УДК 517.925

О. О. Чепок
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПОХІДНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ТА ШВИДКО ЗМІННИМИ ФУНКЦІЯМИ

Диференціальні рівняння другого порядку, що містять у правій частині й степеневі, й експоненціальні нелінійності, грають важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Серед робіт, що стосуються встановлення асимптотичних зображень розв'язків, більшу частину складають дослідження рівнянь зі степеневими та з правильно змінними нелінійностями. Останнім часом почався розгляд диференціальних рівнянь, які містять у правій частині експоненціальні та більш широкий клас функцій, ніж ескспоненціальні — швидко змінні функції. У даній роботі встановлюються асимптотичні зображення розв'язків з повільно змінними похідними одного нового класу диференціальних рівнянь другого порядку з швидко та правильно змінними нелінійностями.

MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення розв'язків, швидко змінні функції, правильно змінні функції, повільно змінні перші похідні .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149708.

Вступ. Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1;1\}$,$p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ є неперервними функціями, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i[$*, або — $]Y_i, y_i^0]$. Крім того, будемо вважати, що функція φ_1 є правильно змінною при $y \to Y_1$ $(y \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1 ([3], c.10-15), а функція φ_0 двічі неперервно диференційовна, строго монотонна на Δ_{Y_0} та така, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) \in \{0,+\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{\left(\varphi_0'(y)\right)^2} = 1. \tag{2}$$

В силу умов (2) функція φ_0 та її похідна першого порядку є (см. [1], С. 91-92) швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0.

У силу властивостей функції φ_0 та теореми 3.10.8 з роботи [2] функція φ_0 та її похідна першого порядку належать класу функцій Γ який був введений Л. Ханом (см, наприклад, [2], С. 75), а також класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був введений у роботі [6] як узагальнення класу Γ.

*При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Надійшла 12.07.2018

У монографії V. Maric [1] було розглянуто рівняння виду (1), де функція $\varphi_1 \equiv 1$, p є правильно змінною функцією при $t \to +\infty$, φ_0 є швидко змінною функцією при прямуванні аргумента до нуля праворуч. Для таких рывнянь були отримані асимптотичні зображення для всіх додатних розв'язків, що прямують до нуля, а також їх похідних першого порядку. У роботах Євтухова В. М., Чернікової А. Г. ([5] — [7]) було розглянуто диференціальне рівняння виду (1), у якому $\varphi_1 \equiv 1$, для цього рівняння були встановлені необхідні і достатні умови існування правильно та швидко змінних розв'язків при $t \uparrow \omega$.

В даній роботі результати отримано для загального виду рівняння (1), що потребує зміни методики досліджень у порівнянні з попередніми результатами.

Основні результати

Означення 1. [4] *Розв'язок y, визначений на $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язком ($-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$), якщо*

$$y^{(i)} : [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку. При цьому було застосовано методику, що використовувалась у роботах Євтухова В. М. та Чернікової А. Г. при дослідженні рівнянь виду (1), де $\varphi_1 \equiv 1$.

Згідно леми 2.1. роботи [4] випливають наступні твердження стосовно асимптотичних властивостей таких розв'язків

Лема 1.

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = [1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{4}$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Означення 2. *Нехай $Y \in \{0,\infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ ([1], с.2-3), якщо*

$$\lim_{\substack{y\to Y \\ y\in\Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 3. *Говорять, що повільно змінна при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функція $\theta : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, у [4]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функції $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ має місце співвідношення*

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \to Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Отримано наступну терему.

Теорема 1. *Нехай* $\sigma_1 \neq 1$, *функція* $\varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$ *задовольняє умову* S *при* $y' \to Y_1 \quad (y' \in \Delta_{Y_1})$. *Тоді, кожен* $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ *– розв'язок диференціального рівняння* (1) *може бути представлений у вигляді*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \tag{5}$$

де $L : [t_0,\omega[\to R$ *– двічі неперервно диференційовна функція така, що*

$$y_0^0\pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [t_1,\omega[\quad (t_0 \leqslant t_1 < \omega), \tag{6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \tag{7}$$

При цьому, у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}, \tag{8}$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [t_1,\omega[(t_0 \leqslant t_1 < \omega), \tag{9}$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{\varphi_1(L(t))\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{10}$$

Доведення. Нехай функція $y : [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0}$ $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ є розв'язком рівняння (1). Тоді даний розв'язок та його похідні першого та другого порядків зберігають знак на деякому проміжку $[t_1,\omega[(t_0 \leqslant t_1 < \omega)$ та виконуються умови (4). У силу першої з цих умов існує ([3], c.15) така нормалізована повільно змінна при $t \uparrow \omega$ функція $L(t) : [t_0,\omega[\longrightarrow R$, яка задовольняє першу з умов (6) та останню з умов (7), що має місце асимптотичне зображення (5).

З (4) та (5) випливає, що

$$y'(t) = L(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{11}$$

звідки, зважаючи на (3), виконуються перша та друга з умов (7).

З (5), (11) та, оскільки, y є розв'язком рівняння (1), то має місце рівність

$$2L'(t) + \pi_\omega(t)(t)L''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(y'(t)). \tag{12}$$

У випадку існування скінченної або нескінченної границі (8), використовуючи правило Лопіталя у формі Штольца, з урахуванням умов (6) та (7), маємо

$$0 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega L''(t)}{L'(t)},$$

звідки випливає перша з умов (9). З останнього та (12), маємо

$$\alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(y'(t)) = L'(t)\left[2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}\right] = L'(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Так, як функція θ_1 задовольняє умову S та виконується (11), то

$$\alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(L(t)) = L'(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отже, справедливими є друга з умов (9) та асимпотичне зображення (10). Теорема доведена.

Означення 4. *Будемо говорити, що виконуеться умова N, якщо для деякої неперервно диференційовної функції $L(t) : [t_0,\omega[\longrightarrow R(t_0 \in [a,\omega[)$, яка задовольняє умови (5)-(7) та (9), має місце зображення*

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{\varphi_1(L(t))\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}[1+r(t)], \tag{13}$$

де $r(t) : [t_0,\omega[\longrightarrow]-1;+\infty[$ – неперервна функці, яка прямуе до нуля при $t\uparrow\omega$.

Введемо наступні позначення

$$\mu_0 = \mathrm{sign}\varphi_0'(y), \quad \theta_1(y') = \varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1},$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{L'(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}, \quad q_1(t) = \left.\frac{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2}\right|_{y=\pi_\omega(t)L(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Для цих функцій, у силу (2) та (7) виконуються наступні твердження:
1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} e_1(t) = \lim_{t\uparrow\omega} e_2(t) = 1 \tag{14}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} H(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = 0, \tag{15}$$

2) якщо існує границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}},$$

тоді

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{16}$$

Справедливою є наступна теорема

Теорема 2. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція θ_1 задовольняе умову S, виконуеться умова N та*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \pm\infty. \tag{17}$$

Тоді, якщо $\alpha_0\mu_0 > 0$, то диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків, для кожного з яких мають місце наступні асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$.

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot o(1), \tag{18}$$

$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t) \cdot L'(t)] \cdot [1 + |H(t)|^{-\frac{1}{2}} \cdot o(1)]. \tag{19}$$

Доведення. До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot z_1(t),$$
$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t) \cdot L'(t)] \cdot [1 + z_2(t)].$$

Отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$z_1' = L(t) \cdot e_1(t) \cdot \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot [q_1(t)z_1 + z_2], \tag{20}$$

$$z_2' = \frac{L'(t)}{L(t)} \cdot \frac{e_2(t)}{e_1(t)} \times$$
$$\times \left[\frac{\alpha_0 p(t)|e_1(t) \cdot L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(L(t)) \varphi_0(Y_1(t,z_2)) \cdot K(t,z_2)}{L'(t) \cdot e_2(t)} \cdot [1 + z_2]^{\sigma_1} - [1 + z_2] \right], \tag{21}$$

де

$$K(t,z_2) = \frac{\theta_1(Y_2(t,z_2))}{\theta_1(L(t))}, \quad Y_1(t,z_1) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot z_1,$$
$$Y_2(t,z_2) = [L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)] \cdot [1 + z_2].$$

Так як функція $\dfrac{[L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)]}{L(t)} \cdot [1 + z_2(t)]$ є повільно змінною, функція θ_1 задовольняє умову S, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} K(t,z_2) = 1 \text{ рівномірно по } \quad z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \tag{22}$$

У силу умови N

$$\frac{\alpha_0 p(t)|L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(L(t)) \varphi_0(Y_1(t,z_1))}{L'(t)} = \frac{\varphi_0(Y_1(t,z_1))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} [1 + r(t)]$$

Розкладаючи праву частину (23) при фіксованому $t \in [t_1; \omega[$ за формулою Маклорена з залишком у формі Лагранжа, маємо,

$$\frac{\varphi_0(Y_1(t,z_1))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot [1 + r(t)] = [1 + r(t)] \cdot (1 + z_1) + R(t,z_1),$$

де

$$R(t,z_1) = [1 + r(t)] \cdot \frac{\varphi_0'' \left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot \xi \right) \varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot z_1^2,$$

$$|\xi| < |z_1|.$$

Оскільки,

$$Y(t,z_1) = \pi_\omega(t)L(t)) \left[1 + \frac{1}{\frac{\pi_\omega(t)L(t))\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}} \xi \right]$$

з умов (2) та (7) випливає, що

$$\varphi_0'' \left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'^2 \left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot \xi \right)}{\varphi_0 \left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot \xi \right)} \times$$

$$\times [1 + d_1(t,z_1)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t,z_1) = 0 \text{ рівномірно по } \quad z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

За лемою 1.2. з [7] так, як $\varphi_0, \varphi_0' \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ з додатковою функцією $g(y) = \frac{\varphi_0(y)}{\varphi_0'(y)}$, тому справедливою є рівність

$$\varphi_0'' \left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'^2(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} e^{\xi} [1 + d_1(t,z_1)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t,z_1) = 0 \text{ рівномірно по } \quad z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Таким чином, показано, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі $t_1 \in [t_0; \omega[$ та $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$, що

$$|R(t,z_1)| \leqslant (1+\varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_1; \omega[, |z_1| \leqslant \delta. \tag{23}$$

Вибираємо довільним чином число $\varepsilon > 0$ та розглянемо систему (20)-(21) на множині

$$\Omega = [t_1; \omega[\times D, \quad \text{де } D = \{(z_1; z_2) \in R^2, \quad |z_1| \leqslant \delta, \quad |z_2| \leqslant \frac{1}{2}\}.$$

Система (20)-(21) на Ω має вид

$$z_1' = L(t) \cdot e_1(t) \cdot \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot [q_1(t)z_1 + z_2], \tag{23}$$

$$z_2' = \frac{L'(t)}{L(t)} \cdot \frac{e_2(t)}{e_1(t)} \times$$

$$\times \left[A_{21}(t)z_1 + A_{22}(t)z_2 + R_1(t,z_1,z_2) + R_2(t,z_1,z_2) \right], \tag{24}$$

де

$$A_{21}(t) = \frac{[1 + r(t)] \cdot K(t,z_2) e_1^{\sigma_1}(t)}{e_2(t)}, \quad A_{22}(t) = A_{21} \cdot \sigma_1 - 1,$$

$$R_1(t,z_1,z_2) = A_{21}(t) - 1,$$

$$R_2(t,z_1,z_2) = A_{21}(t) z_1 ([1 + z_2]^{\sigma_1} - 1) + \frac{A_{21}(t) R(t,z_1)}{1 + r(t)} [1 + z_2]^{\sigma_1} +$$

$$+ A_{21}(t)([1 + z_2]^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_2)$$

Зауважимо, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} A_{21} = 1,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} A_{22} = \sigma_1 - 1,$$

$$\lim_{t \to +\infty} R_1(t; z_1; z_2) = 0 \text{ рівномірно по } \quad z_1, z_2 : \ |z_i| < \frac{1}{2}, \ i = 1{,}2.$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{R_2(t; z_1; z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \ .$$

Застосуємо до системи (23)-(24) додаткове перетворення

$$z_1(t) = v_1(t) \quad (25),$$

$$z_2(t) = |H(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t) \quad (26).$$

У результаті отримаємо

$$v_1' = h(t)[c_{11}(t) v_1 + c_{12} v_2], \tag{27}$$

$$v_2' = h(t) \left[\frac{1}{2} \frac{H'(t) \operatorname{sign} H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} v_2 + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)} A_{21} v_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)} \frac{A_{22}}{|H(t)|^{\frac{1}{2}}} v_2 + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)} R_1(t, v_1, |H(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t)) + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)} R_2(t, v_1, |H(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t)) \right], \tag{28}$$

де

$$h(t) = \frac{L'(t) e_1(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{11} = \alpha_0 \mu_0 q_1(t) |H(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{12} = \alpha_0 \mu_0 \tag{29}$$

З (6),(7), (22) та (23)

$$\int_{t_1}^{t} h(\tau) d\tau = \pm\infty. \tag{30}$$

З (14)-(16), (22) та (23) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{12}(t) = \alpha_0\mu_0 \tag{31}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)} \frac{A_{22}}{|H(t)|^{\frac{1}{2}}} = 0 \tag{31}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{2} \frac{H'(t)\mathrm{sign}H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{32}$$

Оскільки,

$$H'(t) = \left(\frac{L^2(t)}{L'(t)}\right)' \cdot \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} + \frac{L^2(t)}{L'(t)} \cdot (L(t) + \pi_\omega(t)L(t)) \cdot \left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'\Bigg|_{y=\pi_\omega(t)L(t)},$$

то

$$\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'\Bigg|_{y=\pi_\omega(t)L(t)} = \frac{H'(t)}{\frac{L^2(t)}{L'(t)} \cdot (L(t) + \pi_\omega(t)L(t))} - \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \times$$

$$\times \frac{\frac{L^2(t)}{L'(t)}}{\frac{L^2(t)}{L'(t)} \cdot (L(t) + \pi_\omega(t)L(t))}.$$

З останнього, з (7) та (9) маємо

$$q_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \frac{L(t)}{L'(t)e_1(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 + o(1)}{\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \cdot e_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{sign}H'(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{33}$$

У (33) перший доданок справа прямує до нуля, у силу (16), а другий теж прямує до нуля у силу умови (17).

Отже,

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = 0.$$

Характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів при v_1 та v_2

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_0\mu_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

має вид

$$\rho^2 - \alpha_0\mu_0 = 0.$$

З умов теореми виплиavає, що у цього рівняння рівно два дійсних коренів різних знаків.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь(27)-(28) виконано всі умови теореми 2.2 з [8]. Відповідно до цієї теореми система (27)-(28) має однопараметричне сімейство розв'язків $\{v_i\}_{i=1}^2 : [t*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(t* \geqslant t_1)$, які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Цим розв'язкам відповідають розв'язки $y : [t*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ($t* \geqslant t_1$) рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (18)-(19).

В силу виду цих зображень ясно, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язками рівняння (1). Теорема повністю доведена.

Висновки. Диференціальні рівняння другого порядку, що містять у правій частині й степеневі, й експоненціальні нелінійності, грають важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Серед робіт, що стосуються встановлення асимптотичних зображень розв'язків, більшу частину складають дослідження рівнянь зі степеневими та з правильно змінними нелінійностями. Останнім часом почався розгляд диференціальних рівнянь, які містять у правій частині експоненціальні та більш широкий клас функцій, ніж експоненціальні — швидко змінні функції. У даній роботі встановлено асимптотичні зображення розв'язків з повільно змінними похідними одного нового класу диференціальних рівнянь другого порядку з швидко та правильно змінними нелінійностями.

1. *Maric V.* Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). - 2000. - 127p.
2. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge university press. Cambridge. - 1987. - 494p.
3. Seneta E. (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.
4. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. - т. 47, № 5. - С. 628-650.
5. Евтухов В.М., Черникова А.Г. Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений с быстро меняющейся нелинейностью // Нелинейные колебания. - 2016. - Т. 19, №4. - С. 2-19.
6. Евтухов В.М., Черникова А.Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями // Укр.Мат. Ж. - 2017. -Т. 69, № 10. - С. 1345 - 1363.
7. Черникова А. Г.Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Дослідження в математиці і механіці.- 2017.- 20, №.2(26).- С. 52-68
8. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. Ж. – 2010, Т. 62, №1, С. 52-80.

Чепок О. О.

Ассимптотические представления решений с медленно меняющимис производными уравений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями

Резюме

Дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие в правой части и степенные, и экспоненциальные нелинейности, играют важную роль в развитии качественной

теории дифференциальных уравнений. Среди работ, касающихся установления асимптотических представлений решений, большую часть составляют исследования уравнений со степенными и с правильно меняющимися нелинейностями. В последнее время началось рассмотрение дифференциальных уравнений, содержащих в правой части экспоненциальные, и более широкий класс функций, чем эксchallenge экспоненциальные — быстро меняющиеся функции. В данной работе устанавливаются асимптотические представления решений с медленно меняющимися производными первого порядка одного нового класса дифференциальных уравнений второго порядка с быстро и правильно меняющимися нелинейностями.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, ассимптотические представления решений,быстро меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции, медленно меняющиеся производные первого порядка .

Chepok O.O.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS WITH SLOWLY VARYING DERIVATIVES OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RAPIDLY AND REGULARLY VARYING NONLINEARITIES

Summary

Second-order differential equations with power and exponential nonlinearities on the right hand side play an important role in the development of a qualitative theory of differential equations. The authors of most works devoted to the establishment of asymptotic representations of solutions investigate equations with power and with regularly varying nonlinearities. Recently, the consideration of differential equations with exponential and a wider class than exponential functions - rapidly varying functions - has begun. In this paper, the asymptotic representations of solutions with slowly varying first-order derivatives of some new class of second-order differential equations with rapidly and regularly varying nonlinearities are established.
Key words: second-order differential equations, asymptotic representations of solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions, slowly varying first-order derivatives.

REFERENCES

1. *Maric V.* Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). - 2000. - 127p.
2. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge university press. Cambridge. - 1987. - 494p.
3. Seneta E. (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.
4. Yevtukhov V.M., Samoylenko A.M. Asimptoticheskiye predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nyye uravneniya s pravil'no menyayushchimisya nelineynostyami // Differents. uravneniya. – 2011. - т. 47, № 5. - pp. 628-650.
5. Yevtukhov V.M., Chernikova A.G. Asimptotika medlenno menyayushchikhsya resheniy obyknovennykh dvuchlennykh differentsial'nykh uravneniy s bystro menyayushcheysya nelineynost'yu// Nelineynyye kolebaniya. - 2016. - vol. 19, №4. - pp. 2-19.
6. Yevtukhov V.M., Chernikova A.G. Asimptoticheskoye povedeniye resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s bystro menyayushchimisya nelineynostyami//Ukr.Mat. ZH. - 2017. - vol. 69, № 10. - pp. 1345 - 1363.

7. Chernikova A. G. Ob asimptotike resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s bystro menyayushcheysya nelineynost'yu // Doslidzhenzhennya v matematitsi i mekhanitsi.- 2017.- 20, №.2 (26) . - pp. 52-68

8. Yevtukhov V. M., Samoylenko A. M. Usloviya primeneniya ischezayushchikh v osoboy situatsii resheniy u veshchestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsial'nykh uravneniy // Ukr. Mat. ZH. - 2010, vol. 62, №1, pp. 52-80.