Міністерство освіти і науки України
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Фізико-математичний факультет

Бойко Ольга Павлівна

Пивоварчик Вячеслав Миколайович

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до практичних робіт з

навчального курсу «Дискретна математика»

(Частина 1: Теорія множин)

Одеса – 2019

УДК: 510+004.02

Друкується за рішенням вченої ради Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол 3 від 31 жовтня 2019 року).

Елементи теорії множин: Методичні рекомендації до практичних робіт модулю «Основи дискретної математики» навчальної дисципліни ОК 09 «Дискретна математика» для студентів 1 курсу спеціальності 014 Середня освіта (інформатика).

Рецензенти:

Лесечко Олександр Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури.

Мазурок Тетяна Леонідівна, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформатики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського.

Методичні рекомендації до практичних робіт з навчального курсу «Дискретна математика» (Частина 1: Теорія множин) – це навчальне видання для студентів з методики засвоєння практичної частини модулю «Основи дискретної математики» навчальної дисципліни **ОК 09** «Дискретна математика» для студентів 1 курсу спеціальності 014 Середня освіта (інформатика).

Поданий у методичних рекомендаціях матеріал висвітлює питання розділу теорія множин, що формують уявлення про дискретність у сучасній науці, є фундаментом дискретної математики і важливою ланкою математичної освіти для спеціалістів у галузі прикладної математики та інформатики.

Наявність розроблених прикладів дає можливість студентам акцентувати увагу на принципах логічних побудов, способах опису множин, на ефективності застосування апарату теорії графів і теорії множин для вирішення прикладних задач.

Ключові слова: дискретна математика, теорія множин, відповідності між множинами, відношення.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна ОК 09 «Дискретна математика» для здобувачів вищої освіти 1 року навчання за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (інформатика) за навчальним планом 4 кредити загальною кількістю 120 годин. Аудиторні заняття - 60 годин (лекції — 24 годин, практичні роботи — 36 години), 60 годин відведено на самостійну роботу студентів. Зміст навчальної дисципліни розділено за програмою на два змістових модуля, перший з яких охоплює теорію множин, елементи загальної алгебри, вступ у логіку тощо, а другий присвячено питанням теорії графів.

Методичні рекомендації «Елементи теорії множин» охоплюють питання розділу теорія множин і відповідають програмі практичних робіт з першого розділу навчальної дисципліни ОК 09 «Дискретна математика». В практикумі представлено 4 практичні роботи, що за програмою навчальної дисципліни розраховано на 8 годин аудиторної роботи, одне підсумкове заняття (2 години) по звітуванню результатів роботи та 20 годин самостійної роботи студентів.

Зміст практичних робіт не потребує додаткових базових знань, частково спирається на шкільний курс математики.

Розроблений цикл практичних робіт є основою для подальшого вивчення розділу «Функції алгебри логіки», а в подальшому теоретичною основою для дисциплін комп’ютерного циклу.

Практична робота №1

МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Мета роботи

Познайомитися з основними теоретичними положеннями теорії множин. Набути навичок застосування основних операцій над множинами для будови нових множини. Навчитися застосуванню кіл Ейлера та аналітичних міркувань для доведення рівності даних множин.

Коротка теорія

$\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ – множина, що складається з n елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$.

$\{x \mid T(x)\}$ – множина, що складається з таких елементів x, які мають властивість T.

$x \in A$ – елемент x належить множині A.

$x \notin A$ – елемент x *не* належить множині A.

$\emptyset$ – *порожня множина* (що не містить жодного елемента).

U - універсальна множина (універсум), тобто множина всіх елементів що розглядаються.

$A \subseteq B$ - множина A є підмножиною множини B (А включено в B, A міститься в B), це означає, що кожен елемент множини A є елементом множини B.

$A \subset B$ означає, що $A \subseteq B$ і $A \neq B$, тобто A є власною підмножиною B.

$P(A) = 2^A = \{ X \mid X \subseteq A\}$ — множина всіх підмножин A (булеан).

$|A|$ — потужність множини, кількість її елементів

$\bar{A} = U \setminus A$ — доповнення множини A.

$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ або $x \in B\}$ – об'єднання множин A і B .

$A \cap B = A\,B = \{ x \mid x \in A$ і $x \in B\}$ – перетин множин A і B .

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$ – різниця множин A і B.

$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симетрична різниця множин A і B.

Функція $I_A(x)$ називається індикатором належності елемента х множині А, якщо

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

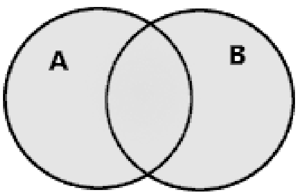
Індикатори належності елементу множинам, отриманим з даних множин A і B за допомогою основних операцій, наведені в наступній таблиці:

Таблиця 1.1

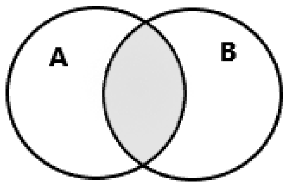
$I_A(x)$	$I_B(x)$	$I_{A\cap B}(x)$	$I_{A\cup B}(x)$	$I_{\bar{A}}(x)$	$I_{A\Delta B}(x)$	$I_{A\setminus B}(x)$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Рівність двох множин рівносильна рівності їх індикаторних функцій, визначених на одній і тій самій універсальній множині. Включення $A \subseteq B$ рівносильне нерівності $\forall x \in U \quad I_A(x) \leq I_B(x)$.

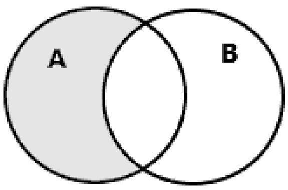
Діаграми Ейлера -Венна



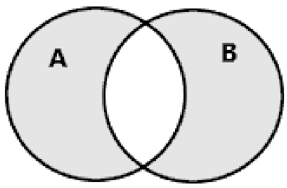
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \,\Delta\, B$

Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з теоретичною інформацією до практичної роботи.
2. Розгляньте приклади розв’язку завдань.
3. Оберіть у списку номер свого варіанту та розв’яжіть завдання для самостійної роботи.

Зразок виконання завдання

1. Для універсальної множини $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, множини $\mathrm{A} = \{-1, 2, 3, 4\}$ і множини B, яка є множиною коренів рівняння $x^4 + 3x^3 +$

$x^2 - 3x - 2 = 0.$

1) Визначити множини: $A \cup B$, $B \cap A$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \, \Delta \, B$, $\overline{\mathrm{B}}$, $C = (A \, \Delta \, B) \, \Delta \, A$.

2) З'ясувати яка з наведених можливостей виконується для множин: $A \subset C$, або $C \subset A$, або $A = C$, або $A \cap C = \emptyset$.

3) Знайти $P(B)$ і $|P(B)|$.

Розв'язання

Шукатимемо корені даного рівняння серед дільників вільного члену: $\pm 1, \pm 2$. Позначимо многочлен у лівій частині рівняння через $M(x)$. Оскільки $M(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$, робимо висновок що $x = 1$ є шуканим коренем даного рівняння. Поділимо $M(x)$ на $(x - 1)$:

$$M(x): (x - 1) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$$

Позначимо частку від ділення $M(x)$ на $(x - 1)$ через $M_1(x)$. Дільники вільного члена: $\pm 1, \pm 2$. Оскільки $M_1(-1) = (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 2 = 0$, робимо висновок що $x = -1$ є шуканим коренем даного рівняння. Поділимо $M_1(x)$ на $(x + 1)$:

$$M_1(x): (x + 1) = x^2 + 3x + 2$$

Шукатимемо корені частки від ділення за теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 \cdot x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Отже, маємо множину $B = \{-2, -1, 1\}$. Тоді за 1 завданням:

$A \cup B = \{-1, 2, 3, 4\} \cup \{-2, -1, 1\} = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

$B \cap A = \{-2, -1, 1\} \cap \{-1, 2, 3, 4\} = \{-1\}$

$A \backslash B = \{-1, 2, 3, 4\} \backslash \{-2, -1, 1\} = \{2, 3, 4\}$

$B \backslash A = \{-2, -1, 1\} \backslash \{-1, 2, 3, 4\} = \{-2, 1\}$

$A \, \Delta \, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{2, 3, 4\} \cup \{-2, 1\} = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$

$\overline{\mathrm{B}} = U \backslash B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\} \backslash \{-2, -1, 1\} =$

$= \{-5, -4, -3, 2, 3, 4, 5\}$

$C = (A \, \Delta \, B) \, \Delta \, A = \{-2, 1, 2, 3, 4\} \Delta \{-1, 2, 3, 4\} = \{-2, 1\} \cup \{-1\} = \{-2, -1, 1\}$

Оскільки А $= \{-1, 2, 3, 4\}$ і С $= \{-2, -1, 1\}$, маємо за другим завданням $A \neq C$.

$P(B) = \{\{\emptyset\}, \{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{-2, -1\}, \{-2, 1\}, \{-1, 1\}, \{-2, -1, 1\}\}$

$|P(B)| = 2^B = 8$

2. Нехай A, B і C — множини точок площини, координати яких задовольняють умови α, β і γ відповідно. Зобразить в систем координат $x0y$ множину D, що отримана з множин A, B і C за формулою δ

α	$\lvert x \rvert \leq 5; \lvert y \rvert \leq 5$
β	$y + \frac{4}{x} \geq 4$
γ	$y - \frac{4}{x} \leq 0$
δ	$A \setminus (B \cap C)$

Розв'язання

Множина A є множиною точок, що лежать всередині та на границі квадрата $|x| \leq 5; |y| \leq 5$. B – множина точок площини, що знаходяться вище та на границі кривої $y = 4 - \frac{4}{x}$. C – множина точок площини, що знаходяться нижче та на границі кривої $y = \frac{4}{x}$.

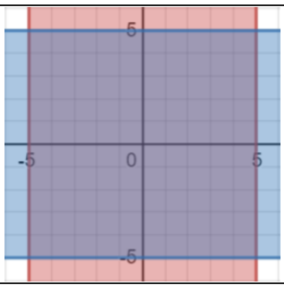
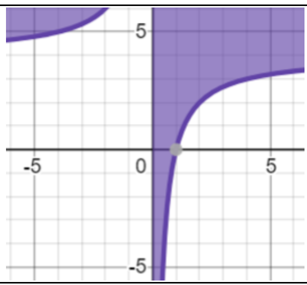
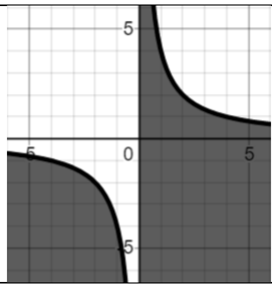
		

рис. 1 множина А	*рис. 2 множина В*	*рис. 3 множина С*

Видаливши з області квадрата перетин множин B і C (рис. 4), отримаємо результат. У кінцевій відповіді враховуємо належність (або неналежність) до результату границь .

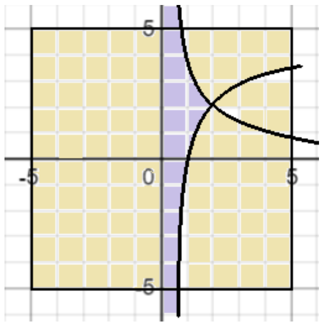
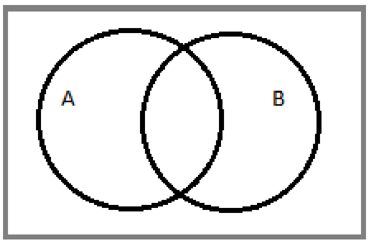


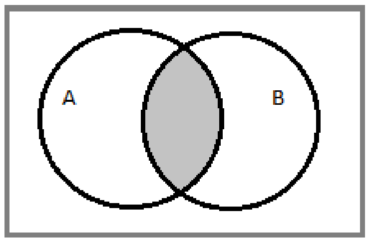
рис. 4

3. За допомогою діаграм Ейлера-Вена та індикаторних функцій доведіть тотожність $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.

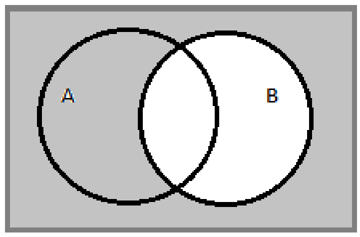
Розв'язання

Побудуємо діаграми Ейлера - Венна для лівої частини тотожності

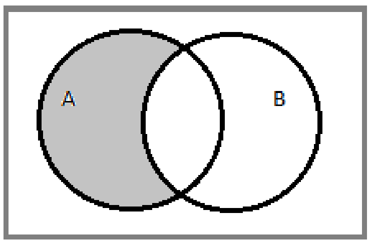




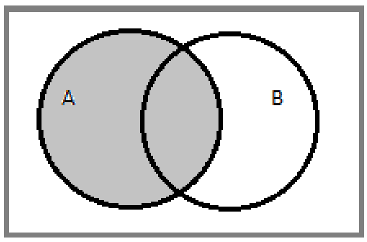
$A \cap B$



$\bar{B}$



$A \cap \bar{B}$



$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

Отже, рівність лівої частини до правої очевидна. Тотожність доведена.

Побудуємо тепер таблицю індикаторів для лівої частини тотожності

$I_A(x)$	$I_B(x)$	$I_{A\cap B}(x)$	$I_{\bar{B}}(x)$	$I_{A\cap\bar{B}}(x)$	$I_{(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})}(x)$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Бачимо що значення стовпчика результатів співпадають з значеннями належності до множини А. Отже тотожність доведена.

Завдання для самостійної роботи

1. Для універсальної множини $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, множини A, що задана списком, і для B, яка є множиною коренів рівняння $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$.
   1) Визначити множини: $A \cup B$, $B \cap A$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \Delta B$, $\overline{B}$, $C = (A \Delta B) \Delta A$.
   2) З'ясувати яка з наведених можливостей виконується для множин: $A \subset C$, або $C \subset A$, або $A = C$, або $A \cap C = \emptyset$.
   3) Знайти $P(B)$ і $|P(B)|$.

№	A	α	β	γ	δ
1	-1, 1, 4, 3	1	-12	-28	-16
2	-1, 1, 2, 3	7	13	-3	-18
3	-1, 1, 3, 4	-2	-12	18	27
4	-1, 1, 2, 3	0	-17	36	-20
5	-2, 1, 3, 4	0	-11	-18	-8
6	-1, 1, 4, 5	3	-9	-23	-12
7	-3, -1, 1, 2	-2	-7	20	-12
8	-4, -1, 1, 2	0	-11	18	-8
9	-2, -1, 3, 5	3	-7	-15	18
10	-3, -1, 1, 2	5	1	-21	-18

№	A	α	β	γ	δ
11	-1, 1, 2, 3	-3	-3	7	6
12	-1, 1, 3, 2	-7	12	4	-16
13	-2, -1, 2, 4	-1	-7	13	-6
14	-1, 1, 2, 3	-4	3	4	-4
15	-1, 1, 2, 3	-5	-3	13	10
16	-3, 5, 3, 4	-11	39	-49	20
17	1, 2, 3, 4	-6	8	6	9
18	-1, -2, 1, 2	-3	-2	12	-8
19	-1, 2, 5, 4	0	-9	-4	12
20	-1, -2, -3,1	-4	-10	28	-15

2. Нехай A, B і C — множини точок площини, координати яких задовольняють умови α, β і γ відповідно. Зобразить в систем координат $x0y$ множину D, що отримана з множин A, B і C за формулою δ.

№	Умови		№	Умови	
1	α	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$	2	α	$y - \frac{4}{x} \leq 0$
	β	$y + x^2 + 1 \geq 0$		β	$y^2 + x^2 - 25 \leq 0$
	γ	$\lvert x\rvert \leq 6;\ -3 \leq y \leq -2$		γ	$\lvert x\rvert \leq 1; \lvert y\rvert \leq 1$
	δ	$(A \cup B) \Delta C$		δ	$(A \cap B) \backslash C$
3	α	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$	4	α	$\lvert x\rvert \leq 5; \lvert y\rvert \leq 1$

	β	$2 \leq x \leq 6;\ -3 \leq y \leq 1$		β	$\lvert x\rvert \leq 1; \lvert y\rvert \leq 5$
	γ	$x^2 + y^2 - 18x \leq 0$		γ	$y^2 + x^2 - 16 <= 0$
	δ	$(A \cup B)\backslash C$		δ	$A \cup B \cup C$
5	α	$y - x^2 - 1 \leq 0$	6	α	$y - \frac{4}{x} \leq 0$
	β	$y - x^2 + 3 \geq 0$		β	$y + \frac{4}{x} \geq 0$
	γ	$x > 0$		γ	$y^2 + x^2 - 25 \leq 0$
	δ	$(A \cap B)\backslash C$		δ	$(A \cap B)\backslash C$
7	α	$x^2 + y^2 - 4x \leq 0$	8	α	$y - x^4 - 1 \leq 0$
	β	$x^2 + y^2 + 4x \leq 0$		β	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$
	γ	$\lvert x\rvert \leq 2; \lvert y\rvert \leq 2$		γ	$x^2 + y^2 - 4x \leq 0$
	δ	$(A \cup B)\ \Delta\ C$		δ	$(A \cap B)\ \Delta\ C$
9	α	$y + x^2 - 5 \leq 0$	10	α	$y^2 + x^2 - 9 \leq 0$
	β	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$		β	$\lvert y\rvert \leq 4;\ -6 \leq x \leq 1$
	γ	$x > 0$		γ	$y < 0$
	δ	$A\backslash(B \cup C)$		δ	$(A\ \Delta\ B)\backslash C$
11	α	$x - y > 0$	12	α	$y + x^2 - 6 \leq 0$
	β	$x + y < 0$		β	$\lvert x\rvert > 2; \lvert y\rvert > 2$
	γ	$x^2 + y^2 \leq 4$		γ	$x < y$
	δ	$(A\ \Delta\ B) \cup C$		δ	$A \cap B \cap C$
13	α	$y \leq sin\ x$	14	α	$x < y + 3$
	β	$y > 0{,}5$		β	$x > y - 3$
	γ	$y > -2$		γ	$\lvert x\rvert < 5; \lvert y\rvert < 2$
	δ	$(A\ \Delta\ B) \cap C$		δ	$(A \cap B)\backslash C$
15	α	$y - \frac{5}{x} \leq 0$	16	α	$x^2 + y^2 + 6y \leq 0$
	β	$y + \frac{2}{x} \geq 0$		β	$y + x^2 + 1 \geq 0$
	γ	$y \geq 1$		γ	$\lvert x\rvert \leq 4;\ -4 \leq y \leq -2$
	δ	$(A \cap B)\backslash C$		δ	$A \cap (B\backslash C)$
17	α	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$	18	α	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$
	β	$y - \frac{4}{x} \leq 0$		β	$2 \leq x \leq 6;\ -3 \leq y \leq 1$
	γ	$x^2 + y^2 - 4 \leq 0$		γ	$x^2 + y^2 - 18x \leq 0$
	δ	$(A\backslash B) \cup C$		δ	$(A\ \Delta\ B)\ \Delta\ C$
19	α	$\lvert x\rvert \leq 5; \lvert y\rvert \leq 1$	20	α	$x^2 - y - 2 \geq 0$
	β	$\lvert x\rvert \leq 1; \lvert y\rvert \leq 5$		β	$x^2 - y + 4 \geq 0$
	γ	$x^2 + y^2 \leq 16$		γ	$y > 1$
	δ	$(A \cup B)\ \Delta\ C$		δ	$(A \cap B) \setminus C$

3. За допомогою діаграм Ейлера-Вена та індикаторних функцій доведіть тотожність.

№	Тотожність	№	Тотожність
1	$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$;	2	$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$;
3	$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$;	4	$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$;
5	$A\backslash(A\backslash B) = A \cap B$;	6	$(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup C = (A \cup B) \cap \bar{C}$;
7	$(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$;	8	$(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$;
9	$A \cap (B\backslash A) = \emptyset$;	10	$A \,\Delta\, B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$;
11	$A \,\Delta\, (A \,\Delta\, B) = B$;	12	$A\backslash B = A \,\Delta\, (A \cap B)$;
13	$(A \,\Delta\, B) \cup (A \cap B) = A \cup B$;	14	$A \cup B = (A \,\Delta\, B) \cup (A \cap B)$;
15	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;	16	$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$;
17	$A \cap (B\backslash C) = (A \cap B)\backslash(A \cap C)$;	18	$\overline{A \,\Delta\, B} = \bar{A} \,\Delta\, B$;
19	$A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$;	20	$\overline{A \,\Delta\, B} = A \,\Delta\, B \,\Delta\, U$;

Практична робота № 2

ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННІ ЗАКОНИ. ДЕКАРТОВИЙ ДОБУТОК МНОЖИН.

Мета роботи

Засвоїти основні властивості операцій над множинами. Набути навичок застосування теоретико-множинних законів для спрощення виразів. Навчитися будувати декартовий добуток множин.

Коротка теорія

Теоретико-множинні закони

1. Властивість нуля $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;
2. Властивість одиниці $A \cup U = U$; $A \cap U = A$;
3. Ідемпотентність $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
4. Доповнення $A \cup \bar{A} = U$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
5. Інволютивність (подвійне заперечення) $\bar{\bar{A}} = A$;

6. Комутативні закони:

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

7. Асоціативні закони:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\ ;$

8. Дистрибутивні закони:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

9. Закони де Моргана:

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

10. Різниця: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Операцію перетину вважаємо сильнішою, ніж інші. Це означає, що при відсутності дужок вона виконується першою. Наприклад, формула $(AB \cup C)\ \Delta\ CD$ еквівалентна $((A \cap B) \cup C)\ \Delta\ (C \cap D)$.

Пара (a, b) елементів непустих множин A і B відповідно, називається впорядкованою парою якщо $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b\ i\ b = a$.

Декартових добутком $A \times B$ непустих множин A і B називається сукупність всіх упорядкованих пар виду (a, b), де $a \in A, b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Якщо $A = B$, то говорять про декартовий квадрат множини A: $A \times A = A^2$.

Операцію знаходження декартова добутку множин називають декартовим множенням. Вона володіє наступними властивостями:

1. Не комутативна: $A \times B \neq B \times A$.
2. Не асоціативна.
3. Дистрибутивна щодо об'єднання і віднімання множин:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(A \backslash B) \times C = (A \times B) \backslash (B \times C).$$

Вектор (кортеж) - впорядкований набір елементів $(a_1, \dots, a_m)$. Тут $a_1, \dots, a_m$ – координати (компоненти) вектору, m -- довжина (розмірність) вектору.

На відміну від елементів множини координати векторів можуть збігатися. Вектори беруть у круглі дужки, наприклад (0,5,4,5), але іноді дужки і навіть коми опускаються.

Вектори $(a_1, \dots, a_m)$ і $(b_1, \dots, b_n)$ рівні, якщо $m = n$ і $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_m = b_n$.

Проекцією вектору $(a_1, \dots, a_m)$ на вісь i називається координата a_i. Проекцією множини A векторів на вісь будемо називати множину проекцій векторів з A на цю вісь.

Декартовим добутком множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ називається множина всіх кортежів довжини n, перша компонента яких належить множині A_1, друга - множині A_2, ..., n-а – множині A_n.

Теорема. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – скінченні множини і $|A_1| = m_1,\ |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$, тоді $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$

Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з теоретичною інформацією до практичної роботи.
2. Розгляньте приклади розв'язку завдань.
3. Оберіть у списку номер свого варіанту та розв'яжіть завдання для самостійної роботи.

Зразок виконання завдання

1. Спростить вираз, використовуючи теоретико-множинні закони: $(A \cap \overline{D}) \cup (A \backslash D) \cup (C \cap \overline{B}) \cup (\overline{B} \cap C)$.

Розв'язання

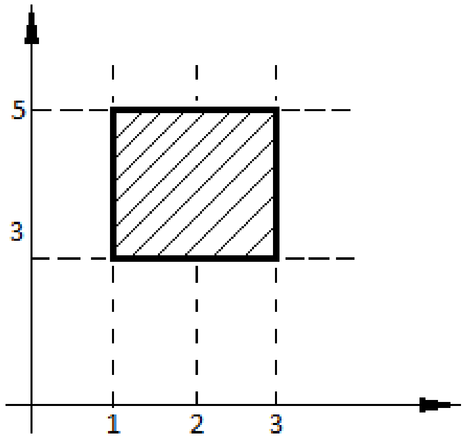
Використовуючи теоретико-множинну тотожність для різниці, запишемо рівність $A \cap \overline{D} = A \backslash D$ і за законом ідемпотентності $(A \backslash D) \cup (A \backslash D) = A \backslash D$.

За аналогією $(C \cap \overline{B}) \cup (\overline{B} \cap C) = (C \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) = C \cap \overline{B} = C \backslash B$. Отже, після спрощення отримали вираз:

$$(A \cap \overline{D}) \cup (A \backslash D) \cup (C \cap \overline{B}) \cup (\overline{B} \cap C) = (A \backslash D) \cup (C \backslash B)$$

2. Побудуйте декартовий добуток $A \times B$ та зобразіть його елементи на координатній площині, якщо $\mathrm{A} = [1,\ 3],\ \mathrm{B} = [3,\ 5]$.

Розв’язання



В цьому випадку нескінченні обидві множини A і B. Тому першою координатою пари, що належить множині $A \times B$, може бути будь-яке число з проміжку [1;3], а другою – будь яке число з проміжку [3;5], і, отже, точки, що зображують елементи декартового добутку даних множин, утворюють квадрат.

3. Перевірте справедливість рівності $C \times (B \setminus A) = (C \times B)\Delta\big(C \times (A \cap B)\big)$ для множин $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 3\}$.

Розв’язання

Для нашого випадку:

$C \times (B\setminus A) = \{1, 3\} \times (\{2,3\}\setminus\{1,2\}) = \{1,3\} \times \{3\} = \{(1,3), (3,3)\}$.

$C \times (A \cap B) = \{1, 3\} \times (\{1,2\} \cap \{2,3\}) = \{1,3\} \times \{2\} = \{(1,2), (3,2)\}$.

$C \times B = \{1,3\} \times \{2,3\} = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3)\}$.

$(C \times B)\Delta\big(C \times (A \cap B)\big)$=$\{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3)\}\ \Delta\ \{(1,2), (3,2)\} = \{(1,3), (3,3)\}$

Отже ми впевнилися що у нашому прикладі рівність виконується.

Завдання для самостійної роботи

1. Спростить вирази, використовуючи теоретико-множинні закони

№	Вираз	№	Вираз
1	$\big((A \cap B) \cup (B\setminus C)\big) \cap (A \cup C) \cap (B\Delta C)$	11	$\big((A\setminus C) \cup (B\setminus C)\big) \cap \big((A\ \Delta\ B) \cup C\big)$
2	$\big((A \cap B) \cup (B\setminus C)\big)\Delta\big((A \cup B) \cap (C\setminus A)\big)$	12	$\overline{\bar{A} \cap B \cap \bar{C}}$
3	$\overline{A \cup (B\ \Delta\ C)} \cup \overline{(A\setminus C)\Delta\overline{(B\Delta C)}}$	13	$\big((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)\big)\ \Delta\ C$
4	$\big((A \cup B)\Delta(B \cup C)\big)\setminus\overline{B\Delta C}$	14	$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

5	$\overline{\overline{\overline{A \cap B} \cup \bar{A} \cup \bar{\bar{B}}} \cup \bar{A} \cap B}$	15	$(A \cap \bar{B})\, \Delta\, (\bar{A} \cap B)$
6	$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$	16	$(A \,\Delta\, B \cap C) \cup B$
7	$\overline{\bar{A} \cup \big((B \cup C) \cap C\big)} \cup (A \cap B)$	17	$\overline{(A \,\Delta\, B)\setminus C}\Delta(A \,\Delta\, \bar{C})$
8	$A \cap B \cap (\bar{A} \cap B) \cap (A \cup \bar{B}) \cup C \cap \bar{C}$	18	$\overline{(A \cap B)} \cup B$
9	$(A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}\ ) \cup (\bar{B} \cup C)$ $\cup (\mathrm{C} \cap D)$	19	$(A \cup B) \cap (C \cup D) \cap (\overline{A \cup B}) \cap (\bar{D}$ $\cup B)$
10	$((A \,\Delta\, B)\setminus C) \cap \bar{B} \cup (A \cap B) \cup (A \cap C)$	20	$\big(\overline{A \,\Delta\, B} \cap (\bar{A} \,\Delta\, \bar{C})\big)$ $\cup \big(\overline{B \,\Delta\, C} \cap (\bar{A} \,\Delta\, \bar{B})\big)$

2. Побудуйте декартовий добуток $A \times B$ та зобразіть його елементи на координатній площині.

№					
1	A	$\{-4, 2, 5\}$	11	A	$[0;\ 1]$
	B	$(-4;\ 3]$		B	$[0;\ 1]$
2	A	$(-3;\ 4]$	12	A	$[-1;\ 2]$
	B	$[2;\ 6)$		B	$(-2;\ 4]$
3	A	$\mathbb{R}$	13	A	$\mathbb{N}$
	B	$\{-1, 2, 3\}$		B	$[-2;\ 5]$
4	A	$(-4;\ 2]$	14	A	$\mathbb{R}$
	B	$\mathbb{R}$		B	$\mathbb{Z}$
5	A	$(-\infty;\ 4]$	15	A	$\{2, 6\}$
	B	$(-\infty;\ 7)$		B	$\{1,4\}$
6	A	$[-2;\ 4)$	16	A	$\{2,\ 6\}$
	B	$(3;\ +\infty)$		B	$[1,4]$
7	A	$\{1, 3, 4, 5\}$	17	A	$[2,\ 6]$
	B	$\{3\}$		B	$[1,4]$
8	A	$[1; 5]$	18	A	$\{-1,0,1,2\}$
	B	$(1; 2]$		B	$\{2,3,4\}$
9	A	$\mathbb{R}$	19	A	$[-2;\ 2]$
	B	$[2; 5)$		B	$\mathbb{R}$
10	A	$\{-5, 6, 1\}$	20	A	$\mathbb{R}$
	B	$\{1, 3, 7\}$		B	$\{2\}$

3. Перевірте справедливість рівності α для множин $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.

№	α
1	$A \times C = \big(A \times (C \backslash B)\big) \cup \big(A \times (C \cap B)\big)$
2	$A \times C = \big(A \times (C \cap B)\big) \cup \ (A \times C)$
3	$A \times (B \,\Delta\, C) = \big(A \times (B \cup C)\big) \backslash \big(A \times (C \cap B)\big)$
4	$A \times C = \big(A \times (C \backslash B)\big) \cup (A \times C)$
5	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup \big(A \times (C \backslash B)\big)$
6	$A \times (C \backslash B) = (A \times C) \,\Delta\, (A \times (C \cap B))$
7	$A \times C = \big(A \times (C \cup B)\big) \cap (A \times C)$
8	$A \times \big(C \cap (B \,\Delta\, C)\big) = (A \times C) \,\Delta\, (A \times (C \cap B))$
9	$A \times (C \backslash B) = (A \times C) \backslash (A \times (C \cap B))$
10	$A \times (B \cup C) = \big(A \times (B \,\Delta\, C)\big) \cup \big(A \times (B \cap C)\big)$
11	$A \times C = \big(A \times (C \cup B)\big) \backslash \big(A \times (B \backslash C)\big)$
12	$A \times (B \cap C) = (A \times C) \backslash (A \times (C \backslash B)$
13	$A \times (B \cap C) = \big(A \times (B \cup C)\big) \backslash \big(A \times (B \,\Delta\, C)\big)$
14	$A \times (C \backslash B) = \big(A \times (B \cup C)\big) \backslash (A \times B)$
15	$B \times A = \big(B \times (A \backslash C)\big) \backslash \big(B \times (A \cap C)\big)$
16	$B \times A = \big(B \times (A \cap C)\big) \cup (B \times A)$
17	$B \times A = (B \times A) \cup \big(B \times (A \backslash C)\big)$
18	$B \times (A \cup C) = \big(B \times (A \backslash C)\big) \cup (B \times C)$
19	$B \times A = (B \times A) \cap \big(B \times (A \cup C)\big)$
20	$B \times (A \backslash C) = (B \times A) \backslash \big(B \times (A \cap C)\big)$

Практична робота № 3

ВІДПОВІДНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.

Мета роботи

Засвоїти способи зіставлення один одному елементів різних множин та їх властивості. Закріпити поняття області значень та області визначення відповідності. Набути навичок визначення властивостей відповідності.

Коротка теорія

Відповідністю G між множинами X і Y називається будь-яка підмножина декартового добутку $X \times Y$: $G \subseteq X \times Y$. Іншими словами, відповідність - це спосіб зіставлення елементів однієї множини (X) елементам іншої множини (Y). Тому іноді відповідність розглядають як трійку об'єктів: $T = (X, Y, G)$, де X – область визначення відповідності, Y - область значення відповідності, G – графік відповідності, причому саме $G \subseteq X \times Y$.

Областю визначення відповідності будемо називати $np_1\ G$.

Областю значень відповідності будемо називати $np_2\ G$.

Відповідність називається всюди визначеною, якщо $np_1\ G = X$,

Відповідність називається сюр’єктивною, якщо $np_2\ G = Y$.

Відповідність будемо називати функціональною, або функцією, якщо вона не містить пар з однаковими першими і різними другими координатами.

Відповідність називається ін'єкційною, якщо вона не містить пар з однаковими другими і різними першими координатами.

Відповідність називається відображенням X в Y, якщо вона всюди визначена і функціональна.

Відповідність називається відображенням X на Y, якщо вона всюди визначена, функціональна і сюр’єктивна.

Відповідність називається взаємно однозначною, якщо вона функціональна і ін'єкційна.

Відповідність називається бієкцією, якщо вона всюди визначена, сюр'єктивна, функціональна і ін'єктивна.

Множина всіх $y \in Y$, що відповідають елементу $x \in X$, називається образом x у Y при відповідності G: $T(X)$. Множина всіх $x \in X$, яким відповідає y, називається прообразом y у X при відповідності G: $T^{-1}(Y)$.

Множини називаються рівнопотужними, якщо між ними можна встановити бієкцію.

Множини називаються злічувальними, якщо воно рівнопотужні множині натуральних чисел.

Множини називаються континуальними, якщо вони рівнопотужні множині дійсних чисел відрізка [0,1].

Оберненою відповідністю P називається відповідність $P^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in$

$P\}$.

Композицією відповідностей P і Q називається відповідність $P \circ Q = \{(a,b) | \exists_x ((a,x) \in P\ i\ (x,b) \in Q)\}$

Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з теоретичною інформацією до практичної роботи.
2. Розгляньте приклади розв'язку завдань.
3. Оберіть у списку номер свого варіанту та розв'яжіть завдання для самостійної роботи.

Зразок виконання завдання

1. Для поданої відповідності P= {(1,1), (1,2), (2,3), (2,2)} визначити:

$$P^{-1}, P \circ P, P^{-1} \circ P, \text{пр}_2(P^{-1} \circ P) \times \text{пр}_1(\ P \circ P).$$

Розв'язання

За визначенням інверсії, $(2,1) \in P^{-1}$ так як $(1,2) \in P$. Отже далі, отримуємо: $P^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,2), (2,2)\}$.

За визначенням композиції, $(1,3) \in P \circ P$, так як існує 2, причому $(1,2) \in\ P$ і $(2,3) \in P$. Продовжуючи далі будувати композицію, отримаємо: $P \circ\ P =\ \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,2)\}$.

Аналогічно отримуємо

$$P^{-1} \circ P =\ \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}.$$

Згадуючи визначення проекції множини векторів на вісь, отримаємо: $\text{пр}_2(P^{-1} \circ P) = \{1,2,3\}$, аналогічно знайдемо іншу проекцію: $\text{пр}_1(P \circ P) = \{1,2\}$, і, нарешті, можемо написати:

$\text{пр}_2\ (P^{-1} \circ P)\ \times \text{пр}_1(P \circ P) =\ \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3\ ,2)\}$.

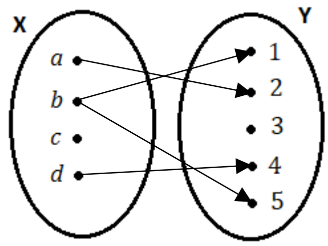
2. Дано відповідність $T = \{X, Y, G)$. $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1,2,3,4,5\}$, $G = \{(a, 2), (b, 1), (b, 5), (d, 4)\}$, $\text{A} = \{\text{a}, b\}$, $\text{B} = \{3,4\}$.
   1) Зобразити відповідність у вигляді графа.
   2) З'ясувати, якими з 4 основних властивостей (всюди визначеність, сюр'єктивність, функціональність, ін'єктивність) володіє T.
   3) Знайти образ множини A і прообраз множини B при відповідності T.

4) Побудувати відповідність між кінцевими множинами, які володіють набором властивостей, протилежних даним.

Зауваження. Для цієї і побудованих відповідностей відзначити випадки відображень, вказати їх тип, відзначити випадки бієкції.

Розв’язання

1) Зобразимо відповідність у вигляді графу



2) З'ясуємо, якими з властивостей володіє подана відповідність:

а) Відповідність не є всюди визначеною, оскільки $\text{пр}_1 G = \{a, b, d\} \neq X$.

б) Відповідність не сюр’єктивна, оскільки $\text{пр}_2 G = \{1,2,4,5\} \neq Y$.

в) Відповідність не функціональна, оскільки містить дві пари (b, 1) і (b, 5) з однаковими першими і різними другими координатами.

г) Відповідність ін’єкційна, тому що не містить пар з однаковими другими і різними першими координатами.

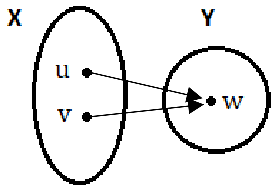
3) Знайдемо образ $T(A)$ і прообраз T^{-1}(B).

$T(A) = \{1,2,5\}$, тому що $A = \{a, b\}$ і $\{(a, 2), (b, 1), (b, 5)\} \subseteq G$.

$T^{-1}(B) = \{d\}$, тому що $B = \{3,4\}$ і тільки $(d, 4) \in G$.

4) Побудуємо відповідність між кінцевими множинами, щоб вона була всюди визначена, сюр’єктивна, функціональна і не ін'єктивна, зобразимо її у вигляді графу і аналітично:

$$P = (\{u, v\}, \{w\}, \{(u, w), (v, w)\}).$$



Покажемо, що ця відповідність володіє необхідним набором властивостей.

а) Дійсно, ця відповідність всюди визначена, тому що $np_1 G = X = \{m, v\}$.

б) Відповідність сюр'єктивна, оскільки $\text{пр}_2 G = \{w\} = Y$.

в) Відповідність функціональна, тому що не містить пар з однаковими першими і різними другими координатами.

г) Відповідність не ін’єктивна, тому що містить дві пари (u, w), (v, w) з різними першими й однаковими другими координатами.

Так як побудована відповідність всюди визначена, сюр’єктивна і функціональна, вона є відображенням X на Y.

Завдання для самостійної роботи

1. Для поданої відповідності P визначити:

$$P^{-1}, P \circ P, P^{-1} \circ P, \text{пр}_2(P^{-1} \circ P) \times \text{пр}_1(P \circ P).$$

№	P
1	$(x,y),(x,z),(t,y),(z,z),(y,z)$
2	$(y,y),(t,t),(x,y),(z,x),(z,t)$
3	$(x,y),(y,z),(z,x),(y,y),(z,y)$
4	$(z,z),(z,y),(y,y),(x,y),(z,x)$
5	$(t,x),(x,x),(x,t),(t,y),(y,x)$
6	$(w,t),(y,t),(t,t),(z,y),(w,z)$
7	$(0,1),(1,1),(1,0),(0,2),(2,1)$
8	$(5,4),(2,4),(4,4),(3,2),(5,3)$
9	$(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,2)$
10	$(1,3),(3,1),(2,2),(1,2),(1,4)$
11	$(3,8),(8,4),(4,4),(8,3),(4,3)$
12	$(0,2),(2,3),(3,3),(3,0),(0,0)$
13	$(f,d),(b,d),(d,d),(c,b),(f,c)$
14	$(1,5),(5,2),(2,2),(1,1),(1,3)$
15	$(0,2),(0,3),(0,0),(1,0),(2,0)$
16	$(a,b),(a,c),(d,b),(c,c),(b,c)$
17	$(b,b),(d,d),(a,b),(c,a),(c,d)$
18	$(a,b),(b,c),(c,a),(b,b),(c,b)$
19	$(c,c),(c,b),(b,b),(a,b),(c,a)$
20	$(e,a),(a,a),(a,e),(e,b),(b,a)$

2. Дано відповідність $T = \{X, Y, G\}$.

   1) Зобразити відповідність у вигляді графа.

   2) З'ясувати, якими з 4 основних властивостей (всюди визначеність,

сюр'єктивність, функціональність, ін'єктивність) володіє T.

3) Знайти образ множини А і прообраз множини В при відповідності T.
4) Побудувати відповідність між нескінченними множинами, які володіють тим же набором властивостей, що і T.
5) Побудувати відповідність між кінцевими множинами, які володіють набором властивостей, протилежних даним.

Зауваження. Для цієї і побудованих відповідностей відзначити випадки відображень, вказати їх тип, відзначити випадки бієкції.

№	X	Y	G	A	B
1.	a, b, c, d, e	1,2,3	$(a, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (e, 1)$	e, c	2,3
2.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(a, 4), (b, 3), (c, 2), (d, 1)$	a, b	1,3
3.	a, b, c, d	1,2,3,4,5	$(a, 3), (b, 5), (c, 4), (d, 1)$	a, c	1,4
4.	a, b, c, d, e	1,2,3,4	$(d, 1), (b, 2), (e, 4), (a, 3)$	b, c	1,2
5.	a, b, c, d, e	1,2,3	$(b, 2), (c, 1), (e, 3), (a, 3)$	e, c	3,1
6.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(a, 2), (b, 3), (c, 1), (a, 4)$	a, b	1,2
7.	a, b, c, d, e	1,2,3,4,5	$(a, 5), (b, 3), (d, 1), (e, 2)$	d, e	1,3
8.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 1)$	a, c	1,3
9.	a, b, c	1,2,3,4,5	$(a, 2), (b, 1), (c, 5), (a, 3)$	a, b	3,4
10.	a, b, c	1,2,3	$(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 3)$	a, c	2,3
11.	a, b, c, d	1,2,3,4,5	$(a, 2), (c, 1), (d, 5), (c, 3)$	b, c	1,2
12.	a, b, c, d, e	1,2,3,4	$(b, 1), (c, 3), (d, 2), (c, 1)$	a, c	1,2
13.	a, b, c, d	1,2,3	$(a, 1), (b, 1), (c, 3), (b, 2)$	b, d	1,3
14.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(a, 4), (b, 3), (b, 2), (c, 3), (d, 4)$	a, b	3,4
15.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(a, 4), (c, 4), (b, 2), (a, 3)$	a, b	2,4
16.	a, b, c, d, e	1,2,3	$(a, 2), (b, 1), (d, 3), (e, 1)$	a, b	1,2
17.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(b, 3), (a, 2), (c, 2), (d, 1)$	a, c	1,4
18.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(a, 3), (c, 2), (d, 1), (c, 4)$	c, d	2,3
19.	a, b, c	1,2,3,4,5	$(a, 2), (b, 5), (c, 4), (b, 3)$	a, b	2,5
20.	a, b, c, d	1,2,3,4	$(a, 1), (b, 3), (a, 2), (c, 4)$	a, b	2,3

Практична робота № 4

ВІДНОШЕННЯ.

Мета роботи

Засвоїти поняття відношень між елементами множин, зокрема бінарних відношень. Закріпити навички по визначенню властивостей відношень, методам побудови і способам їх завдання.

Коротка теорія

Відповідність - це спосіб зіставлення елементів однієї множини елементам іншої. Іншими словами, це підмножина декартова добутку множин A і B. Бінарне відношення на множині A - це зіставлення елементів множини іншим елементам цієї ж множини. Таким чином, бінарне відношення на множині - це окремий випадок відповідності.

Бінарним відношенням на множині A називається деяка підмножина декартового квадрата множини A: $R \subseteq A^2$.

Якщо $(x, y) \in R$, то будемо писати xRy і говорити, що x і у вступають у відношення R. Якщо x і у не вступають у відношення R, будемо писати $\overline{xRy}$.

Множина пар $\Delta_A = \{(x, x) | x \in A\}$ називається діагоналлю бінарного відношення.

Властивості відношень:

1. Рефлексивність: $\forall_{x\in A}\ (xRx)$.
2. Антирефлексивність: $\forall_{x\in A}\ (\overline{xRx})$.
3. Симетричність: $\forall_{x\in A}\ \forall_{y\in A}\ (xRy \Longrightarrow yRx)$.
4. Антисиметричність: $\forall_{x\in A}\ \forall_{y\in A}\ (xRy, yRx \Longrightarrow x = y)$.
5. Транзитивність: $\forall_{x\in A}\ \forall_{y\in A}\ \forall_{z\in A}(xRy, yRz \Longrightarrow xRz)$.
6. Зв'язність $\forall_{x\in A}\ \forall_{y\in A}\ (x \neq y \Rightarrow xRy$ або $yRx)$.

Відношення називається відношенням часткового порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Відношення називається відношенням лінійного порядку, якщо воно є відношенням часткового порядку і зв'язне.

Відношення називається відношенням суворого порядку, якщо воно антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Відношення називається відношенням суворого лінійного порядку, якщо воно є зв'язним відношенням суворого порядку.

Відношення називається відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Класом еквівалентності, породженим елементом $\boldsymbol{x}$, називається множина всіх елементів з А, що вступають з $\boldsymbol{x}$ у відношення еквівалентності.

Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з теоретичною інформацією до практичної роботи.
2. Розгляньте приклади розв'язку завдань.
3. Оберіть у списку номер свого варіанту та розв'яжіть завдання для самостійної роботи.

Зразок виконання завдання

1. Виконайте наступні пункти:
   1. З'ясуйте, якими з властивостей: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність, зв'язність, володіє дане відношення $G = \{\, x\, \varphi\, y \iff x$ обіграв у за результатами особистих зустрічей} задане на множині A, якщо A – множина тенісистів, які беруть участь в турнірі, де кожен тенісист повинен зіграти з кожним рівно три партії.
   2. З'ясуйте, що представляє із себе відношення $G \circ G$, $G \circ G^{-1}$.
   3. Побудуйте на кінцевій множині відношення, що володіє таким же набором властивостей, що і подане. Зобразіть його графом і аналітично.

Розв'язання

1. З'ясуємо, якими з основних властивостей володіє дане відношення.
   1) Відношення G не є рефлексивним, так як знайдеться тенісист, що не обіграв сам себе.
   2) Відношення G є антирефлексивним, оскільки кожен тенісист не обіграє сам себе.
   3) Відношення G не є симетричним, так як знайдеться пара тенісистів x і y така, що х обіграв у за очками в особистих зустрічах, а у не обіграв х.
   4) ВідношенняGє антисиметричним, оскільки якщо x обіграв y, то y обов'язково не обіграє x.
   5) Відношення G не є транзитивним, так як може скластися ситуація, коли х

обіграв y, y обіграв z, і в той же час z обіграв x.

6) Відношення G є зв'язним, так як будь-яка пара спортсменів повинна зіграти між собою і виявити переможця.

З'ясуємо, що з себе представляють відношення $G \circ G$, $G \circ G^{-1}$.

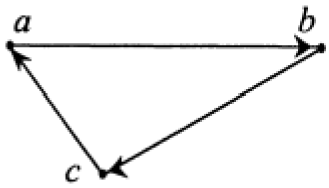
2. За визначенням композиції, $xG \circ Gy$ означає, що знайдеться z такий, що xGz і zGy. Тобто в відношення $G \circ G$ вступатимуть такі пари спортсменів x і y, для яких знайдеться тенісист z такий, що x обіграв z, а z обіграв y.

Міркуючи аналогічно, отримаємо, що в відношення $G \circ G^{-1}$ вступатимуть такі пари спортсменів x і y, для яких знайдеться тенісист z такий, що x обіграв z, а z програв y. Тобто графік відношення $G \circ G^{-1}$. будуть утворювати пари, складені з тенісистів, для яких знайдеться хоча б один спортсмен, якого вони обидва обіграли в турнірі.

3. Побудуємо на кінцевій множині відношення, що володіє таким же набором властивостей, що і подане.

Нехай $G = \{(\mathrm{a}, b), (b, \mathrm{c}), (\mathrm{c}, \mathrm{a})\}$ – відношення, задане на множині $A = \{a, b, c\}$.

Зобразимо це відношення у вигляді графа:



1) Це відношення не є рефлексивним, так як $\overline{aGa}$.

2) Ввідношення антирефлексивне, так як $\overline{aGa}$ і $\overline{bGb}$ і $\overline{cGc}$.

3) Відношення не симетричне, так як aGb і $\overline{bGa}$.

4) Відношення антисиметричне, так як aGb і $\overline{bGa}$, bGc і $\overline{cGb}$, cGa і $\overline{aGc}$.

5) Відношення не транзитивне, так як aGb і bGc, але $\overline{aGc}$.

6) Відношення зв'язне, так як будь-яка пара різних елементів з множини $\{\mathrm{a}, b, \mathrm{c}\}$ вступає в відношення G в тому чи іншому порядку.

2. Для даного відношення $\Phi = (\{1,2,3,4,5\}, \{(1,2), (1,3), (5,4)\})$ виконати наступне:

1) зобразити Ф графом.
2) добудувати Ф до відношення еквівалентності.
3) добудувати Ф до відношення часткового порядку.
4) добудувати Ф до відношення лінійного порядку.

5) добудувати Ф до відношення суворого порядку.

6) добудувати Ф до відношення суворого лінійного порядку.

Розв’язання

1) Зобразимо граф відношення Ф (рис. 1):

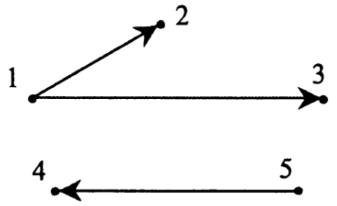


Рисунок 1

2) Добудуємо Ф до відношення еквівалентності G_1 додаючи мінімально можливу кількість ребер, позначимо графік отриманого відношення еквівалентності через G_1. Тогда G_1 матиме вигляд: $\{(1,2),(1,3),(5,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,1),(3,1),(4,5),(2,3),(3,2)\}$.

Зобразимо граф відношення Φ_1 (рис. 2).

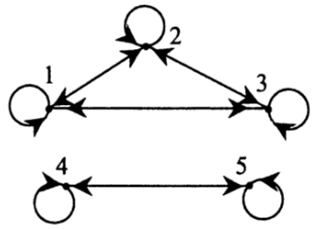


Рисунок 2

3) Добудуємо Ф до відношення часткового порядку G_2:

$G_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(5,4)\}$.

Зобразимо граф Φ_2(рис. 3). Мінімальними елементами тут є 1 і 5, максимальними елементами — 2, 3 і 4. Пари непорівнювальних елементів:

$\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{2,3\}$.

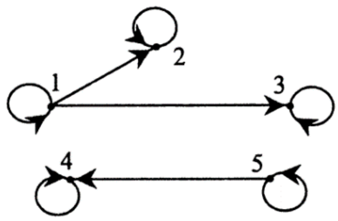
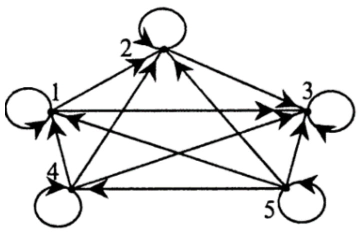


Рисунок 3

4) Добудуємо Ф до відношення лінійного порядку G_3:

$G_3 = G_2 \cup \{(2,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$.



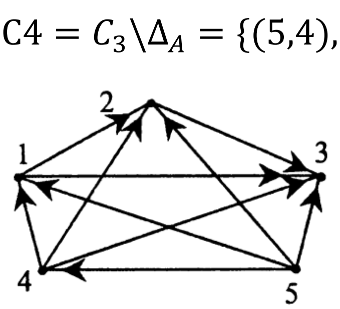
Зобразимо граф відношення G_3.

Найбільшим елементом тут є 3, а найменшим — 5.

5) Саме вихідне відношення Ф є відношенням суворого порядку, так що добудовувати його немає необхідності.

6) Добудуємо Ф до відношення суворого лінійного порядку G_4:

$C4 = C_3 \backslash \Delta_A = \{(5,4),(5,1),(5,2),(5,3),(4,1),(4,3),(4,3),(1,2),(1,3),(3,2)\}$.



Зобразимо граф відношення G_4.

Завдання виконане.

Завдання для самостійної роботи

1. Виконайте наступні пункти:

1. З'ясуйте, якими з властивостей: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність, зв'язність володіє дане відношення G.
2. З'ясуйте, що представляє із себе відношення $G \circ G$, $G \circ G^{-1}$.
3. Побудуйте на кінцевій множині відношення, що володіє таким же набором властивостей, що і подане. Зобразіть його графом і аналітично.

№	A	G
1	множина студентів нашого ВНЗ	$xGy \Leftrightarrow x, y$ вчяться на одному курсі
2	читачі бібліотеки нашого ВНЗ	$xGy \Leftrightarrow x, y$ прочитали одну й ту ж саму книгу
3	множина кіл на площині	$xGy \Leftrightarrow x$ дотикається до y
4	мешканці Одеси на початок цього року	$xGy \Leftrightarrow x$ та y подружжя
5	мешканці Одеси на початок цього року	$xGy \Leftrightarrow x$ та y є частиною однієї і тієї ж політичної партії
6	прямі у просторі	$xGy \Leftrightarrow x$ та y мають хоча б одну спільну точку
7	мешканці Одеси на початок цього року	$xGy \Leftrightarrow x$ та y різного віку
8	$\mathbb{N}$	$xGy \Leftrightarrow x$ та y мають такий самий залишок від ділення на 3
9	Мешканці Одеси на початку цього року	$xGy \Leftrightarrow$ x – батько для y
10	$\mathbb{R}$	$xGy \Leftrightarrow 2x > y^2$
11	$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0,1\}\}$	$xGy \Leftrightarrow x$ та y розрізняються лише однією координатою
12	$\mathbb{R}$	$xGy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$
13	Мешканці Одеси на початку цього року	$xGy \Leftrightarrow x$ старше за y
14	[0,4]	$xGy \Leftrightarrow x > 2y + 1$
15	$\mathbb{R}$	$xGy \Leftrightarrow x$ та y мають однакову цілу частину
16	$\mathbb{N}$	$xGy \Leftrightarrow x \cdot y$ кратне трьом
17	Мешканці Одеси на початку цього року	$xGy \Leftrightarrow y$ теща для x
18	[0,2]	$xGy \Leftrightarrow x + y < 1$
19	$\mathbb{N}^2$	$(x, y)\ G\ (z, t) \Leftrightarrow xt = yz$

20	$\mathbb{N}$	$xGy \iff x + y$ кратне трьом

2. Для даного відношення Ф = ({1,2,3,4,5}, G) виконати наступне:
   1) зобразити Ф графом.
   2) добудувати Ф до відношення еквівалентності.
   3) добудувати Ф до відношення часткового порядку.
   4) добудувати Ф до відношення лінійного порядку.
   5) добудувати Ф до відношення суворого порядку.
   6) добудувати Ф до відношення суворого лінійного порядку.

Зауваження: відношення добудовується за допомогою введення мінімально необхідного числа додаткових ребер.

№	
1	(1,2), (3,2), (2,4)
2	(2,1), (5,1), (4,2)
3	(1,2), (3,4), (4,5)
4	(3,1), (2,5), (5,4)
5	(1,5), (5,4), (4,3)
6	(2,3), (3,5), (5,1)
7	(1,2). (4,3), (4,5)
8	(3,5), (4,2), (1,2)
9	(1,2), (2,3), (2,4), (4,5)
10	(1,2), (2,3), (4,5), (5,3)

№	
11	(1,2), (1,5), (1,4)
12	(1,2), (1,3), (3,2), (4,5)
13	(1,2), (2,3), (3,4), (5,5)
14	(4,3), (5,1), (1,2)
15	(1,3), (3,4), (1,4), (2,5)
16	(2,3), (4,3), (3,5)
17	(3,2), (1,2), (5.3)
18	(2,3), (4,5), (5,1)
19	(4,2), (3,1), (1,5)
20	(2,1), (1,5), (5,4)

Практична робота № 5

КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ З ТЕМИ «ТЕОРІЯ МНОЖИН»

Мета роботи

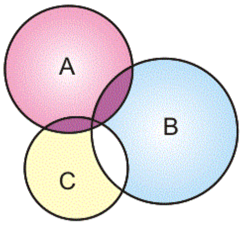
Перевірити ступінь засвоєння основних понять теорії множин.

Порядок виконання роботи

1. Дайте відповідь на поставлені запитання.
2. Перевірте правильність наданих відповідей за ключами викладача.
3. Зробіть аналіз помилок, виконайте роботу по їх усуненню.

Завдання для самостійної роботи

1. Область, виділена на діаграмі білим кольором, відповідає формулі



А. $(A \cup B) \setminus C$ Б. $(B \cup C) \setminus A$

В. $(A \cup C) \setminus B$ Г. $(B \cap C) \setminus A$

2. Які співвідношення виконані для множин A і B, якщо $A = \{1, \{2,3\}\}$, $B = \{2\}$?

   А. $B \subset A$ Б. $B \cap A = \emptyset$

   В. $B \in A$ Г. $B \cap A \neq \emptyset$

3. Для множини $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ оберіть рівну множину:

   А. $B \cup A$ Б. $(A \cap B) \setminus A$

   В. $A \setminus (B \setminus A)$ Г. A Δ B

   Д. (A \ B) ∩ A

4. Проекцією множини векторів $\{(a,b,c,d),(b,b,c,a),(d,c,b,a),(b,c,d,a)\}$ на 2 ось є множина

   А. $\{a,b\}$ Б. $\{a,b,c\}$

   В. $\{c,b\}$ Г. $\{a,b,d\}$

   Д. $\{a,b,c,d\}$

5. Для множин $A = \{1,2,3\}$ і $B = \{a\}$ вкажіть потужність декартова добутку:

   А. 1 Б. 2

   В. 3 Г. 4 Д. 9

6. Якщо $|A| = n$ і $|B| = k$, то $|A \times B| =$

   А. n Б. n^k

   В. nk Г. $n + k$ Д. n/k

7. Дано відповідність: $G = (\{a,b,c,d\},\{1,2,3,4,5\},\{(a,2),(b,2),(c,1),(d,3)\})$. Якими з перелічених властивостей володіє G ?

   А. всюдивизначеність Б. сюр'єктивність

   В. функціональність Г. ін'єктивність

8. Множину цілих чисел у діапазоні от m до n визначають як

   А. $\{\, k \in \mathbb{Z} \mid m \leq k \cap k \geq n\}$ Б. $\{\, k \in \mathbb{Z} \mid n \leq k \cap k \geq m\}$

   В. $\{\, k \in \mathbb{Z} \mid m \leq k \cup k \leq n\}$ Г. $\{\, k \in \mathbb{Z} \mid m \leq k \setminus k \geq n\}$

9. Об'єднанням множин А і В, називають множину С, що складається з

   А. всіх елементів, що належать хоча б одній з множин А і В

   Б. всіх елементів, що належать одночасно і множині А, і множині В

   В. елементів, кожен з яких дорівнює сумі відповідних елементів множин А і В;

   Г. усіх елементів множини А і всіх елементів множини В.

10. Операція об’єднання множин визначається як:

   А. $\{ x \mid x \in A$ або $x \in B \}$ Б. $\{ x \mid x \in A$ і $x \in B\}$

   В. $\{ x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$ Г. $\{ x \mid (x \in A$ і $x \notin B)$або$(x \notin A$ і $x \in B)\}$

   Д. $\{ x \mid x \notin A\}$

11. Операція перетину множин визначається як:

   А. $\{ x \mid x \in A \cup x \in B\}$ Б. $\{ x \mid x \in A \cap x \in B\}$

   В. $\{ x \mid x \in A \cap x \notin B\}$ Г. $\{ x \mid (x \in A \cap x \notin B) \cup (x \notin A \cap x \in B)\}$

   Д. $\{ x \mid x \notin A\}$

12. Операція різниці множин визначається як:

   А. $\{ x \mid x \in A \cup x \in B\}$ Б. $\{ x \mid x \in A \cap x \in B\}$

   В. $\{ x \mid x \in A \cap x \notin B\}$ Г. $\{ x \mid (x \in A \cap x \notin B) \cup (x \notin A \cap x \in B)$

   Д. $\{ x \mid x \notin A\}$

13. Множина всіх підмножин М називається булеаном і позначається

   А. M^2 Б. M_2

   В. $2M$ Г. 2^M Д. 2_M

14. Для прямого добутку множин справедливо

   А. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ Б. $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

   В. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ Г. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

15. Визначте: $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}|$ якщо $|\mathrm{A}| = 10,\ |\mathrm{B}| = 7,\ |\mathrm{AB}| = 3.$

   А. 14   Б. 19

   В. 22   Г. 18

16. Бінарне відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, 3x = 2y\}$ складається з наступних пар елементів …

   А. (2,3) і (3,2)   Б. (3,2) і (6,4)

В. (2,3) і (4,6) Г. (2,3), (3,2), (4,6) і (6,4)

17. Декартовим добутком $A \times B$ двох множин A і B називається…

А. множина усіх добутків елементів, що належать множинам A і B

Б. множина всіх впорядкованих пар, перший елемент яких належить множині A, а другий – множині B

В. множина всіх невпорядкованих пар, один елемент яких належить множині A, а другий – множині B

Г. множина всіх впорядкованих пар, перший елемент яких належить множині B, а другий – множині A

18. Потужність декартового добутку $A \times B \times C$ множин $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ і $C = \{a, d, e\}$ дорівнює…

А. 24 Б. 10

В. 12 Г. 36.

19. Дано бінарне відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, x > y\}$.

Область визначення відношення R^{-1} дорівнює…

А. {1,2,3,4,5,6,7} Б. {1,2,3,4,5,6,7,8}

В. {2,3,4,5,6,7,8} Г. {2,3,4,5,6,7}

20. Дано бінарне відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, x \geq y\}$.

Область значень відношення $\bar{R}$ дорівнює …

А. {1,2,3,4,5,6,7} Б. {1,2,3,4,5,6,7,8}

В. {2,3,4,5,6,7,8} Г. {2,3,4,5,6,7}.

21. Бінарне відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, x - y < 2\}$ є …

А. рефлексивним, симетричним й транзитивним

Б. рефлексивним, антисиметричним й антитранзитивним

В. антирефлексивним, симетричним й антитранзитивним

Г) антирефлексивним, антисиметричним й транзитивним.

22. Бінарне відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ |y - x| > 1\}$ є…

А. рефлексивним, симетричним й транзитивним

Б. антирефлексивним, антисиметричним й антитранзитивним

В. антирефлексивним, симетричним й антитранзитивним

Г. антирефлексивним, антисиметричним й транзитивним.

23. Матриця рефлексивного бінарного відношення, заданого на кінцевій множині володіє властивістю …

А. головна діагональ матриці містить тільки одиниці;

Б. головна діагональ матриці містить тільки нулі;

В. матриця симетрична відносно головної діагоналі;

Г. матриця має трикутний вигляд.

24. Бінарне відношення є відношенням суворого порядку, якщо воно…

А. рефлексивне, симетричне й транзитивне

Б. антирефлексивне, антисиметричне й транзитивне

В. рефлексивне, антисиметричне й транзитивне

Г. рефлексивне, симетричне й антитранзитивне

25. Відношення f з A в B називається функціональним, якщо воно володіє наступною властивістю …

А. якщо $f(a) = b$ і $f(a) = c$, то $b = c$

Б. якщо $f(a) = b$ і $f(c) = b$, то $a = c$

В. область визначення $Dom\ (f) = A$

Г. область значень $Im\ (f) = B$

26. Функція f з A в B є взаємнооднозначною(біекцією), якщо вона …

А. всюди визначена і ін’єктивна

Б. всюди визначена і сюр’єктивна

В. ін’єктивна і сюр’єктивна

Г. всюди визначена, ін’єктивна і сюр’єктивна

27. $\mathrm{A} = \{1; 2\}, \mathrm{B} = \{2; 3\}$. Визначте $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$

А. $\{(2;1);(2;2);(3;1);(3;2)\}$

Б. $\{(1;2);(1;1);(2;1);(2;2)\}$

В. $\{(1;2);(1;3);(2;2);(2;3)\}$

Г. $\{(2;3);(2;2);(3;2);(3;3)\}$

28. Відповідністю задається сукупність впорядкованих пар (x, y), які є елементами множини

А. $Y \times X$

Б. $\{X, Y\}$

В. $\{Y, X\}$

Г. $X \cup Y$

Д. Х × У

Е. $X \cap Y$

29. Відповідність називається функціональною, якщо

А. для всіх елементів області визначення існує образ

Б. для всіх елементів області визначення існує єдиний образ

В. для будь-якого образа існує прообраз

Г. для будь-якого образа існує єдиний прообраз

30. Підмножини декартового добутку можуть бути:

А. відповідностями Б. функціями

В. відношеннями Г. пропорціями

31. Яка з множин є булєаном множини А $= \{1, 2, 3\}$?

А. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Б. $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

С. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Д. $\{\emptyset , \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3, 1\}\}$.

32. Якщо для будь-яких x, y з X із xQy і yQx випливає $x = y$, то таке відношення Q називається

А. рефлексивним Б. антирефлексивним

В. симетричним Г. антисиметричним

Д. транзитивним

33. Нехай f є функцією з X в Y. Якщо для будь-якого елемента y з Y існує x з X такий що $y = f(x)$, то функція f

А. ін’єктивна Б. сюр’єктивна

В. бієктивна Г. транзитивна

34. Якщо для будь-яких x з X виконується xQx, то таке відношення Q називається

А. рефлексивним Б. антирефлексивним

В. симетричним Г. антисиметричним

Д. транзитивним

35. Якщо для будь-яких x, y з X з xQy випливає yQx, то таке відношення Q називається

А. рефлексивним Б. антирефлексивним

В. симетричним Г. антисиметричним

Д. транзитивним

36. Якщо для жодного x з X не виконується xQx, то таке відношення Q називається

А. рефлексивним
Б. антирефлексивним
В. симетричним
Г. антисиметричним
Д. транзитивним

37. Якщо для будь-яких x, y з X із xQy і yQx випливає xQz, то таке відношення Q називається

А. рефлексивним
Б. антирефлексивним
В. симетричним
Г. антисиметричним
Д. транзитивним

38. Бінарне відношення Q на множині X називається відношенням еквівалентності, якщо воно

А. транзитивне й антисиметричне
Б. антирефлексивне й транзитивне
В. рефлексивне й транзитивне
Г. симетричне й транзитивне
Д. рефлексивне, симетричне й транзитивне

39. Бінарне відношення Q на множині X називається відношенням порядку, якщо воно

А. транзитивне й антисиметричне
Б. антирефлексивне й транзитивне
В. рефлексивне й транзитивне
Г. симетричне й транзитивне
Д. рефлексивне, симетричне й транзитивне

40. Нехай Q відношення порядку. Якщо будь-які нерівні елементи x й y множини X порівнювальні у сенсі відношення Q, то це відношення називається

А. відношенням лінійного порядку
Б. відношенням часткового порядку
В. відношенням суворого порядку
Г. відношенням відносного порядку

ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1 Капітонова Ю. Л., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики. Том 1.- LitSoft: Київ, 2000.

2 Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика : К. Видавнича група BHV, 2007. 368 с.

3 Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Т. Комп’ютерна дискретна математика : Харків. «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.

Додаткова література

4 Дискретна математика : метод. вказівки та завдання (для студентів мат. фак.) / Укл.: Бортей М. С., Дрінь М. М., Свердан М. Л., Якімов І. В., Чернівці : Рута, 2000. 94с.

5 Дискретна математика: методичні вказівки та завдання для самостійної роботи (для студентів математичного факультету) / Укл.: Свердан М. Л., Бортей М. С., Якімов І. В., Чернівці : ЧДУ, 1998. 64 с.

6 Кужель О. В. Елементи теорії множин і математичної логіки. Київ : Радянська школа, 1977. 315 с.

7 Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. Санкт-Петербург.: БХВ-Петербург, 2008. 352 с.