(x)-\widetilde{N}(x)\sqrt{|G(t(x))|}\right)w_2+$$

$$+R_2(x,w_1,\sqrt{|G(t(x))|}w_2),$$

$$V_3(x;w_1;w_2) = R_1\left(x,w_1,\sqrt{|G(t(x))|}w_2\right)\mathrm{sign}\,((\lambda_0-1)(\sigma_1-1))\,,$$

$$\widetilde{N}(x) = \frac{\operatorname{sign}((\sigma_1 - 1)(\lambda_0 - 1))G'(t(x))I(t(x))}{2G(t(x))^2 I'(t(x))}.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{x\to\infty} \widetilde{N}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sign}((\sigma_1 - 1)(\lambda_0 - 1))G'(t(x))I(t(x))}{2G^2(t(x))I'(t(x))} =$$

$$= \operatorname{sign}((\sigma_1 - 1)(\lambda_0 - 1)) \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\right)' \pi_\omega(t)}{2\left(\frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\right)} =$$

$$= \operatorname{sign}((\sigma_1 - 1)(\lambda_0 - 1)) \lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{1}{\pi_\omega(t)}\right)' \frac{I(t)}{I'(t)}}{\frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}} + \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{I(t(x))}{I'(t(x))}\right)'}{\frac{I(t(x))}{I'(t(x))}} \right) =$$

$$= \operatorname{sign}((\sigma_1 - 1)(\lambda_0 - 1)) \frac{1}{2}\left(-1 + \lim_{t\uparrow\omega} Q(t)\right) = \frac{\operatorname{sign}((\sigma_1 - 1)(\lambda_0 - 1))\lambda_0(\gamma+1)}{2(\lambda_0 - 1)}.$$

Тому згідно з (2.29) – (2.31)

$$\lim_{|w_1|+|w_2|\to 0} \frac{V_i(x, w_1, w_2)}{|w_1| + |w_2|} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{рівномірно по} \quad x \in [x_0, +\infty[, \tag{2.34}$$

$$\lim_{x\to+\infty} V_3(x, w_1, w_2) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad w_1, w_2 \colon (w_1, w_2) \in D. \tag{2.35}$$

Зауважимо, що характеристичне рівняння матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta C_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\mu^2 - \frac{|\sigma_1 - 1|}{|\lambda_0 - 1|} = 0.$$

Це рівняння не має коренів із нульовою дійсною частиною. Розглянемо $\int_{x_0}^{\infty} G(t(x))\, dx$. З урахуванням зображення $G(t(x)) = \dfrac{I(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}$ маємо

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} G(t(x))\, dx = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{I(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}\, dx = \int\limits_{t(x_0)}^{\infty} \frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)} \frac{I'(t)}{I(t)}\, dt = \ln|\pi_\omega(t)|_{d_1}^{\omega} \to \infty$$

при $t \to \omega$, оскільки в околі нуля виконується $\int_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G(t(x))|}\, dx \geq k \int_{x_0}^{\infty} G(t(x))\, dx$.

Таким чином, $\int_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G(t(x))|}\, dx \to \infty$.

Отже, для системи диференціальних рівнянь (2.33) виконано всі умови теореми 2.2 з [7]. Згідно з цією теоремою система (2.33) має однопараметричну сім'ю розв'язків $\{z_i\}_{i=1}^2 \colon [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geq x_0)$, які прямують до нуля при $x \to +\infty$. Цим розв'язкам на підставі замін (2.16), (2.15) відповідають розв'язки y рівняння (1.1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (1.11).

З огляду на ці зображення та (1.5) зрозуміло, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язками.

Теорему доведено.

3. Ілюстрація отриманих результатів. Як приклад, що ілюструє отримані результати, розглянемо при $t \in [2, +\infty[$ диференціальне рівняння

$$y'' = \frac{1}{4} t^{-3} L(t) e^{|y|^4 - t^8} \left|y'\right|^3, \tag{3.1}$$

де $L \colon [2, +\infty[\to]0, +\infty[$ — повільно змінна на нескінченності функція.

Дане рівняння є рівнянням вигляду (1.1), у якому $a = 2$, $\alpha_0 = 1$, $p(t) = \dfrac{1}{4} t^{-3} L(t) e^{-t^8}$, $\varphi_0(y) = e^{|y|^4}$, $\varphi_1(y) = |y|^3$.

Дослідимо питання про існування та асимптотичну поведінку при t, що прямує до $+\infty$, $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (3.1), для яких $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Функція φ_1 задовольняє умову S. Розглянемо випадок $Y_0 = \infty$. Тоді виконуються умови (1.2). Можемо використати доведену теорему. У даному випадку

$$\pi_\omega(t) = t, \quad \theta_1(y) = 1, \quad I(t) = \frac{2}{\sqrt{|\lambda_0 - 1|}} \int\limits_{B_{+\infty}^0}^{t} \left|\tau^{-2} L(\tau) e^{-\tau^8}\right|^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Тому з урахуванням вибору $B_{+\infty}^0$ при $t \to +\infty$ отримуємо

$$I(t) = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda_0 - 1|}} t^{-6} (L(t))^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} t^8} [1 + o(1)].$$

Аналогічно при $t \to +\infty$ маємо

$$I_1(t) = \frac{\lambda_0}{8\sqrt{|\lambda_0 - 1|}(\lambda_0 - 1)} t^{-14} (L(t))^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} t^8} [1 + o(1)].$$

Крім того, оскільки $Y_0 = \infty$, з урахуванням вибору A_∞^0 одержимо

$$\Phi_0(y) = \frac{1}{2y^3} e^{\frac{1}{2}|y|^4} \operatorname{sign} y [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Аналогічно маємо

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{4y^7} e^{\frac{1}{2}|y|^4} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to \infty. \tag{3.2}$$

Крім того,

$$\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)} = 2y^3[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

звідки випливає, що виконується умова (1.6), де $\gamma_0 = \dfrac{2}{3}$.

З огляду на (3.2) зрозуміло, що

$$\Phi_1^{-1}(y) = \sqrt[4]{2}\ln^{\frac{1}{4}}|y|[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

З другої з умов (1.10) випливає, що $\lambda_0 = 2$, звідки маємо $y_1^0 > 0$ та $y_0^0 > 0$.

Таким чином, виконано всі умови доведеної теореми. Згідно з цією теоремою рівняння (3.1) з класу $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків може мати лише $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, 2)$-розв'язки. З теореми 1 також випливає, що рівняння (3.1) має однопараметричну сім'ю $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, 2)$-розв'язків та кожен такий розв'язок має асимптотичні зображення

$$\frac{1}{y^7(t)}\, e^{\frac{1}{2}\, y^4(t)} = t^{-14}(L(t))^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}\, t^8}[1+o(1)], \quad y'(t)y^3(t) = 2t^7[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \quad (3.3)$$

Більш того, легко бачити, що у випадку $L(t) \equiv 1$ $y(t) = t^2$ є точним розв'язком рівняння (3.1). Цей точний розв'язок легко отримати з другого зі співвідношень (3.3). У цьому випадку кожен із розв'язків однопараметричної сім'ї $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, 2)$-розв'язків є еквівалентним до t^2 при $t \to +\infty$.

Висновки. У даній роботі для класів диференціальних рівнянь другого порядку з швидко та правильно змінними нелінійностями, які раніше не розглядалися, отримано необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$. Цей клас розв'язків для більшості рівнянь вигляду (1.1) охоплює всі правильно змінні розв'язки, що мають також правильно змінну похідну першого порядку, за винятком особливих випадків, коли розв'язки або їх похідні є повільно змінними функціями при $t \uparrow \omega$.

Література

1. *Evtukhov V. M., Drik N. G.* Asimptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differention equation // Georg. Math. J. — 1996. — **3**, № 2. — P. 123–151.
2. *Evtukhov V. M., Kharkov V. M.* Asymptotic representation of solutions essentially nonlinear differential equations of second order // Differents. Uravneniya. — 2007. — **43**, № 10. — P. 1311–1323.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 141 с.
4. *Maric V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. — 2000. — **1726**. — 127 p.
5. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation // Encyclopedia Math. and Appl. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. — 494 p.
6. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. — 2014. — **50**, № 5. — С. 584–600.
7. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52–80.

Одержано 08.01.17