Міністерство освіти і науки України
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут
природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту

Калюжний-Вербовецький Дмитро Семенович
Пивоварчик Вячеслав Миколайович

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Теорія лінійних операторів у ільбертовому просторі

Одеса 2026

УДК: 517.53

Друкується за рішенням вченої ради Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол від «___» __________ 2026 року).

Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі: Методичні рекомендації до практичних занять та організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теорія лінійних операторів у Гільбертовому просторі» для студентів третього (освітньо-наукового) рівня освіти, спеціальність: Е7 Математика.

Рецензенти:

Лесечко Олександр Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури.

Бойко Ольга Павлівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики та інформатики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського.

Методичні рекомендації з навчального курсу «Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі» – це навчальне видання для студентів третього (освітньо-наукового) рівня освіти, спеціальність: Е7 Математика, яке вміщує матеріал щодо специфіки дисципліни, особливостей засвоєння теоретичної частини, літературних джерел, виконання індивідуальних і самостійних завдань, підготовки до практичних занять, містять список літератури, тощо.

Ключові слова: скалярний добуток, лінійна комбінація, спектр, власні значення, самоспряженість, резольвента, обернений оператор, компактний оператор.

ЗМІСТ.

Вступ.

Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі вивчає неперервні відображення між просторами зі скалярним добутком. Основний акцент робиться на обмежених операторах, їх нормах, спряжених операторах, а також самоспряжених, унітарних та проекційних операторах. Ключову роль відіграють спектральна теорія, що описує структуру операторів, та теорема Ріса-Фреше.

Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі — це фундамент сучасного функціонального аналізу та квантової механіки. Гільбертів простір (H) поєднує лінійну структуру з геометрією (завдяки скалярному добутку), що дозволяє узагальнити поняття векторів та матриць на нескінченновимірний випадок і тоді розглядати вже не тільки крайові та спектральні задачі, а й задачі розсіювання квантової фізики.

Ця теорія є фундаментальною для квантової механіки, де фізичні величини описуються самоспряженими операторами. У класичній механиці також існують задачі, які зручно описувати як спектральні задачі, породжені самоспряженими операторами (інколи і несамоспряженими) операторами або операторними в'язками, що діють у гільбертовому просторі.

Опис та структура навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, ОПП, спеціальність, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни
		денна форма навчання
Кількість кредитів –4	Галузь знань 11 Математика та статистика	**Статус дисципліни**: Обов'язкова
Модулів – 1	Спеціальність 111 Математика	**Рік підготовки: 2**
Змістових модулів -2		2-й
Індивідуальне науково-дослідне завдання – тези / аналітичний аналіз джерел		**Семестр**
Загальна кількість годин – 120		3-й
		Лекції
	Рівень вищої освіти:	20 год.

<table>
<tr><td rowspan="10">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних 2 –
самостійної роботи студента – 4</td><td rowspan="10">третій (освітньо-науковий)
Ступінь освіти:
Доктор філософії (PhD)</td><td>Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>20 год.</td></tr>
<tr><td>Лабораторні</td></tr>
<tr><td>0 год.</td></tr>
<tr><td>Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>70 год.</td></tr>
<tr><td>Індивідуальні завдання:</td></tr>
<tr><td>10 год.</td></tr>
<tr><td>Вид контролю: екзамен</td></tr>
</table>

Мета навчальної дисципліни «Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі»: опанувати основні розділи теорії лінійних операторів у гільбертовому просторі для подальшого використання при вивченні дисциплін вільного вибору та написання наукових робіт, дисертації.

Передумови для вивчення дисципліни: для вивчення навчальної дисципліни «Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі» достатньо, щоб здобувачі володіли навчальним матеріалом, визначеним програмою з математичного аналізу для педагогічних закладів вищої освіти, закладів, а саме такими розділами математичного аналізу, як диференціальне та інтегральне числення, теорія числових та функціональних рядів, а також матеріал дисципліни ОК5 «Теорія цілих функцій».

Очікувані програмні результати навчання

ПРН 04. Аналізувати й узагальнювати явища та проблеми, виявляти гнучкість у прийнятті рішень на основі логічних аргументів та перевірених фактів в умовах обмеженого часу і ресурсів на засадах загальнонаукової методології.

ПРН 07. Грунтовні знання різних розділів математики та розуміння професії.

ПРН 08. Знання процедури встановлення наукової цінності і правильності математичних фактів, залежності між ними, методологічних принципів та методів математичного дослідження.

ПРН 10. Знати сучасні тенденції, напрямки, наукові концепції та закономірності розвитку світової та вітчизняної науки, основні математичні наукові школи, їх теоретичні та прикладні розробки.

Очікувані результати вивчення дисципліни

знати:

- означення нормованого та банахового просторів;
- означення лінійного функціоналу;
- поняття спряженого простору;
- теорему Гана-Банаха;
- приклади лінійних неперервних функціоналів у різних банахових проторах;
- поняття рефлексивності;
- теорему Банаха-Штейнгауза;
- поняття ортогональності у гільбертовому просторі;
- теорему Ріса;
- поняття ортонормованого базису у гільбертовому просторі;
- поняття лінійного оператора у нормованому просторі;
- поняття оберненого оператора;
- поняття спряженого оператора;
- означення оператора Гільберта-Шмідта;
- поняття спектра та резольвенти оператора;
- поняття компактного оператора;
- спектральний розклад самоспряженого оператора.

уміти:

- застосовувати абстрактні теореми функціонального аналізу до конкретних просторів та операторів в них;
- досліджувати неперервність конкретних лінійних функціоналів та знаходити їх норму;
- досліджувати спектральні властивості операторів
- з'ясовувати чи є оператор самоспряженим;
- будувати спряжений оператор до даного скінченновимірного оператору;
- знаходити резольвенту оператору;
- перевіряти чи є оператор компактним;

- аналізувати теоретичні та прикладні задачі з точки зору методів функціонального аналізу та теорії операторів.

Навчальна дисципліна формує міждисциплінарні взаємозв'язки з іншими дисциплінами, такими як «Теорія цілих функцій», «Квантові графи», «Методологія наукових досліджень у галузі математики та статистики». «Філософія та етика наукових досліджень», «Культура української наукової мови», «Іноземна мова у науковому спілкуванні».

Унаслідок досягнення результатів навчання здобувачі вищої освіти в контексті змісту навчальної дисципліни мають опанувати такі компетентності:

Інтегральна компетентність. Здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та дослідницько-інноваційної діяльності, що передбачає глибоке переосмислення наявних і створення нових цілісних знань та професійної практики.

Загальні компетентності:

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК02. Здатність до проведення дослідницької та інноваційної діяльності.

ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК07. Здатність проводити дослідження на відповідному рівні.

ЗК08. Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК10. Здатність генерувати нові ідеї (креативність).

Спеціальні компетентності:

СК01. Вміння користуватись методами сучасного функціонального аналізу, здатність застосовувати методи функціонального аналізу при дослідженні задач з суміжних областей.

СК04. Застосовувати сучасні методи спектральної теорії самоспряжених операторів у наукових дослідженнях.

СК15. Описувати розташування власних значень квадратичної операторної в'язки.

Критерії оцінювання

Критерії оцінювання за різними видами роботи

Вид роботи	бали	Критерії
Практичні завдання	0 балів	Здобувач відтворює незначну частину навчального матеріалу, має поверхові уявлення про предмет вивчення, неаргументовано висловлює думку. Використовує необхідні інформаційно-методичні матеріали, виконує практичні завдання за умови сторонньої допомоги.
	1 бал	Знання здобувача є достатньо повними, він самостійно застосовує відповідний навчальний матеріал, виконуючи практичні завдання; аналізує, робить висновки. Відповідь повна, логічна, обґрунтована, але припускається неточностей. Здобувач самостійно використовує необхідні інформаційно-методичні матеріали виконуючи практичні завдання. Виконані завдання у цілому відповідають вимогам, хоча мають незначні огріхи.
	3 бали	Здобувач володіє міцними знаннями, оперує ними при виконанні практичних завдань. Самостійно використовує необхідні інформаційно-методичні матеріали виконуючи практичні завдання. Не припускається помилок при їхньому виконанні. Здобувач виступає експертом практичних завдань, що виконали однокурсники.
Самостійна робота	0 балів	Здобувач розпізнає деякі об'єкти вивчення та визначає їх на побутовому рівні, може описувати деякі об'єкти вивчення; має фрагментарні уявлення з предмета вивчення; виконує елементарні прийоми практичних завдань.
	1 бал	Здобувач знає окремі факти, що стосуються навчального матеріалу; виявляє здатність елементарно висловлювати думку; самостійно та за допомогою викладача може виконувати частину практичних завдань; знає послідовність виконання завдання; практичні завдання містять багато суттєвих відхилень від установлених вимог, при їх виконанні потребує систематичної допомоги викладача.
	2 бали	Здобувач самостійно і логічно відтворює фактичний і теоретичний матеріал та наводить приклади; володіє навчальним матеріалом і використовує набуті знання, уміння у стандартних ситуаціях; самостійно виконує практичні завдання відповідно до методичних рекомендацій; практичні завдання мають окремі помилки; користується необхідними навчально-методичними матеріалами.
	3 бали	Здобувач володіє глибокими знаннями, демонструє відповідні компетентності, використовує їх у нестандартних ситуаціях, самостійно працює з інформацію у відповідності до поставлених завдань; систематизує та узагальнює навчальний матеріал; самостійно користується додатковими джерелами інформації; без похибок виконує та аналізує практичні завдання.

Індивідуальне науково-дослідне завдання *(тези / аналітичний аналіз джерел)*	*Тези*	
	1 бал	Представлений текст не є по формі тезами (підміняється рефератом, доповіддю).
	2-3 бали	Тези не відповідають необхідному обсягу, змістовні зв'язки тексту тез з цитованими науковими текстами відсутні,

		внутрішня логіка есе порушена (текст є аплікацією з власної думки і «цитат» з наукових текстів). Представлено власну позицію за визначеною проблематикою на побутовому рівні без аргументації.
	4-5 балів	Тези відповідають необхідному обсягу, власна позиція здобувача формально підкріплена посиланнями на наукову літературу за відсутності змістовних зав'язків з цитованими науковими текстами. Проблема розкрита при формальному використанні фахових термінів. Власна думка не достатньо аргументована практичними фактами.
	6-7 балів	Тези відповідають необхідному обсягу, власна позиція викладена. Проблема розкрита з використанням основних термінів і понять у контексті відповіді (теоретичні зв'язки й обґрунтування не присутні або явно не простежуються). Наведено аргументацію своєї думки з опорою на факти. Проте наукове обґрунтування виконано схематично, позиція здобувача і наукові тексти формально узгоджені, при цьому внутрішня логіка тексту розмита.
	8-9 балів	Тези відповідає необхідному обсягу, власна позиція викладена аргументовано. Проблема розкрита на теоретичному рівні, з обґрунтуваннями, з достатнім використанням фахових термінів і понять у контексті відповіді. Власна думка аргументована практичними фактами.
	10 балів	Тези відповідають необхідному обсягу, власна позиція викладена грамотно і самостійно. Проблема розкрита на теоретичному рівні, у зв'язках і з обґрунтуваннями, з точним і повним використанням фахових термінів і понять у контексті відповіді. Робота логічна, послідовна, композиційно чітка. Дано аргументацію своєї думки з опорою на практичні факти.
	Аналіз джерел	
	1 бал	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше три джерела. Аналіз відбувається за певною методикою, вибір якої недостатньо обґрунтований, критерії аналізу не зовсім зрозумілі і застосовуються автором з певними неточностями. Обрані методи підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із покликаннями на джерела, містить великі цитати з першоджерел, які мають певні огріхи в оформленні. Робота слабо структурована, містить таблиці, показники, які оформлені не за правилами тощо. Висновки загальні, не підкріплені доказовою базою і не відображають авторської позиції з тематики, що досліджується.
	2 бали	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше три джерела. Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії і застосовуються автором із чітким указанням їх актуальності. Обрані методи підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із покликаннями на джерела та містить цитати з першоджерел,які мають певні огріхи в оформленні. Робота

		добре структурована, містить таблиці, показники тощо. Висновки ґрунтовні та підкріплені доказовою базою.
	3 бали	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше п'ять джерел. Здійснення аналітичного аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами розглядалися і застосовувалися, однак мають потенціал і застосовуються автором із чітким указанням їх актуальності. Обрані методи підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із покликаннями на джерела та містить цитатами з першоджерел, добре структурований, містить таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався недостатньо обґрунтовані.
	4 бали	Аналітичний аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше п'ять джерел. Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами не розглядалися та не застосовувалися, підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із чіткими покликаннями на джерела та не обтяжений довгими цитатами, добре структурований, містить власно розроблені таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та власні прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався мають певний сумнів, або недостатньо обґрунтовані.
	5 балів	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше п'ять джерел, з яких хоча б одно – практичне (статистичне). Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами не розглядалися та не застосовувалися, підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із чіткими покликаннями на джерела та не обтяжений довгими цитатами, добре структурований, містить власно розроблені таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та власні прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався.
	6 балів	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше шість джерел, з яких хоча б одно – практичне (статистичне). Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами не розглядалися та не застосовувалися,

		підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із чіткими покликаннями на джерела та не обтяжений довгими цитатами, добре структурований, містить власно розроблені таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та власні прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався.
	7 балів	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше сім джерел, з яких хоча б одно – практичне (статистичне). Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами не розглядалися та не застосовувалися, підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із чіткими покликаннями на джерела та не обтяжений довгими цитатами, добре структурований, містить власно розроблені таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та власні прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався.
	8 балів	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше вісім джерел, з яких хоча б одно – практичне (статистичне). Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами не розглядалися та не застосовувалися, підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із чіткими покликаннями на джерела та не обтяжений довгими цитатами, добре структурований, містить власно розроблені таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та власні прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався.
	9 балів	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить щонайменше 10 джерел, з яких хоча б два – практичні (статистичні). Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами не розглядалися та не застосовувалися, підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із чіткими покликаннями на джерела та не обтяжений довгими цитатами, добре структурований, містить власно розроблені таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та власні прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався.

	10 балів	Аналіз документів за темою зроблений самостійно, містить 10-15 джерел, з яких хоча б два – практичні (статистичне). Здійснення аналізу відбувається за правильно обраною методикою, містить чіткі критерії, які раніше авторами не розглядалися та не застосовувалися, підпорядковані тематиці дослідження та сприяють розкриттю поставленого питання. Матеріал оформлений із чіткими покликаннями на джерела та не обтяжений довгими цитатами, добре структурований, містить власно розроблені таблиці, показники тощо. Висновки самостійні, ґрунтовні та підкріплені доказовою базою. Надані рекомендації та власні прогнозні показники подальшого розвитку явища (процесу) який досліджувався.

Критерії оцінювання підсумкового контролю (екзамен)

Для навчальної дисципліни «Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі» за навчальним планом передбачається підсумковий контроль у формі екзамену.

Критерії оцінювання за всіма видами контролю

Сума балів	Критерії оцінки
Відмінно (90-100 А)	Здобувач демонструє міцні знання навчального матеріалу в обсязі, що відповідає програмі навчальної дисципліни, правильно й обґрунтовано приймає необхідні рішення в різних нестандартних ситуаціях; реалізує теоретичні положення навчальної дисципліни виконуючи практичні завдання у сфері методології наукових досліджень в галузі математики та статистики. При виконанні практичних завдань проявляє вміння самостійно вирішувати поставлені завдання, активно включається в обговорення, відстоює власну точку зору в питаннях та рішеннях, що розглядаються. Оцінка нижче 100 балів обґрунтовується недостатнім розкриттям теоретичних питань навчальної дисципліни, або тим, що студент проявляє невпевненість в тлумаченні теоретичних положень чи складних практичних завдань.
Добре (82-89 В)	Здобувач демонструє знання, володіння матеріалом в обсязі, що відповідає програмі навчальної дисципліни, робить на їхній основі аналіз можливих ситуацій та вміє застосовувати теоретичні положення при вирішенні задач теорії лінійних операторів у гільбертовому просторі, але припускається несуттєвих помилок. При виконанні практичних завдань, здобувач самостійно виправляє допущені помилки, кількість яких є незначною.
Добре (74-81 С)	Здобувач на достатньому рівні володіє навчальним матеріалом, знає основні теоретичні положення, що відповідають програмі навчальної дисципліни, аналізує можливі практичні ситуації та вирішує їх, але припускається помилок які усуває за підтримки з боку викладача або однокурсників. Пояснює основні положення теорії лінійних операторів у

	гільбертовому просторі, дає правильні відповіді на запитання. Помилки у відповідях не є системними, впевнено працює за алгоритмом.
Задовільно (64-73 D)	Здобувач розуміє основні положення навчальної дисципліни, котрі є визначальними і орієнтується у напрямі вирішення практичних завдань. Здобувач розуміє практичні завдання, має пропозиції щодо напрямку їх вирішення. Самостійно вирішує завдання за зразком, допускає значну кількість неточностей, помилок, котрі усуває під керівництвом викладача, підтримки з боку однокурсників. Розуміє основні положення теорії лінійних операторів у гільбертовому просторі.
Задовільно (60-63 E)	Здобувач поверхнево опанував навчальний зміст, передбачений програмою навчальної дисципліни, володіє основними положеннями на мінімально допустимому рівні. Знання щодо основних положень методології наукових досліджень несистемні, фрагментарні. Виконання практичних завдань, формалізоване: є відповідність алгоритму, виконує практичні завдання за підтримки з боку викладача зі значними труднощами; відсутнє глибоке розуміння матеріалу.
Незадовільно (35-59 FX)	Здобувач має фрагментарні знання, опанувавши менше половини обсягу навчального змісту, передбаченого програмою навчальної дисципліни**.** Відсутнє цілісне усвідомлення навчального матеріалу. Здобувач працює пасивно, практичні завдання виконує переважно з помилками, виправляє помилки лише при виконанні нескладних практичних завдань. Здобувач допускається до повторного складання заліку.
Незадовільно (0-34 F)	Здобувач не виконує вимоги програми навчальної дисципліни: не сформовані знання уміння та навички. Здобувач не допускається до заліку та проходить повторне вивчення дисципліни.

Розподіл балів, які отримують студенти за результатами поточного і підсумкового контролю (екзамен)

Поточний контроль (практичні заняття, самостійна робота, ІНДЗ)			ІНДЗ	Екзамен	Сума
Теми	Бали	Разом			
Тема 1	0–17	0–70	0–10	0-20	0–100
Тема 2	0–18				
Тема 3	0–17				
Тема 4	0–18				

Шкала оцінювання за всіма видами контролю:

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
90–100	A	Відмінно
82–89	B	Добре
74–81	C	
64–73	D	Задовільно
60–63	E	
35–59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання
0–34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

Теми лекційних занять.

Тема 1. Лінійні топологічні простори. Нормовані та банахові простори, поповнення нормованих просторів. Приклади лінійних просторів. Простори сумовних функцій та простори послідовностей. Лінійні неперервні функціонали та спряжений простір. Продовження лінійних неперервних функціоналів, теорема Гана-Банаха і наслідки з цієї теореми. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у класичних прикладах банахових просторів. Вкладення простору у другий спряжений простір, рефлексивність. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабка збіжність.

Тема 2. Гільбертів простір. Ортогональність та ортогональні проекції у гільбертовому просторі. Теорема Ріса про загальний вигляд неперервного лінійного функціонала у гільбертовому просторі. Ортонормовані системи та ортонормовані базиси у гільбертовому просторі.

Тема 3. Лінійні неперервні оператори. Лінійні оператори у нормованих просторах. Простір лінійних неперервних операторів. Добуток операторів. Обернений оператор. Спряжений оператор. Оператори у гільбертовому просторі. Оператори Гільберта-Шмідта. Спектр та резольвента оператора. Поліноміальні операторні в’язки, їх спектри.

Тема 4. Компактні (цілком неперервні) оператори. Інтегральні рівняння Фредгольма. Спектр компактного оператора. Спектральне розвинення компактного самоспряженого оператора. Застосування спектрального розкладу компактних операторів до розв'язання інтегральних рівнянь та крайових задач (оператори Штурма-Ліувілля).

Методичні рекомендації до проведення практичних занять.

№ теми	Назва теми	Кількість годин
1	*Вирішення практичних завдань* з теми: Лінійні топологічні простори	5
2	*Вирішення практичних завдань* з теми: Гільбертів простір	5
3	*Вирішення практичних завдань* з теми: Лінійні неперервні оператори	5

4	*Вирішення практичних завдань* з теми: Спектральний розклад компактного оператора.	5
Разом		20

Тема 1. Лінійні топологічні простори.

Деякі теоретичні положення.

Повний лінійний нормований простір називається простором Банаха. Лінійний (векторний) простір — це множина елементів, які можна додавати та множити на числа, зберігаючи певні властивості (аксіоми). Прикладами є арифметичні простори, матриці, многочлени, неперервні функції та геометричні вектори, де роль «векторів» виконують самі об'єкти.

Теорема Банаха – Штейнгауза (або принцип рівномірної обмеженості) – результат, що встановлює зв'язок між поточковою та рівномірною обмеженістю сімейства лінійних операторів. Якщо сімейство неперервних лінійних операторів, що діють з Банахова простору до нормованого, поточково обмежено, то воно рівномірно обмежено за нормою.

Практичні завдання.

1. Довести, що для $x = (x_1, \dots, x_{n)} \in \mathbb{R}^n$ функція
   1) $\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$,
   2) $\rho_2(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$,
   3) $\rho_\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^\rho\right)^{1/\rho}, 1 \le \rho < \infty$,
   4) $\rho_\infty(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$

визначає метрику на $\mathbb{R}^n$.

2. Чи можна в лінійному просторі $C^1((0,1);\mathbb{R})$ неперервно диференційованих на [0,1] функцій прийняти за норму елемента *x(f):*
   1) $\max_{t \in [0,1]} |x(t)|$,
   2) $\max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$,
   3) $|x(0) - x(1)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$,

4) $|x(0)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$,

5) $\int_0^1 |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$?

3. Довести, що простори l_1, l_2, l_∞ банахові.
4. Довести, що простір l_2 гільбертів.
5. Довести неперервність відображення $f\colon C([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$, якщо

   1) $f(x)(t) = \sin x(t)$;

   2) $f(x)(t) = e^{x(t)}$;

   3) $f(x)(t) = x(t^2)$;

   4) $f(x)(t) = x\left(t^{1/2}\right)$.
6. Перевірити що відображення $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ є стискаючим на відрізку [1,2].
7. Довести, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ланцюгових дробів

$$2, \qquad 2+\frac{1}{2}, \qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}, \qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}, \ldots$$

має границю і знайти її.

Тема 2. Гільбертів простір.

Деякі теоретичні положення.

Простір Гільберта є важливим окремим випадком простору Банаха; у ньому, окрім відстані між двома елементами, є також скалярний добуток.

Означення: Метризовану лінійну систему *H*, яка в метриці, що породжується скалярним добутком, є повним метричним простором, називають простором Гільберта.

Кожний замкнений лінійний многовид *G* в *H* є лінійною системою, метризованою за допомогою того ж скалярного добутку, що і H. Крім того, G є повним. Справді, будь-яка фундаментальна послідовність елементів з G має границю в *H*, оскільки *H* повний, і ця границя повинна належати G, оскільки G замкнений. Зі сказаного випливає, що *G* сам є простором Гільберта. Його називають підпростором простору *H*.

Означення простору Гільберта має аксіоматичний характер. Вимоги, які воно містить, задовольняють різні конкретні лінійні системи. Тому часто називають H абстрактним простором Гільберта, а згадані конкретні системи називають реалізаціями цього абстрактного простору.

Теорема Ріса (або теорема Ріса-Фреше) стверджує, що будь-який лінійний неперервний функціонал f у гільбертовому просторі H може бути представлений у вигляді скалярного добутку $f(x) = (x, y_f)$ з єдиним елементом y_f з цього ж простору.

Практичні завдання.

1. Довести лінійність та неперервність оператора

   $A: C[a,b] \to C[a,b], (Ax)(t) = \int_a^b k(t,\tau)\, x(\tau) d\tau,$ де $k \in C\ ([a,b]\ \times\ [a,b])$.
2. Довести, що будь-яка ортонормована система векторів гільбертового простору слабко збігається до нуля.
3. Для оператора $A: \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \to \tilde{L}_2(\mathbb{R})$ знайти A^*:

   1) $(Ax)(t) = a(t)x(t), a(t) -$

      неперервна обмежена комплекснозначна функція на $\mathbb{R}$;

   2) $(A_s x)(t) = x(t+s), s \in \mathbb{R}$ - фіксована.
4. Нехай $\alpha \in C([a,b]; \mathbb{R}_+)$, і множина $Z = \{t \in [a,b] : \alpha(t) = 0\}$ кінцева. Довести, що $(x,y)_\alpha = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, \alpha(t)\, dt$ задає скалярний добуток на $C([a,b]; \mathbb{C})$.
5. Довести, що множина $M \subset \mathbb{R}$, що складається з тих елементів $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, для яких $0 \le x_n \le \frac{1}{n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, є замкненою.

Тема 3. Лінійні неперервні оператори.

Деякі теоретичні положення.

Оператори у гільбертовому просторі — це лінійні відображення, що діють між елементами простору зі скалярним добутком, який є повним за метрикою. Ключовими є обмежені (неперервні) оператори, самоспряжені оператори (важливі для квантової механіки), а також унітарні та компактні оператори, що описують еволюцію та спектральні властивості систем.

Основні типи та поняття:

Лінійні оператори: $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Обмежені оператори: Оператор A обмежений, якщо існує $C > 0$, таке що $||Ax|| \leq C||x||$ для всіх x.

Спряжений оператор (A^*): Оператор, що задовольняє рівність $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Самоспряжені оператори ($A = A^*$): оператори, які рівні своєму спряженому. Вони мають дійсні власні значення і є основою фізичних спостережуваних величин.

Унітарні оператори ($U^*U = UU^* = I$): Оператори, які зберігають скалярний добуток, тобто $(Ux, Uy) = (x, y)$. .

Компактні оператори: Оператори, які переводять обмежені множини в передкомпактні множини.

Оператори Гільберта-Шмідта — приклад компактних операторів.

Оператори Гільберта-Шмідта: Обмежені оператори, для яких сума квадратів модулів власних значень (або $\| A \|_2 = \sum ||Ae_j||^2$, де e_j- власні вектори) є скінченною.

Практичні завдання.

1. Довести що довільний лінійний оператор $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ цілком неперервний.
2. Нехай A – оператор Гільберта-Шмідта, $\|\cdot\|_2$ – його абсолютна норма. Довести, що:

   1) $\| A \|_2 = \| A^* \|_2$;

   2) $\| A \| \leq \| A \|_2$;
3. Довести, що кожний оператор Гільберта-Шмідта є компактним.
4. Покажіть, що оператор і зворотний до нього (якщо він існує) мають одні і ті ж власні вектори. Знайдіть зв'язок між власними значеннями цих операторів.

5. Покажіть, що лінійна оболонка, натягнута на будь яку систему власних векторів оператора, інваріантна відносно цього оператора.

Тема 4. Спектральне розвинення компактного оператора.

Деякі теоретичні положення.

Компактні множини.

Множина $A \subset X$ називається передкомпактною, якщо будь-яка нескінченна підмножина $A_0 \subset A$ має граничну точку в *X,* і компактним, якщо вона є передкомпактною і всі граничні точки належать *A*.

Критерій Фреше-Хаусдорфа. Будь-яка передкомпактна підмножина *A* метричного простору (X, ρ) цілком обмежена. Якщо простір *X* - повний, а *A* - цілком обмежена, то *A* передкомпактна.

Компактність $C[a, b]$.

Нехай M – деякі підмножини метричного простору $C[a, b]$. Множина *M* називається рівномірно обмеженою, якщо існує таке число c, що $\left|\left| \; x(t) \; \right|\right| \leq c$ для всіх $x(t) \in M$ і рівномірно неперервним, якщо для будь-кого $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке що $|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon$ для всіх $x(t) \in M$, якщо $|t_1 - t_2| < \delta$.

Теорема Арчела.

Для того, щоб множина $M \subset C[a, b]$ була передкомпактною, необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно обмеженою і рівномірно неперервною.

Інтегральні рівняння Фредгольма — це лінійні рівняння, де невідома функція *ϕ(x)* знаходиться під знаком інтеграла зі сталими межами, а ядро *K(x,s)* є відомим. Рівняння I роду: $\int_a^b K(x, s)\phi\,(s)ds = f(x)$. Рівняння II роду: $\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\phi\,(s)ds$.

Основні характеристики та методи:

Типи:

I роду: Невідома функція $\phi(x)$ знаходиться лише під інтегралом.

II роду: Невідома функція $\phi(x)$ знаходиться і поза, і під інтегралом.

Однорідні: Якщо $f(x)$=0 (рівняння має вигляд $\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\phi\,(s)ds$).

Неоднорідні: Якщо $f(x) \neq 0$.

Ядро (*K(x,s)*): Функція двох змінних, що визначає оператор Фредгольма. Вироджене ядро дозволяє звести рівняння до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Спектральне розвинення компактних операторів (зокрема самоспряжених) є потужним інструментом для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду та крайових задач для операторів Штурма-Ліувілля. Цей метод зводить диференціальні задачі до інтегральних через функцію Гріна, дозволяючи розкласти розв'язок за власними функціями оператора, що відповідає задачі про коливання струни або задачам теплопровідності. При цьому розв'язання полягає у знаходженні власних значень λ_n та власних функцій $\phi_n(x)$, представляючи розв'язок у вигляді ряду Фур'є $f(x) = \sum c_n \phi_n(x)$, що забезпечує високу точність обчислень.

Основні аспекти застосування:

Інтегральні рівняння: Для рівняння $f(x) - \mu \int K(x,y) f(y) dy = g(x)$ з компактним (симетричним) ядром *K(x,y),* розв'язок будується через власні значення λ_n та власні функції ϕ_n ядра. Розв'язок існує, якщо $\frac{1}{\mu}$ не є власним значенням ядра.

Оператори Штурма-Ліувілля: Крайова задача -$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = \lambda r(x)y$ на відрізку *[a,b]* з граничними умовами зводиться до задачі на власні значення для оберненого оператора, який є компактним та самоспряженим.

Практичні завдання.

1. Довести, що самоспряжений обмежений лінійний оператор не має залишкового спектру.
2. Довести, що оператор та його резольвента комутують.
3. Чи може наступна множина бути спектром компактного оператора:
   1) [0, 1];
   2) {0, 1};
   3) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$;

4) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

5) $\left\{1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$;

6) $\{i, 1 + i\}$.

4. Чи є оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ компактним, якщо:

1) $(Ax)(t) = \int_0^t sx(s)ds$;

2) $(Ax)(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2x(1)$;

3) $(Ax)(t) = t\int_0^1 e^{ts}x(s)ds$;

4) $(Ax)(t) = x(t^2)$.

5. Чи буде компактним оператор $A: C[-1, 1] \to C[-1,1|$, визначений рівністю $(Ax)(t) = \frac{1}{2}x(t) + x(-t)$.

Теми для самостійної роботи.

Тема 1. Лінійні топологічні простори.

Топологія. Підпростори. Лінійна оболонка та замкнена лінійна оболонка множини. Норма, її властивості. Метрика та топологія, породжені нормою. Повнота. Теорема про поповнення. Локально опуклі простори. Опуклі множини. Замкнена лінійна оболонка. Обмежені множини. Простори Фреше (F-spaces).

Тема 2. Гільбертів простір.

Передгільбертові та гільбертові простори. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Поляризаційна тотожність. Поповнення передгільбертового простору.

Тема 3. Лінійні неперервні оператори.

Приклади лінійних неперервних операторів, що описують задачі з фізики.

Тема 4. Спектральне розвинення компактного самоспряженого оператора. Застосування у квантовій механиці та теорії графів.

Застосування у класичній механіці.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

Підготувати тези.

Тези (приблизна тематика):

1. Дисипативні оператори в задачах теоретичної механіки.
2. Лінійні операторні в'язки та їх спектри.
3. Квадратичні операторні в'язки з гіроскопічним членом. Їх спектр.
4. Квадратичні операторні в'язки з дисипативним членом. Їх спектри.
5. Крайова задача, яка описує коливання пружного стержня.
6. Базисні системи розв'язки спектральної задачі Штурма-Ліувілля зі самоспряженими крайовими умовами.
7. Асимптотика власних значень самоспряжених задач Штурма-Ліувілля на скінченному інтервалі.
8. Розв'язання спектральної задачі Редже.
9. Асимптотика власних значень задачі Редже.

Здобувач при виконанні ІНДЗ повинен дотримуватися принципів академічної доброчесності, не допускати академічний плагіат.

Академічний плагіат – оприлюднення (частково або повністю) наукових (творчих) результатів отриманих іншими особами, як результатів власного дослідження (творчості), та/або відтворення опублікованих текстів інших авторів без відповідного посилання (відповідно до ст. 69 Закону України «Про вищу освіту»).

Види академічного плагіату:

- копіювання;
- перефразування;
- компіляція;
- використання інформації (факти, ідеї, формули, числові значення тощо) з джерела без посилання на це джерело;

- подання як власних робіт (тез, аналітичних звітів, письмових робіт, есеїв тощо), виконаних на замовлення іншими особами, у тому числі робіт, стосовно яких справжні автори надали згоду на таке використання.

Методичні вказівки до тез

Тези (від гр. thesis – положення, твердження) – це коротко, точно, послідовно сформульовані ідеї, думки, положення наукової доповіді, повідомлення, статті або іншої наукової праці. Вони містять матеріали, положення, категорії, які автор вперше вводить у науковий обіг.

Структура тез наступна: вступна, основна, заключна частина.

У вступній частині відображується актуальність, важливість обраної теми, визначається об'єкт, предмет дослідження, виділяється проблема, мета, завдання, які ставить здобувач перед собою для досягнення поставленої мети.

В основній частині тез досліджуються основні підходи до вирішення даної проблеми, виділяються нові цікаві ідеї, може пропонуватися авторський варіант вирішення заявленої проблеми на основі проаналізованого матеріалу, тощо. У заключній частині робляться висновки за підсумками розглянутого матеріалу, показуються перспективи в дослідженні цієї проблеми. Список літератури оформляється в кінці тез. У список літератури включаються тільки ті джерела, на які є посилання в тексті тез, зазвичай, від трьох до п'яти джерел.

Питання для самоконтролю.

1. Які оператори називаються лінійними?
2. Дайте означення образу лінійного оператора.
3. Дайте означення ядра лінійного оператора і доведіть що ядро є підпростором.
4. Що таке дефект лінійного оператора?
5. Доведіть теорему про суму рангу і дефекту лінійного оператора.
6. Дати означення просторів $L_1(a,b)$ та $L_2(a,b)$.
7. Дати означення просторів l_1 та l_2 .
8. Чи є гільбертовим простір $L_1(a,b)$?

9. Чи є гільбертовим простір $L_2(a,b)$?
10. Чи має бути мінімальною система, яка утворює базис Рісса?
11. Якщо система є повною та мінімальною, чи є вона базисом Рісса?
12. Опишіть спектр оператора, який має компактну резольвенту.
13. Які оператори називаються операторами Гільберта-Шмідта?
14. Яка структура спектра компактного оператора в нескінченно-вимірному просторі?
15. В чому різниця між компактним та обмеженим оператором?
16. Чи є компактним оператор скінченого рангу?
17. Чи може компактний оператор мить нескінчену кількість власних значень?
18. Чому 0 завжди є точкою спектру для компактного оператору в нескінченно-вимірному просторі?
19. Як визначити, чи є інтегральний оператор компактним (критерії компактності)?
20. Сформулюйте теорему Фредгольма для оператора $I - K$, де K компактний.

Література

1. Банах С. Курс функціонального аналізу (лінійні операції). — К. : Радянська школа, 1948. — 216 с.

2. Ахієзер Н.І., Глазман І.М. Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі. 2025. Укр. переклад О. Бабин, С. Зінов'єв. 663 с. nebayduzhi.math@gmail.com

3. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. Львів, Видавець Чижиков І. Е., 2014. 559 с.

3. Жалдак М.І., Михалін Г.О., Деканов С.Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: Навчальний посібник. — К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. — 430 с.

4. Городній М.Ф., Константінов О.Ю., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2006.
5. Krzysztof Maurin Methods of Hilbert spaces. Polish Scientific Publishers, 1972. 417 p.
6. Daniel Alpay. Operator Theory. Springer, 2015. 315 p.
7. Barry Simon "Operator Theory" (Comprehensive Course in Analysis). American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 2015. 749 p.
8. Stephan R. Garcia, Javad Mashreghi, William T. Ross "Operator Theory by Example". Springer, 2023. 528 p.
9. John B. Conway "A Course in Operator Theory". American Mathematical Society, 2000. 380 p.