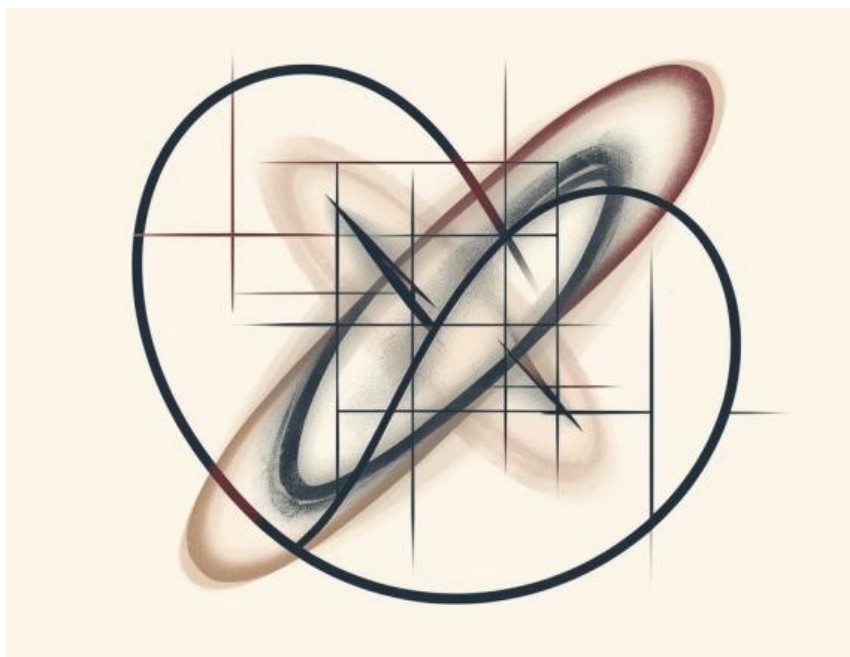


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут природничо-математичних наук,
інформатики та менеджменту
Кафедра вищої математики і статистики

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з навчальної дисципліни **«ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»**
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей
А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта (Природничі
науки)), А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта
(Інформатика)),
281 Публічне управління та адміністрування



*Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського» (протокол № 14 від 24.04.2025 р.)*

\

Укладачі:

1. Болдарєва Ольга Миколаївна, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики
2. Олефір Олена Іванівна, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики
3. Урум Галина Дмитрівна, к. т. н., доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики

Рецензенти:

1. Григор'єва Тетяна Ігорівна, к. т. н., доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету
2. Роговська Марія Георгіївна, кандидат ф.-м. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку.

Болдарєва О. М., Олефір О. І., Урум Г. Д. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : «Південноукр. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Уш.», 2025. 141 с.

Навчальний посібник призначений для студентів закладів вищої освіти, зокрема для студентів навчально-наукового інституту природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту, які вивчають навчальну дисципліну «Основи вищої математики». Посібник охоплює такі розділи як лінійна алгебра, аналітична геометрія та математичний аналіз. Видання містить необхідний теоретичний матеріал, перелік практичних завдань (з розв'язками) для аудиторної роботи, контрольні питання та інтерактивні завдання до кожної теми, теми для подальшого поглибленого дослідження у межах змістового модуля і детальні інструкції до виконання індивідуального навчально-дослідного завдання. Матеріал навчального посібника може бути використано на лекційних, практичних заняттях або для організації самостійної роботи студента.

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Опис і пояснювальна записка навчальної дисципліни.....	6
Програма навчальної дисципліни.....	15
Практичне заняття 1	18
Практичне заняття 2.....	26
Практичне заняття 3.....	34
Практичне заняття 4.....	43
Практичне заняття 5.....	51
Практичне заняття 6.....	62
Практичне заняття 7.....	70
Практичне заняття 8-9.....	85
Практичне заняття 10-11.....	101
Практичне заняття 12-13.....	119
Інструкції до індивідуального навчально-дослідного завдання (доповіді).....	137
Рекомендовані джерела інформації.....	140

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Основи вищої математики» відіграє ключову роль у формуванні аналітичного мислення та навичок формалізації задач для студентів різних спеціальностей. Її значення варіюється залежно від напрямку підготовки, проте у всіх випадках вона є фундаментом для подальшого професійного розвитку.

Вища математика невід'ємно пов'язана з комп'ютерними технологіями, фізикою, біоінформатикою, економікою та соціальними науками. «Основи вищої математики» формують універсальність знань здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, оскільки базові математичні навички необхідні в інженерії, ІТ, економіці, природничих і соціальних науках, формуються аналітичне мислення: вища математика вчить логічно мислити, моделювати ситуації та приймати обґрунтовані рішення, є інструментом для професії, оскільки без математичних методів неможливо освоїти такі дисципліни, як статистика, моделювання процесів, машинне навчання, фінансовий аналіз тощо. Таким чином, «Основи вищої математики» є ключовою дисципліною для розвитку професійної компетентності, незалежно від спеціальності. Апарат дисципліни «Основи вищої математики» є мовою сучасної науки та ефективного управління, що дозволяє студентам бачити структуру й закономірності у світі даних і рішень.

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта (Інформатика)) дисципліна забезпечує формування алгоритмічного мислення (математика допомагає розвивати логіку й точність, необхідні для програмування), розуміння структур даних і алгоритмів (поняття з дискретної математики, теорії множин, графів – основа багатьох ІТ-систем), обчислювальні методи (чисельні методи, лінійна алгебра й аналіз необхідні для обробки даних, машинного навчання, графіки тощо).

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта (Природничі науки))

апарат вищої математики формує навички з математичного моделювання при описі складних фізичних, хімічних чи біологічних процесів через рівняння, аналізу експериментальних даних з використанням статистики й теорії ймовірностей, що дозволяє робити науково обґрунтовані висновки, мультидисциплінарності – математика виступає мовою для об'єднання знань із різних наукових галузей.

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування вища математика допомагає в аналітиці й прийнятті рішень для формування навичок аналізу даних, побудови моделей для прогнозування управлінських процесів, оцінюванні ефективності статистичних показників і результатів досліджень, оскільки вища математика надає інструменти для критичного оцінювання, для планування та оптимізації ресурсів з метою використання математичних методів для стратегічного управління в сфері управління процесами.

ОПИС І ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Вища математика як навчальна дисципліна, як правило, базується на вищому рівні абстракції, ніж елементарна математика, та менш просто виводиться із властивостей навколишнього світу. Вона використовує абстрактні об'єкти: множини, простори, функції, оператори, границі, нескінченності, на відміну від елементарної, яка оперує конкретними числами, простими задачами (арифметика, геометрія, алгебра). Наприклад, у закладах середньої освіти вчать, як обчислити площу круга; у вищій математиці — як знайти й довести цю формулу з використанням поняття інтегралу. Шкільна математика зосереджена на готових формулах і прикладах, у той час як вища математика вимагає доведення, логічного мислення, загального підходу до класів задач. Елементарна математика обмежена арифметикою, елементарною алгеброю та геометрією. Вища математика охоплює математичний аналіз, лінійну алгебру, диференціальні рівняння, теорію ймовірностей і статистику, елементи дискретної математики, топологію, теорію груп тощо. Шкільна математика використовується у повсякденному житті й базовій підготовці, вища математика є основою для наукової, інженерної, економічної та інформаційної діяльності.

Мета навчальної дисципліни «Основи вищої математики» полягає у засвоєнні основ математичного апарату, який є необхідним для розв'язання теоретичних і практичних задач науки, техніки та освіти, управління тощо під час подальшої професійної діяльності вчителя інформатики, природничих наук, фізики, хімії, біології закладу загальної середньої освіти або під час виконання обов'язків, що пов'язані зі здійсненням різноманітних функцій управління.

Реалізація мети забезпечує досягнення результатів навчання за програмою дисципліни завдяки відповідному навчальному змісту.

Основні навчальні завдання дисципліни «Основи вищої математики» спрямовані на розвиток логічного і критичного мислення; фахову підготовку до професійної діяльності; інтеграцію знань у професійну практику; формування науково-обґрунтованої освітньої позиції:

- формування поняття про основні математичні об'єкти, уявлення про зв'язки вищої математики з іншими прикладними дисциплінами, управлінськими процесами.
- формування у студентів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи вищої математики, її роль у пізнанні дійсності та управлінській діяльності.
- інтелектуальний розвиток студентів, передусім розвиток логічного та абстрактного мислення, пам'яті, уваги, інтуїції.
- Формувати поняття про математичне моделювання освітніх, природних та управлінських процесів, інтеграція з ІТ та цифровими технологіями.

Очікувані програмні результати навчання здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта (Природничі науки))

ПРН 4. Розуміти історію та закономірності розвитку предметної області, її місце у загальній системі знань про природу і суспільство; критично осмислювати явища й процеси української та зарубіжної культури, цінувати українську національну культуру, багатоманітність і мультикультурність у суспільстві; діяти відповідально й свідомо на засадах поваги до прав і свобод людини та громадянина; демонструвати навички соціальної активності, відповідальності за стан довкілля та суспільства.

ПРН 21. Знати та використовувати у професійній діяльності сучасну термінологію, наукові поняття, закони, концепції, вчення і теорії природничих наук, біології, фізики, хімії для пояснення явищ природи та розвитку у здобувачів освіти розуміння сучасної природничо-наукової картини світу.

Очікувані програмні результати навчання здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта (Інформатика)):

ПРН 9. Застосовувати інноваційні технології навчання освітньої галузі, зокрема технології розвитку в здобувачів освіти критичного мислення.

ПРН 18. Відповідально ставитися до забезпечення дотримання етичних норм, принципів академічної доброчесності, грамотно і логічно висловлювати свою думку з дотриманням етики спілкування та врахуванням національних та культурних особливостей співрозмовників, ініціювати в педагогічній діяльності принципи толерантності, діалогу і співробітництва.

ПРН 19. Демонструвати ґрунтовні знання і розуміння предметної області, володіти відповідною термінологічною базою, моделювати об'єкти та процеси, зокрема засобами інформаційних технологій, розв'язувати типові задачі з предметної області.

ПРН 22. Застосовувати критичне, логічне, алгоритмічне, структурне та системне мислення для розв'язування проблемних ситуацій в освітній, дослідницькій та соціально-суспільній сферах діяльності.

ПРН 23. Володіти фізичними поняттями та математичним інструментарієм, що є підґрунтям інформатики та теоретичною базою інформаційних технологій.

Очікувані програмні результати навчання здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування:

ПРН 08. Розуміти та використовувати технології вироблення, прийняття та реалізації управлінських рішень.

ПРН 11. Уміти здійснювати пошук та узагальнення інформації, робити висновки і формулювати рекомендації в межах своєї компетенції.

ПРН 13. Використовувати методи аналізу та оцінювання програм сталого розвитку.

ПРН 16. Використовувати дані статистичної звітності, обліку та спеціальних досліджень у професійній діяльності.

Очікувані результати навчання з дисципліни:

У наслідок вивчення навчальної дисципліни студенти мають:

- володіти базовим математичним апаратом;
- знати основні поняття і теореми лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу;
- перетворювати словесний матеріал у математичний вираз;
- зрозуміти за змістом завдання матеріал якого розділу математики і які методи треба застосовувати;

знати:

- поняття і загальний вигляд матриці,
- види матриць за формою (квадратна матриця, прямокутна (або ступінчата чи трапецеподібна) матриця, матриця-рядок, матриця-стовпець); структурою (нульова, одинична, діагональна, скалярна, нижньотрикутна, верхньотрикутна матриця) властивостями (оборотна, необоротна, симетрична, кососиметрична матриця),
- операції над матрицями (додавання матриць, множення матриці на число, віднімання матриць, множення матриць, транспонування матриці), елементарні перетворення рядків матриць (перестановка рядків, множення рядка на число, додавання одного рядка до іншого);
- поняття рангу матриці та його застосування до встановлення сумісності системи лінійних рівнянь;
- поняття визначника n порядку як єдиного числового значення, що відповідає квадратній матриці n порядку і обчислюється за певним правилом (для другого і третього порядків) або рекурсивно (через мінори);
- поняття властивостей визначника n порядку та їх використання для обчислення визначників вищих порядків;
- класифікації властивостей визначника n порядку: структурні/алгебраїчні /обчислювальні,
- способи обчислення визначників вищих порядків;
- поняття про систему лінійних рівнянь (загальний вигляд системи),
- класифікацію систем лінійних рівнянь у залежності від кількості розв'язків (сумісна/несумісна, визначена/невизначена) або у залежності від значень вільних членів системи (однорідні/неоднорідні),

- алгоритм використання методу послідовного виключення невідомих для розв'язування системи лінійних рівнянь,
- загальний і частинний розв'язки невизначеної системи лінійних рівнянь,
- формули Крамера для знаходження єдиного розв'язку системи n лінійних рівнянь з n невідомими;
- використання формул Крамера для дослідження кількості розв'язків системи n лінійних рівнянь з n невідомими з параметрами,
- поняття комплексного числа та необхідність у його виникненні;
- алгебраїчну форму запису комплексного числа і його геометрична інтерпретація, дійсна та уявні частини алгебраїчної форми запису,
- операції над комплексними числами, що задані своєю алгебраїчною формою; їх геометрична інтерпретація,
- тригонометричну форму запису комплексного числа, аргумент комплексного числа,
- операції над комплексними числами, що задані своєю тригонометричною формою; їх геометрична інтерпретація,
- модуль комплексного числа та його властивості,
- формули переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми та навпаки.
- поняття про вектор, лінійні операції над векторами,
- поняття стандартних базисів площини і простору,
- поняття та алгебраїчні і геометричні властивості скалярного добутку векторів,
- знаходження кут між векторами, що визначені своїми координатами;
- поняття правої та лівої трійки векторів простору,
- поняття та алгебраїчні і геометричні властивості векторного добутку двох векторів.
- площа паралелограма як модуль векторного добутку
- поняття та алгебраїчні і геометричні властивості мішаного добутку векторів.
- обчислення об'єму паралелепіпеда та об'єму тетраедра через мішаний добуток векторів.
- загальне рівняння прямої на площині
- рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом,
- умови паралельності і ортогональності двох прямих на площині.
- умови перетину прямих на площині,
- рівняння прямої на площині, що проходить через задану точку у заданому напрямку,

- рівняння прямої, що проходить через дві задані точки на площині та у просторі,
- рівняння прямої «у відрізках» на площині і у просторі,
- канонічні рівняння прямої у просторі,
- варіанти взаємного розташування двох прямих у просторі,
- види рівнянь площини,
- нормальний вектор площини.
- загальне рівняння площини, його дослідження.
- формулу визначення кута між двома площинами,
- умови паралельності і перпендикулярності площини. Знаходження відстані від точки до площини,
- умови взаємного розташування прямих та площин у просторі;
- означення кривої другого порядку,
- класифікацію кривих другого порядку;
- рівняння кола як кривої другого порядку, його ексцентриситет.
- означення кола, еліпса, гіперболи та параболи, їх канонічні рівняння
- фокус, директриси, ексцентриситети, фокальні радіуси еліпса, гіперболи та параболи;
- основний прямокутник еліпса, велика та мала осі та напівосі еліпса,
- рівняння асимптот, дійсна та уявна осі та напівосі гіперболи,
- фокальний параметр параболи,
- означення функції та аналітичний, графічний, описовий, табличний спосіб її визначення;
- область визначень, множину значень, нулі функції,
- властивість парності / непарності/ загального виду,
- проміжки зростання або спадання функції,
- точки розриву функції першого та другого роду,
- поняття границі числових функцій у точці та на нескінченості.
- поняття неперервної, нескінченно малої та нескінченно великої функції,
- поняття оберненої функції та умови її існування,
- види класифікацій функцій за виглядом, областю визначення, властивостями, кількістю змінних тощо,
- теореми про границі функції суми, добутку, частки,
- типи невизначеностей,
- першу і другу чудові границі, та наслідки з них,
- таблицю похідних;
- рівняння дотичної і нормалі до похідної.
- правило Лопіталя.
- умови монотонності функції.

- необхідні і достатні умови існування екстремуму,
- поняття опуклості, увігнутості, точки перегину,
- основні властивості невизначеного інтегралу,
- таблицю основних інтегралів,
- поняття первісної та визначеного інтеграл.
- формулу Ньютона-Лейбніца.

уміти:

- використовувати формули, графіків, рівняння для аналізу ситуацій в освітньому процесі,

- застосовувати методи розв'язання лінійних рівнянь до розв'язання задач, а також задач професійного характеру (у залежності від спеціалізації – в економічній, управлінській сфері; у фізиці, хімії або біології чи інформатиці або інженерії),

- використовувати методи лінійної алгебри під час обробки результатів спостереження, моделювання та розв'язування економічних, адміністративних, управлінських чи фізичних, біологічних задач або у задачах з програмування, інформатики,

- виконувати операції над векторами; інтерпретувати розв'язки економічних, фізичних, біологічних, технічних та управлінських задач за допомогою аналітичної геометрії (у залежності від спеціалізації здобувачів освіти);

- застосовувати апарат диференціального та інтегрального числення в задачах соціально-економічної сфери, фізичної, біологічної сфери (у залежності від спеціалізації здобувачів освіти);

- аналізувати одержані результати і на їх основі створювати практичні рекомендації;

- визначати нові матриці за допомогою операції додавання, віднімання, транспонування та множення матриць;

- знаходити розв'язок системи лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом послідовного виключення невідомих;

- обчислювати визначники другого, третього і n -порядку, $n \in \mathbb{N}$ раціональним способом;

- знаходити алгебраїчну, тригонометричну форму комплексного числа;

- виконувати операції над комплексними числами у алгебраїчній та тригонометричній формі;

- знаходити модуль і аргумент комплексного числа;

- зображати комплексне число на комплексній площині.

- виконувати лінійні операції над векторами простору;

- застосовувати скалярний, векторний та мішаний добутки векторів до розв'язання геометричних задач;
- знаходити відстань між двома точками площини та простору;
- за різними вихідними даними складати рівняння прямої на площині та у просторі, рівняння площини у просторі;
- за алгебраїчними рівняннями двох прямих на площині визначати характер їх взаємного розташування, міру кута між ними;
- знаходити відстань від точки до прямої, від точки до площини;
- визначати характер взаємного розташування двох площин, прямої та площини, за різними вихідними даними;
- розв'язувати стандартні задачі на властивості еліпса, гіперболи та параболи;
- знаходити границі функцій;
- досліджувати функції на монотонність, екстремум та опуклість;
- будувати графік функції за допомогою диференціального числення;
- знаходити невизначені інтеграли;
- обчислювати визначені інтеграли за Ріманом.

Унаслідок досягнення результатів навчання здобувачі вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта (Природничі науки)) в контексті змісту навчальної дисципліни мають опанувати такі компетентності:

Загальні компетентності:

ЗК 06. Здатність зберігати та примножувати моральні, культурні, наукові цінності і досягнення суспільства на основі розуміння історії та закономірностей розвитку предметної області, її місця у загальній системі знань про природу і суспільство та у розвитку суспільства, техніки і технологій, використовувати різні види та форми ведення здорового способу життя.

ЗК 07. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 08. Здатність учитися й оволодівати сучасними знаннями, застосовувати їх у практичних ситуаціях.

Спеціальні компетентності:

СК 10. Здатність організовувати безпечне освітнє середовище, використовувати здоров'язбережувальні технології під час освітнього процесу.

СК 14. Здатність оперувати та використовувати у професійній діяльності сучасну термінологію, наукові поняття, закони, концепції, вчення і теорії природничих наук, біології, фізики, хімії для пояснення явищ природи та розвитку в учнів розуміння сучасної природничо-наукової картини світу.

СК 16. Здатність виокремлювати істотні ознаки основних одиниць навчального змісту курсу фізики: фізичного явища, величини, закону, фізичної

теорії, фундаментального фізичного експерименту, фізичного приладу, технічного пристрою та моделі; обґрунтовано обирати та застосовувати методи й засоби навчання, відповідний дидактичний матеріал для їх пояснення.

СК 18. Здатність планувати, організовувати та здійснювати експерименти у галузі природничих наук (фізики, хімії, біології) і використовувати їх як метод та засіб навчання.

СК 19. Здатність розв'язувати задачі шкільного курсу біології, фізики, хімії різного рівня складності та навчати учнів їх розв'язування.

Міждисциплінарні зв'язки: «Загальна фізика», «Біологія».

Унаслідок досягнення результатів навчання здобувачі вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (предметна спеціальність Середня освіта (Інформатика)) в контексті змісту навчальної дисципліни мають опанувати такі компетентності:

Загальні компетентності (ЗК):

ЗК 01. Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;

ЗК 08. Вміння виявляти, ставити та вирішувати проблеми;

ЗК 09. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел;

Спеціальні компетентності спеціальності:

СК 06. Здатність здійснювати інформаційно-аналітичне забезпечення управлінських процесів із використанням сучасних інформаційних ресурсів та технологій;

СК 07. Здатність розробляти тактичні та оперативні плани управлінської діяльності;

СК 10. Здатність до дослідницької та пошукової діяльності в сфері публічного управління та адміністрування;

СК 11. Здатність у складі робочої групи проводити прикладні дослідження в сфері публічного управління та адміністрування.

Міждисциплінарні зв'язки: «Дискретна математика», «Інформатика», «Загальна фізика», «Програмування».

Унаслідок досягнення результатів навчання здобувачі вищої освіти спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування:

Загальні компетентності:

ЗК 2. Здатність до міжособистісної взаємодії, роботи в команді.

ЗК 4. Здатність до ухвалення ефективних рішень у професійній діяльності та відповідального ставлення до обов'язків, мотивування людей до досягнення спільної мети.

ЗК 5. Здатність до генерування нових ідей, виявлення та розв'язання проблем, ініціативності та підприємливості.

Спеціальні компетентності:

СК 14. Знання і розуміння предметної області, здатність розв'язувати типові задачі з предметній області.

СК 20. Здатність застосовувати логічне, алгоритмічне, структурне та системне мислення для розв'язування життєвих проблемних ситуацій; планувати та проводити навчальні дослідження та комп'ютерні експерименти; послуговуватися технологічними пристроями.

СК 21. Здатність організовувати свою діяльність з використанням програмних засобів для планування та структурування роботи, а також співпраці і членами соціуму; самостійно опановувати нові технології та засоби діяльності.

Міждисциплінарні зв'язки: «Економіка», «Сучасні інформаційні технології та мультимедіа».

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. Елементи лінійної алгебри

Тема 1. Елементи теорії матриць

Матриці, види матриць. Операції над матрицями: додавання матриць, віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування матриці, множення матриць. Властивості цих операцій. Одинична матриця. Ранг матриці.

Тема 2. Елементи теорії визначників

Визначники 2-го та 3-го порядків, обчислення за означенням. Визначники n -порядку, $n \in \mathbb{N}$. Мінори, алгебраїчні доповнення. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Способи обчислення визначників вищих порядків.

Тема 3. Системи лінійних рівнянь і методи їх розв'язування.

- Розширена матриця системи лінійних рівнянь (СЛР). Умова сумісності СЛР (теорема Кронекера-Капеллі). Сумісність однорідних СЛР. Метод послідовного виключення невідомих розв'язання СЛР (метод Гауса). Формули Крамера. Розв'язання задач професійного характеру (у залежності від спеціалізації – в економічній, управлінській сфері; у фізиці, хімії або біології чи інформатиці або інженерії) за допомогою СЛР.

Тема 4. Комплексні числа

Множина комплексних чисел як розширення множини дійсних чисел. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Його дійсна та уявна частини. Єдиність алгебраїчної форми. Властивості комплексно спряжених чисел. Зображення комплексних чисел. Комплексна площа. Модуль та аргумент комплексного числа. Властивості модуля. Тригонометрична форма комплексного числа. Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми та навпаки.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. Елементи аналітичної геометрії

Тема 5. Векторна алгебра

Поняття про вектор, основні означення. Лінійні операції над векторами та їхні основні властивості. Лінійна комбінація векторів. Колінеарні і компланарні вектори. Поняття про базис системи векторів і систему координат. Прямокутна декартова системи координат на площині та у просторі. Розкладання вектора за даним базисом. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та їх властивості.

Тема 6. Рівняння прямої на площині.

Загальне рівняння прямої на площині, його дослідження. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими, умови паралельності і ортогональності двох прямих на площині. Перетин прямих. Рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої «у відрізках».

Тема 7. Площина

Види рівнянь площини. Визначення взаємного розташування прямої та площини, двох площин у просторі відносно прямокутної декартової системи координат. Нормальний вектор площини. Загальне рівняння площини, його дослідження. Кут між двома площинами, умови паралельності і перпендикулярності. Знаходження відстані від точки до площини.

Тема 8. Криві другого порядку

Криві другого порядку. Їх канонічні рівняння, графіки та основні характеристики.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. Елементи теорії функцій однієї змінної

Тема 9. Функції. Границя функції

Поняття функції, способи її задання, властивості. Класифікація функцій, властивості, графіки. Границя функції в точці, властивості границі функції. Основні теореми про границі. Перша і друга важливі границі та наслідки з них. Порівняння нескінченно малих функцій. Таблиця еквівалентних. Розкриття невизначеностей. Неперервність функції в точці. Точки розриву, їх класифікація. Обернена функція.

Тема 10. Диференціальне числення функції однієї змінної

Поняття похідної функції. Таблиця похідних. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі до похідної. Застосування похідних до розкриття невизначеностей. Правило Лопітала.

Умови монотонності функції. Екстремуми функцій, необхідні і достатні умови існування екстремуму. Опуклість, увігнутість, точки перегину. Асимптоти графіку функцій. Загальна схема дослідження функцій і побудова графіків.

Тема 11. Інтегральне числення функції однієї змінної

Первісна та невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Інтегрування способом заміни, частинами, безпосереднє інтегрування. Інтегрування дробово-раціональних функцій. Означення інтегралу Рімана. Основна формула інтегрального числення (формула Ньютона – Лейбніца). Практичне застосування визначеного інтегралу.

5.1. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	Денна форма				
	усього	л	п	інд.	с.р.
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри					
Тема 1. Елементи теорії матриць	10	2	2		6
Тема 2. Елементи теорії визначників	9	1	2		6
Тема 3. Системи лінійних рівнянь і методи їх розв'язування.	10	2	2		6
Тема 4. Комплексні числа	10	2	2		6
Разом за змістовим модулем 1	39	7	8		24
Змістовий модуль 2. Елементи аналітичної геометрії					
Тема 5. Векторна алгебра	10	2	2		6

Тема 6 Рівняння прямої на площині	9	2	2		5
Тема 7. Площина	7	2	0		5
Тема 8. Криві другого порядку	8	1	2		5
Разом за змістовим модулем 2	34	7	6		21
Змістовий модуль 3. Елементи теорії функцій однієї змінної					
Тема 9. Функції. Границя функції	11	2	4		5
Тема 10. Диференціальне числення функції однієї змінної	13	4	4		5
Тема 11. Інтегральне числення функції однієї змінної	13	4	4		5
Разом за змістовим модулем 3	37	10	12		15
ІНДЗ				10	
Всього	120	24	26	10	60

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Семінар «Алгебра матриць»

Питання до обговорення

1. Матриці, види матриць.
2. Операції над матрицями.
3. Властивості операцій над матрицями.
4. Одинична матриця. Ранг матриці.

Основні теоретичні поняття

1. Матриця

Матриця — це прямокутна таблиця чисел, розташованих у рядках і стовпцях.

Розмір матриці — записується як $m \times n$, де m — кількість рядків, n — кількість стовпців.

2. Види матриць

Нульова матриця — усі елементи дорівнюють нулю.

Квадратна матриця або матриця n -порядку — матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($n \times n$).

Діагональна матриця — квадратна матриця, у якої усі елементи поза головною діагоналлю — нулі.

Одинична матриця (I_n) — діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1.

Трикутна матриця — квадратна матриця, у якої нижче або вище головної діагоналі містяться лише нулі.

Транспонована матриця — отримується з вихідної шляхом заміни рядків на стовпці чи навпаки.

3. Операції над матрицями

- Додавання матриць — виконується покомпонентно (матриці мають бути одного розміру).
- Віднімання матриць — аналогічно додаванню, поелементно.
- Множення матриці на число — кожен елемент матриці множиться на це число.
- Транспонування матриці — заміна рядків на стовпці чи навпаки
- Множення матриць — можливе, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої:

$$C = AB = (c_{ij}), c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

4. Властивості операцій над матрицями

- Комутативність: $A+B=B+A$
- Асоціативність додавання: $(A+B)+C=A+(B+C)$
- Дистрибутивність множення на число: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- Асоціативність множення: $(AB)C=A(BC)$
- Дистрибутивність множення щодо додавання:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC, \\ (A+B)C &= AC+BC \end{aligned}$$

5. Одинична матриця

Позначається I або I_n .

Має властивість: $IA = AI = A$ для будь-якої матриці A .

6. Ранг матриці

Ранг матриці — максимальна кількість лінійно незалежних рядків або стовпців.

Визначає розмір найбільшої не виродженої (не нульової) підматриці.

Обчислюється як найбільша кількість ненульових рядків матриці, яка отримана шляхом елементарних перетворень рядків матриці

Інтерактивні завдання

- Визначити тип матриці

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/vyznachaiemo-typ-matrytsi>

- Додавання та віднімання матриць

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/vyznachaiemo-typ-matrytsi>

- Множення матриць

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/mnozhennia-matryts>

- Транспонування матриці

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/transportuvannia-matryts>

- Піднесення до степеня

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/hra-chy-pravylno-pidnesly-do-stepenia>

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Знайти: $2A + 5B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Спочатку знайдемо матриці:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12 & 6 & 14 \\ 18 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B = \begin{pmatrix} 15 & 35 & 10 \\ 5 & 0 & 25 \\ 10 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Додаємо матриці:

$$2A + 5B = \begin{pmatrix} 4+15 & 0+35 & 2+10 \\ 12+5 & 6+0 & 14+25 \\ 18+10 & 10+20 & 2+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 35 & 12 \\ 17 & 6 & 39 \\ 28 & 30 & 42 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } 2A + 5B = \begin{pmatrix} 19 & 35 & 12 \\ 17 & 6 & 39 \\ 28 & 30 & 42 \end{pmatrix}.$$

2. Якщо матриця A має розмірність 2×3 , а матриця B — розмірність 3×2 , то скільки добутків цих двох матриць існує?

Добутки цих матриць існують, причому матриця AB має порядок 2, а матриця BA — порядок 3.

3. Знайти добутки AB і BA , якщо вони існують: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Матриці BA не існує, а матриця $C = AB$ існує і має розмірність 2×3 . Обчислимо окремо кожний її елемент, тобто $C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$.

Згідно з означенням елемент c_{11} є сумою всіх елементів першого рядка матриці A , помножених на відповідні елементи першого стовпця матриці B . Тобто,

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 = 4.$$

Елемент c_{12} є сумою всіх елементів першого рядка матриці A , помножених на відповідні елементи другого стовпця матриці B . Тобто,

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-1) = 7.$$

Аналогічно

$$c_{13} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 8 = -14.$$

$$c_{21} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 6,$$

$$c_{22} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) = -13,$$

$$c_{23} = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 8 = 9.$$

Таким чином, $C = AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -14 \\ 6 & -13 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Знайти добутки AB і BA , якщо вони існують:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Спочатку встановимо розмір матриць: $A - 3 \times 1$, $B - 1 \times 3$. Добуток AB існує, так як число стовбців (1) матриці A дорівнює числу рядків (1) матриці B . Матриця добутку AB має розмір 3×3 .

$$\underbrace{AB}_{\substack{3 \times 1 \quad 1 \times 3 \\ 3 \times 3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 8 & 1 \cdot 0 \\ (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 8 & (-2) \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 8 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -8 & -16 & 0 \\ 12 & 24 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добуток BA існує, так як число стовбців (3) матриці B дорівнює числу рядків (3) матриці A . Матриця добутку BA має розмір 1×1 .

$$\underbrace{BA}_{\substack{1 \times 3 \quad 3 \times 1 \\ 1 \times 1}} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (4 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) + 0 \cdot 3) = (-12)$$

$$\text{Відповідь: } AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -8 & -16 & 0 \\ 12 & 24 & 0 \end{pmatrix}, BA = (-12).$$

5. Знайти добуток $ABCD$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B = (53, \quad 22, \quad -35), \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = (2, \quad -3, \quad -1).$$

$$BC = (53, 22, -35) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = (53 \cdot 3 + 22 \cdot (-4) + (-35) \cdot 2) = (1),$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(ABC)D = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (2, -3, -1) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) \\ 6 \cdot 2 & 6 \cdot (-3) & 6 \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot (-3) & (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 12 & -18 & -6 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матриці, що переставні до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Нехай $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Знайдемо її елементи. Використаємо рівності $AB = BA$.

Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -a - c & -b - d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & 2a - b \\ c - d & 2c - d \end{pmatrix}$$

Так як $AB = BA$, то отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a + 2c = a - b \\ b + 2d = 2a - b \\ -a - c = c - d \\ -b - d = 2c - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = -b \\ d = a - b \\ d = a + 2c \\ b = -2c \end{cases} = \begin{cases} \text{якщо } a = a, \\ c = c, \\ \text{то } b = -2c \\ d = a + 2c \end{cases}.$$

Розв'язком системи є $(a, -2c, c, a + 2c)$, $a \in R, c \in R$.

Отже, $B = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a + 2c \end{pmatrix}$, де $a, c \in R$.

Перевірка:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & 2a + 2c \\ -a - c & -a \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a + 2c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & 2a + 2c \\ -a - c & -a \end{pmatrix}.$$

$$AB = BA.$$

7. Знайти матриці, що переставні до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Нехай $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix}$, тоді з рівності

$$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

отримаємо систему, розв'язавши яку маємо, що

$$b = c = d = g = p = q = 0, a, f, r \in R.$$

Отже, шукана матриця $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$.

Перевірка:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2f & 0 \\ 0 & 0 & 3r \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2f & 0 \\ 0 & 0 & 3r \end{pmatrix}.$$

$$AB = BA.$$

8. Розв'язати матричні рівняння методом елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Рівняння $A \cdot X = B$ має розв'язок $X = A^{-1} \cdot B$, якщо існує матриця A^{-1} . Для розв'язку задачі виписуємо матриці A і B через вертикальну лінію, а після елементарними перетвореннями *рядків* матрицю A приводимо до матриці E , тоді за вертикальною лінією буде стояти шукана матриця X .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & \textcircled{4} & 7 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 18 & 0 & 30 & 15 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{:(-9)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{array} \right)$$

(2)-(1)·2 (1)·3+(2)·2 :(-9)

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 \cdot 30 + 6 \cdot 2 & 2 \cdot 15 + 6 \cdot 16 \\ 4 \cdot 30 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 15 + 3 \cdot 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 72 & 126 \\ 126 & 108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}.$

9. Для даних матриць знайти обернені матриці методом елементарних перетворень $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Запишемо матрицю виду $(A|E)$, де E – одинична матриця. Елементарними перетвореннями рядків зведемо матрицю A до одиничної матриці E , тоді за вертикальною лінією буде знаходитись шукана матриця A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{від другого рядка} \\ \text{віднімаємо перший рядок, результат} \\ \text{записуємо у другий рядок} \end{array} \right] \sim$$

(2)-(1)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times 4} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left[\text{другий рядок помножили на 4} \right] \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & -8 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{до першого рядка додали другий рядок, результат} \\ \text{записали у перший рядок} \end{array} \right] \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ :(-8) \end{array} \sim \left[\begin{array}{l} \text{перший рядок поділили на 2} \\ \text{другий рядок поділили на } (-8) \end{array} \right] \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right), \text{ тоді } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 1 & 2 \cdot 8 + 8 \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 8 + 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

10. Обчислити матрицю $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2001}.$

Знайдемо спочатку квадрат даної матриці:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Про те

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 \beta_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи властивість асоціативності операції множення матриць та останню рівність, дістаємо

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2001} &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \right)^{1000} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2000} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^{2001} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2001} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^{2001} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

11. Обчислити A^n , якщо $A = \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$

За означенням степеня матриці, послідовно знаходимо:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^2 & 2\delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \delta^2 & 2\delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^3 & 3\delta^2 \\ 0 & \delta^3 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що

$$A^n = \begin{pmatrix} \delta^n & n\delta^{n-1} \\ 0 & \delta^n \end{pmatrix}.$$

Доведемо останню формулу методом математичної індукції.

Дійсно, при $n = 1$ ця формула справедлива. Тепер, припускаючи, що для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ формула справедлива, доведемо її справедливість для будь-якого $(n + 1)$. Насправді,

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} \delta^n & n\delta^{n-1} \\ 0 & \delta^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{n+1} & (n+1)\delta^n \\ 0 & \delta^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Отже, $A^n = \begin{pmatrix} \delta^n & n\delta^{n-1} \\ 0 & \delta^n \end{pmatrix}$ справедливо для будь-якого $n \in \mathbf{N}$.

Практичні завдання для самостійної роботи

1. Перевірити справедливість твердження $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати матричні рівняння методом елементарних перетворень

$$\begin{aligned} X \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Знайти матриці, що переставні до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Методом математичної індукції довести, що

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Знайти ранг матриці

Питання для самоконтролю

1. Наведіть приклади матриць A та B , таких що
 - а) добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$ не існують;
 - б) добуток $B \cdot A$ існує, $A \cdot B$ не існує;
2. в) добутки $A \cdot B$, $B \cdot A$ існують. Чи є наведені вами матриці переставними?
3. Чи комутативна операція множення матриць?
4. Яка необхідна умова повинна виконуватись для того, щоб дві матриці були переставними? Чи є ця умова достатньою?
5. Доведіть методом від супротивного, що матриця, протилежна до матриці A , єдина.

6. Запишіть комутативний та асоціативний закони операції додавання матриць. Чи поширюються вони на будь-яку кількість матриць?
7. Чи співпадають: а) розмірності транспонованих матриць; б) порядки транспонованих матриць?
8. Яка матриця називається оберненою матрицею до матриці A ? Яка матриця називається оберотною?
9. Що можна сказати про розмірність оберненої матриці для матриці A ?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми

1. Програмна реалізація матричних обчислень
2. Матриці суміжності та інцидентності.
3. Перетворення зображень: масштабування, повороти, зсуви — за допомогою матриць.
4. Візуалізація матричних процесів (у Python, MATLAB, Excel).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Вирішення практичних завдань «Визначники»

Питання до обговорення

1. Визначники 2-го та 3-го порядків, обчислення за означенням.
2. Визначники n -порядку, $n \in \mathbb{N}$. Мінори, алгебраїчні доповнення.
3. Основні властивості визначників.
4. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця).
5. Способи обчислення визначників вищих порядків.

Основні теоретичні поняття

1. Правило обчислення визначника 2-го порядку:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

2. Правило трикутника обчислення визначника 3-го порядку

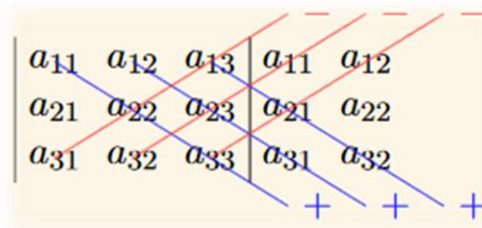
$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Схема використання правила трикутника



3. Метод дописування рядків або стовпців визначника (метод Саррюса): до матриці під знаком визначника дописують перші два стовпці справа (щоб було 5 стовпців). Знаходимо суму добутків елементів трьох «головних» (діагональних) ліній (зліва направо, згори вниз) $D_1 + D_2 + D_3$, знаходимо суму добутків елементів трьох «побічних» діагоналей (справа наліво, згори вниз) $D_4 + D_5 + D_6$. Визначник матриці A обчислюємо як різницю $|A| = \det A = (D_1 + D_2 + D_3) - (D_4 + D_5 + D_6)$.

Схема використання метода Саррюса



4. Основні властивості визначників

I. Визначник не змінюється, якщо:

1. Матрицю транспонувати:

$$\det A^T = \det A$$

(рядки стають стовпцями, але значення визначника зберігається).

2. До одного рядка додати інший, помножений на число r :

Це – елементарне перетворення :

$$R_i \leftarrow R_i + r \cdot R_j,$$

II. Визначник змінюється, якщо:

1. Поміняти місцями два рядки (або два стовпці) – знак визначника змінюється на протилежний:

$$\det B = -\det A.$$

2. Помножити один рядок (або стовпець) на число r – визначник множить на це число

$$R_i \leftarrow R_i + r \cdot R_j \Rightarrow \det B = r \cdot \det A$$

III. Визначник дорівнює нулю, якщо:

- У матриці є нульовий рядок або стовпець.
- Є два однакові рядки або стовпці.
- Два рядки (або стовпці) є пропорційними.
- Один рядок (або стовпець) є лінійною комбінацією інших.
- Властивість рівноправності. Усі властивості справедливі як для рядків, так і для стовпців, бо: $\det A^T = \det A$

5. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} заданої матриці A n -го порядку називається визначник $n - 1$ порядку, утворений з визначника A шляхом викреслення елемента визначника a_{ij} , що розташований у i -рядку j -стовпчику визначника A .

6. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} заданої матриці A n -го порядку називається мінор M_{ij} цього елемента, помножений на число $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$.

7. Теорема: якщо у визначника, всі елементи якогось рядка (стовпчика) дорівнюють нулю, за винятком одного елемента, то цей визначник дорівнює добутку цього елемента на його алгебраїчне доповнення.

8. Теорема (про розкладання визначника за елементами рядка (стовпця)). Визначник матриці A порядку n дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення, тобто

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(формула розкладання за i -им рядком) або

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

(формула розкладання за j -им стовпцем)

Інтерактивні завдання

1. Рахуємо визначник матриці <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/rakhuiemo-vyznachnyk-matrytsi>
2. Знайди мінор <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/minor>
3. Знайди алгебраїчне доповнення <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/abraichne-dopovnennia>
4. Визначник матриці, калькулятор <https://matrix-operations.com/uk>

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Обчислити визначники 2-го порядку:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 2 = -13.$$

$$2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{vmatrix} = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta = \sin(\beta - \alpha).$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 - 2 - 4 + 5 = 0.$$

$$4) \begin{vmatrix} a + d & d \\ a - d & a \end{vmatrix} = a^2 + ad - ad + d^2 = a^2 + d^2.$$

$$5) \begin{vmatrix} (\sin \alpha)^2 & (\cos \alpha)^2 \\ (\sin \beta)^2 & (\cos \beta)^2 \end{vmatrix} = (\sin \alpha)^2 (\cos \beta)^2 - (\sin \beta)^2 (\cos \alpha)^2 = (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = \sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta).$$

2. Обчислити визначники 3-го порядку

$$1) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4(-2)(-5) + 3 \cdot 5 \cdot 0 + (-3) \cdot 8 \cdot 1 - 5(-2) \cdot 1 - 3(-3)(-5) - 0 \cdot 8 \cdot 4 = 40 - 24 + 10 - 45 = -19.$$

$$2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 24 - 35 + 24 - 14 + 9 - 160 = -152.$$

$$3) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 62.$$

$$4) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot c \cdot 0 + a \cdot d \cdot 0 + b \cdot c \cdot 0 - 0 \cdot c \cdot 0 - a \cdot b \cdot 0 - c \cdot d \cdot 0 = 0.$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 - \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + \cos \alpha)^2 - 1 - 1 - \sin \alpha + 1 + 1 - \sin \alpha - 1 - \cos \alpha - 1 - \cos \alpha - (1 - \sin \alpha)^2 = 1 + 2\cos \alpha + (\cos \alpha)^2 - 2\cos \alpha - 1 + (\sin \alpha)^2 = 1.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо значення визначника довільним способом, отримаємо

$$18 + 4x + 3x^2 - 2x^2 - 12 - 9x = 0, x^2 - 5x + 6 = 0$$

За теоремою Вієта $x_1 = 3, x_2 = 2$.

4. Розкласти визначник за 1) елементами другого рядка; 2) елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

За теоремою про розклад визначника за елементами рядка або стовпчика: визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні відповідні алгебраїчні доповнення.

Спосіб 1 (за елементами другого рядка).

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

Перший елемент другого рядка (a_{21}) це -4 , алгебраїчним доповненням A_{21} до нього є величина, що дорівнює $(-1)^{2+1}$ помножена на мінор M_{21} . Задля знаходження мінору, нам необхідно викреслити 2 рядок та 1 стовбець та записати елементи, що залишилися. Отже, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (18 - 28) = -1 \cdot (-10) = 10$. Надалі знайдемо решту алгебраїчних доповнень, помножимо їх на відповідний елемент, та отримані добутки додамо.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ = 4 \cdot (18 - 28) + 45 - 3 \cdot 20 = -55.$$

Спосіб 2 (за елементами першого стовпця).

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}. \\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 0 \\ = 5 \cdot (9 - 12) + 4(18 - 28) = -15 - 40 = -55.$$

5. Обчислити визначник 4-го порядку, використовуючи його властивості:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

У визначника є рядок, в якому все елементи дорівнюють нулю, окрім одного – другий рядок. Тоді

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{22} \cdot A_{22} = 7 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$7 \cdot (2^3 + 10 + 28 - 16 - 10 - 14) = 7 \cdot 6 = 42.$$

6. Обчислити визначник 5-го порядку, використовуючи його властивості:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 1 & 16 & 21 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

У визначника є рядок, в якому всі елементи дорівнюють нулю, окрім одного – четвертий рядок. Тоді даний визначник Δ дорівнює

$$\Delta = a_{42} \cdot A_{42} = -3 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & 13 \\ 3 & 1 & 16 & 21 \\ 1 & 1 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Значення визначника не зміниться, якщо до одного рядка додати інший. Давайте віднімемо від четвертого рядка третій рядок і результат запишемо в третій рядок. Тоді для другого стовбця можемо застосувати теорему.

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & 13 \\ 3 & 1 & 16 & 21 \\ -2 & 0 & -13 & -11 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 10 & 13 \\ -2 & -13 & -11 \end{vmatrix}$$

Задля полегшення обчислення отримаємо додатковий нуль в останньому визначнику. Для цього до третього рядка додати другий рядок, результат можемо записати в третій або в другий рядок. Тоді визначник буде легше обчислити:

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 10 & 13 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (20 + 0 - 30 - 0 - 0 + 39) = 3 \cdot (-29) = -87.$$

7. Обчислити визначник 4-го порядку, використовуючи його властивості

$$\begin{vmatrix} -4 & 7 & -1 & 0 \\ -10 & 9 & -7 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 6 & -7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Відомо, що значення визначника не зміниться, якщо до одного рядка (стовбця) додати інший, помножений на деяке число. До другого рядка додамо четвертий рядок, помножений на 2. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} -4 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 6 & -7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Виконаємо додавання другого та третього рядків.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 112 - 20 - 0 - 84 + 160 = 168.$$

8. Знайти визначник матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Розкладемо цей визначник за третім рядком:

$$\det A = 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 5 \cdot A_{34} = 5 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Тепер розкладемо визначник третього порядку за останнім стовпчиком:

$$\det A = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot (0 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33}) =$$

$$= -5 \cdot 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Визначник другого обчислюємо за формулою

$$\det A = 15 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = 15 \cdot 5 = 75.$$

9. Обчислити за теоремою Лапласа визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Спочатку скористаємося формулою розкладу визначника за рядками. Виберемо в матриці А перші два рядки ($i_1 = 1, i_2 = 2$).

У цих рядках розташовано 6 мінорів, які отримуються при довільному виборі двох стовпців:

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{14}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9; \quad M_{24}^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12; \quad M_{34}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення цих мінорів

$$A_{12}^{12} = (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13}^{12} = (-1)^{1+2+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{14}^{12} = (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23}^{12} = (-1)^{1+2+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{24}^{12} = (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{34}^{12} = (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

Обчислимо визначник, використовуючи формулу розкладу за двома рядками:

$$\det A = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-9) \cdot 1 + (-12) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 20.$$

Використовуємо тепер формулу розкладу за стовпцями. Виберемо, наприклад, перший і четвертий стовпці ($j_1 = 1, j_2 = 4$). Знайдемо мінори, розташовані в цих стовпцях, та їх алгебраїчні доповнення:

$$M_{14}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{14}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{14}^{14} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$M_{14}^{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad M_{14}^{24} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad M_{14}^{34} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{14}^{12} = (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{14}^{13} = (-1)^{1+3+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{14}^{14} = (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{14}^{23} = (-1)^{2+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{14}^{24} = (-1)^{2+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{14}^{34} = (-1)^{3+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9;$$

Обчислимо визначник, використовуючи формулу розкладу за двома стовпцями:

$$\det A = 1 \cdot (-1) + (-10) \cdot (-6) + (-13) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot (-9) = 20.$$

Практичні завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначники другого порядку

$$\begin{vmatrix} 2 \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin^2 \varphi - 1 \\ 2 \cos^2 \varphi - 1 & 2 \sin \varphi \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sqrt{12} & \sqrt{21} \\ \sqrt{35} & \sqrt{45} \end{vmatrix}$$

2. Обчислити визначники 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ 2 \cos^2 \beta & \sin 2\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\begin{vmatrix} \sin 8x & \sin 5x \\ \cos 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Розв'язати нерівність:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} < 1.$$

5. Обчислити визначники:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -7 & 5 \\ 8 & 0 & 5 & -6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 & -7 \\ -1 & 3 & -1 & -6 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

6. Користуючись властивостями визначників, довести, що визначник дорівнює 0.

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}$$

7. Не обчислюючи визначник, доведіть, що

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & b_1 & a_1 - b_1 x \\ a_2 + b_2 x & b_2 & a_2 - b_2 x \\ a_3 + b_3 x & b_3 & a_3 - b_3 x \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Як позначаються елементи визначника?
4. Сформулюйте і доведіть основні властивості визначників.
5. Що називається мінором елемента a_{ik} визначника n -го порядку?

6. Що називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ik} визначника n -го порядку?
7. Доведіть формулу розкладання визначника по елементах рядка (стовпця).
8. Як обчислити визначник n -го порядку?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми.

1. Метод зведення до трикутного виду обчислення визначника
2. Метод виділення лінійних множників обчислення визначника
3. Обернена матриця і знаходження її за допомогою алгебраїчних доповнень
4. Теорема Лапласа
5. Визначник Вандермонда
6. Метод окантування мінорів визначення рангу матриці

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Вирішення практичних завдань Розв'язування систем лінійних рівнянь з
 n – невідомими

Питання до обговорення

1. Розширена матриця системи лінійних рівнянь (СЛР).
2. Умова сумісності СЛР (теорема Кронекера-Капеллі).
3. Сумісність однорідних СЛР.
4. Метод послідовного виключення невідомих розв'язання СЛР (метод Гауса).
5. Формули Крамера.

Основні теретичні поняття

1. Системою m – лінійних рівнянь з n – невідомими (СЛР), $m \neq n$ називається система рівнянь вигляду :

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – невідомі, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – коефіцієнти СЛР, $b_1, b_2, \dots, b_m$ – вільні члени СЛР (у вигляді останнього стовпчика) та $a_{ij} \in R$, - коефіцієнти системи, де i – номер рівняння, $i = \{1, \dots, m\}$, j – номер невідомої (номер стовпця), $j = \{1, \dots, n\}$.

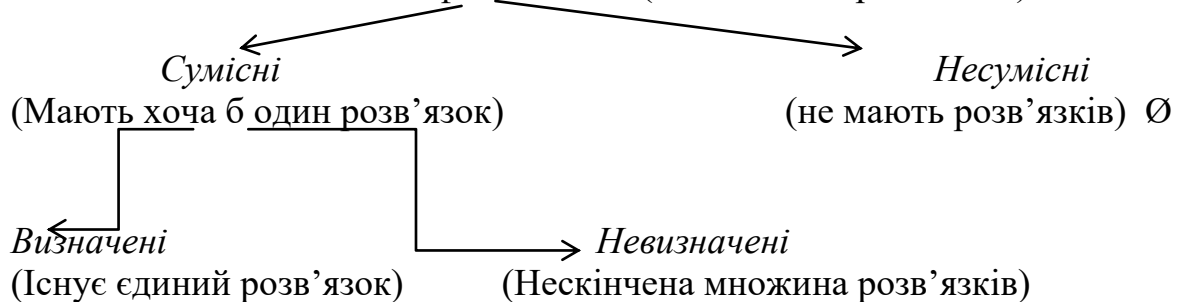
2. Розв'язком системи m – лінійних рівнянь з n – невідомими вигляду (1) називають впорядкований набір дійсних чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, при підстановці якого в кожне рівняння замість відповідної невідомої $x_1, x_2, \dots, x_n$, ми отримаємо правильну рівність (тотожність).
3. Основні методи розв'язку СЛР:

1. Формули Крамера (у випадку $m = n$, та основний визначник відмінний від нуля).

2. Метод Гауса (метод послідовного виключення невідомих) – універсальний спосіб розв'язування СЛР при $m \neq n$.

3. Матричний спосіб (у випадку $m = n$) (кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих).

4. Класифікація СЛР (за кількістю розв'язків)



5. Розширена матриця системи лінійних рівнянь (СЛР): Це матриця, утворена з коефіцієнтів при невідомих та стовпця вільних членів. Вона включає як коефіцієнти, так і праві частини рівнянь.

6. Ранг матриці – це максимальна кількість лінійно незалежних рядків (або стовпців) матриці. Обчислюємо кількість лінійно незалежних рядків або стовпців а допомогою елементарних перетворень (приводимо до ступінчастого виду), тоді ранг = кількість ненульових рядків у матриці після перетворень

7. Умова сумісності СЛР (теорема Кронекера-Капеллі): Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці коефіцієнтів дорівнює рангу розширеної матриці:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A | b)$$

8. Сумісність однорідних СЛР: Однорідна система завжди сумісна, бо має тривіальний розв'язок (усі невідомі дорівнюють нулю). Нескінченно багато розв'язків — якщо кількість невідомих перевищує ранг системи.

9. Метод послідовного виключення невідомих (метод Гауса): Це метод приведення системи до трикутного вигляду (або ступінчастої форми) за допомогою елементарних перетворень, після чого здійснюється зворотній хід для знаходження значення невідомих.

Алгоритм метода Гауса.

1) Виписати розширену матрицю вихідної системи. Привести її до трапецієвидної форми, залишаючи на місці останній стовпець. Викреслити в отриманій матриці всі нульові рядки.

2) Якщо трапецієвидна матриця містить рядок, всі елементи якого, крім останнього дорівнюють нулю, то система несумісна, і процес завершується. Якщо ж такого рядка немає, то :

- Виписати нову систему лінійних рівнянь так, щоб трапецієвидна матриця була її розширеною матрицею. Вихідна і нова системи рівносильні.

- Нехай r – кількість рівнянь нової системи, а n – кількість її невідомих. Якщо $r = n$, то нова система визначена. Розв'язуючи її знизу догори, знаходимо єдиний розв'язок вихідної системи (коефіцієнти основної матриці утворюють трикутник)

- При $r < n$, коефіцієнти основної матриці утворюють трапецію. Отже система невизначена. Необхідно знайти загальний розв'язок такої системи через вільні невідомі або параметри.

- Загальний розв'язок — це множина всіх розв'язків системи, записана у вигляді формул, що виражають усі невідомі через вільні параметри (вільні невідомі).

- Вільні невідомі — це ті змінні, які не можна однозначно знайти з системи; їм можна надавати довільні значення; через них виражаються інші змінні (базисні).

Кількість вільних змінних = кількість змінних – ранг матриці системи

10. Формули Крамера: Якщо система з n – лінійних рівнянь містить n – невідомих та визначник Δ матриці коефіцієнтів цієї системи, відмінний від 0, то така СЛР має єдиний розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, який знаходиться як

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, \alpha_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i ($i = \{1, \dots, n\}$) – визначник матриці, утворений у результаті заміни у вихідному визначнику Δ i -стовпчика на стовпчик вільних членів.

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих
- $$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 2. \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю даної системи та виконаємо її елементарні перетворення

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & -10 & 4 \\ 0 & 12 & -2 & 20 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

(1) Другий рядок помножили на 3 та від нього відняли перший рядок, помножений на 2. Третій рядок помножили на 3 та додали перший рядок.

2) До третього рядка додали другий, помножений на 2.

Маємо, що ранг основної матриці дорівнює 2, ранг розширеної матриці дорівнює 3. За теоремою Кронекера –Капеллі система несумісна.

Іншими словами можна цей факт пояснити без поняття рангу матриці таким чином. Запишемо рівняння, що відповідає третьому рядку останньої матриці:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 10 \text{ або } 0 = 10.$$

Це протиріччя, тому система лінійних рівнянь несумісна.

Відповідь: $\emptyset$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих .

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 4x + 2y + z = -1 \\ 8x + 4y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2k_1 - k_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \\ 8 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{4k_1 - k_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{k_2 - k_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Маємо, що ранг основної матриці дорівнює 2, ранг розширеної матриці дорівнює 3. За теоремою Кронекера –Капеллі система несумісна.

Іншими словами можна цей факт пояснити без поняття рангу матриці таким чином. Запишемо рівняння, що відповідає третьому рядку останньої матриці:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z &= -6 \\ 0 + 0 + 0 &= -6 \end{aligned}$$

$0 = -6$ – протиріччя.

Це протиріччя, тому система лінійних рівнянь несумісна.

Відповідь: $\emptyset$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення

$$\text{невідомих} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ -7x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю цієї системи і приведемо її до трапецієвидної форми.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ -7 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{k_2 - 3k_1 \rightarrow k_2 \\ k_3 + 7k_1 \rightarrow k_3 \\ k_4 - k_1 \rightarrow k_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -20 & -4 & -12 \\ 0 & -13 & 45 & 18 & 35 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}k_2 \rightarrow k_2 \\ -\frac{1}{3}k_4 \rightarrow k_4}} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 2 & 6 \\ 0 & -13 & 45 & 18 & 35 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{k_2 \rightarrow k_4 \\ k_4 \rightarrow k_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 45 & 18 & 35 \\ 0 & -5 & 10 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{k_3 + 13k_2 \rightarrow k_3 \\ k_4 + 5k_2 \rightarrow k_4}} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 58 & 31 & 35 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{k_3 \rightarrow k_4 \\ k_4 \rightarrow k_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 58 & 31 & 35 \end{array} \right) \xrightarrow{15k_4 - 58k_3 \rightarrow k_4} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 59 & 177 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{59}k_4 \rightarrow k_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Маємо, що ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює трьом, отже за теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна. Знайдемо усі розв'язки цієї системи.

Випишемо за трапецієвидною матрицею нову систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 15x_3 + 7x_4 = 6, \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Кількість рівнянь цієї системи співпадає з кількістю її невідомих, тому остання система – визначена. Розв'язуючи її знизу догори, маємо: $x_4 = 3$.

Підставляючи це значення в передостаннє рівняння отримаємо: $15x_3 = 6 - 7 \cdot 3 = -15$, $x_3 = -1$.

Підставляючи значення x_3 і x_4 в друге рівняння маємо: $x_2 = -2$.

Нарешті, підставляючи ці значення у перше рівняння, отримаємо: $x_1 = 1$.

Отже, оскільки остання система рівносильна вихідній, то вихідна система має єдиний розв'язок $(1, -2, -1, 3)$.

Для перевірки треба підставити цей розв'язок в кожне з рівнянь вихідної системи:

$$\begin{cases} 1 - 2 \cdot (-2) + 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5, \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 3, \\ -7 \cdot 1 + (-2) + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 0, \\ 1 - 5 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) - 3 = 5. \end{cases}$$

Через громіздкі обчислення, при розв'язанні систем лінійних рівнянь методом Гауса, часом трапляється немало помилок. Тому потрібно обов'язково робити перевірку.

Відповідь: $(1, -2, -1, 3)$.

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ 4x + 4y - 2z = 10 \end{cases}$

Використовуємо елементарні операції над рядками розширеної матриці СЛР для приведення системи до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[k_3 - 4k_1]{k_2 - 2k_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[k_3: 2]{k_2: (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2k_2 + k_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Маємо, що ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці та дорівнює 3. За теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна. Знайдемо усі розв'язки цієї системи.

Запишемо за трапецієвидною матрицею нову систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ y - z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Звідки отримаємо, $(0, 3, 1)$

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 10 \\ 4x + 6y - 10z = 20 \\ 6x + 9y - 15z = 30 \end{cases}$

Запишемо розширену матрицю СЛР та виконаємо над нею елементарні перетворення

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 10 \\ 4 & 6 & -10 & 20 \\ 6 & 9 & -15 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[k_3 - 3k_1]{k_2 - 2k_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Система має нескінчену кількість розв'язків та містить одне рівняння $2x + 3y - 5z = 10$, тут $r = 1, n = 3$, тоді $n - r = 3 - 1 = 2$ вільні невідомі.

Нехай y, z – вільні невідомі, отже з єдиного рівняння системи маємо, що

$$2x = -3y + 5z + 10 \rightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z + 5.$$

Загальний розв'язок $\left(-\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z + 5, y, z\right), y \in R, z \in R$.

Частинні розв'язки $(5, 0, 0), (2, 2, 2), (6, 1, 1)$ тощо.

Відповідь: $\left(-\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z + 5, y, z\right), y \in R, z \in R$.

5. Розв'язати систему за формулами Крамера $\begin{cases} 21x - 3y = 4 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$

Спочатку знайдемо основний визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -105 + 12 = -93 \neq 0.$$

Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 30 = 10.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 21 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 210 - 16 = 194.$$

Тоді

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{10}{93}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{194}{93}.$$

Виконується перевірка.

Відповідь: $\left(-\frac{10}{93}; -\frac{194}{93}\right)$.

6. Розв'язати систему за формулами Крамера $\begin{cases} 3x + 8y = 5x - 3 \\ 7y + 11x = 3 - (2y - x) \end{cases}$

Вихідна система може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} -2x + 8y = -3 \\ 10x + 9y = 3 \end{cases}$$

Основний визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = -18 - 80 = -98 \neq 0.$$

З цього слідує, що система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -27 - 24 = -51,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 30 = 24.$$

Тоді

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{51}{98}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{24}{98} = -\frac{12}{49}.$$

Виконується перевірка знайдених розв'язків усно.

Відповідь: $\left(\frac{51}{98}; -\frac{12}{49}\right)$.

7. Дослідити кількість розв'язків системи у залежності від параметра a

$$\begin{cases} ax - y = 3 \\ x + ay = a - 2 \end{cases}$$

Основний визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 \neq 0.$$

$a^2 + 1$ ніколи не дорівнюватиме нулю для будь-якого дійсного числа, отже система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ a-2 & a \end{vmatrix} = 3a + a - a + 2 = 3a + 2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1).$$

Тоді

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3a+2}{a^2+1}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a-3)(a+1)}{a^2+1}.$$

Відповідь: $(\frac{3a+2}{a^2+1}; \frac{(a-3)(a+1)}{a^2+1})$.

Знайти всі значення параметра a , при яких система має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} 3x + 7y = 20 \\ ax + 14y = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Система має єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$. Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a & 14 \end{vmatrix} = 42 - 7a,$$

то система має єдиний розв'язок при $a \neq 6$.

8. Знайти всі значення параметра a , для яких система

$$\begin{cases} ax - 8y = 12 \\ 2x + 6y = 15 \end{cases}$$

не має розв'язків.

Розв'язання. Оскільки $\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 120 = 48 \neq 0$, то вихідна не має розв'язку лише тоді, коли

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -8 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6a + 16 = 0,$$

тобто коли $a = \frac{8}{3}$.

9. Знайти значення параметра a , для яких система

$$\begin{cases} 15x + ay = 3 \\ 5x + 10y = 1 \end{cases}$$

має нескінчену множину розв'язків.

Розв'язання. Оскільки

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то вказана система має нескінчену множину розв'язків за умови, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & a \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 150 - 5a = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 30 - a = 0,$$

тобто при $a = 30$.

10. Для кожного значення розв'язати систему

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Знайдемо усі визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - a^2.$$

Маємо, що $\Delta \neq 0$, коли $a^2 - 1 \neq 0$, тобто коли $a \neq 1$, та $a \neq -1$ система має єдиний розв'язок. Знайдемо його.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a - a^2}{a^2 - 1} = -\frac{a}{a + 1},$$

Коли $a = 1$ маємо, що $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ та система має нескінчену множину розв'язків. Дійсно, для обраного параметра система має вигляд

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи запишемо через деякий параметр $t \in R$ у вигляді $\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \end{cases} t \in R$ або $(t, 1 - t), t \in R$.

Коли $a = -1$ маємо що $\Delta = 0, \Delta_x \neq 0$ та, відповідно, система розв'язків не має. Дійсно, коли $a = -1$ отримуємо систему

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Відповідь:

якщо $\{a \in (-\infty; -1) \cup (-1, 1) \cup (1; +\infty)\}$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, -\frac{a}{a + 1}\right)$;

при $a = 1$ система має нескінчену множину розв'язків, $(t, 1 - t), t \in R$;

при $a = -1$ система розв'язків не має.

Практичні завдання для самостійної роботи

- Розв'язати системи лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 3x - 4y + 2z = 8 \\ x - y + z = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ x + 4z = 11 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3y + 2z = 3 \\ 5x - y + 2z = 4 \\ 3x - 5y = -2 \\ 7x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Для перевірки знайдених розв'язків систем лінійних рівнянь використовуйте онлайн-калькулятор <https://ua.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/>

- Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$$

Для перевірки знайдених розв'язків систем лінійних рівнянь використайте онлайн-калькулятор <https://www.mathros.net.ua/cramers-rule-online>

3. При всіх дійсних значеннях параметра a розв'язати системи лінійних рівнянь $\begin{cases} ax + y = 3a - 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Що називається системою m лінійних рівнянь з n невідомими?
2. Дайте означення розв'язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
3. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається :
а) сумісною; б) несумісною; в) визначеною; г) невизначеною?
4. Чи існують несумісні однорідні системи лінійних рівнянь?
5. Чи може однорідна і неоднорідна система мати одну і ту ж матрицю?
6. Який розв'язок завжди має однорідна система лінійних рівнянь?
7. Що називається нульовим та ненульовим розв'язками системи однорідних рівнянь?
8. Чи існують:
а) несумісні невизначені системи лінійних рівнянь;
б) сумісні визначені системи лінійних рівнянь?
9. Які властивості мають розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь?
10. Чи мають такі ж властивості розв'язки сумісної неоднорідної системи лінійних рівнянь? Поясніть, чому.
11. Назвіть всі пункти алгоритму розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гауса та доведіть, що він приводить до розв'язання вихідної системи лінійних рівнянь.
12. Що таке вільні параметри? Як їх визначають при розв'язанні системи лінійних рівнянь?
13. Що таке загальний розв'язок системи лінійних рівнянь? Як з нього отримати конкретні числові розв'язки цієї системи?
14. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називається частинним? Як отримати частинний розв'язок?
15. Чи до всіх систем можна застосувати правило Крамера?
16. Чи потрібно розв'язувати однорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими, що визначник основної матриці системи відмінний від нуля? Чому?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми.

1. Матричний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь
2. Метод Жордана-Гауса розв'язування системи лінійних рівнянь
3. Метод Штифеля розв'язування системи лінійних рівнянь

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

Вирішення практичних завдань «Алгебраїчна форма запису комплексного числа, їх геометрична інтерпретація.

Питання до обговорення

1. Алгебраїчна форма запису комплексного числа.
2. Уявна одиниця i і її основна властивість.
3. Додавання і віднімання комплексних чисел.
4. Добуток двох комплексних чисел.
5. Модуль комплексного числа.
6. Частка комплексних чисел в алгебраїчній формі.
7. Спряжене комплексне число? Як його знаходити.
8. Зображення комплексного числа на координатній площині.
9. Комплексна площина (площина Аргана).
10. Модуль і аргумент комплексного числа.
11. Геометричне представлення суми та різниці комплексних чисел.
12. Задачі з фізики чи інженерії потребують використання комплексних чисел.
13. Типи рівнянь з комплексними коренями розв'язуються за допомогою алгебраїчної форми.
14. Особливості графічного зображення множини комплексних чисел із певними властивостями (наприклад, однаковий модуль або аргумент)?

Основні теретичні поняття

Комплексне число — це число виду: $z = a + bi$, де $a \in R$ — дійсна частина; $b \in R$ i — уявна одиниця, така, що: $i^2 = -1$

Множина комплексних чисел позначається: $C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$.

Основні поняття

Назва	Позначення	Формула / Приклад
Комплексне число	z	$z = 3 + 4i$
Дійсна частина	$Re(z)$	3
Уявна частина	$Im(z)$	4
Модуль	$ z = \sqrt{Re^2 z + Im^2 z}$	$ z = \sqrt{25} = 5$
Спряжене число	$\bar{z} = a - bi$	$z = 3 - 4i$

Арифметичні дії

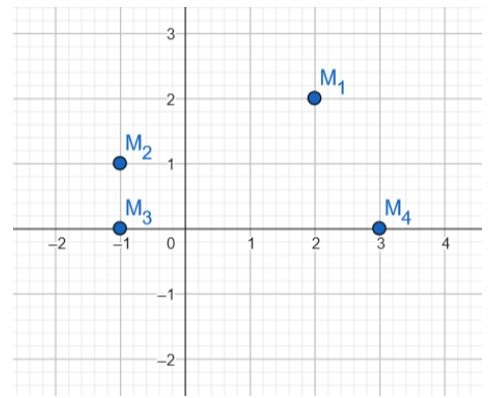
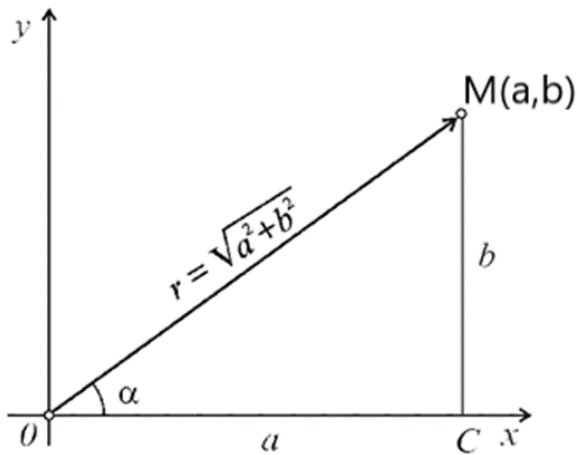
- Додавання: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (a + c) + (b + d)i$
- Віднімання: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i = (a - c) + (b - d)i$
- Множення: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

• Ділення:

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{(c^2 + d^2)} = \frac{ac + bd}{(c^2 + d^2)} + \frac{bc - ad}{(c^2 + d^2)}i$$

Геометрична інтерпретація. Комплексне число $z = a + bi$, можна уявити як точку або вектор на комплексній площині (площина Аргана): вісь абсцис (x) – дійсна частина $a = \operatorname{Re} z$; вісь ординат (y) – уявна частина $b = \operatorname{Im} z$;

$$\text{Модуль } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$$



Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ називається кут α , який утворює вектор, що відповідає комплексному числу з початком у точці $O(0;0)$ і кінцем у точці $M(a;b)$, з додатним напрямом осі x та $0 \leq \alpha < 2\pi$, та позначається як $\alpha = \arg z$. Для обчислення аргументу $\alpha = \arg z$ комплексного числа $z = a + bi$ зручно користуватися

рівністю $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Спряжене число. Для $z = a + bi$, спряжене $\bar{z} = a - bi$. Їх добуток $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

Властивості модуля комплексного числа

1. $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \geq 0. |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
2. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ (реальна частина подвоєна)
3. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ (уявна частина подвоєна)
4. $z = \bar{z}$ тоді й тільки тоді, коли z – дійсне число
5. $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$ (модуль добутку дорівнює добутку модулів).
6. $|z + z_1| \leq |z| + |z_1|$. (нерівність трикутника).
7. $||z| - |z_1|| \leq |z + z_1|$.

Застосування. Комплексні числа застосовуються: у фізиці (коливальні процеси, хвилі); у електротехніці (змінний струм); у комп'ютерній графіці; при розв'язанні квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом.

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Обчислити $z = 2i^3 + i^{12} - i^{21} + 2i^{42}$.

Ураховуючи, що $i^2 = -1$, та користуючись властивостями степенів, отримуємо, що $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$, $i^{21} = i^{20+1} = (i^2)^{10} \cdot i = (-1)^{10} \cdot i = i$, $i^{42} = (i^2)^{21} = (-1)^{21} = -1$ тоді

$$z = 2i^3 + i^{12} - i^{21} + 2i^{42} = -2i + 1 - i - 2 = -1 - 3i.$$

Відповідь: $z = -1 - 3i$.

2. Розв'яжіть квадратне рівняння.

а) $x^2 + 4 = 0$.

Зауважимо, що $-4 = 4(-1) = 4i^2$. Тоді $x^2 + 4 = x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i) = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2i$. Корені суто уявні, рівняння дійсних коренів не має.

Відповідь: $2i, -2i$

b) $3x^2 + 2 = 0$.

Аналогічно $3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow$

$$x^2 - \frac{2}{3}i^2 = \left(x - \frac{2}{3}i\right)\left(x + \frac{2}{3}i\right) = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}i,$$

Відповідь: $\frac{2}{3}i, -\frac{2}{3}i$

c) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння, отримаємо

$$D = 4 - 20 = -16 = 16(-1) = 4i^2.$$

Тоді $\sqrt{D} = \sqrt{4i^2} = \pm 2i$. Оберемо $\sqrt{D} = 2i$, отримаємо, що

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \mp i$$

Відповідь: $-1 - i, -1 + i$.

d) $3x^2 - 4x + 2 = 0$.

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння, отримаємо

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 = 8(-1) = 8i^2.$$

Тоді $\sqrt{D} = \sqrt{8i^2} = \pm 2\sqrt{2}i$. Оберемо $\sqrt{D} = 2\sqrt{2}i$, отримаємо, що

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

3. Знайти суму чисел $z = 7 - 9i, z_1 = 3 + i$

$$z + z_1 = (7 - 9i) + (3 + i) = (7 + 3) + (-9 + 1)i = 10 - 8i.$$

4. Знайти різницю чисел $z = 7 - 9i, z_1 = 3 + i$

$$z - z_1 = (7 - 9i) - (3 + i) = (7 - 3) - (-9 - 1)i = 4 - 10i.$$

5. Знайти добуток чисел $z = 7 - 9i, z_1 = 3 + i$

$$z \cdot z_1 = (7 - 9i) \cdot (3 + i) = 21 + 7i - 27i - 9i^2 = 30 - 20i$$

6. Знайти частку чисел $z = 7 - 9i, z_1 = 3 + i$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_1} &= \frac{7 - 9i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{(7 - 9i)(3 - i)}{9 - i^2} = \frac{21 - 7i - 27i + 9i^2}{10} = \\ &= \frac{12 - 34i}{10} = \frac{6}{5} - \frac{17}{5}i. \end{aligned}$$

7. Розв'язати рівняння.

a) $2z - 3i\bar{z} = 8 - 7i$

Розв'язання.

Нехай $z = a + bi$, тоді $\bar{z} = a - bi$ та

$$2z - 3i\bar{z} = 2(a + bi) - 3i(a - bi) = (2a - 3b) + (2b - 3a)i.$$

Отже, $(2a - 3b) + (2b - 3a)i = 8 - 7i$.

Тоді, за теоремою про рівність комплексних чисел в алгебраїчній формі маємо, що

$$\begin{cases} 2a - 3b = 8, \\ -3a + 2b = -7 \end{cases} \rightarrow (1, -2).$$

Отже, $z = 1 - 2i$. Перевірка:

$$2z - 3i\bar{z} = 2(1 - 2i) - 3i(1 + 2i) = 2 - 4i - 3i - 6i^2 = 8 - 7i.$$

Відповідь: $1 - 2i$.

b) $2\bar{z} - iz = -3 - 6i$

Нехай $z = a + bi$, тоді $\bar{z} = a - bi$ та

$$2\bar{z} - iz = 2(a - bi) - i(a + bi) = (2a + b) + (-2b - a)i.$$

Отже, $(2a + b) + (-2b - a)i = -3 - 6i$.

Тоді, за теоремою про рівність комплексних чисел в алгебраїчній формі маємо, що

$$\begin{cases} 2a + b = -3, \\ a + 2b = 6 \end{cases} \rightarrow (-4, 5).$$

Отже, $z = -4 + 5i$.

Перевірка: $2\bar{z} - iz = 2 \cdot (-4 - 5i) - i(-4 + 5i) = -8 - 10i + 4i - 5i^2 = 3 - 6i$.

Відповідь: $-4 + 5i$

8. Знайти $Re \frac{2+7i}{1+4i}$

$$\frac{2+7i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{2-8i+7i-28i^2}{17} = \frac{30}{17} - \frac{1}{17}i.$$
$$Re \frac{2+7i}{1+4i} = Re \left(\frac{30}{17} - \frac{1}{17}i \right) = \frac{30}{17}.$$

9. Розв'язати систему

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера. Обчислимо основний визначник Δ системи та додаткові визначники Δ_1, Δ_2 утворені способом заміни 1 та 2 стовпчика визначника Δ на стовпчик вільних членів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & i \end{vmatrix} = i - 6.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ 2-3i & i \end{vmatrix} = (1+i)i - 2(2-3i) = i + i^2 - 4 + 6i = -5 + 7i.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 3 & 2-3i \end{vmatrix} = (2-3i) - 3(1+i) = 2-3i-3-3i = -1-6i.$$

Тоді

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5+7i}{i-6} \cdot \frac{-i-6}{-i-6} = \frac{5i+30-7i^2-42i}{37} = 1-i,$$
$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1-6i}{i-6} \cdot \frac{-i-6}{-i-6} = \frac{i+6+6i^2+36i}{37} = i.$$

Перевірка.

$$z_1 + 2z_2 = 1 - i + 2(i) = 1 + i$$

$$3z_1 + iz_2 = 3(1-i) + i(i) = 3 - 3i + i^2 = 2 - 3i$$

Відповідь: $1 - i, 2 - 3i$.

10. Знайдіть точки, що відповідають комплексним числам

$$z = 2 + 2i \rightarrow M_1(2; 2).$$

$$z = -1 \rightarrow M_3(-1; 0)$$

$$z = -1 + i \rightarrow M_2(-1; 1)$$

$$z = 3i \rightarrow M_4(0; 3)$$

11. Запишіть комплексні числа, які відповідають точкам:

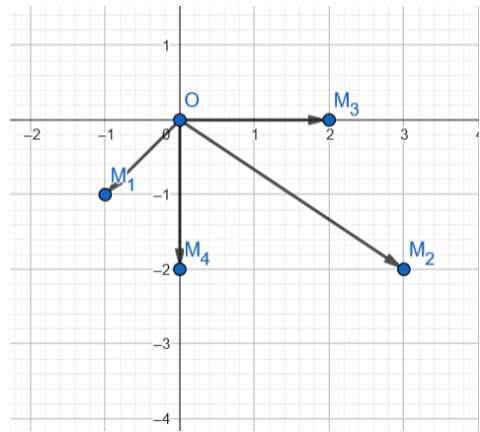
$$A(1; 3) \rightarrow z_1 = 1 + 3i,$$

$$C\left(-4; \frac{2}{3}\right) \rightarrow -4 + \frac{2}{3}i.$$

$$B(0; 2) \rightarrow z_2 = 2i,$$

12. Якими точками на комплексній площині зображуються протилежні комплексні числа?

Числу $z = a + bi$ протилежним є число $-z = -a - bi$. Якщо число z зображується точкою $M(a; b)$, то число $-z$ — точкою $N(-a; -b)$. Тобто, протилежні комплексні числа зображуються на координатній площині точками, симетричними відносно початку координат.

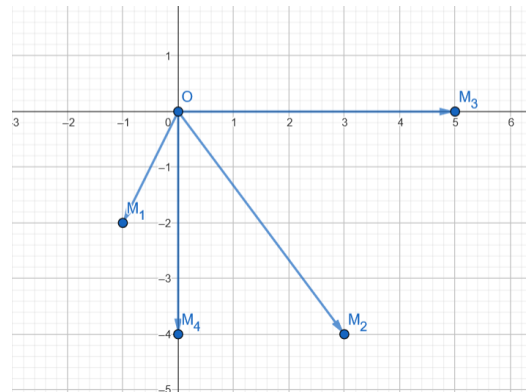


13. Зобразити вектори, які відповідають комплексним числам:

1. $z = -1 - i \rightarrow \overline{OM_1}(-1; -1)$
2. $z = 3 - 2i \rightarrow \overline{OM_2}(3; -2)$
3. $z = 2 \rightarrow \overline{OM_3}(2; 0)$
4. $z = -2i \rightarrow \overline{OM_4}(0; -2)$

14. Побудуйте на координатній площині дані вектори та запишіть комплексні числа, що відповідають їм:

1. $\overline{OM_1}(-1; -2)$
2. $\overline{OM_2}(3; -4)$
3. $\overline{OM_3}(5; 0)$
4. $\overline{OM_4}(0; -4)$



15. Визначити модуль і аргумент

комплексних чисел $z_1 = 2 + 2i$;
 $z_2 = -3 + 4i$; $z_3 = -4 - 3i$; $z_4 = 4 - 2i$

Розв'язування

а) $z_1 = 2 + 2i$. Отже, $a = 2$, $b = 2$, точка $M(2; 2)$, що відповідає даному комплексному числу, належить I координатній чверті.

Тоді $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$, тоді

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left| \frac{2}{2} \right| = 1, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{4}.$$

б) $z_2 = -3 + 4i$. Отже, $a = -3$, $b = 4$, точка $M(-3; 4)$, що відповідає даному комплексному числу, належить II координатній чверті.

Тоді $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, тоді

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left| \frac{4}{-3} \right|, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{4}{3}, \quad \varphi = \pi - \arctg \frac{4}{3}.$$

в) $z_3 = -4 - 3i$. Отже, $a = -4$, $b = -3$, точка $M(-4; -3)$, що відповідає даному комплексному числу, належить III координатній чверті.

Тоді $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, тоді

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left| \frac{-3}{-4} \right|, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{3}{4}, \quad \varphi = \pi + \arctg \frac{3}{4}.$$

г) $z_4 = 4 - 2i$. Отже, $a = 4$, $b = -2$, точка $M(4; -2)$, що відповідає даному комплексному числу, належить IV координатній чверті.

Тоді $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$, тоді

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left| \frac{-2}{4} \right|, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \quad \varphi = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

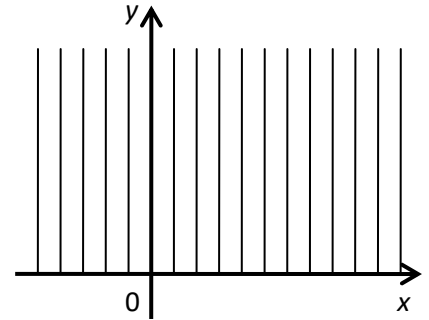
16. Зобразити графічно множину всіх точок комплексної площини, для якої виконуються дані умови:

$$1) \operatorname{Im} z > 0, \quad 2) |z - i| = 1, \quad 3) \begin{cases} 1 \leq |z + 1| \leq 2, \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi. \end{cases}$$

$$4) |z| = 5; \quad 5) |z| \leq 6; \quad 6) |z - (2 + i)| \leq 3;$$

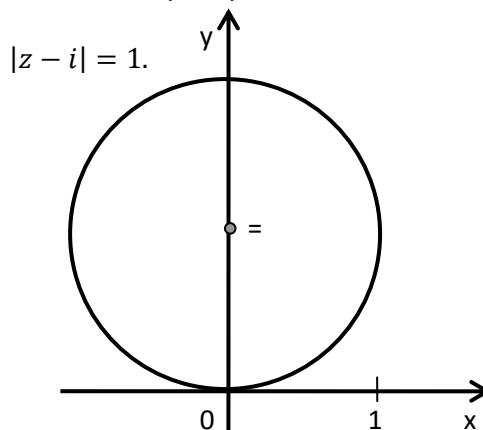
$$7) 6 \leq |z - i| \leq 7.$$

1) $\operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z$ позначає уявну частину комплексного числа z). Якщо $z = x + iy$, то $\operatorname{Im} z = y$. Тоді шукана множина точок комплексної площини задовольняє умові: $y \geq 0$. Це верхня відносно осі Ox півплощина, яка включає пряму $y = 0$.



$$2) |z - i| = 1.$$

Для кожного z число $|z - i|$ дорівнює відстані між точкою z та точкою i . Тому заданій умові $|z - i| = 1$ задовольняють ті і тільки ті точки, які лежать на колі радіуса 1 з центром в точці $(0; 1)$.



Це можна строго довести:

Якщо $z = x + iy$, то $z - i = x + iy - i = x + i(y - 1)$, тоді:

$$|z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 1 \rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Це рівняння описує коло радіуса 1 з центром в точці $(0; 1)$.

4) $|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5^2$ – рівняння кола радіусом 5 і з центром на початку координат.

5) Круг радіусом 6 з центром на початку координат.

6) Круг радіусом 3 з центром в точці $z_0 = 2 + i$.

7) Кільце, обмежене колами з радіусами 6 та 7 з центром в точці $z_0 = i$.

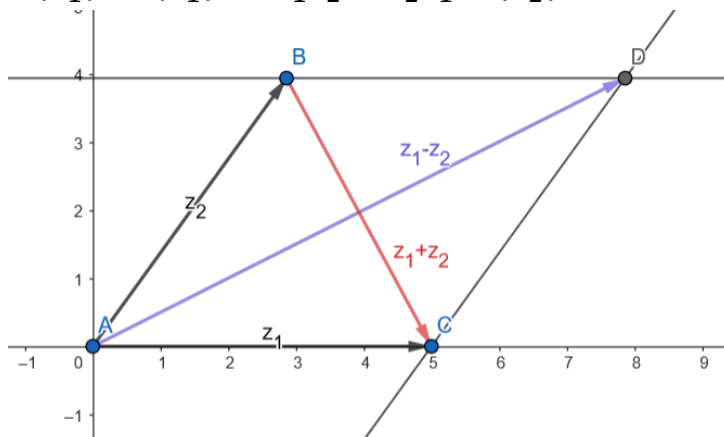
17. Нехай $|z_1| = |z_2| = c$. Доведіть, що $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$.

Оскільки $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, то

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\
&= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_1|^2 + |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 4c^2.
\end{aligned}$$

Геометрично цей факт означає, що сума квадратів довжин діагоналей ромба дорівнює сумі квадратів довжин усіх сторін.

Дійсно, точки площини, що відповідають комплексним числам 0 , z_1 , z_2 та $z_1 + z_2$, є вершинами ромба, для яких $|z_1|$ та $|z_2|$ – довжини його сторін, а $|z_1 + z_2|$ та $|z_1 - z_2|$ – довжини його діагоналей.



Практичні завдання для самостійної роботи

1. Знайти

$$(8 - 2i)(1 - 3i) - (15 + 7i) - (23 - 6i)$$

$$(1 + i)(4 - i)(-3 + 7i) + (3 - 2i)(i^3 - 4)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{17 - i}{1 - 3i} \\
&\frac{-13 + 4i}{6 + i} - \left(\frac{1 + 3i}{1 + i}\right)^2
\end{aligned}$$

2. Вказати на комплексній площині множину точок, яка відповідає комплексним числам z , що задовольняють умовам

$$1 \leq |z| \leq 2$$

$$|z - 1| = \frac{1}{3}$$

$$|z - 3 + 2i| \leq 2$$

3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} (1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = 1 + i \\ (1 - i)z_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 3i \end{cases}$$

4. Обчислити модуль та аргумент комплексного числа:

$$1) z = 1 + i. 2) z = -\sqrt{3} + i. 3) z = 2. 4) z = 3i.$$

Питання для самоконтролю

1. Поняття комплексного числа z .
2. Що називається уявною одиницею або числом Ейлера?
3. Що називається дійсною частиною комплексного числа z ?
4. Що називається уявною частиною комплексного числа z ?
5. Що таке спряжене комплексне число?
6. Що таке протилежне число?
7. Що таке комплексний нуль?
8. Що таке суто уявне число?
9. Що називається модулем комплексного числа?
10. Що називається аргументом комплексного числа?
11. Що називається алгебраїчною формою комплексного числа?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми.

1. Тригонометрична форма запису комплексного числа. Дії на комплексними числами, що задані тригонометричною формою

2. Показникова форма запису. Дії на комплексними числами, що задані показниковою формою.
3. Комплексні корені з 1. Первісні корені.
4. Комплексні числа в коливальних процесах
5. Комплексна площа та множина Мандельброта.
6. Побудова фракталів у програмному середовищі.
7. Моделювання та прогнозування в середовищі MATLAB/Excel/Python

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

Вирішення практичних завдань «Вектори. Дії над векторами»

Питання до обговорення

1. Поняття про вектор, основні означення.
2. Лінійні операції над векторами та їхні основні властивості.
3. Лінійна комбінація векторів.
4. Колінеарні і компланарні вектори.
5. Поняття про базис системи векторів і систему координат.
6. Прямокутна декартова системи координат на площині та у просторі.
7. Розкладання вектора за даним базисом.
8. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та їх властивості.

Основні теоретичні поняття

1. Поняття про вектор, основні означення

Відрізок, для якого визначено напрям, називають напрямленим відрізком, або вектором.



Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB .

Нульовий вектор $\vec{0}$ — вектор, у якого початок і кінець збігаються

Одиничний вектор — вектор довжини 1.

Два ненульові вектори називаються **рівними**, якщо рівні їхні модулі і вони співнаправлені.

2. Лінійні операції над векторами та їхні основні властивості

Додавання векторів: графічно — методом трикутника або паралелограма.

Множення вектора на скаляр: змінює довжину вектора і, можливо, напрям.

3. *Правило трикутника додавання векторів.* Якби не були точки A , B і C , справджується рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Отже, схема суми двох довільних векторів - правила трикутника

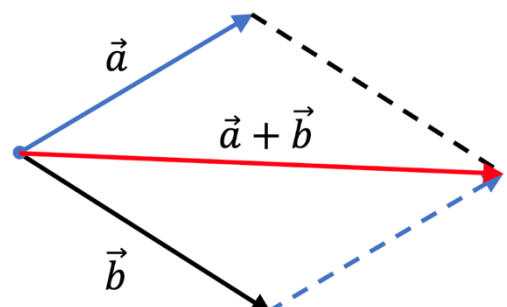
- 1) Від кінця вектора $\vec{a}$ відкладаємо вектор $\vec{b}'$, що дорівнює вектору $\vec{b}$;
- 2) Будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{b}'$; цей вектор і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

4. *Правило паралелограма.* Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ збігалися; через кінці векторів провести прямі, паралельні прямим, які містять дані вектори:

Початком вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде початок векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

Кінцем вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде протилежний цій точці кінець діагоналі утвореного паралелограма.

5. Лінійна комбінація векторів



Лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ — це вираз виду: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, де λ_i — скаляри.

6. **Компланарні вектори** — лежать в одній площині (або їх можна до неї звести).

Колінеарні вектори — лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарність векторів позначають як $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



Ненульові колінеарні вектори бувають або співнаправленими, або протилежно напрямленими.

Вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \mu \vec{a}$ і $\mu \neq 0$ і навпаки, якщо $\vec{b} = \mu \vec{a}$, де $\mu \neq 0$ то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні.

Геометричний зміст колінеарності двох ненульових векторів $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$, які відкладено від однієї точки, полягає у тому, що ці вектори лежать на одній прямій і один з них можна отримати з іншого за розтягування або стискання. З цього випливає, що точка лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли справджується умова $\vec{AC} = \mu \vec{AB}$

7. Поняття про базис системи векторів і систему координат

Базис — система векторів, які є лінійно незалежними і за допомогою яких можна подати будь-який вектор як лінійну комбінацію цих векторів.

8. Прямокутна декартова система координат на площині та у просторі

Площина: базис — два взаємно перпендикулярні одиничні вектори $(\vec{i}, \vec{j})$.

Простір: три взаємно перпендикулярні одиничні вектори $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ утворюють прямокутну систему координат.

Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — базис, то будь-який вектор $\vec{a}$ можна подати як:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,$$

де x_i — координати вектора.

Координати вектора — це коефіцієнти в його розкладі за базисом.

9. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та їх властивості

- Скалярний добуток $\vec{c} \cdot \vec{d}$
- Визначення: $\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| |\vec{d}| \cos \angle(\vec{c}, \vec{d})$.
- Результат — скаляр.
- Використовується для

знаходження кута між векторами, перевірки перпендикулярності.

Векторний добуток $\vec{f} = \vec{c} \times \vec{d}$ — тільки в просторі:

- Вектор $\vec{f}$, перпендикулярний до обох множників.

Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступним умовам:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$, $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sin \phi \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (див. рисунок)

Позначається: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

Геометричний зміст:
модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi$

$$\bullet \quad |\vec{c} \times \vec{d}| = |\vec{c}| |\vec{d}| \sin \angle(\vec{c}, \vec{d}).$$

Мішаний добуток $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = ((\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$:

- Результат — скаляр.
- Геометричний зміст — об'єм паралелепіпеда, натягнутого на три вектори.

Інтерактивні завдання

1. Вправи на тему модуль вектора, довжина вектора в просторі

<https://ua.onlinemschool.com/math/practice/vector3/length/>

2. Вправи на тему скалярний добуток векторів
<https://ua.onlinemschool.com/math/practice/vector3/multiply/>

3. Вправи на тему векторний добуток векторів
<https://ua.onlinemschool.com/math/practice/vector3/multiply1/>

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(6; -4)$, $B(-8; 2)$, $C(-4; -6)$. Знайдіть координати вершини D .

Розв'язання: $ABCD$ – паралелограм, то $\vec{AB} = \vec{DC}$. За означенням координати цих векторів рівні. Нехай $D(x; y)$.

$$\vec{AB}(-14; 6); \vec{DC}(-4 - x; -6 - y).$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} -14 = -4 - x, \\ 6 = -6 - y; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ y = -16. \end{cases}$$

Відповідь: $D(10; -16)$.

2. Точки C і D мають координати $C(-1; 6)$ і $D(5; -2)$. Знайдіть координати і модуль вектора $\vec{CD}$.

Розв'язання: Нехай $\vec{CD}(c_1; c_2)$.

$$c_1 = x_c - x_y = 5 - (-1) = 6; c_2 = y_2 - y_1 = -2 - 6 = -8.$$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{26 + 64} = 10.$$

Відповідь: $\vec{CD}(6; -8)$; $|\vec{CD}| = 10$.

3. Дано вектори $\vec{a}(-2; 2)$ і $\vec{b}(3; 1)$. Знайти $2\vec{a} + 5\vec{b}$.

Розв'язання: $2\vec{a} + 5\vec{b} = 2(-2; 2) + 5(3; 1) = (11; 7)$.

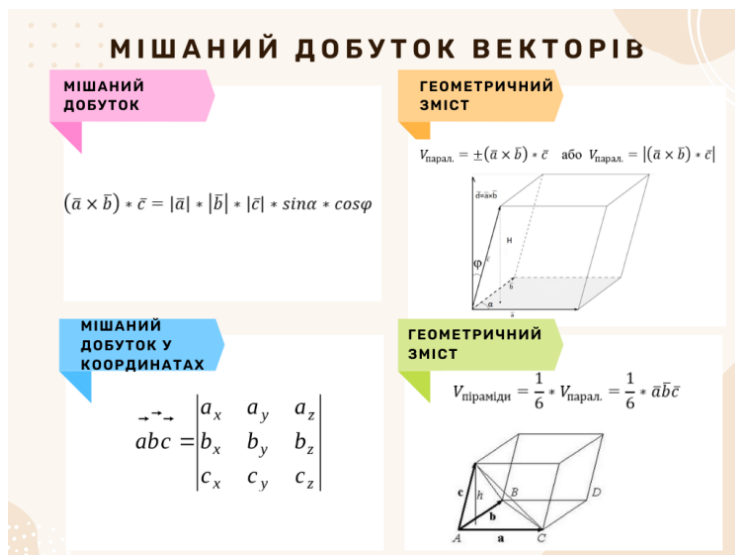
4. Дано вектори $\vec{a}(-2; 2)$ і $\vec{b}(3; 1)$. Знайти $2\vec{a} - 5\vec{b}$.

Розв'язання. $2\vec{a} - 5\vec{b} = 2(-2; 2) - 5(3; 1) = (-19; -1)$.

5. Доведіть, що точки $A(2; 4; -4)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$, $D(-1; 3; 4)$ є вершинами паралелограма $ABCD$.

Розв'язання: Знайдемо вектори $\vec{AB}$, $\vec{DC}$, $\vec{AD}$.

$$\vec{AB}(-1; -3; 1), \quad \vec{DC}(-1; -3; 1), \quad \vec{AD}(-3; -1; 8).$$



6. Розкладіть вектор $\vec{d}(-6; 0)$ за векторами $\vec{c}(1; 3)$ і $\vec{b}(2; 6)$.

Розв'язання: Перед розкладанням вектора по двох інших векторах треба перевірити на пропорційність відповідні координати. Координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{b}$ пропорційні ($1:2 = 3:6$). Тоді вектори колінеарні $\vec{c} = 0,5\vec{b}$, і виконати розклад неможна.

7. Дано вектори $\vec{a}(4,1,4)$, $\vec{b}(-2,-1,1)$, $\vec{c}(3,1,5)$, $\vec{d}(-3,-2,1)$. Доведіть, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тривимірного простору та знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Щоб довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тривимірного простору, потрібно показати, що вони лінійно незалежні. Це еквівалентно тому, що визначник матриці, складеної з цих векторів як стовпців (або рядків), не дорівнює нулю. Обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -7.$$

Оскільки визначник $\neq 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні $\rightarrow$ утворюють базис.

Тепер знайдемо координати вектора $\vec{d} = (-3, -2, 1)$ у цьому базисі. Потрібно знайти такі скаляри α, β, γ , що:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}. \\ \alpha \cdot (4,1,4) + \beta \cdot (-2,-1,1) + \gamma \cdot (3,1,5) &= (-3,-2,1) \end{aligned}$$

$$\text{Розв'яжемо систему методом виключення невідомих} \begin{cases} 4\alpha - 2\beta + 3\gamma = -3 \\ \alpha - \beta + \gamma = -2 \\ 4\alpha + \beta + 5\gamma = 1 \end{cases}.$$

Використовуємо елементарні операції над рядками розширеної матриці СЛР для приведення системи до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[k_3 - k_1]{4k_2 - k_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3k_2 + 2k_3]{\sim} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[k_3:7]{\sim} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Маємо, що ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці та дорівнює 3. За теоремою Кронекера –Капеллі система сумісна. Знайдемо усі розв'язки цієї системи.

Запишемо за трапецієвидною матрицею нову систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta + 3\gamma = -3 \\ 2\beta - \gamma = 5 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Звідки отримаємо, $(1, 2, -1)$

Отже, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

8. Доведіть, що коли $\vec{OA} = k\vec{OB}$, то O, A і B точки лежать на одній прямій.

Розв'язання: З умови випливає, що $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$ вектори колінеарні. До того ж ці вектори відкладено від однієї точки

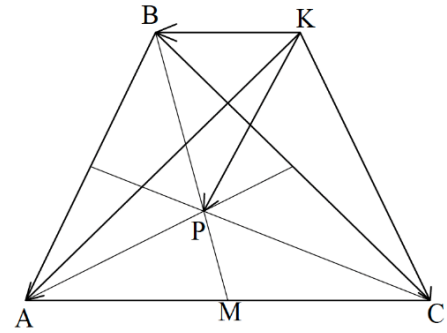
Отже, точки O, A і B точки лежать на одній прямій.

9. Нехай P - точка перетину медіан трикутника ΔABC і K довільна точка. Доведіть, що $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC})$.

Розв'язання:

Нехай M - середина відрізка AC . Маємо:
 $BP:PK = 2:1$. Тоді маємо:

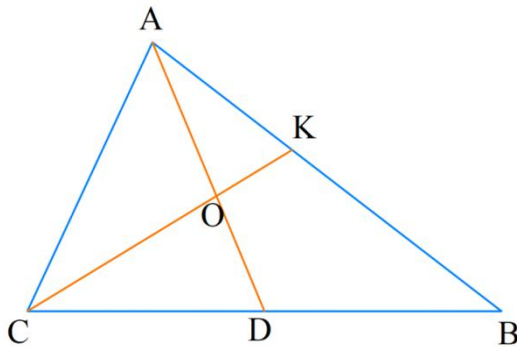
$$\begin{aligned}\overrightarrow{KP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{KB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}).\end{aligned}$$



Розглянемо задачу, яка дає змогу встановлювати належність точки площині за допомогою векторів.

10. У трикутнику ABC точка K ділить сторону AB у відношенні $AK:KB = 2:3$. У якому відношенні відрізок CK ділить медіану AD цього трикутника.

Дано: ABC - трикутник;



$AK:KB = 2:3$; AD - медіана;
 $BD = DC$.

Знайти: $AO:OD$.

Розв'язання

1) Якщо точка O ділить відрізок CK у відношенні $2:3$ рухаючи від точки C , то $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB})$.

$$2) \overrightarrow{CO} \parallel \overrightarrow{CK} \Rightarrow \overrightarrow{CO} = \lambda \overrightarrow{CK} =$$

$$\frac{\lambda}{5}(3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}).$$

$$3) AO:OD = x:y \Rightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{CA} + x\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}).$$

$$4) \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{CA} + x\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}) = \frac{\lambda}{5}(3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}). \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x+y} = \frac{3\lambda}{5} \\ \frac{x}{2(x+y)} = \frac{2\lambda}{5} \end{cases}$$

$$5) \frac{x}{2y} = \frac{2}{3}. \quad \frac{x}{y} = \frac{4}{3}. \quad AO:OD = 4:3.$$

Відповідь: $4:3$, рухаючи від вершини A .

11. Доведіть, що коли точка H - ортоцентр трикутника ΔABC , а точка O - центр його описаного кола, то $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Розв'язання: Нехай трикутник ABC є довільним (не прямокутним). Опустимо з точки O перпендикуляр OM на сторону AC трикутника ΔABC .

На промені OM позначимо точку K таку, що $OM = MK$. Тоді $BH = OK$. Оскільки $BH \parallel OK$, то чотирикутник $HBOK$ - паралелограм.

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK}.$$

Оскільки точка M є серединою відрізка AC , то в чотирикутнику $AOCK$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник - паралелограм. Звідси $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

$$\text{Маємо: } \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Використовуючи задачу 3, маємо: } 3\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

$$3\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.$$

Ця рівність означає, що точки O, K, H лежать на одній прямій – прямій Ейлера.

12. При якому m вектори $\vec{a}(m; 3; -1)$ і $\vec{b}(2; -1; 5)$ перпендикулярні?

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні тоді і лише тоді, коли

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2m + (-3) + (-5) = 0; \quad m = 4.$$

13. В трикутнику $A(2; 1; 3)$, $B(1; 1; 4)$, $C(0; 1; 3)$. Чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CN}$, де N - середина відрізка AB ?

Розв'язання. Знаходимо координати середини відрізка AB : $N\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{7}{2}\right)$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CN}$: $\overrightarrow{AB}(-1; 0; 1)$; $\overrightarrow{CN}\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = -1 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = -1 \text{ і } \overrightarrow{CN}$$

Оскільки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} \neq 0$, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CN}$ не перпендикулярні.

14. Дано трикутник ABC . Знайдіть зовнішній кут при вершині B , якщо $A(2; -1; -1)$, $B(2; 2; -4)$, $C(3; -1; -2)$.

Розв'язання.

Зовнішній кут при вершині B - кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AB}(0; -3; 3)$, $\overrightarrow{BC}(1; 0; -1)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18}; \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Тоді } \cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}. \quad \alpha = 120^\circ.$$

15. Дано точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перпендикулярні.

Розв'язання: Нехай система координат вибрана так, що точки A і B мають наступні координати

$$A(0; 0), \quad B(1; 0) \quad C(x; y), \quad y \neq 0.$$

Знайдемо координати даних векторів

$$\overrightarrow{AA_1} \text{ і } \overrightarrow{BB_1}. \text{ Маємо: } \overrightarrow{AA_1}\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right), \overrightarrow{BB_1}\left(\frac{x-2}{2}; \frac{y}{2}\right).$$

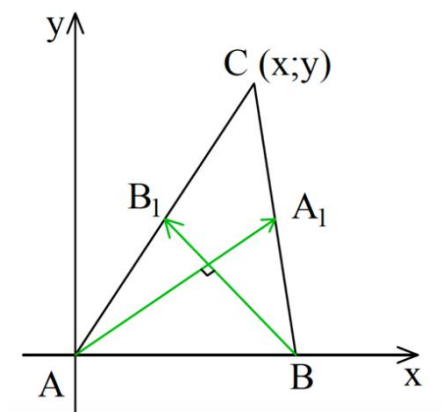
C належить шуканому ГМТ тоді, коли $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$

Маємо:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} &= \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{y^2}{2} = 0; \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \\ &= 2,25. \end{aligned}$$

Отже, ГМТ є коло радіуса $1,5AB$ з центром у середині AB , за винятком точок, які належать прямій AB .

16. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$.



Розв'язання:

$$\begin{aligned}(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} &= 2\vec{a} \cdot \vec{b} - b^2 = 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) - |\vec{b}|^2 = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 = 12 - 8 = 4.\end{aligned}$$

17. Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Знайдіть $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

$$\begin{aligned}\text{Розв'язання. } |2\vec{a} + 5\vec{b}| &= \sqrt{(2\vec{a} + 5\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 25\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 20 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) + 25|\vec{b}|^2} = \sqrt{12 - 30 + 25} = \sqrt{7}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\sqrt{7}$.

18. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ якщо $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{3}{2}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

$$\begin{aligned}\text{Розв'язання. } (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) &= \vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 3 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \\ \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) + 2|\vec{b}|^2 &= 1 + 3\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) + 2 = 3(1 + \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$1 + \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0,5; \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = -0,5; \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ.$$

Відповідь: 120° .

19. Основою призми є рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Бічне ребро AA₁ утворює рівні гострі кути з ребрами AB і AC. Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

Розв'язання. Нехай $\angle BAA_1 = \alpha$. З урахуванням умови можна записати: $\angle CAA_1 = \alpha$.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Маємо: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Запишемо:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha - \\ &- |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.\end{aligned}$$

Оскільки $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$, то скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнює 0. Отже, $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$.

Доведено.

20. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{2\pi}{3}$.

Розв'язання. Формула площі паралелограма через модулі векторів та синус кута між ними:

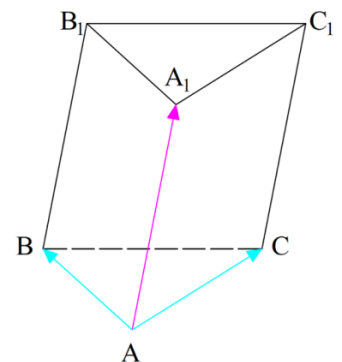
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \sin(2\pi/3) = 6 \cdot (\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}$.

21. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Формула площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sin(\pi/4) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}/2) = 1.$$



22. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи їх довжини $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$, $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

а) Модуль векторного добутку: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, тут $\alpha = 90^\circ \rightarrow \sin\alpha = 1$.

Оскільки $\vec{a} \perp \vec{b}$, то:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} \\&= 0 - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - 0 = -\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} \\&= -2\vec{a} \times \vec{b} = -2(\vec{a} \times \vec{b}).\end{aligned}$$

Тобто модуль: $|-2\vec{a} \times \vec{b}| = 2|\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Відповідь: 24.

б) $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

Використаємо формулу розкриття векторного добутку:

$$\begin{aligned}(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) &= 3\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{b} \\&= 0 - 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} + 0 = -7\vec{a} \times \vec{b} = -7(\vec{a} \times \vec{b})\end{aligned}$$

Тоді $|-7(\vec{a} \times \vec{b})| = 7 \cdot |\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^\circ = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84$.

Відповідь: 84.

23. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}(-1, 2, -3)$, $\vec{b}(0, -4, 1)$ та його довжину.

Знайдемо координати векторного добутку

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \rightarrow (-10, 1, 4)$$

Модуль: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{100 + 1 + 16} = \sqrt{117}$.

Відповідь: $(-10, 1, 4)$, довжина $\sqrt{117}$.

24. Дано вектори $\vec{a}(3, -1, -2)$, $\vec{b}(1, 2, -1)$. Знайти векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$, $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \rightarrow (5, 1, 7)$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) = 2(5, 1, 7) = (10, 2, 14).$$

$$\begin{aligned}(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) &= 4(\vec{a} \times \vec{a}) + 2(\vec{a} \times \vec{b}) - 2(\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{b} \times \vec{b} = 4(\vec{a} \times \vec{b}) \\&= 4(5, 1, 7) = (20, 4, 28).\end{aligned}$$

25. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{a}$, якщо $A(2, -1, 1)$, $B(1, -1, 5)$, $\vec{a}(-2, 1, 0)$.

$$\vec{AB} (1 - 2, -1 - (-1), 5 - 1) = (-1, 0, 4)$$

$$\text{Векторний добуток } \vec{AB} \times \vec{a} = (-1, 0, 4) \times (-2, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} -$$

$$8\vec{j} - \vec{k} \rightarrow (-4, -8, -1).$$

Модуль: $S_{\text{парал.}} = |\overline{AB} \times \bar{a}| = \sqrt{16 + 64 + 1} = \sqrt{81} = 9.$

Відповідь: 9.

26. Дано вектори $\bar{a}(1, -1, 3)$, $\bar{b}(-2, 2, 1)$, $\bar{c}(3, -2, 5)$. Обчислити $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7.$$

27. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ якщо $\bar{a}(2, 3, -1)$, $\bar{b}(1, -1, 3)$, $\bar{c}(1, 9, -11)$.

$$V_{\text{парал}} = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = \text{mod} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Це означає, що вектори лежать в одній площині.

28. Чи компланарні вектори $\bar{a}(2, -1, 2)$, $\bar{b}(1, 2, -3)$, $\bar{c}(3, -4, 7)$?

Якщо вектори лежать в одній площині, то вони є компланарними, отже їх мішаний добуток дорівнює 0.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні

Практичні завдання для самостійної роботи

1. Точки K, L є серединами сторін BC, CD паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\overline{BC}, \overline{CD}$ через вектори $\overline{AK}, \overline{AL}$

2. Довести, що сума векторів, які з'єднують центр правильного трикутника з вершинами, дорівнює нулю.

3. Дано вектори $\bar{a}(1, -2, 3)$, $\bar{b}(4, 7, 2)$, $\bar{c}(6, 4, 2)$, $\bar{d}(14, 18, 6)$. Доведіть, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис тривимірного простору та знайти координати вектора $\bar{d}$ у цьому базисі.

4. Дано вершини чотирикутника $(-4, 2), B(2, 6), C(5, 4), D(-1, 0)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

5. Дано вершини чотирикутника $A(-3, -1), B(-2, 3), C(3, 3), D(5, -1)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є трапецією. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції

6. У просторі задано трикутник координатами свої вершин $A_1(1, 1, 1), A_2(3, 0, 0), A_3(2, 3, 7)$. Знайти кут між сторонами A_1A_2 та A_1A_3 . Знайдіть зовнішній кут трикутника при вершині A_1 .

7. Знайти довжину векторів $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, та $\bar{d} = -5\bar{a}$, якщо $\bar{a}(2, -1, 3)$, $\bar{b}(4, 0, 1)$.

8. При якому значенні λ скалярний добуток векторів $\bar{a}(2, \lambda)$ та $\bar{b}(2, -3)$ буде дорівнювати -2 ?

9. При якому значенні λ вектори $\bar{a}(3, \lambda, -2)$ та $\bar{b}(2 - \lambda, -1, 5)$ будуть ортогональними?

10. Знайти кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, коли відомо, що $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2\sqrt{2}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 8$.

11. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.

12. Дано точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$. Знайти векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$.

13. Дано вершини трикутника $A(0, 2, 0)$, $B(-2, 5, 0)$, $C(-2, 2, 6)$. Знайти його площу.

14. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ якщо $\vec{a}(3, -2, 1)$, $\vec{b}(2, 1, 2)$, $\vec{c}(3, -1, -2)$.

15. Знайдіть об'єм тетраедра, вершинами якого є точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$.

16. Дано вершини тетраедра $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, -8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

Питання для самоконтролю

1. Що називається вектором? Що називається модулем вектору?
2. Який вектор називається нульовим вектором? Що таке орт?
3. Які вектори називаються колінеарними?
4. Чи існують вектори, що колінеарні нульовому вектору?
5. Які вектори називаються компланарними?
6. Що називається сумою векторів? Що називається різницею векторів?
7. Що називається добутком вектора на число?
8. Які властивості лінійних операцій над векторами?
9. Необхідна і достатня умова колінеарності двох векторів.
10. Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів.
11. Як визначити модуль вектора, що заданий своїми координатами?
12. Що називається базисом площини? Простору?
13. Що називається координатами вектору у заданому базисі?
14. Скільки базисів існує на площині? У просторі?
15. Чи співпадають координати одного й того ж вектора у різних базисах?
16. Що називається скалярним добутком векторів?
17. Як визначити скалярний добуток векторів, що задані своїми координатами?
18. Як визначити косинус кута між двома векторами?
19. Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів.
20. Алгебраїчні властивості скалярного добутку
21. Дайте означення правої і лівої трійок векторів
22. Дайте означення векторного добутку.
23. Як визначити векторний добуток векторів, які задані своїми координатами?
24. Алгебраїчні та геометричні властивості векторного добутку

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми.

1. Подвійний векторний добуток і його властивості.
2. Використання програмного забезпечення GeoGebra, Desmos для візуалізації векторів.

3. Використання Python (бібліотека NumPy) для виконання обчислень.
4. Використання WolframAlpha для автоматичного розв'язання векторних задач.
5. Практичні застосування векторів у фізиці: сила, швидкість, переміщення.
6. Роль векторів у навігації, техніці, географії.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

Семінар «Види рівнянь прямої на площині. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих».

Питання до обговорення

1. Загальне рівняння прямої на площині, його дослідження.
2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
3. Кут між двома прямими, умови паралельності і ортогональності двох прямих на площині.
4. Перетин прямих.
5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку.
6. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
7. Рівняння прямої «у відрізках».

Основні теретичні поняття

1. Загальне рівняння прямої на площині

Форма: $Ax + By + C = 0$, де A і B — не дорівнюють нулю одночасно.

Властивості:

Якщо $B \neq 0$, то рівняння можна подати у вигляді $y = kx + b$.

Якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі Ox .

Якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі Oy .

2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Форма: $y = kx + b$

Тлумачення:

k — кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу прямої до осі x).

b — ордината точки перетину з віссю y .

3. Кут між двома прямими

Якщо прямі задані рівняннями: $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то кут φ між ними такий, що $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$

Якщо $\operatorname{tg} \varphi = 0$, то прямі паралельні.

4. Умови паралельності і перпендикулярності (ортогональності)

Паралельні прямі: $k_1 = k_2$

Перпендикулярні прямі: $k_1 \cdot k_2 = -1$

5. Перетин прямих

Щоб знайти точку перетину двох прямих, треба розв'язати систему їх рівнянь.

Якщо система має єдиний розв'язок — прямі перетинаються в одній точці.

Якщо прямі задані у загальному вигляді:

Пряма 1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, напрямний вектор прямої - $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$

Пряма 2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ напрямний вектор прямої - $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ то

Кут між прямими через коефіцієнти A_1, B_1, A_2, B_2 визначається наступним чином:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Умова паралельності прямих через коефіцієнти A_1, B_1, A_2, B_2 така: дві прямі паралельні, якщо їхні напрямні вектори колінеарні, тобто: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, звідки $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Умова перпендикулярності прямих через коефіцієнти A_1, B_1, A_2, B_2 така: дві прямі перпендикулярні, якщо скалярний добуток їхніх напрямних векторів дорівнює нулю: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

6. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку
Якщо пряма проходить через точку (x_0, y_0) і має напрямний вектор $\vec{n} (a, b)$, то:

Параметричне рівняння: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

Канонічне рівняння: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$

Якщо задано кутовий коефіцієнт k : $y - y_0 = k(x - x_0)$

7. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Нехай задано точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, тоді

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

8. Рівняння прямої «у відрізках»: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Тлумачення:

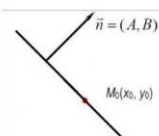
Пряма перетинає вісь x у точці $(a, 0)$ і вісь y у точці $(0, b)$.

Зручно використовувати для побудови прямої за двома точками-перетинами з осями координат.

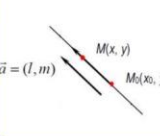
Види рівнянь прямої на площині

Загальне рівняння прямої

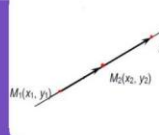
$$Ax + By + C = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$


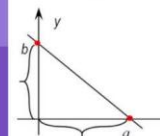
Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$


Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

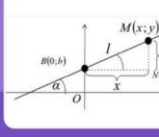
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$


Рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$


Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b$$

$$k = \tan \alpha$$


Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Дано пряма $l: y = \frac{x}{2} + 8$. Визначити координати точок перетину прямої з координатними осями.

Перетин з віссю Ox (де $y = 0$): $0 = \frac{x}{2} + 8 \Rightarrow \frac{x}{2} = -8 \Rightarrow x = -16$

Точка: $(-16; 0)$

Перетин з віссю Oy (де $x = 0$): $y = \frac{0}{2} + 8 = 8, y = 8$

Точка: $(0; 8)$

Відповідь: $(-16; 0), (0; 8)$.

2. Пряма, задана рівнянням $l: 2x + y - 3 = 0$ Складіть рівняння перпендикулярної прямої m , що проходить через точку $M(2,3)$.

Кутовий коефіцієнт прямої l :

$$y = -2x + 3 \rightarrow k = -2$$

Перпендикулярна пряма має коефіцієнт $k_1 = \frac{1}{2}$

$$\text{Пряма через } M(2,3) : y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{1}{2}x + 2$$

3. Пряма, задана рівнянням $l: x - y + 3 = 0$. Складіть рівняння паралельної прямої m , що проходить через точку $M(1, -1)$.

Перепишемо у вигляді $y = x + 3 \Rightarrow k = 1$

$$\text{Паралельна пряма: } y + 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 2$$

$$\text{Відповідь: } y = x - 2$$

4. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-5,2)$ на пряму $4x - y + 3 = 0$. Визначити відстань від цієї точки до прямої.

$$y = 4x + 3 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow k_{\perp} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Перпендикуляр через } A: y - 2 = -\frac{1}{4}(x + 5) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$\text{Рівняння перпендикуляра } y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Відстань від точки до прямої:

$$d = \left| \frac{4(-5) - 1(2) + 3}{\sqrt{4^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-20 - 2 + 3}{\sqrt{17}} \right| = \frac{19}{\sqrt{17}} = \frac{19\sqrt{17}}{17}.$$

5. Дано рівняння трьох сторін трикутника $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$. Обчислити координати його вершин.

Маємо, що

$$\begin{aligned} l_1: 5x - 3y - 15 &= 0, \\ l_2: x + 5y - 3 &= 0, \\ l_3: 3x + y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Знайдемо координати точки $A = l_1 \cap l_2$. Маємо систему: $\begin{cases} x - 3y = 15 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$.

Розв'яжемо її довільним методом (Крамера, підстановки або додавання), отримаємо $A(3; 0)$.

Знайдемо координати точки $B = l_1 \cap l_3$, які є розв'язками системи $\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$. Маємо, що $B(0; -5)$.

Знайдемо координати точки $C = l_2 \cap l_3$ як розв'язки системи $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$. Отже, $C(-2; 1)$.

Відповідь: координати вершин трикутника: $A(3; 0), B(0; -5), C(-2; 1)$.

6. Знайти точку перетину прямих AB, CD якщо вони перетинаються $A(6, -7), B(9, 14), C(-2, 5), D(3, 6)$.

Складемо рівняння прямих AB, CD , що проходить через дві точки.

Нехай координати точки A будуть координатами першої точки, B – другої, тоді отримаємо

$$AB: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x - 6}{9 - 6} = \frac{y + 7}{14 + 7}$$

Знайдемо загальне рівняння цієї прямої $21(x - 6) = 3(y + 7) \rightarrow 21x - 3y - 147 = 0$ або поділимо на 3, $AB: 7x - y - 49 = 0$

Знайдемо загальне рівняння прямої CD :

$$CD: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x + 2}{3 + 2} = \frac{y - 5}{6 - 5}$$

Тоді загальне рівняння прямої CD рівняння $CD: x - 5y + 27 = 0$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} x - 5y + 27 = 0 \\ 7x - y - 49 = 0 \end{cases}$$

Спочатку знайдемо основний визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 35 = 34 \neq 0.$$

Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -27 & -5 \\ 49 & -1 \end{vmatrix} = 27 + 245 = 272.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -27 \\ 7 & 49 \end{vmatrix} = 49 + 27 \cdot 7 = 238.$$

Тоді

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{272}{34} = 8, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{238}{34} = 7.$$

Точка перетину прямих AB і CD — $(8; 7)$.

Відповідь: $(8; 7)$.

7. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0, x - 2y + 15 = 0$ та рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти координати вершин прямокутника.

Рівняння двох сторін прямокутника:

$$l_1 = AB: x - 2y = 0,$$

$$l_2 = CD: x - 2y + 15 = 0$$

а також рівняння однієї з його діагоналей:

$$l_3 = AC: 7x + y - 15 = 0$$

Знайдемо дві точки — основи прямокутника на паралельних прямих l_1 і l_2 які лежать на діагоналі l_3 .

Знайдемо точку A — перетин l_1 і l_3 .

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 7x + y - 15 = 0 \end{cases}$$

З першого: $x = 2y$

Підставляємо в друге:

$$7(2y) + y = 15 \rightarrow 14y + y = 15 \rightarrow y = 1, \text{ тоді } x = 2.$$

Отже, $A(2; 1)$

Знайдемо точку C – перетин l_2 і l_3 .

$$\begin{cases} x - 2y + 15 = 0, \\ 7x + y - 15 = 0 \end{cases}$$

Підставимо:

$$7(2y - 15) + y = 15 \Rightarrow 15y - 7 \cdot 15 = 15 \Rightarrow 15y = 120 \Rightarrow y = 8, x = 2y - 15 = 1.$$

Отже, $C(1; 8)$

Складемо рівняння цієї діагоналі як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$AC: \frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{8-1} \rightarrow 7(x-2) = 1-y \rightarrow 7x + y - 15 = 0$$

Знайдемо інші дві вершини прямокутника. Нормальний вектор $\vec{n}(1, -2)$ прямих l_1, l_2 буде напрямним вектором для двох інших сторін прямокутника, отже складемо рівняння прямої як тієї, що проходить через задану точку і паралельно заданому вектору

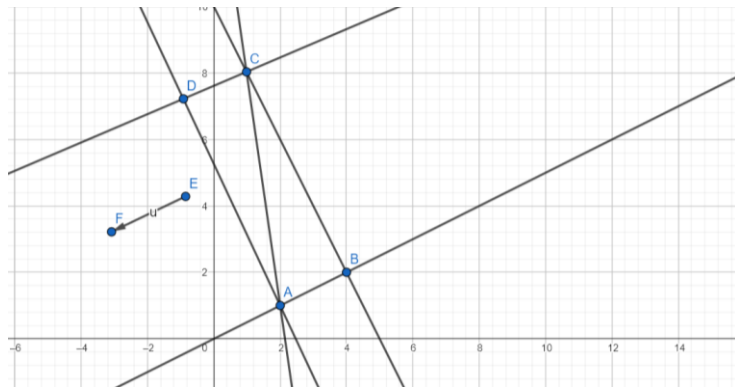
$$BC: \frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{-2}.$$

$$\text{Отже, } -2(x-1) = y-8 \rightarrow BC: 2x + y - 10 = 0.$$

Аналогічно,

$AD: 2x + y - c = 0$. $c = ?$ Знайдемо величину c . Оскільки $A(2, 1) \in AD$, маємо $2 \cdot 2 + 1 - c = 0 \rightarrow c = 5$.

$$AD: 2x + y - 5 = 0.$$



Знайдемо інші вершини прямокутника як точки перетину відповідних прямих.

$$B = AB \cap BC = \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \rightarrow B(4, 2)$$

$$D = CD \cap AD = \begin{cases} x - 2y + 15 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow D(-1, 7).$$

Відповідь: Вершини прямокутника: $A(2; 1)$, $B(4; 2)$, $C(1; 8)$, $D(-1, -7)$

Визначити кут φ між двома прямими:

$$1) 5x - y + 7 = 0, 3x + 2y = 0;$$

$$2) 3x - 2y + 7 = 0, 2x + 3y - 3 = 0;$$

$$3) x - 2y - 4 = 0, 2x - 4y + 3 = 0;$$

$$4) 3x + 2y - 1 = 0, 5x - 2y + 3 = 0.$$

1) Прямі: $5x - y + 7 = 0, 3x + 2y = 0$ мають відповідно нормальні вектори $\vec{n}_1(5, -1), \vec{n}_2(3, 2)$.

Обчислюємо

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{15 - 2}{\sqrt{15 + 1} \sqrt{9 + 4}} = \frac{13}{\sqrt{337}} \rightarrow \varphi \approx 45^\circ.$$

2) Прямі: $3x - 2y + 7 = 0, 2x + 3y - 3 = 0$ мають відповідно нормальні вектори $\vec{n}_1(3, -2), \vec{n}_2(2, 3) \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$\text{Обчислюємо } \cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = 0 \rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

3) Прямі $x - 2y - 4 = 0, 2x - 4y + 3 = 0$ є паралельні, оскільки пропорційні відповідно коефіцієнти при x, y . Це означає, що кут між цими прямими є 180° .

4) Прямі $3x + 2y - 1 = 0, 5x - 2y + 3 = 0$ мають відповідно нормальні вектори $\vec{n}_1(3, 2), \vec{n}_2(5, -2)$.

$$\text{Обчислюємо } \cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{15 - 4}{\sqrt{13} \sqrt{29}} = \frac{11}{\sqrt{377}} \rightarrow \varphi \approx 55^\circ.$$

8. Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить, через точку $M_0(2; 1)$ під кутом 45° до даної прямої.

Оскільки кут між прямими 45° , то перейдемо до рівнянь прямих з кутовим коефіцієнтом та використаємо співвідношення.

$$l_1: 2x + 3y + 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \rightarrow k_1 = -\frac{2}{3}.$$

$$l_2: y = k_2 x + b.$$

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \rightarrow 1 = \left| \frac{-\frac{2}{3} - k_2}{1 - \frac{2}{3} k_2} \right| \rightarrow k_2 = \frac{1}{5}.$$

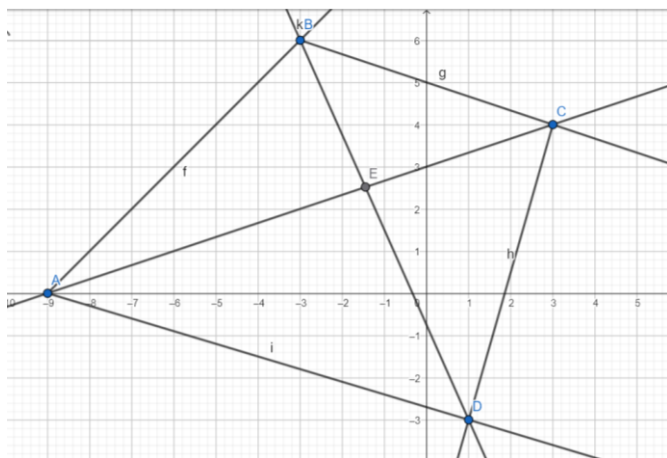
Маємо, що $l_2: y = \frac{1}{5}x + b$. Оскільки $M_0(2; 1) \in l_2$, отримаємо рівність $1 = \frac{2}{5} + b \rightarrow b = \frac{3}{5}$. Отже, $l_2: y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$.

9. Дано вершини чотирикутника $A(-9, 0), B(-3, 6), C(3, 4)$ та $D(6, -3)$. Знайти точку перетину його діагоналей AC та BD і обчислити кут між ними.

Складемо рівняння прямих, що проходять через дві точки

$$A(-9, 0), C(3, 4), AC: \frac{x+9}{3+9} = \frac{y-0}{4-0} \rightarrow 4x - 12y + 36 = 0 \rightarrow x - 3y + 9 = 0,$$

та $B(-3, 6), D(6, -3)$,



$$BD: \frac{x+3}{6+3} = \frac{y-6}{-3-6} \rightarrow -9x - 9y + 27 = 0 \rightarrow x + y - 3 = 0.$$

Кут між цими прямими є кутом між нормальними векторами цих прямих.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(1, -3), \quad \vec{n}_2(1, 1). \\ \cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{1 - 3}{\sqrt{10} \sqrt{2}} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \rightarrow \varphi \approx 117^\circ. \end{aligned}$$

Координати точки О перетину діагоналей чотирикутника є розв'язком системи

$$\begin{cases} x - 3y + 9 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow O(0, 3).$$

10. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ та одна з його вершин $A(2; -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

11. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5; 3)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2}$

12. Знайти точку перетину прямих $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

Практичні завдання для самостійної роботи

1. Дано рівняння першого степеня $\frac{3x+2}{6} - \frac{2y-5}{3} = 4$. Знайти для відповідної прямої

- Загальне рівняння;
- Рівняння з кутовим коефіцієнтом;
- Рівняння у відрізках;
- Рівняння прямої, що проходить через дві точки;
- Рівняння прямої через точку та її напрямний вектор.

2. Дано рівняння сторін трикутника $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений. Розв'язати задачу за допомогою порівняння кутів трикутника.

3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ та точка перетину його діагоналей $M(3, -1)$. Записати рівняння двох інших суміжних сторін паралелограма.

4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M(-3; 2)$ та $N(2; -1)$.

5. Знайти координати точки перетину прямих $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3}$, $\frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-1}$.

Питання для самоконтролю

- Який вигляд має загальне рівняння прямої на площині?
- За якої умови загальне рівняння не задає пряму?
- Який вектор є нормальним до прямої, заданої загальним рівнянням?
- Як з загального рівняння отримати рівняння з кутовим коефіцієнтом?
- Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
- Що геометрично означає кутовий коефіцієнт k ?

7. Як побудувати пряму за рівнянням $y = kx + b$?
8. Як знайти кутовий коефіцієнт прямої, заданої через дві точки?
9. Як обчислити кут між двома прямими, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами?
10. Як знайти кут між прямими, заданими у загальному вигляді?
11. Яка умова паралельності двох прямих з кутовими коефіцієнтами?
12. Яка умова перпендикулярності двох прямих з кутовими коефіцієнтами?
13. Як визначити паралельність або перпендикулярність прямих, заданих загальними рівняннями?
14. Як скласти рівняння прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) і має напрямний вектор (a, b) ?
15. Що таке параметричне рівняння прямої?
16. Як знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$?
17. Що означає рівняння прямої у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$?
18. Як знайти точки перетину такої прямої з осями координат?
19. За якої умови таке рівняння не задає жодної прямої?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми.

1. Побудова графіків прямої у GeoGebra або Desmos
2. Рівняння прямих у полярній системі координат
3. Рівняння прямолінійного руху та його дослідження
4. Лінійна залежність фізичних величин
5. Модуль попиту і пропозиції. Знаходження точки рівноваги
6. Лінійна модуль витрат і доходів, точка беззбитковості.
7. Побудова графіків прибутку залежно від обсягу виробництва.
8. Алгоритм Брезенхема побудови прямої лінії на растровому екрані
9. Калібрувальні графіки в аналітичній хімії
10. Лінійна залежність у законах хімії

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7

Вирішення практичних завдань «Еліпс, гіпербола, парабола»

Питання до обговорення

1. Що таке крива другого порядку?
2. Загальний вигляд рівняння кривої другого порядку в декартовій системі координат.
3. Як класифікують криві другого порядку?
4. Канонічне рівняння еліпса з центром у початку координат.
5. Основні елементи: фокуси, велика і мала півосі, ексцентриситет.
6. Властивості та симетрія еліпса.
7. Побудова графіка еліпса.
8. Канонічне рівняння гіперболи з центром у початку координат.
9. Умови існування гіперболи.
10. Основні елементи: фокуси, асимптоти, вітки гіперболи, ексцентриситет.
11. Побудова графіка гіперболи.
12. Симетрія гіперболи.
13. Канонічне рівняння параболи.
14. Основні елементи: фокус, директриса, вершина.
15. Побудова графіка параболи.
16. Властивості параболи.

Основні теретичні поняття

1. Що таке крива другого порядку?

Крива другого порядку – це геометричне місце точок на площині, що задовольняють рівняння другого степеня відносно змінних x і y . Такі криві ще називають кватриками.

2. Загальний вигляд рівняння кривої другого порядку в декартовій системі координат: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, де A, B, C, D, E, F – дійсні коефіцієнти $B^2 - 4AC$ – дискримінант, який допомагає визначити тип кривої.

3. Як класифікують криві другого порядку?

За значенням дискримінанта $\Delta = B^2 - 4AC$:

$\Delta < 0$: Еліпс (у тому числі коло, якщо $A = C, B = 0$)

$\Delta = 0$: Парабола

$\Delta > 0$: Гіпербола

Також враховується вид коефіцієнтів при x^2, y^2 та наявність змішаного добутку Bxy .

4. Канонічне рівняння еліпса з центром у початку координат:

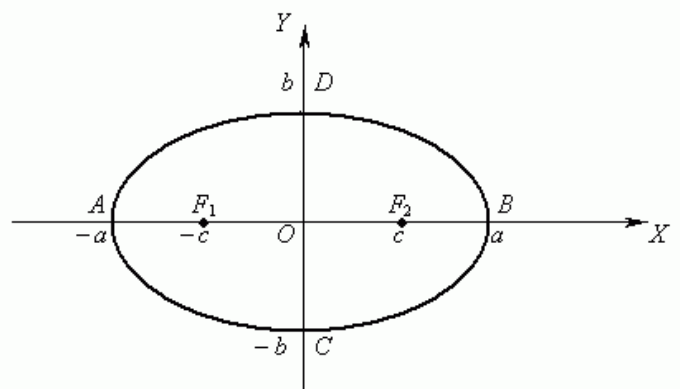
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

де $a > 0, b > 0$.

Якщо $a = b$ рівняння описує коло.

5. Основні елементи еліпса:

Фокуси – дві точки F_1, F_2 на осі, від яких сума відстаней до будь-якої точки



еліпса є сталою. $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Велика піввісь – a , довша з осей.

Мала піввісь – b , коротша з осей.

Ексцентриситет:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad 0 < e < 1$$

(чим менший e , тим ближчий еліпс до кола).

Чим ближче значення ексцентриситету еліпса до одиниці, тим еліпс більш видовжений.

Чим ближче значення ексцентриситету до нуля, тим еліпс більше схожий на коло.

6. Властивості та симетрія еліпса:

Центр симетрії — початок координат.

Симетричний відносно осей Ox і Oy .

Задане рівняння описує замкнену криву.

Сума відстаней до фокусів для будь-якої точки M еліпса: $|MF_1| + |MF_2| = 2a$

7. Побудова графіка еліпса:

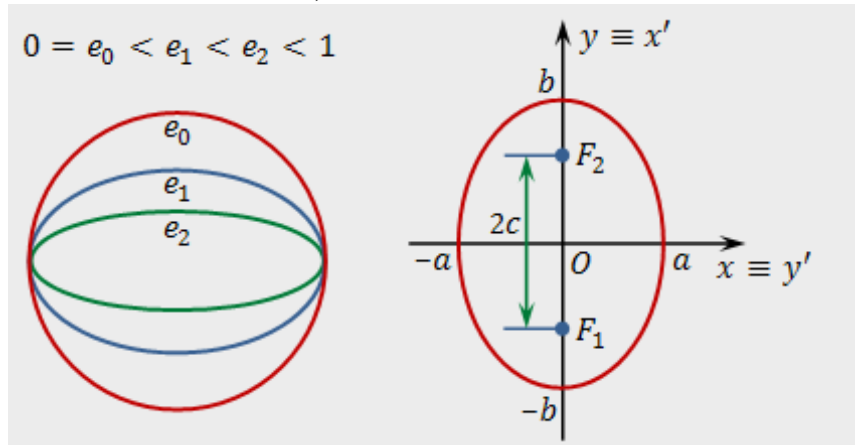
Побудувати координатну сітку.

Відкласти на осі Ox довжину a , а на осі Oy – b .

Побудувати прямокутник зі сторонами $2a$ та $2b$.

Вписати еліпс в цей прямокутник (він дотикається до його сторін у вершинах), координати вершин $(-a, 0), (a, 0), (0, -b), (0, b)$.

За потреби – вказати фокуси $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$



8. Гіпербола — це множина точок на площині, для яких різниця відстаней до двох фіксованих точок (фокусів) є сталою.

Канонічні рівняння: $a > 0, b > 0$

1. Горизонтальна гіпербола (вісь — Ox): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

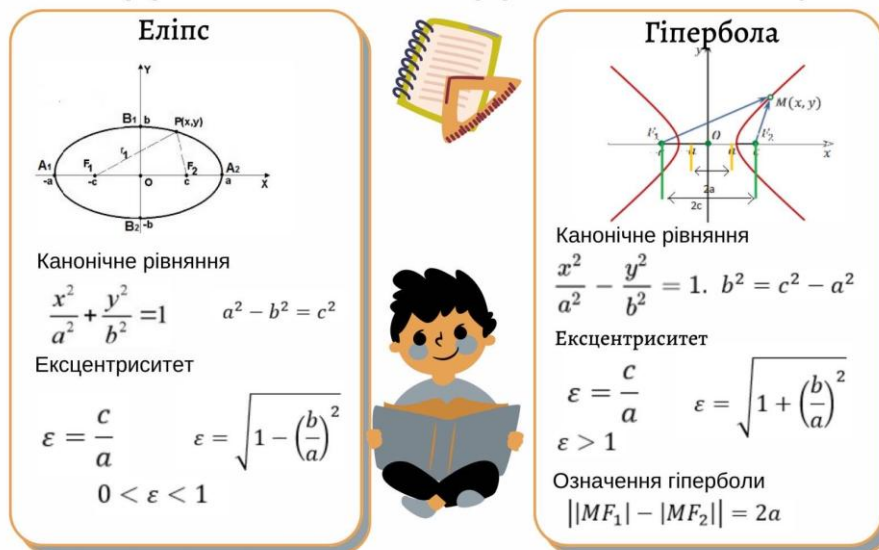
2. Вертикальна гіпербола (вісь — Oy): $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Центр у точці $O(0,0)$.

9. Умови існування гіперболи. Щоб рівняння задавало гіперболу у рівнянні другого порядку:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, має виконуватись дискримінант: $B^2 - 4AC > 0$. У випадку канонічної форми коефіцієнти при x^2 і y^2 з протилежними знаками

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

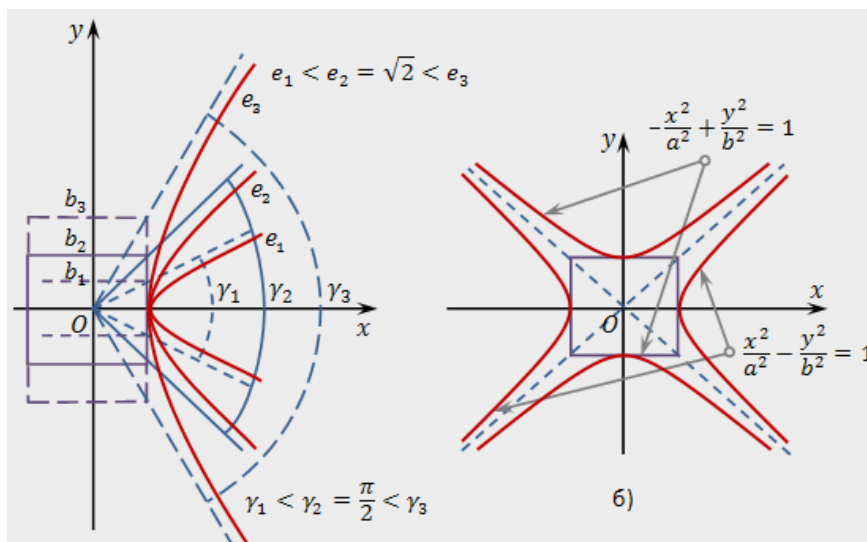


10. Основні елементи гіперболи.

- Фокуси для канонічної гіперболи: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Різниця відстаней до фокусів для будь-якої точки M гіперболи: $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$

• Координати фокусів: горизонтальна:
 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,
 вертикальна:
 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$

• Асимптоти – прямі, до яких наближаються вітки гіперболи на нескінченності:
 горизонтальна: $y = \pm \frac{b}{a}x$,
 вертикальна: $y = \pm \frac{a}{b}x$.



• Вітки гіперболи: частини кривої, що розходяться в різні боки. Розміщення залежить від знаку при x^2 чи y^2 .

- Ексцентриситет e – завжди більше 1 – на відміну від еліпса.

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

При збільшенні ексцентриситету гілки гіперболи «розпрямляються» до осі Oy .

Якщо ж значення ексцентриситету наближається до одиниці, то гілки гіперболи «сплющуються» до осі Ox .

11. Побудова графіка гіперболи

- Визначити тип гіперболи (горизонтальна / вертикальна);
- Побудувати прямокутник з вершинами $(\pm a, \pm b)$.
- Через діагоналі прямокутника провести асимптоти.

•Накреслити вітки гіперболи – вони прилягають до асимптот, проходять через вершини $(\pm a, 0)$ або $(0, \pm a)$.

За потреби — позначити фокуси $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

12. Симетрія гіперболи

Горизонтальна гіпербола: симетрія

відносно осі Ox , симетрія відносно Oy , симетрія відносно початку координат.

Вертикальна гіпербола: симетрія відносно Ox , симетрія відносно Oy , симетрія відносно початку координат.

13. Парабола – це геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси). Канонічне рівняння парабол з вершиною в початку координат:

$y^2 = 2px$ – гілки параболі направлені вправо або вліво.

$x^2 = 2py$ – гілки параболі направлені вгору або вниз.

Знак при p визначає напрям гілок.

14. Основні елементи параболі

Вершина – точка, з якої «починаються» гілки параболі (зазвичай початок координат у канонічному рівнянні).

Фокус – точка, розташована на осі симетрії параболі на відстані $\frac{p}{2}$ від вершини.

Директриса – пряма, що знаходиться на відстані $\frac{p}{2}$ від вершини, симетрично фокусу, але в протилежному напрямку.

Вісь симетрії – пряма, що проходить через фокус і вершину та розділяє параболу на дві симетричні частини.

15. Побудова графіка параболі

•Встановити тип рівняння (яка змінна підноситься до квадрату).

•Знайти вершину (у канонічному рівнянні – це початок координат).

•Визначити фокус та директрису.

•Побудувати кілька точок по обидва боки від осі симетрії.

•Провести плавну криву через ці точки, враховуючи напрям гілок.

16. Властивості параболі

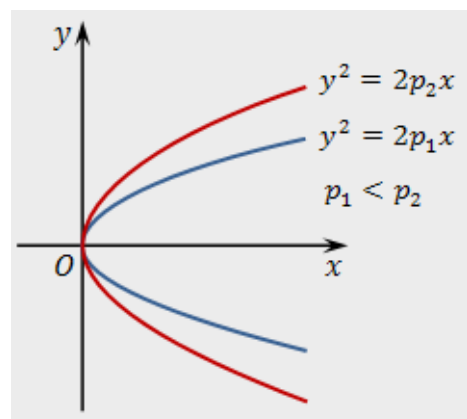
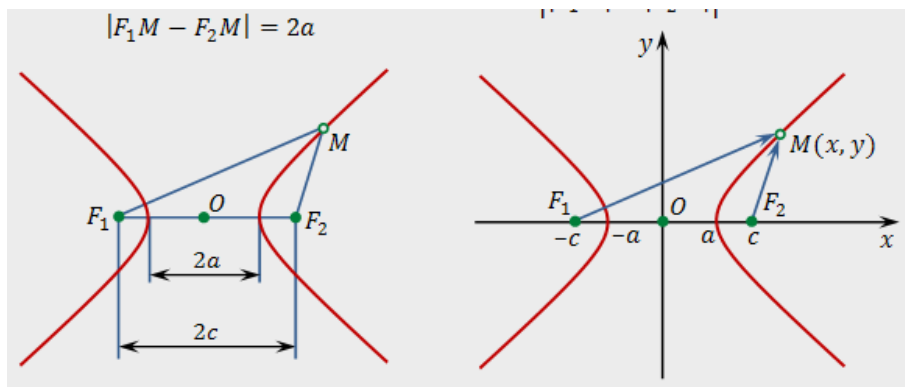
•Парабола має одну вісь симетрії.

•Відстань від будь-якої точки параболі до фокуса дорівнює відстані до директриси.

•Парабола нескінченна і не має асимптот.

•Параметр p параболі характеризує її форму.

Чим більше p , тим більше гілки параболі



наближаються до осі Oy , чим ближче p до нуля, тим більше гілки параболи наближаються до осі Ox .

- Якщо змінна підноситься до квадрату, а інша лінійна — це парабола.

Інтерактивні завдання

1. Вправи на знаходження площі еліпса
https://ua.onlinemschool.com/math/assistance/figures_area/ovals/
2. За рівнянням кривої другого порядку побудувати криву, знайти її основні характеристики
<https://www.symbolab.com/solver/step-by-step/9x%5E2%2B4y%5E2%3D36>
3. За рівнянням кривої другого порядку побудувати криву, знайти її основні характеристики <https://www.mathway.com/ru/Precalculus>
4. Інструмент Geogebra для побудови кривих другого порядку за їх рівняннями <https://www.geogebra.org/graphing>
5. Інструмент Desmos для побудови кривих другого порядку за їх рівняннями <https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Побудувати еліпс, що заданий рівнянням. Визначити малу, велику осі; малу і велику напівосі, фокуси. Побудувати його.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Це рівняння еліпса з центром у початку, велика вісь вздовж осі Ox . Мала напіввісь $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$. Велика напіввісь $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Велика вісь: $2a = 8$, мала вісь: $2b = 6$. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$. Фокуси: $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$.

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Приведемо до канонічного вигляду:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Це еліпс з центром у початку, велика вісь вздовж осі Ox . $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$. $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. $c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$. Велика вісь: $2a = 10$, мала вісь: $2b = 6$. Фокуси: $(\pm 4, 0)$

$$9x^2 + 5y^2 = 45.$$

Приведемо до канонічного вигляду:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Велика вісь вздовж осі Oy , бо $b^2 = 9 > a^2 = 5$. $a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$. $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Велика вісь: $2a = 2\sqrt{5}$, мала вісь: $2b = 6$. $c = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$, фокуси: $(0, \pm 2)$.

$$16x^2 + y^2 = 1.$$

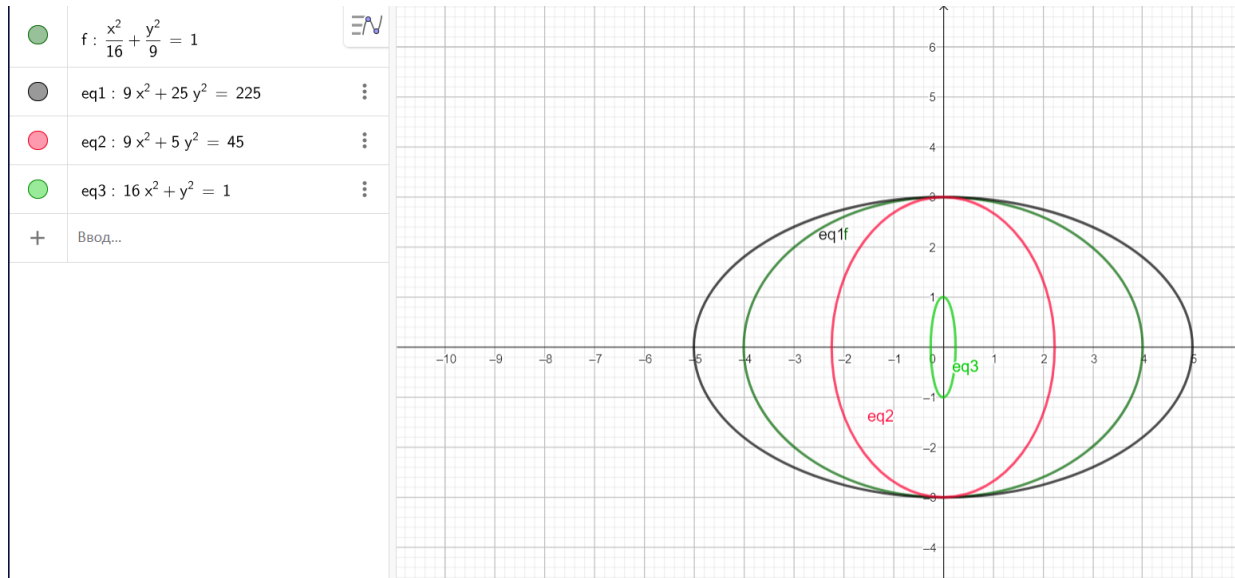
Приведемо до канонічного вигляду:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Велика вісь вздовж осі Oy . $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$. $b^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$.

$$c = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0,9862$$

Велика вісь: $2a = 2$, мала вісь: $2b = \frac{1}{2}$. Фокуси: $(0, \pm \frac{\sqrt{15}}{4})$.



2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо про нього таке

- 1) Напівосі його відповідно дорівнюють 4 і 2.
- 2) Відстань між фокусами дорівнює 6 і велика напіввісь дорівнює 5.
- 3) Один з його фокусів $F(-2,0)$ і мала напіввісь 2.

Розв'яжемо кожен пункт окремо, щоб скласти канонічне рівняння еліпса, яке має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(якщо центр у $(0,0)$ і велика вісь уздовж Ox), або

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(якщо велика вісь уздовж Oy), де a – велика піввісь, b – мала піввісь, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

1) Напівосі відповідно дорівнюють 4 і 2. Отже, $a = 4, b = 2, a > b \rightarrow$ велика вісь уздовж Ox . Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2) Відстань між фокусами дорівнює 6 і велика напіввісь дорівнює 5. Відстань між фокусами — це $2c=6 \Rightarrow c=3$, $a=5$, знайдемо b з формули: $c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{25 - b^2} \Rightarrow 9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$.

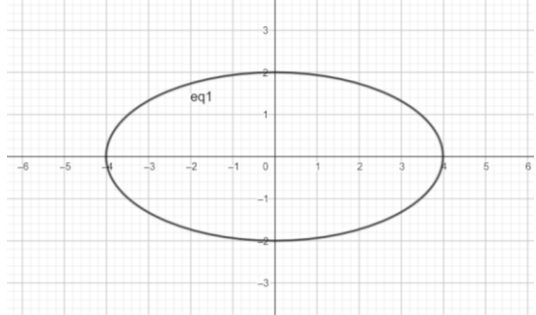
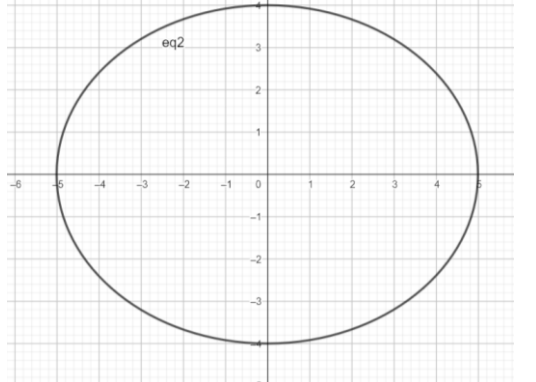
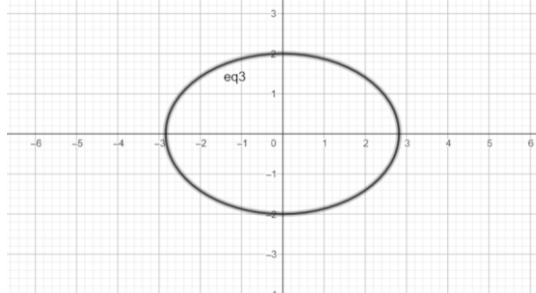
Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3) Один з його фокусів $F(-2,0)$ і мала напіввісь 2. Фокус на осі Ox , тому еліпс має велику вісь уздовж Ox . Координата фокуса $F(-2,0) \rightarrow c = 2, b = 2$, знайдемо a : $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = a^2 - 4 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Підсумок

№	Умова	Канонічне рівняння	
1	$a = 4, b = 2$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	
2	$2c = 6, a = 5$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$	
3	$c = 2, b = 2$	$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$	

3. Визначити ексцентриситет еліпсів у п.1

№	Рівняння	Велика вісь	Мала вісь	Фокуси
1	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$	8 (по x)	6	$(\pm \sqrt{7}, 0)$
2	$9x^2 + 25y^2 = 225.$	10 (по x)	6	$(\pm 4, 0)$
3	$9x^2 + 5y^2 = 45$	6 (по y)	$2\sqrt{5}$	$(0, \pm 2)$
4	$16x^2 + y^2 = 1.$	2 (по y)	0.5	$\left(0, \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

Ексцентриситет:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$e_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}, e_2 = \frac{4}{5}, e_3 = \frac{2}{3}, e_4 = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо про нього таке:

1) Велика напіввісь дорівнює 10 і ексцентриситет 0,8.

Знаємо: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae = 10 \cdot 0,8 = 8$; 3 формули $c^2 = a^2 - b^2$: $64 = 100 - b^2 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$. Отже, $a = 10, b = 6$, велика вісь уздовж осі Ox , канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

2) Мала напіввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знаємо $e = \frac{c}{a}$, але ми не знаємо a , отже:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 = \frac{1 - b^2}{a^2}$$

Маємо

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{9}{a^2} \rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{9}{a^2} \rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{1}{2} \rightarrow a^2 = 18 \rightarrow a = 3\sqrt{2}.$$

(оскільки $a > b$, велика вісь уздовж осі Ox) канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

5. Побудувати гіперболу, що визначена рівнянням $5x^2 - 4y^2 = 20$ та знайти її фокуси, асимптоти.

Поділимо на 20:

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Отже: $a^2 = 4$, $a = 2$ – дійсна піввісь, $b^2 = 5$, $b = \sqrt{5}$

Фокусна відстань: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow F_1 = (-3, 0), F_2 = (3, 0)$. Асимптоти:

$$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$$

6. Побудувати гіперболу $x^2 - y^2 = 1$ та знайти її фокуси, асимптоти.

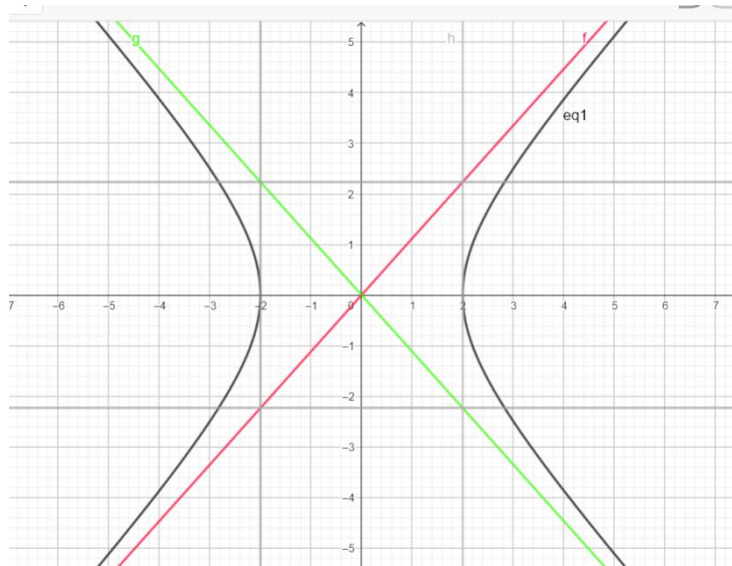
Канонічна форма

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

Отже: $a = 1$ – дійсна піввісь, $b = 1$.

Фокусна відстань: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow F_1 = (-\sqrt{2}, 0), F_2 = (\sqrt{2}, 0)$. Асимптоти:

$$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm x$$



7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, крім того

1) Її осі $2a = 10$, $2b = 8$.

8. Осі: $2a=10$, $2b=8$.
Напівосі: $a=5, b=4$. Тоді рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Її напівосі 5 та 4.

Напівосі $a=6, b=18$. Тоді рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = 1.$$

2) Відстань між фокусами $2c = 10$ та її вісь $2b = 8$.

Знаходимо $c=5$, $b=4$, тоді:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

Тоді рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

3) Рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ та відстань між фокусами $2c = 20$.

Знаємо:

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}a$$

$$c = 10 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 100$$

Підставимо:

$$c^2 = a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{9}a^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6, b^2 = \frac{16}{9} \cdot 36 = 64.$$

Рівняння гіперболи:

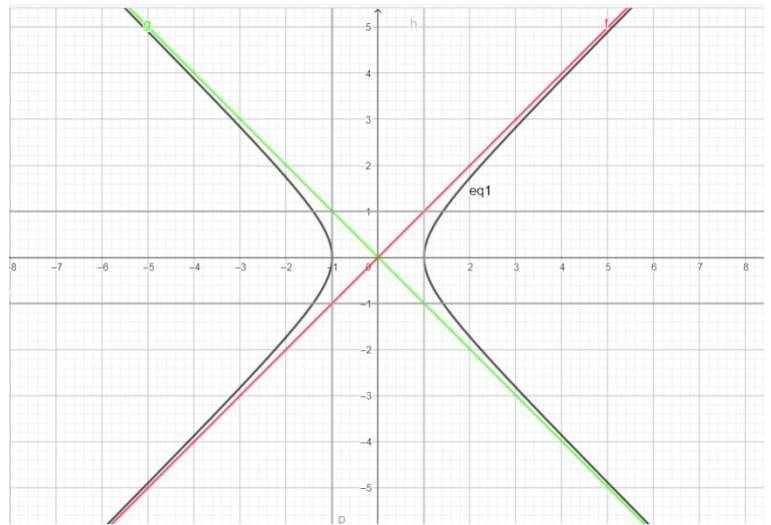
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

4) Рівняння асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ та відстань між вершинами дорівнює 48.

$$2a = 48 \Rightarrow a = 24;$$

$$\frac{b}{a} = \frac{12}{5} \Rightarrow b = \frac{12}{5}a = \frac{12}{5} \cdot 24 = 57,6 \Rightarrow b^2 = 57,6^2$$

Рівняння:



$$\frac{x^2}{24^2} - \frac{y^2}{57,6^2} = 1.$$

5) Точка $M_1\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ належить гіперболі та рівняння асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$.

Маємо $\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}a \Rightarrow b^2 = \frac{4}{9}a^2$. Підставимо координати точки $M_1\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ у рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\rightarrow \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{\frac{4}{9}a^2} = 1 \rightarrow \frac{81}{4a^2} - \frac{9}{4a^2} = 1 \Rightarrow \frac{72}{4a^2} = 1 \Rightarrow \frac{18}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 \\ &= 18 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{9} \cdot 18 = 8 \end{aligned}$$

Рівняння: $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$.

6) Точки $M_1(6, -1)$, $M_2(-8, 2\sqrt{2})$ належать гіперболі.

Оскільки не вказано орієнтацію, припустимо, що її центр у початку координат, а вітки відкриваються вздовж осі Ox . Тоді рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Підставимо координати обох точок у це рівняння. Точка $M_1(6, -1)$ задовольняє це рівняння гіперболи

$$\frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Точка $M_2(-8, 2\sqrt{2})$ також задовольняє це рівняння гіперболи

$$\frac{64}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1.$$

Позначимо $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$. Маємо систему

$$\begin{cases} 36A - B = 1 \\ 64A - 8B = 1 \end{cases}$$

яку розв'яжемо методом Крамера

Спочатку знайдемо основний визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 36 & -1 \\ 64 & -8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} = 4(-72 + 16) = -56 \cdot 4 = -224 \neq 0.$$

Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 1 = -7.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 36 & 1 \\ 64 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (9 - 16) = -28.$$

Тоді

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{224} = \frac{1}{32}, B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{28}{224} = \frac{1}{8}.$$

Оскільки $A = \frac{1}{a^2} \rightarrow \frac{1}{32} = \frac{1}{a^2} \rightarrow a^2 = 32$; $B = \frac{1}{b^2} \rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{b^2} \rightarrow b^2 = 8$.

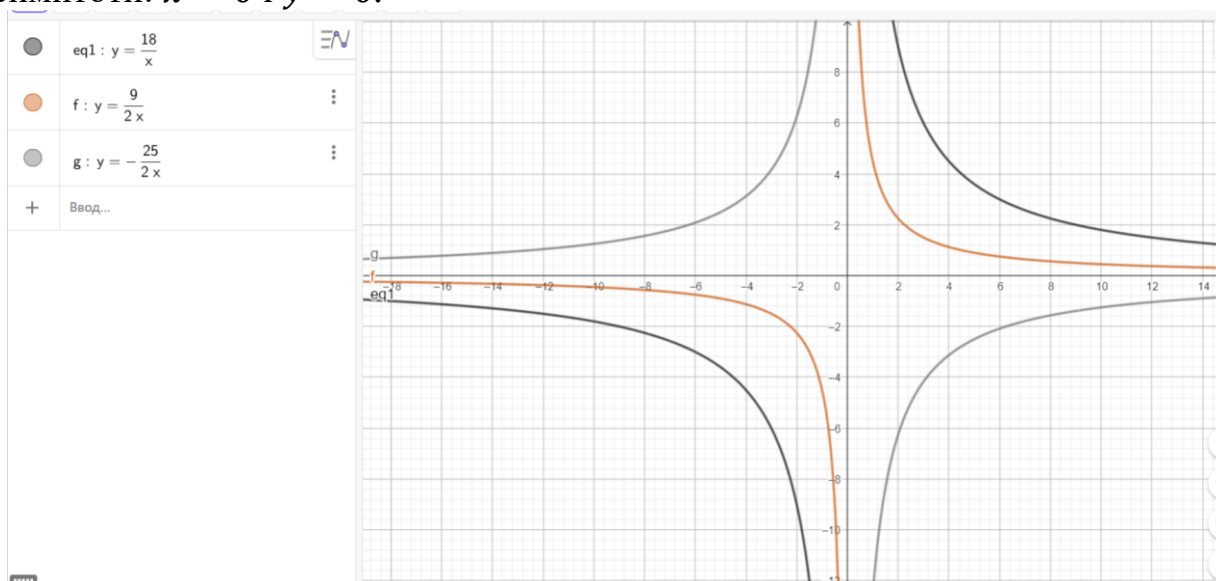
Остаточне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{28} = 1.$$

8. Побудуйте гіперболи $xy = 18$, $2xy - 9 = 0$, $2xy + 25 = 0$.

$xy = 18$, $2xy - 9 = 0$ Це гіперболи, осі якої розміщені під кутом 45° до координатних осей. Такі гіперболи називається рівнобічними у системі координат, повернутій на 45° . Її гілки лежать у I і III чвертях. Центр у початку координат (0,0). Асимптоти: $x = 0$ та $y = 0$.

$2xy + 25 = 0$ – рівнобічна гіпербола. Гілки розташовані в II та IV чвертях. Асимптоти: $x = 0$ і $y = 0$.



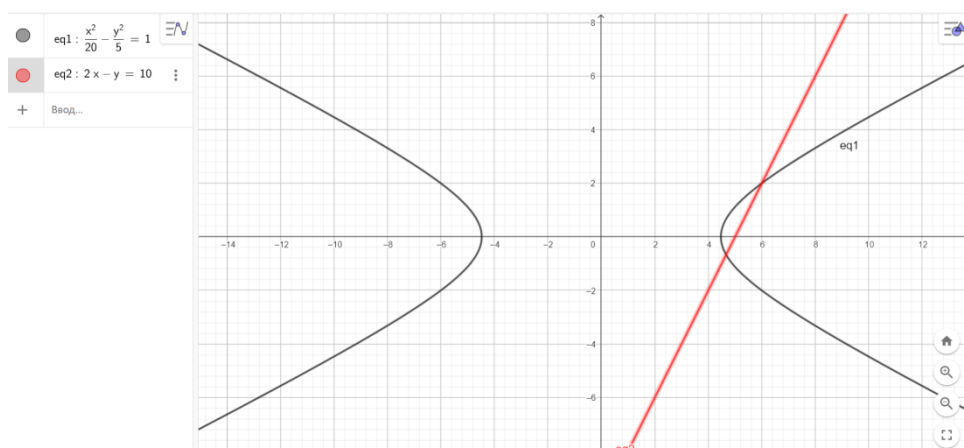
9. Знайти точки перетину прямої $2x - y = 10$ та гіперболи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Щоб знайти точки перетину прямої та гіперболи ми підставимо рівняння прямої $2x - 10 = y$ в рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{20} - \frac{(2x - 10)^2}{5} = 1.$$

Маємо

$$\frac{x^2}{20} - \frac{4x^2 - 40x + 100}{5} = 1.$$



$$\frac{x^2}{20} - \left(\frac{4x^2}{5} - 8x + 20 \right) = 1 \rightarrow \frac{x^2}{20} - \frac{4x^2}{5} + 8x - 20 - 1 = 0 \rightarrow \frac{-3x^2}{4} + 8x - 21 = 0 \rightarrow 3x^2 - 32x + 84 = 0.$$

$$\text{Дискримінант рівняння } D = 32^2 - 4 \cdot 3 \cdot 84 = 1024 - 1008 = 16.$$

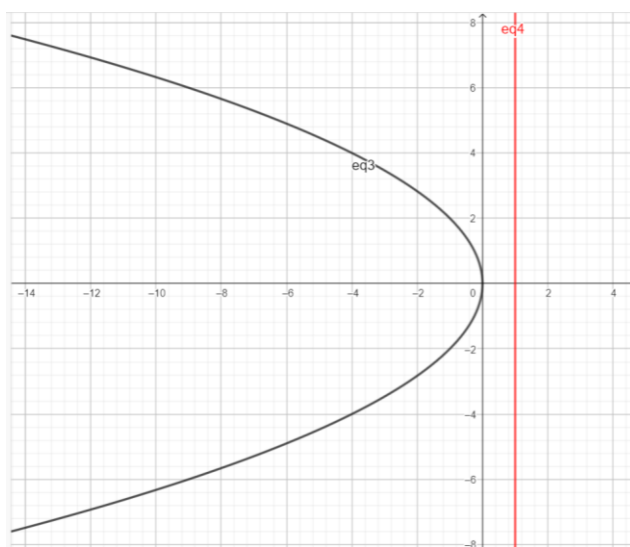
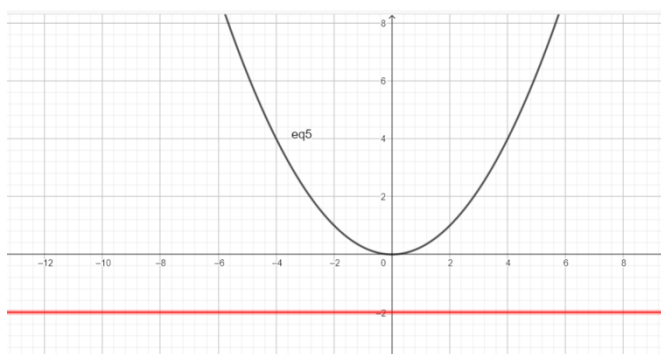
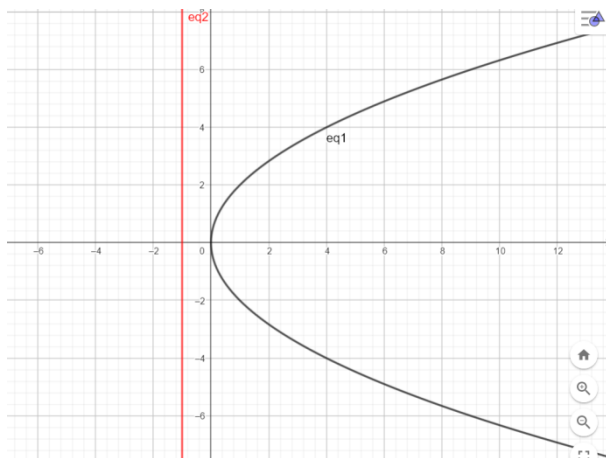
$$x_1 = \frac{32 + 4}{6} = 6 \rightarrow y_1 = 2 \cdot 6 - 10 = 2;$$

$$x_2 = \frac{32 - 4}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} \rightarrow y_2 = 2 \cdot \frac{14}{3} - 10 = -\frac{2}{3}$$

Точки перетину $(6; 2), (\frac{14}{3}; -\frac{2}{3})$.

Побудувати параболу $y^2 = 4x$, $y^2 = -4x$, $x^2 = 4y$. Знайти фокус, директрису, фокальний параметр.

$y^2 = 4x$. Це канонічне рівняння параболі з гілками вправо. Має вигляд: $y^2 = 2px \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow p = 2$. Фокус: $F(\frac{p}{2}, 0) = (1, 0)$. Директриса: $x = -\frac{p}{2} = -1$. Фокальний параметр (відстань від фокуса до директриси): $|p| = 2$.



$$x^2 = 4y.$$

$y^2 = -4x$. Це канонічне рівняння параболі з гілками вліво. $-2p = -4 \Rightarrow p = 2$. Фокус: $F(-1, 0)$. Директриса: $x = 1$. Фокальний параметр: $|p| = 2$.

$x^2 = 4y$. Це канонічне рівняння параболі з гілками вниз $2p = 4 \Rightarrow p = 2$. Фокус: $(0, 1)$ Директриса: $y = -1$, Фокальний параметр: 2

10. Визначити p та розташування відносно координатних осей таких парабол,
 $y^2 = -4x$, $x^2 = 5y$, $x^2 = -y$.

Рівняння	p	Гілки	Вісь симетрії	Фокус	Директриса
$y^2 = -4x$	-2	Вліво	вісь Ox	$(-2, 0)$	$x = 2$
$x^2 = 5y$,	$\frac{5}{2}$	Вгору	вісь Oy	$(0, \frac{5}{4})$	$y = -\frac{5}{4}$
$x^2 = -y$.	$-\frac{1}{2}$	Вниз	вісь Oy	$(0, -\frac{1}{4})$	$y = \frac{1}{4}$

11. Знайти точку перетину еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ та параболи $y^2 = 24x$.

Підставимо рівняння параболи в рівняння еліпса. З рівняння еліпса:

$$\frac{y^2}{225} = 1 - \frac{x^2}{100} \rightarrow y^2 = 225 \left(1 - \frac{x^2}{100} \right).$$

Маємо квадратне рівняння $225 \left(1 - \frac{x^2}{100} \right) =$

$$24x \rightarrow 225 - 24x - \frac{9}{4}x^2 = 0.$$

$$9x^2 + 96x - 900 = 0 \rightarrow 3x^2 + 32x - 300 = 0.$$

$$D = 32^2 + 4 \cdot 3 \cdot 300 = 1024 + 3600 = 4624 = 68^2$$

$$x_1 = \frac{-32 + 68}{6} = 6,$$

$$x_2 = \frac{-32 - 68}{6} = -\frac{100}{6} = -\frac{50}{3}.$$

Тоді для кожного значення x знайдемо відповідне значення y .

$$y^2 = 24x_1 \rightarrow y^2 = 144 \rightarrow y_1^1 = 12, y_1^2 = -12.$$

$$y^2 = 24x_2 \rightarrow y^2 < 0.$$

Отже, $(6, -12), (6, 12)$ – точки перетину еліпса і гіперболи.

Практичні завдання для самостійної роботи

1. Побудувати еліпс, що заданий рівнянням. Визначити малу, велику осі; малу і велику напівосі, фокуси. Побудувати його.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x^2 + 25y^2 = 25. 9x^2 + 5y^2 = 45. 25x^2 + 9y^2 = 1.$$

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо про нього таке

1) Напівосі його відповідно дорівнюють 4 і 2.

2) Відстань між фокусами дорівнює 6 і велика напіввісь дорівнює 5.

3) Один з його фокусів $F(-2, 0)$ і мала напіввісь 2.

4) Велика напіввісь дорівнює 10 і ексцентриситет 0,5.

5) Мала напіввісь дорівнює 5 і ексцентриситет $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Визначити ексцентриситет еліпсів у п.1

4. Знайти точку перетину прямої $x + 2y - 7 = 0$ і еліпса $x^2 + 4y^2 = 25$.

5. Побудуйте гіперболу, задану рівнянням

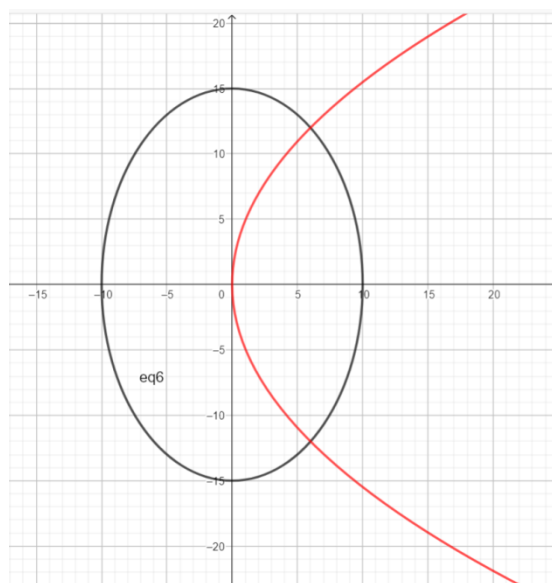
$$9x^2 - 16y^2 = 144, \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Знайдіть фокуси та рівняння асимптот.

6. Складіть рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , симетричної відносно початку координат, якщо $2a = 8, 2b = 6$.

7. Складіть рівняння гіперболи з півосями $a = 5$ та $b = 12$, якщо фокуси розташовані на осі Ox .

8. Для гіперболи, відстань між фокусами дорівнює $2c = 14$, а відстань між вершинами $2a = 10$. Запишіть її рівняння.



9. Дано рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{5}{2}x$ та відстань між фокусами $2c = 26$. Складіть рівняння цієї гіперболи.

10. Перевірте належність точки $M_2(-6, 5)$ гіперболі, рівняння якої має асимптоти $y = \pm \frac{3}{4}x$.

11. Побудуйте гіперболу, задану рівняннями: $xy = 20$, $3xy - 12 = 0$, $5xy + 30 = 0$.

12. Знайдіть точки перетину прямої $3x - 2y = 6$ з гіперболою $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$

13. Скласти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат і

А. парабола розташована в правій напівплощині симетрично відносно осі Ox , та її параметр $p=3$.

В. парабола розташована в лівій напівплощині симетрично відносно осі Ox , та її параметр $p=0,5$.

С. парабола розташована в верхній напівплощині симетрично відносно осі Oy , та її параметр $p = \frac{1}{4}$.

Д. парабола розташована в нижній напівплощині симетрично відносно осі Oy , та її параметр $p = 3$.

14. Скласти рівняння параболи якщо її вершина знаходиться в початку координат та

А. Парабола розташована симетрично відносно осі Ox та проходить через точку $A(9,6)$.

В. Парабола розташована симетрично відносно осі Ox та проходить через точку $B(-1,3)$.

С. Парабола розташована симетрично відносно осі Oy та проходить через точку $B(1,1)$.

Д. Парабола розташована симетрично відносно осі Oy та проходить через точку $B(4,-8)$.

15. Скласти рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь розташована на осі Ox , асимптоти мають рівняння $5x - 4y = 0$ і $5x + 4y = 0$, а відстань між вершинами дорівнює 16. Знайти координати фокусів та зробити схематичний рисунок.

16. Гіпербола, симетрична відносно осей координат, має ексцентриситет $e = \sqrt{2}$ та проходить через точку $A(1, \sqrt{3})$. Знайти відстані вершин цієї гіперболи від фокуса параболи $y^2 = 2x$. Зробити креслення.

17. Дано гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти співфокусний еліпс, що проходить через точку $A(5; 0)$. Зробити креслення.

18. Скласти рівняння параболи, якщо задано фокус $F(-7,0)$ та рівняння директриси $x - 7 = 0$.

Питання для самоконтролю

1. Чи є коло кривою другого порядку?
2. Що називають еліпсом? Ексцентриситетом еліпса? Директрисою еліпса? Фокусами еліпса.?

3. Канонічне рівняння еліпса.
4. Що називають гіперболою? Ексцентриситетом гіперболи? Директрисою гіперболи? Фокусами еліпса?
5. Канонічне рівняння гіперболи.
6. Що називають параболою? Директрисою параболі? Фокальним параметром?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми.

1. Розпізнавання та побудова кривих (еліпсів, гіпербол, парабол) у комп'ютерній графіці.
2. Використання властивостей еліпса та гіперболи в задачах мінімізації і побудові багатовимірних моделей.
3. Застосування еліпсів та парабол для побудови графіків, трендів та прогнозів.
4. Моделювання оптимальних та песимістичних сценаріїв із використанням параболічних моделей.
5. Розуміння графіків із кривими, що є еліпсами, гіперболами, параболами, для ефективнішого донесення інформації.
6. Моделювання атомних орбіталей за допомогою еліпса та гіперболи
7. Орбіти планет і тіл у космічній механіці: закони Кеплера, параметри еліптичних орбіт.
8. Використання гіпербол у архітектурі: конструкції арок і мостів із гіперболічними формами.
9. Парабола як траєкторія руху в механіці: рівноприскорений рух, балістика.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8-9

Вирішення практичних завдань «Границя функції в точці»

Питання до обговорення

1. Поняття функції, способи її задання, властивості.
2. Класифікація функцій, властивості, графіки.
3. Границя функції в точці, властивості границі функції.
4. Основні теореми про границі.
5. Перша і друга важливі границі та наслідки з них.
6. Порівняння нескінченно малих функцій. Таблиця еквівалентних
7. Розкриття невизначеностей
8. Неперервність функції в точці.
9. Точки розриву, їх класифікація.
10. Обернена функція.

Основні теретичні поняття

Поняття функції, способи її задання, властивості.

Якщо $\forall x \in X$ за певним правилом ставиться у відповідність $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задана функція $y = f(x)$, або задане *відображення* множини X на множину Y . Тут X - область визначення функції, Y - область значень функції.

У математичному аналізі, якщо заздалегідь не зазначено, розглядають *взаємно однозначну* відповідність множин X і Y , тобто $\forall x \in X$ ставиться у відповідність тільки один елемент множини Y і навпаки.

Правило f може бути задано формулою (аналітичне завдання функції), таблицею, графіком, алгоритмом.

Зауваження. Будь-яка послідовність є функцією цілочислового аргументу: $x_n = f(n), n \in N$.

Класифікація функцій, властивості, графіки.

Приклади. Крім функцій, які розглядаються в шкільному курсі, ми будемо ще розглядати такі функції:

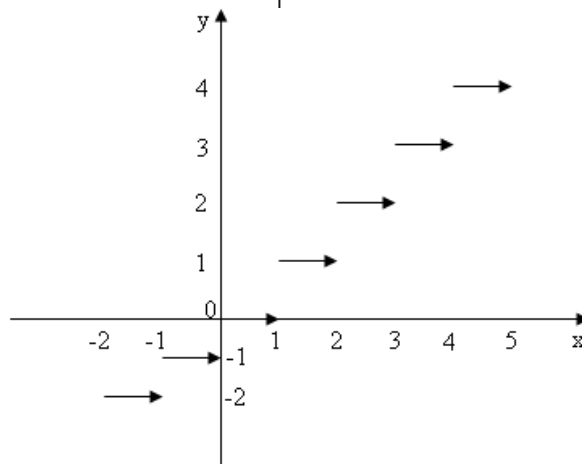
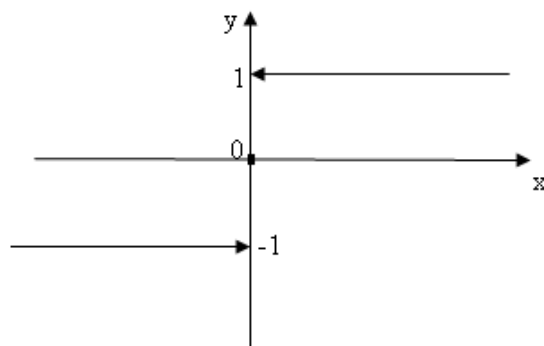
1. Ціла раціональна функція, або многочлен (поліном),

$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, де числа $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$.

2. Дробово-раціональна функція

$$y = \frac{P_n(x)}{R_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

3. $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0 \\ 0, \text{ якщо } x = 0 \\ -1, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$



4. Ціла частина числа $y = [x]$

5. Функція Діріхле

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне} \\ 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне} \end{cases}$$

та інші функції.

Функція називається *обмеженою зверху (знизу)*, якщо множина її значень U обмежена зверху (знизу).

Найменша верхня границя — $\sup_{x \in X} f(x)$, а найбільша нижня границя — $\inf_{x \in X} f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається *монотонно зростаючою (спадною)*, якщо при $x_1 \leq x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Границя функції в точці, властивості границі функції.

Означення границі функції (за Коші). Якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $0 < |x - x_0| < \delta$ $|f(x) - a| < \varepsilon$, то кажуть, що $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Зауваження. Якщо $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то при $x \in \delta(x_0)$ $f(x) \in \varepsilon(a)$, тобто яким би маленьким не було число ε , в ε — околі точки a буде незліченна множина значень функції.

Означення границі функції (за Гейне). Якщо для $\forall$ послідовності $\{x_n\} \subset X$, що збігається до x_0 ($\forall x_n \neq x_0$) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$, то a називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Можна довести, що визначення за Коші й за Гейне еквівалентні, тобто з одного випливає інше.

Аналогічно можна дати визначення за Коші й за Гейне у випадку, якщо $a = \pm\infty$ або $x_0 = \pm\infty$.

Оскільки визначення границі функції за Коші й за Гейне еквівалентні, то всі теореми, розглянуті для послідовностей, справедливі й для функцій.

Основні теореми про границі.

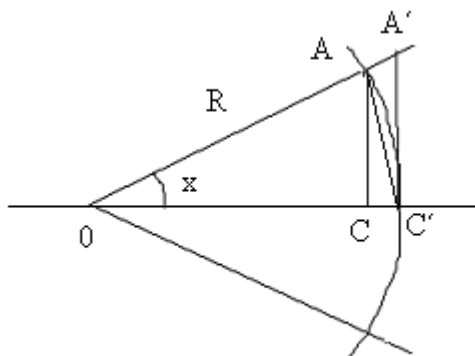
Теорема про єдиність границі. Якщо функція $f(x)$ має границю в точці a , то ця границя єдина.

Теореми про арифметичні дії з границями. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то існують такі границі

Сума $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B$, **різниця:** $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = A - B$,

добуток: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = A B$, **Частка:** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, якщо $B \neq 0$

Теорема про границю добутку на константу. $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, де $c \in R$.



Перша і друга важливі границі та наслідки з них.

Перша важлива границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доведення

$$AC = R |\sin x|,$$

$$A'C' = R|\operatorname{tg} x|,$$

$$AC' = R|x| - \text{довжина дуги.}$$

$$\frac{S_{\Delta OAC'}}{2} < S_{\text{сек}} < \frac{S_{\Delta OAC'}}{2} \\ \frac{R \cdot R |\sin x|}{2} < \frac{R \cdot R |x|}{2} < \frac{R \cdot R |\operatorname{tg} x|}{2}, \\ |\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

$$1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|} \Rightarrow |\cos x| < \frac{|\sin x|}{|x|} < 1 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

тому що в I і IV чвертях $\cos x \geq 0$, $\frac{\sin x}{x} > 0$ при $\forall x \neq 0$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то за зауваженням до теореми про граничний перехід у нерівностях

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Друга важлива границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Зауваження:

$$1. e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left\{ \frac{1}{x} = a \atop a \rightarrow +0 \right\} = \lim_{a \rightarrow +0} (1+a)^{\frac{1}{a}}, \text{ таким чином, } \lim_{a \rightarrow +0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = e;$$

$$2. \lim_{a \rightarrow -0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = \left\{ a = -\frac{y}{1+y} \Rightarrow y = -\frac{a}{1+a} \atop \text{при } a \rightarrow -0, y \rightarrow +0 \right\} = \\ = \lim_{y \rightarrow +0} \left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{-\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{-\left(\frac{1}{y}+1\right)} = \\ = \lim_{y \rightarrow +0} (1+y)^{\frac{1}{y}} (1+y)^1 = e \cdot 1 = e \Rightarrow \lim_{a \rightarrow -0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = e;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \left\{ \frac{k}{x} = t, t \rightarrow 0 \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{k}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^k = e^k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad 5) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

Порівняння нескінченно малих функцій. Таблиця еквівалентних

$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ - н.м.ф.

Означення:

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називають н.м.ф. більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$, і позначають $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

2. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A = \text{const} \neq 0$, то кажуть, що $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості при $x \rightarrow x_0$.

3. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні при $x \rightarrow x_0$, й позначають $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Найчастіше за $\beta(x)$ беруть $(x - x_0)^m$ ($m > 0$).

4. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(x - x_0)^m} = A \neq 0$, то кажуть, що $\alpha(x)$ - н.м.ф. m -того порядку малості, а $A(x - x_0)^m$ - головна частина н.м.ф. $\alpha(x)$.

Теорема. Якщо $\alpha(x) \sim a_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Доведення. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{a_1(x)} \cdot \frac{a_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right) = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1$.

Таблиця еквівалентних. При $x \rightarrow 0$ справедливі такі еквівалентності:

$\alpha(x)$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} x$	$a^x - 1$	$\ln(1+x)$	$(1+x)^a - 1$
$\beta(x)$	x	x	x	x	$x \ln a$	x	ax

Перші дві еквівалентні випливають із першої важливої границі. Третя і четверта доводяться за допомогою методу підстановки.

Доведення інших – самостійно.

Приклади:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}$, отже, $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + 0(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, тобто $\frac{1}{2}x^2$ – головна частина виразу $1 - \cos x$ при $x \rightarrow 0$.

2. Оскільки $(1+x)^a - 1 \sim ax$ при $x \rightarrow 0$, то головна частина виразу $(1+x)^a - 1$ при $x \rightarrow 0$ є ax , або $(1+x)^a = 1 + ax + 0(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Розкриття невизначеностей

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ й ми визначаємо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, то кажуть, що вираз

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляє невизначеність $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ при $x \rightarrow x_0$. Існує сім типів невизначеностей: $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{\infty \cdot 0\}$, $\{0^0\}$, $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$. Наприклад, перша важлива

границя розкриває невизначеність $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, а друга – $\{1^\infty\}$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$, а

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, то умовно можна записати, що $\ln 0 = -\infty$, $\ln \infty = \infty$.

Прологарифмуємо останні три типи невизначеностей: $\{\ln 0^0\} = \{0 \ln 0\} = \{0 \cdot -\infty\}$; $\{\ln \infty^0\} = \{0 \ln \infty\} = \{0 \cdot \infty\}$; $\{\ln(1^\infty)\} = \{\infty \ln 1\} = \{\infty \cdot 0\}$.

Це говорить про те, що шляхом елементарних перетворень один тип невизначеності можна звести в інший. Результат же розкриття невизначеності цілком залежить від закону зміни аргументу. Але все-таки є ряд загальних положень. Наприклад, при розкритті невизначеності $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ бажано в чисельнику й знаменнику винести за дужки старший ступінь і скоротити; при розкритті

невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ бажано чисельник і знаменник розкласти на множники; при розкритті неvizначеності $\left\{1^{\infty}\right\}$ – використовувати другу важливу границю.

Неперервність функції в точці.

Функція називається неперервною в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функція називається неперервною праворуч (ліворуч), якщо $A^+ = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ ($A^- = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$).

Для неперервної в точці x_0 функції $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Щ $x = x_0 + \Delta x$, тоді $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Тобто в $\delta(x_0)$ - околі малому приросту аргументу відповідає малий приріст функції.

Із властивостей границь випливають такі властивості неперервних функцій:

якщо неперервні в точці x_0 функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то $f(x) + \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $c \cdot f(x)$ – неперервні в точці x_0 , а дріб $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ – неперервний у точці x_0 , якщо $\varphi(x_0) \neq 0$.

Якщо функція неперервна у всіх точках відрізка $[a; b]$, то кажуть, що вона неперервна на цьому відрізку й позначають $f(x) \in C[a; b]$ (C – множина неперервних функцій).

Щ $y = f(x) \in C[a; b]$, $(\cdot) x_0 \in (a; b)$

За визначенням границі : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такий, що при $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

З рисунка видно, що при тому самому ε чим крутіший графік, тим менше δ , таким чином, $\delta(\varepsilon; x_0)$.

Теорема. Суперпозицією двох неперервних функцій є функція неперервна.

Доведення

Щ $y = f(U)$ неперервна в $\tau(\cdot) U_0$, $U = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0 і $U_0 = \varphi(x_0)$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \left\{ \begin{array}{l} U = \varphi(x) \\ U \rightarrow U_0 \end{array} \right\} = \lim_{U \rightarrow U_0} f(U) = f(U_0) = f(\varphi(x_0)),$$

таким чином, $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0 .

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \forall x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A^+$ називається

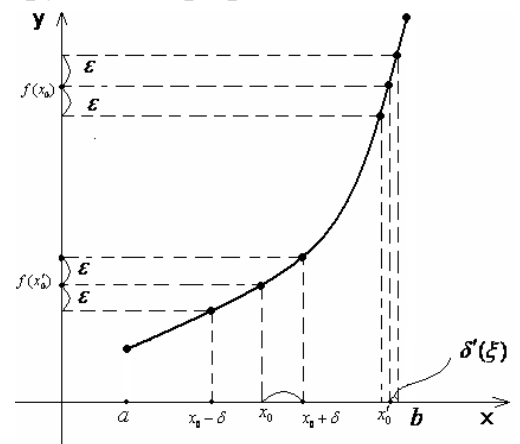
правосторонньою границею; $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \forall x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A^-$ називається

лівосторонньою границею.

Точки розриву, їх класифікація.

Якщо функція неперервна в точці x_0 , то $A^+ = A^- = f(x_0)$.

Якщо рівність $A^+ = A^- = f(x_0)$ порушується, то в точці x_0 розрив.



1. Якщо $A^+ = A^- \neq f(x_0)$ і A^+ , A^- – скінченні, то в точці x_0 розрив називається усувним.

2. Якщо $A^+ \neq A^-$ і обидві скінченні, то в точці x_0 розрив називається неусувним 1-ого роду.

3. Якщо хоча б одна з меж A^+ , A^- дорівнює нескінченності або не існує, то в точці x_0 розрив називається неусувним 2-ого роду.

Приклад

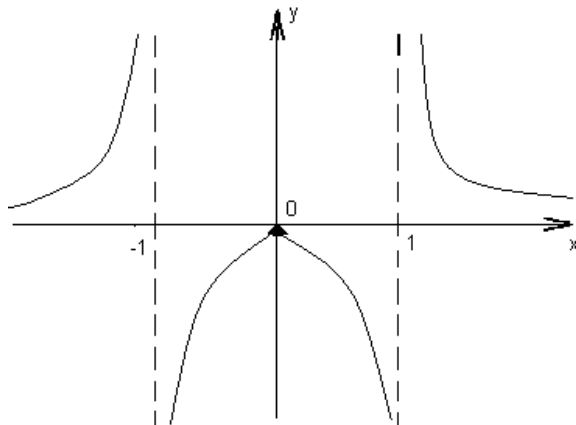
$$y = \frac{1}{\ln|x|}$$

У точці $x = \pm 1$ неусувний розрив 2-го роду.

У точці $x = 0$ усувний розрив, тобто якщо

$$y = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}, \text{ то нова функція в точці}$$

$x=0$ буде неперервною.



Функція $y = f(x)$ називається кусково-неперервною на $[a; b]$, якщо на $(a; b)$ вона неперервна, крім нескінченного числа точок усувного розриву або неусувного розриву 1-го роду, причому $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ – скінченні.

Елементарні функції типу: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), всі тригонометричні, обернені тригонометричні неперервні на своїх ОДЗ.

Наприклад: $y = \operatorname{tg} x$,

ОДЗ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$\Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cos x}$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cos x} = \frac{0}{\cos^2 x} = 0$, якщо $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, що збігається з ОДЗ.

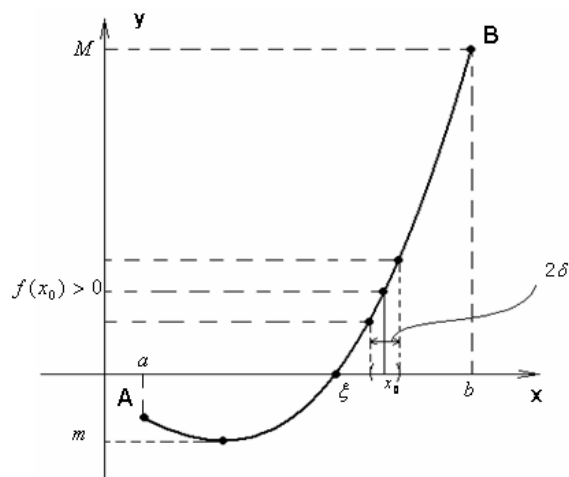
1. Властивості функцій, неперервних на відрізку

II $y = f(x) \in C[a; b]$, тоді

1. $\exists \delta(x_0)$, у якій $f(x)$ зберігає знак $f(x_0)$ ($f(x) \cdot f(x_0) > 0$),

2. $\exists$ хоча б одна $(\cdot) \xi \in (a; b)$, що $f(x)$ набуває проміжного значення між $f(a)$ і $f(b)$ (наприклад, якщо $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $f(\xi) = 0$),

3. $f(x)$ обмежена своїми найменшим і найбільшим значеннями ($m \leq f(x) \leq M$).



Поняття оберненої функції

Щ $y = f(x)$, аргумент $x \in X$, значення функції $y \in Y$ й між множинами X, Y взаємно однозначна відповідність.

Якщо ж у вважати аргументом, а x – значенням функції, то одержимо нову функцію, задану в неявному вигляді. Іноді x можна виразити через y , тобто $x = \varphi(y)$

Функція $y = \varphi(x)$, $x \in Y$, $y \in X$ називається оберненою функцією відносно $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Приклад: $y = -\sqrt{x}$, $x \in [0; \infty)$, $y \in (-\infty; 0]$ і $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, $y \in [0; +\infty)$ взаємно обернені функції.

Зауваження

1. Графіки прямої й оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$.
2. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$ й т.д. є оберненими не для $y = \sin x$ й т.д., а тільки для їхніх частин, що відповідають головним значенням аргументу x ;

Наприклад: $y = \operatorname{tg} x$ тільки при $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $y \in (-\infty; +\infty)$ має обернену функцію $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty; \infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Функція $y = f(x)$ називається строго монотонно зростаючою (спадною) на множині X , якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ з X $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $y \in [c; d]$ строго монотонно зростає (спадає) і неперервна, то існує однозначна неперервна строго монотонно зростаюча (спадна) обернена до неї функція $y = \varphi(x)$, $x \in [c; d]$, $y \in [a; b]$.

Доведення. Випливає з того, що функція $y = f(x)$ встановлює між відрізками $[a; b]$ і $[c; d]$ взаємно однозначну відповідність і для всіх $x_1 < x_2$ буде $y_1 < y_2$ (якщо функція зростає).

Аналогічно для строго монотонно спадної функції.

Інтерактивні завдання

1. Вправи на знаходження границі функції в точці
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/hranytsia-funktsii-v-tochtsi>
2. Чи є функція неперервною?
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/chy-ie-funktsiia-neperervnoiu>
3. Вправи на властивості границь
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/vlastyvosti-hranyts>
4. Вправи на обчислення границь
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/obchyslennia-hranyts>
5. Границі й неперервність
<https://uk.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:limits-and-continuity>

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Обчислити границі

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x + 5}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \pi}{\cos^2 x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + \sqrt{x}); \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} + 1}{x^2}.$$

При обчисленні границі насамперед необхідно підставити граничне значення аргументу $x = x_0$ у функцію, що стоїть під знаком границі, якщо отримане число існує, воно і є значенням границі.

Використайте калькулятор обчислення границь для перевірки результату <https://mathdf.com/lim/uk/>

Відповідь: а) $-3/8$; б) π ; в) ∞ ; г) 0 .

2. Обчисліть границі послідовностей та функцій, використовуючи асимптотичну рівність при $x \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+2n}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^3+1}}{5x^2+1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3-4x+3}{2x^3+5x^2+1}; \\ 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+\sqrt{n}}{3n-2}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2\sqrt{n^4+1}}{n^2+1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+2n} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = [\text{при } n \rightarrow \infty: n+1 \sim n, n^2+2n \sim n^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \\ 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^6+1}}{5x^2+1} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = [\text{при } x \rightarrow \infty: x^6+1 \sim x^6, \sqrt[3]{x^6+1} \sim x^2, 5x^2+1 \sim 5x^2] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Використайте калькулятор обчислення границь для перевірки результату у прикладах 3)-5) https://ua.onlinemschool.com/math/assistance/limit_derivative/limit/

Відповідь: 3) $11/2$; 4) ∞ ; 5) 2 ; 6) 0 .

3. Обчисліть границі, застосувавши тотожні перетворення функцій та еквівалентні нескінченно малі.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-5}{2(x^2-1)}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x^4}-3}{x^4}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{\arcsin x^2}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x^2}{x\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x}}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}; \\ 10) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{x^2+3x+2}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(1-3x)}. \end{aligned}$$

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-5}{2(x^2-1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{виділимо множник } (x-1) \text{ в чисельнику та знаменнику, для цього знайдемо корені квадратного многочлена чисельника: } x_1 = 1, x_2 = -5/2, \text{ тоді } 2x^2+3x-5 = 2(x-1)(x+5/2). \text{ Підставимо знаменник: } (x^2-1) = (x-$

$$1)(x+1)] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x-5/2)}{2(x-1)(x+1)} = [\text{вираз } (x-1) \rightarrow 0, \text{ но за визначенням границі } (x-1) \neq 0, \text{ тому можемо скоротити на } (x-1)] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5/2}{x+1} = \frac{7}{4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{аби виділити множник } (x-2) \text{ в знаменнику, домножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз } (\sqrt{2x}+2)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}+2}{2} = 2;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x^4}-3}{x^4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9\left(1+\frac{x^4}{9}\right)}-3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\left(\sqrt{1+\frac{x^4}{9}}-1\right)}{x^4} = \left[\text{при } x \rightarrow 0: \sqrt{1+\frac{x^4}{9}}-1 \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{9} = \frac{x^4}{18} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{18x^4} = \frac{1}{6};$$

Цей приклад можемо розв'язати іншим способом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x^4}-3}{x^4} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{домножимо чисельник і знаменник на } (\sqrt{9+x^4}+3)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x^4}-3)(\sqrt{9+x^4}+3)}{x^4(\sqrt{9+x^4}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9+x^4-9}{x^4(\sqrt{9+x^4}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+x^4}+3} = \frac{1}{6};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{\arcsin x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\cos 2x - \cos 6x = 2 \sin 4x \sin 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x \cdot \sin 2x}{\arcsin x^2} = [\sin 2x \sim 2x, \sin 4x \sim 4x, \arcsin x^2 \sim x^2] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 4x \cdot 2x}{x^2} = 16.$$

Відповідь: 5) 2/5; 6) 3; 7) 4; 8) 1/7; 9) 0; 10) 1/2; 11) 1; 12) -1.

4. Обчисліть границі послідовностей та функцій, розкривши невизначеність виду $[0 \cdot \infty]$ або $[\infty - \infty]$.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1)[\ln(2n+4) - \ln(2n+1)];$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+5)[\ln(3n+1) - \ln(3n)]; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x^2} - x);$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} x(\sqrt{1+x^2} - x); \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} x^2(\sqrt{1+x^2} - x); \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \operatorname{ctg} 3x;$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+1) \sin \frac{1}{n^2}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} \pi x; \quad 10) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n}+2) \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

При розкритті невизначеностей виду $[0 \cdot \infty]$ і $[\infty - \infty]$ необхідно тотожно перетворити функцію так, щоб отримати вже розглянуті основні типи невизначеностей $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}) = [\infty - \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-2})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}((n+1) - (n-2))}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = [\text{при } n \rightarrow \infty: \sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}, \sqrt{n-2} \sim \sqrt{n}]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{3}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1)[\ln(2x+4) - \ln(2x+1)] = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1) \ln \left(\frac{2x+4}{2x+1} \right) = [0 \cdot \infty] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1) \ln \left(1 + \frac{3}{2x+1} \right) = [\text{при } x \rightarrow \infty: \frac{3}{2x+1} \rightarrow 0, \text{ тому } \ln \left(1 + \frac{3}{2x+1} \right) \sim \frac{3}{2x+1}] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(3x-1)}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3x}{2x} = \frac{9}{2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \operatorname{ctg} 3x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{при } x \rightarrow 0: \sin x \sim x, \operatorname{tg} 3x \sim 3x] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3};$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1) \sin \frac{1}{n^2} = [0 \cdot \infty] = [\text{при } n \rightarrow \infty: \sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, (n^2 + 1) \sim n^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Відповідь: 3) 2/3; 4) 0; 5) 1/2; 6) ∞ ; 9) 1/ π ; 10) 0.

При обчисленні границь, в яких присутні арифметичні та геометричні прогресії, використовуються формули для суми відповідної прогресії:

- для прогресу алгебри: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$,
- для геометричної прогресії: $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Для обчислення меж іноді трапляється функція $n!$ (читається n -факторіал), яка визначається так: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$, $1! = 1$.

5. Обчислити границі, використавши попередні формули

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+3n-4}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{3n(n+3)!}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n+1)! + (n+2)!};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^n}}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)}{2n+3}; \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2n^2}.$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+3n-4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = [\text{за першою попередньою формулою: } 1+2+\dots+n =$$

$$= \frac{(1+n)n}{2}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{2(n^2+3n-4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{2(n^2+3n-4)} = [\text{при } n \rightarrow \infty: n^2+3n-4 \sim n^2, (1+n)$$

$$n \sim n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{3n(n+3)!} = [\text{за третьою попередньою формулою } (n+3)! = (n+2)!(n+3),$$

$$(n+4)! = (n+2)!(n+3)(n+4)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)![(n+3)(n+4)-1]}{3n(n+2)!(n+3)} = [\text{при } n \rightarrow \infty: (n+3)(n$$

$$+ 4) \sim n^2, 3n(n+3) \sim n^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^n}} = \left[\text{по формуле (10.20): } 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}} \right. \\ \left. , 1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^n} = \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}{2 \cdot 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)} = \left[\text{при } n \rightarrow \infty: \frac{1}{3^n} \rightarrow 0, \frac{1}{5^n} \rightarrow 0 \right] = \frac{6}{5}.$$

Відповідь: 3) 1; 5) 1; 6) 1/2.

6. Обчислити границі

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x}, \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - \sin^2 x}{7x^2}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$$

Скористаємося першою важливою границею та наслідками з неї

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin ax}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \left[\begin{matrix} y = ax \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right] = a \cdot 1 = a \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{x \sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin bx} = \frac{a}{b}. \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x \cos ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a \cdot 1 = a \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\begin{matrix} y = \arcsin x = \arcsin(\sin y) = y \\ y \rightarrow 0. \end{matrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - \sin^2 x}{7x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x - \sin x)(\sin 5x + \sin x)}{7x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cos 3x \cdot 2 \sin 3x \cos 2x}{7x^2} = \\ \frac{4}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \frac{4}{7} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{24}{7} \\ 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = [0 \cdot \infty] = \left[\begin{matrix} y = \frac{\pi}{2} - x \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \\ = \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} y = \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1 \cdot 1 = 1.$$

7. Обчислити границі

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(5x + 2) - \ln(5x + 4)] \\ 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x-2} \right)^{5x} \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{7x+6} \right)^{11x-3} \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{3x} \\ 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5} \right)^{6x-1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{4x}$$

Скористаємося другою важливою границею та наслідками з неї:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x = [1^\infty] = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right)^4 = e^4.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x-2}\right)^{5x} = [1^\infty] = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{2}}\right)^{\frac{7}{x-2} 5x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x-2} 5x} = e^{35}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{6x-1} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x-3}{4x+5} - 1\right)^{6x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x-3-4x-5}{4x+5}\right)^{6x-1} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{4x+5}\right)^{6x-1 \frac{4x+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{4x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-48x+8}{4x+5}} = e^{-12}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)[\ln(5x+2) - \ln(5x-4)] = [\infty - \infty]$$

Звернемо увагу, що в цьому прикладі ми змушені позбавлятися невизначеності типу $\infty - \infty$. Як ми зауважили, що друга важлива границя допомагає позбавлятися невизначеності типу $[1^\infty]$. Але, згадавши властивості логарифмів, нам вдасться звести цю границю до другої важливої границі.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3) \left[\ln \frac{(5x+2)}{5x-4} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{(5x+2)}{5x-4} \right]^{2x+3} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(5x+2)}{5x-4} \right]^{2x+3} \\ &= [1^\infty] = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(5x+2)}{5x-4} - 1 \right]^{2x+3} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(5x+2) - 5x + 4}{5x-4} + 1 \right]^{2x+3} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{6}{5x-4} \right]^{2x+3} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{6}{5x-4} \right]^{(2x+3) \frac{5x-4}{6}} \right)^{\frac{6}{5x-4}} = \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)6}{5x-4}} \\ &= \ln e^{\frac{12}{5}} = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{7x+6}\right)^{11x-3}$$

Найпоширеніша помилка, яку допускають під час обчислення за допомогою другої важливої границі є помилка, коли побачивши знайому структуру, починають наслідувати вже знайомий алгоритм, не перевірявши, чи є тут невизначеність. У цій границі невизначеності нема, і ми відповідь отримуємо миттєво:

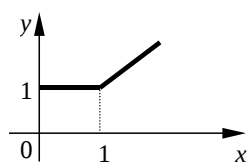
$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{7x+6}\right)^{11x-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^\infty = 0 \\ 6) \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\frac{7x}{7}} = \frac{7}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{7x} = \frac{7}{4}. \\ 7) \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15^x - 5^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x} = \ln 15 - \ln 5 = \ln 3. \\ 8) \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+x} - 1}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{7}} - 1}{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21} \end{aligned}$$

8. Побудувати графіки функцій

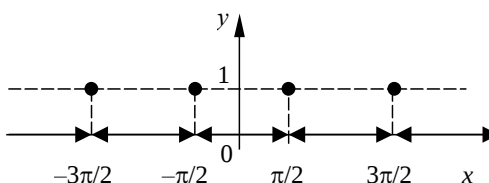
а) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \ (x \geq 0)$; б) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x$; в) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$.

Оскільки поведінка степеневих функцій різна при значеннях аргументу більших або менших 1 (за модулем), необхідно розглянути ці випадки окремо для кожної функції. Крім того, необхідно розглянути випадок, коли $x = 0$.

а) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ б) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$



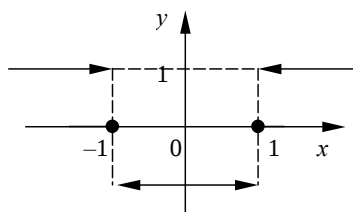
А)



Б)

в) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$.

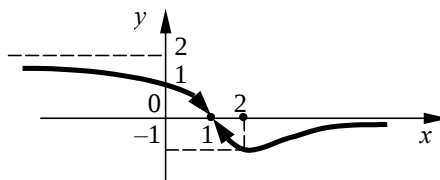
$|x| < 1: \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = -1;$ $|x| > 1: \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} \left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right)}{x^{2n} \left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)} = 1;$ $|x| = 1: f(x) = 0$



В)

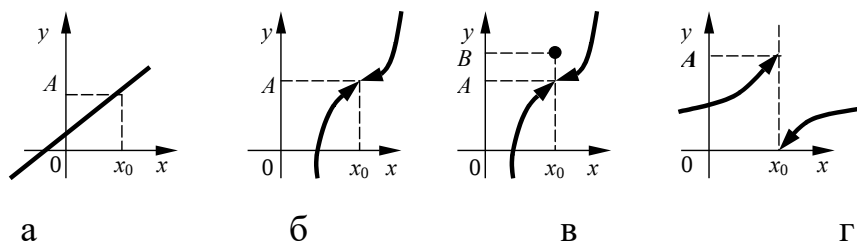
Практичні завдання для самостійної роботи

1. Функція $y = f(x)$ задана графічно. Якою з наведених нижче границь можна описати поведінку цієї функції?



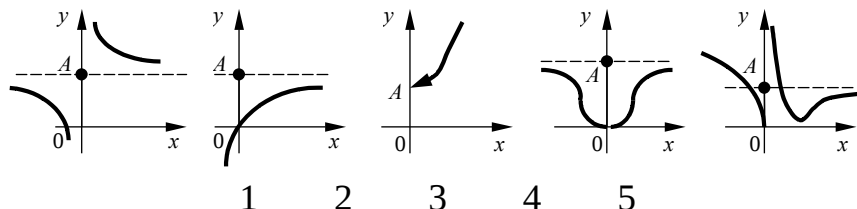
- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$; 4) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$;
5) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$; 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Які з функцій, що наведені нижче, при $x \rightarrow x_0$ має границю, що дорівнює А?

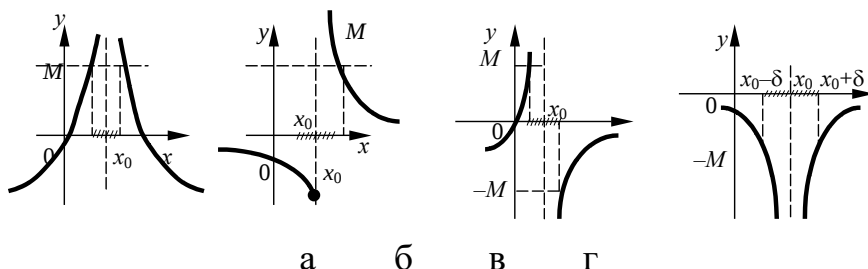


3. Серед графіків функцій вибрати ту, яка є функцією, що задовольняє умові:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$



4. Які з функцій, графіки яких представлені, є нескінченно великими при $x \rightarrow x_0$?



5. Обчисліть границі

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n}{2n - 1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 2n}{5 + n}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n+1)^2}{2n+1}$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$; 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+4) \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n [\ln(2n+1) - \ln(2n-1)]$; 8)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$; 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$; 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{3 + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{4^n}}$; 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - n!}{5n(n+1)!}$;

12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - n + 3}{2 + 4 + \dots + 2n}$.

6. Обчисліть границі функцій

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \sqrt[3]{x}}{x+1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x+4)}{x^4+2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+10x+1}{2x^2+3x+5}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\arcsin 2x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x^2}{\sin^3 2x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{x \operatorname{tg} x}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-2x) \operatorname{ctg} x$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x+1) [\ln(3x+1) - \ln(3x+2)]$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2x^2}{\sin 3x}$.

13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg} \frac{x^2}{\pi}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+10} - \sqrt{x})$.

Питання для самоконтролю

1. Надайте визначення сталих та змінних величин.

2. Надайте визначення області зміни змінної величини. Які типи області зміни змінної величини ви знаєте?
3. Надайте визначення функції. Що таке область визначення та область значень функції?
4. Надайте визначення складної функції. Наведіть приклади.
5. Надайте визначення оберненої функції. Наведіть приклади.
6. Які способи завдання функції ви знаєте? Назвіть переваги та недоліки кожного з способів.
7. Надайте визначення парної функції. Наведіть приклади.
8. Надайте визначення періодичної функції. Наведіть приклади.
9. Надайте визначення монотонної функції.
10. Надайте визначення границі змінної величини. Назвіть та доведіть основні властивості змінної величини.
11. Надайте визначення границі функції. Назвіть та доведіть основні властивості функції.
12. Що таке односторонні границі?
13. Надайте визначення нескінченно малих та нескінченно великих величин. Які властивості нескінченно малих та нескінченно великих величин ви знаєте.
14. Доведіть основні теореми про границю функції.
15. Що таке невизначеність? Які типи невизначеностей ви знаєте?
16. Опишіть простіші прийоми розкриття невизначеностей.
17. Назвіть «важливі» границі. Проілюструйте прикладами застосування важливих границь.
18. Як порівнювати нескінченно малі та нескінченно великі величини?
19. Сформулюйте принцип заміни нескінченно малих. Проілюструйте застосування цього принципу в обчисленні границь.
20. Що таке неперервна функція?
21. Надайте класифікацію розривів.
22. Які властивості мають неперервні функції?
23. Наведіть приклад реальної ситуації у вашій сфері, коли не існує границі – і як це впливає на результат?
24. Чим відрізняється одностороння границя від двосторонньої в прикладних задачах?
25. Чому важливо знати значення функції «біля» точки, навіть якщо в самій точці вона не визначена?
25. Як поняття границі допомагає «згладити» або «перебудувати» математичну модель?
26. Чому поняття границі лежить в основі усіх похідних та інтегралів – і чому без нього не обійтись у жодній науці?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми

1. Одностороння неперервність
2. Точки розриву та їх класифікація
3. Алгоритмічна реалізація обчислення границь функцій в комп'ютерній алгебрі (на Python / C++ / Wolfram)

4. Границі у побудові графіків функцій: як працюють візуалізатори у GeoGebra, Desmos тощо
5. Границі у побудові графіків функцій: як працюють візуалізатори у GeoGebra, Desmos тощо
6. Границі в оптимізації виробництва: наближення до точки найменших витрат
7. Дослідження ефекту насичення в попиті як границі споживчої функції
- 8. Границі у фінансовому прогнозуванні: модель доходу при зростанні інвестицій до нескінченності**

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10-11

Практичні заняття «Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій»

Питання до обговорення

1. Поняття похідної функції. Таблиця похідних.
2. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі до похідної.
3. Застосування похідних до розкриття невизначеностей. Правило Лопітала.
4. Умови монотонності функції. Екстремуми функцій, необхідні і достатні умови існування екстремуму.
5. Опуклість вгору, опуклість вниз, точки перегину.
6. Асимптоти графіку функцій.
7. Загальна схема дослідження функцій і побудова графіків.

Основні теоретичні поняття

Поняття похідної функції. Таблиця похідних.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і нехай x - деяка точка цієї околиці, $x \neq x_0$. Якщо відношення

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

має границю при $x \rightarrow x_0$, то ця границя називається похідною функції f в точці x і позначається $f'(x_0)$.

Таким чином,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо ввести позначення $x - x_0 = \Delta x$, то визначення запишеться у вигляді

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Вважаючи $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ і опускаючи позначення аргументу, отримаємо ще одну запис визначення похідної:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо для деякого значення x_0 виконується умова

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \text{ або } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \text{ або } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty,$$

то кажуть, що для цього значення x_0 існує нескінченна похідна, що дорівнює відповідно $+\infty$, $-\infty$ або ∞ .

Надалі під виразом «функція має похідну» будемо розуміти завжди наявність кінцевої похідної, якщо не визначено інше.

Якщо функція f визначена на деякому проміжку і в кожній точці цього проміжку існує похідна (причому під похідною в кінці проміжку, який належить проміжку, звичайно, розуміється відповідна одностороння

похідна), то ця похідна f' є, очевидно, також функція, визначена на вихідному проміжку.

Операція обчислення похідної від даної функції називається операцією диференціювання.

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в кожній точці множини X , а $c = \text{const}$, тоді:

$$1) (cu)' = cu';$$

$$2) (u + v)' = u' + v';$$

$$3) (uv)' = u'v + uv';$$

$$4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ якщо } v \neq 0 \text{ при } \forall x \in X.$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \Pi y &= \frac{u(x)}{v(x)}, \Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{(u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x)) - (u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x))}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{\Delta u \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{v(x)v(x + \Delta x)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \end{aligned}$$

Аналогічно доводяться інші три формули. (Довести самостійно).

Таблиця похідних

$(x^a)' = ax^{a-1} \quad (a \in \mathbb{R})$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x < 1)$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x < 1)$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq \frac{\pi(2n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi, n \in \mathbb{Z}).$$

Основні теореми диференціального числення

Теорема (Ролля).

Якщо $y = f(x) \in C[a, b]$, диференційована у внутрішніх точках цього відрізка і $f(a) = f(b)$, то $\exists$ хоча б одна точка $\zeta \in (a, b)$ така, що $f'(\zeta) = 0$.

Теорема (Лагранжа).

Якщо $y = f(x) \in C[a, b]$ і диференційована у внутрішніх точках цього відрізка, то $\exists$ хоча б одна така точка $\zeta \in (a, b)$, що $f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Теорема (Коші)

Ці $y = f(x)$ і $y = g(x) \in C[a, b]$ й диференційовані у внутрішніх точках цього відрізка, $g'(x) \neq 0$ при $\forall x \in (a, b)$. Тоді $\exists$ хоча б одна точка $\zeta \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі до похідної.

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\varphi \rightarrow \alpha \\ \Delta x \rightarrow 0}} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

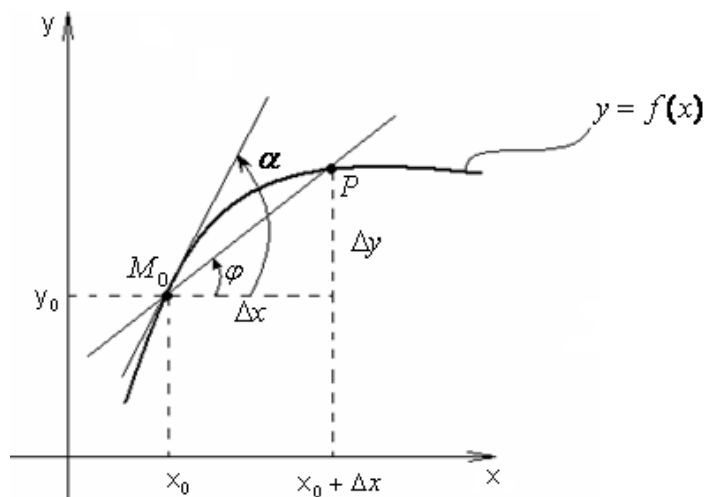
Граничне положення січної M_0P , коли точка $P \rightarrow$ точка M_0 , рухаючись по кривій $y = f(x)$, називається дотичним променем, проведеним до графіка функції $y = f(x)$ в точку M_0 .

Якщо дотичні промені праворуч і ліворуч від точки M_0 (тобто спрямовані в різні сторони) лежать на одній і тій самій прямій, то вона

називається дотичною. А пряма, що проходить через точку M_0 і перпендикулярна до дотичної, називається нормаллю.

Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна, обчислена в точці дотику, дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної. Тоді рівняння

дотичної: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, рівняння нормалі: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.



Застосування похідних до розкриття невизначеностей. Правило Лопітала.

Теорема. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють всі умови теореми Коші на $[a; b]$ можливо, крім точки $x_0 \in (a; b)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, тоді, якщо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (скінченний або нескінченний), то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = A$.

Доведення. Довизначимо $f(x)$ і $g(x)$ в точці x_0 їхніми граничними значеннями й тоді ці функції будуть неперервними в $\delta(x_0)$. За теоремою Коші в $\delta(x_0)$ $\exists$ $(\cdot)$ між x_0 і $x_0 + \Delta x$ така, що $\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)}$,

При $x = x_0 + \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0, x \rightarrow x_0, \zeta \rightarrow x_0$ і $\lim_{\zeta \rightarrow x_0} \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, або

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Аналогічну теорему можна довести й при $x \rightarrow \infty$, і у випадку невизначеності $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

Зауваження. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{не } \exists$, то за правилом Лопіталя ніяких висновків про $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ не впливає.

Правило Лопіталя істотно полегшує розкриття всіх типів невизначеностей, особливо $\left\{ \frac{1}{\infty} \right\}, \left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

Умови монотонності функцій. Екстремуми функцій, необхідні і достатні умови існування екстремуму.

З'ясуємо тепер, як по похідній функції можна судити про зростання (спадання) самої функції в даному проміжку. Зупинимося спочатку на випадку функції, монотонно зростаючої в широкому сенсі, тобто не спадної (або монотонно спадної в широкому сенсі, тобто не зростаючої).

Теорема. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна в проміжку $[a; b]$ і всередині нього має кінцеву похідну $f'(x)$. Для того щоб $f(x)$ була в $[a; b]$ монотонно зростаючою (спадною) в широкому сенсі, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) в середині $[a; b]$.

Доведення необхідності. Якщо $f(x)$ монотонно зростає, хоча б в широкому сенсі, то, взявши x всередині $[a; b]$ і надавши йому приріст $\Delta x > 0$, матимемо:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x), \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

і в границі, при $\Delta x \rightarrow 0$, отримаємо $f'(x) \geq 0$.

Доведення достатності. Нехай тепер, навпаки, дано, що $f'(x) \geq 0$ всередині $[a; b]$. Візьмемо два значення x' і x'' ($x' < x''$) з проміжку $[a; b]$ і до функції $f(x)$ в проміжку $[x', x'']$ застосуємо формулу Лагранжа:

$$f(x'') - f(x') = f'(\varepsilon) \cdot (x'' - x') \quad (x' < \varepsilon < x'').$$

Так як $f'(x) \geq 0$, то $f(x'') \geq f(x')$,

і функція $f(x)$ буде зростаючою, по крайній мірі, в широкому сенсі.

До сих пір, для функції $f(x)$ не була виключена можливість зберігати в деяких проміжках і постійні значення, а для її похідної – перетворюватись в цих проміжках тотожно в нуль. Якщо ми цю можливість виключимо, то прийдемо до випадку зростання (або спадання) в строгому сенсі.

Теорема. При збереженні тих же припущень щодо неперервності функції $f(x)$ і існування її похідної $f'(x)$, для того щоб $f(x)$ була монотонно зростаючою (спадною) в строгому сенсі, необхідні і достатні умови:

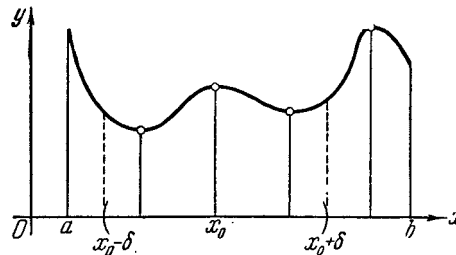
1) $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) всередині $[a; b]$).

2) $f'(x)$ не перетворюється тотожно в нуль ні в якому проміжку, що становить частину $[a; b]$.

Загалом є приклади зростаючих (спадних) функцій, для яких точки, де похідна перетворюється в нуль, розподілені складним чином. Однак, подібні випадки зустрічаються рідко, і для практичних цілей зазвичай користуються такою достатньою ознакою: якщо похідна $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) всюди, виключаючи хіба лише кінцеве число значень x , то функція $f(x)$ буде зростаючою (спадною). Ця ознака дуже зручна в застосуваннях.

Максимуми і мінімуми. Необхідні умови

Якщо функція $f(x)$, визначена і неперервна в проміжку $[a; b]$, не є монотонною, то знайдуться такі частини $[\alpha; \beta]$ проміжку $[a; b]$, в яких найбільші або найменші значення досягаються функцією у внутрішній точці, тобто між α і β . На графіку функції таким проміжком відповідають характерні горби або впадини.



Функція $f(x)$ має в точці x_0 максимум (або мінімум), якщо цю точку можна оточити таким оком $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, що міститься в проміжку, де задана функція, що для всіх її точок x виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (або } f(x) \geq f(x_0) \text{)}.$$

Іншими словами, точка x_0 задає функції $f(x)$ максимум (мінімум), якщо значення $f(x_0)$ виявляється найбільшим (найменшим) із значень, яких набуває функція в деякому (хоча б малому) околі цієї точки. Відмітимо, що саме означення максимуму (мінімуму) припускає, що функція задана по обидві сторони від точки x_0 .

Якщо існує такий окіл, в границях якого (при $x \neq x_0$) виконується строга нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$), то функція має в точці x_0 власний максимум (мінімум), в іншому випадку – невластний.

Якщо функція має максимум в точках x_0 і x_1 , то найменшого свого значення в цьому проміжку функція досягає в деякій точці x_2 поміж x_0 і x_1 і має там мінімум. Аналогічно, між двома мінімумами неодмінно знайдеться максимум. В найпростішому (і на практиці найважливішому) випадку, коли

функція має лише скінченне число максимумів і мінімумів, вони просто чергуються.

При пошуку всіх значень аргументу, коли функція має екстремум, основну роль відіграє похідна.

Припустимо спочатку, що для функції $f(x)$ в проміжку $(a; b)$ існує кінцева похідна. Якщо в точці x_0 функція має екстремум, то, застосовуючи до проміжку $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ теорему Ферма, робимо висновок, що $f'(x) = 0$: в цьому полягає необхідна умова екстремуму. Екстремум слід шукати тільки в тих точках, де похідна дорівнює нулю; такі точки називають стаціонарними.

Не слід думати, однак, що кожна стаціонарна точка задає функції екстремум: вказане тільки що необхідна умова, яка не є достатньою. Наприклад, для функції x^3 похідна $3x^2$ перетворюється в нуль при $x = 0$, але в цій точці функція не має екстремуму: вона весь час зростає.

Якщо розширити клас даних функцій $f(x)$ і допустити, що в окремих точках двосторонньої кінцевої похідної не існує, то не виключена можливість того, що екстремум потрапить на будь-яку з таких точок: адже теорема Ферма стверджує рівність $f'(x) = 0$ лише в припущенні, що існує двостороння кінцева похідна. Наприклад, функція $x^{\frac{2}{3}}$, очевидно, має мінімум при $x = 0$, у той час як в цій точці її похідна зліва дорівнює $-\infty$; а праворуч $+\infty$; точно також в точці $x=0$ має мінімум функція $|x|$, хоча двосторонньої похідною для неї в цій точці немає. Отже, і точки, в яких не існує двосторонньої кінцевої похідною, також можуть задавати функції екстремум. Але, зрозуміло, і в цьому випадку також не може бути гарантована наявність екстремуму у всіх таких точках. Прикладами можуть служити функції $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ (з додатковою умовою, що $y = 0$ при $x = 0$). Перша з них має нескінченну похідну в точці $x = 0$. Друга ж зовсім не має похідної в цій точці, але точка $x = 0$ не завдає екстремуму ні тієї, ні іншої функції (бо в будь-який її околиці обидві функції приймають і додатні і від'ємні значення).

Перша достатня умова екстремуму

Отже, якщо точка x_0 є стаціонарна точка для функції $f(x)$ або якщо в цій точці не існує для неї двосторонньої кінцевої похідною, то точка x_0 представляється, так би мовити лише «підозрілою» по екстремуму і підлягає подальшому дослідженню. Це дослідження полягає в перевірці достатніх умов для існування екстремуму.

Припустимо, що в деякій околиці $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 (по крайній мірі, для $x \neq x_0$) існує кінцева похідна $f'(x)$ і як зліва від x_0 , так і праворуч від x_0 (окремо) зберігає певний знак. Тоді можливі наступні три випадки:

1. $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, тобто похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак плюс на мінус. В цьому випадку, в проміжку $[x_0 - \delta; x_0]$ функція $f(x)$ зростає, а в проміжку $[x_0; x_0 + \delta]$ спадає, так що значення $f(x_0)$ буде найбільшим в проміжку $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, тобто в точці x_0 функція має власний максимум.

2. $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, тобто похідна при переході через точку x_0 змінює знак мінус на плюс. В цьому випадку аналогічно переконуємося, що в точці x_0 функція має власний мінімум.

3. $f'(x) > 0$ як при $x < x_0$, так і при $x > x_0$, або ж $f'(x) < 0$ і зліва, і праворуч від x_0 , тобто, при переході через x_0 , $f'(x)$ не змінює знак. Тоді функція або весь час зростає, або весь час спадає; в будь-який близькості від x_0 з одного боку знайдуться точки x , в яких $f(x) < f(x_0)$, а з іншого - точки x , в яких $f(x) > f(x_0)$, так що в точці x_0 ніякого екстремуму немає.

Отже, перше правило для дослідження «підозрілого» значення x_0 : підставляючи в похідну $f'(x)$ спочатку $x < x_0$, а потім $x > x_0$, встановлюємо знак похідної поблизу від точки x_0 зліва і праворуч від неї; якщо при цьому похідна $f'(x)$ змінює знак плюс на мінус, то в наявності максимум, якщо міняє знак мінус на плюс, то - мінімум; якщо ж знака не змінює, то екстремуму зовсім немає.

Це правило повністю вирішує питання в тому випадку, коли в проміжку $(a; b)$, як це зазвичай буває, всього лише кінцеве число стаціонарних точок або точок, де відсутня кінцева похідна:

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} \dots < x_n < b.$$

Саме, тоді, перш за все, в будь-якому проміжку

$$(a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_k; x_{k+1}), \dots, (x_n; b)$$

існує кінцева похідна $f'(x)$ і, крім того, в кожному такому проміжку $f'(x)$ зберігає постійний знак.

Останнє зауваження буває корисно в деяких випадках на практиці: знак похідної $f'(x)$ в усьому проміжку $(x_k; x_{k+1})$ визначиться, якщо обчислити значення (або навіть тільки встановити знак) її в одній якійсь точці цього проміжку.

Друга достатня умова екстремуму

При пошуку екстремумів дослідження знака похідної поблизу досліджуваної точки можна замінити дослідженням знака другої похідної в самій цій точці.

Отже, нехай функція $f(x)$ не тільки має похідну $f'(x)$ в околі точки x_0 , але і другу похідну в самій точці x_0 : $f''(x_0)$. Точка x_0 — стаціонарна, тобто $f'(x_0) = 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то, по лемі Ферма, — функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ зростає, тобто поблизу точки x_0 зліва $f'(x) < f'(x_0) = 0$, а праворуч $f'(x) > f'(x_0) = 0$. Таким чином, похідна $f'(x)$ змінює знак мінус на плюс і, отже, $f(x)$ має в точці $x = x_0$ мінімум. Якщо $f''(x_0) < 0$, то $f'(x_0)$ в точці $x = x_0$ спадає, змінюючи знак плюс на мінус, так що $f(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум.

Таким чином, можна сформулювати друге правило для дослідження «підозрілого» значення x_0 : підставляємо x_0 в другу похідну $f''(x)$, якщо $f''(x_0) > 0$, то функція має мінімум, якщо ж $f''(x_0) < 0$, то - максимум.

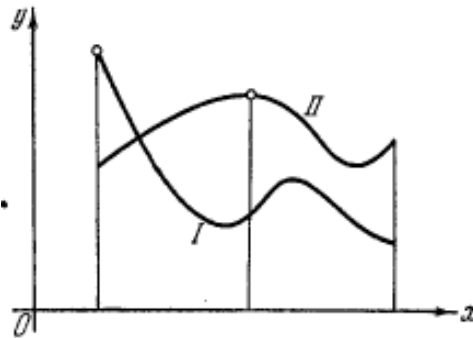
Це правило взагалі має більш вузьке коло застосування; воно, наприклад, явно не застосовується до тих точок, де не існує кінцевої першої похідної (бо там і мови бути не може про другу похідну). У тих випадках,

коли друга похідна перетворюється в нуль, правило також нічого не дає. Вирішення цього питання залежить тоді від поведінки вищих похідних.

Пошук найбільших і найменших значень

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна в кінцевому замкнутому проміжку $[a; b]$. До сих пір розглядалися лише її максимуми і мінімуми, тепер же поставимо питання про розшук найбільшого і найменшого з усіх значень, які вона приймає в цьому проміжку; по другій теоремі Вейерштрасса, такі найбільші і найменші значення існують. Зупинимось для визначеності на найбільшому значенні.

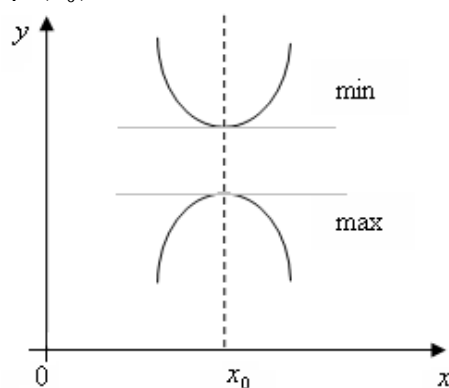
Якщо воно досягається в певній точці між a і b , то це одночасно буде одним з максимумів (очевидно, найбільшим); але найбільше значення може досягатися і на одному з кінців проміжку, a .



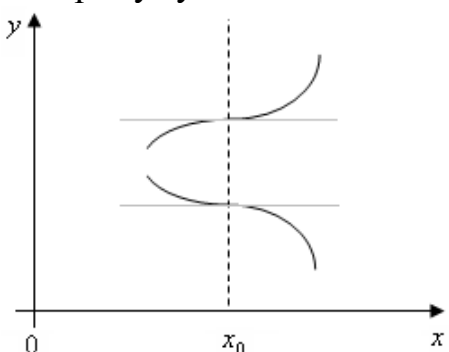
Таким чином, потрібно порівняти між собою всі максимуми функції $f(x)$ і її граничні значення $f(a)$ і $f(b)$; найбільше з цих чисел і буде найбільшим з усіх значень функції $f(x)$ в $[a; b]$. Аналогічно розшукується і найменше значення функції.

Геометрична ілюстрація необхідної ознаки існування екстремуму:

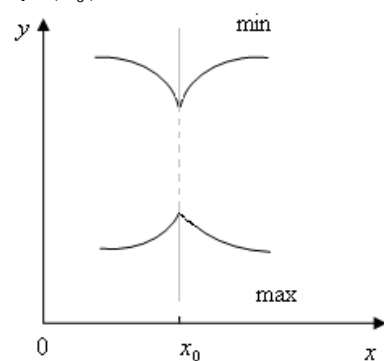
$$f'(x_0) = 0$$



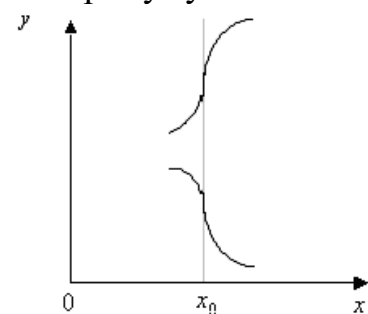
Екстремуму немає.

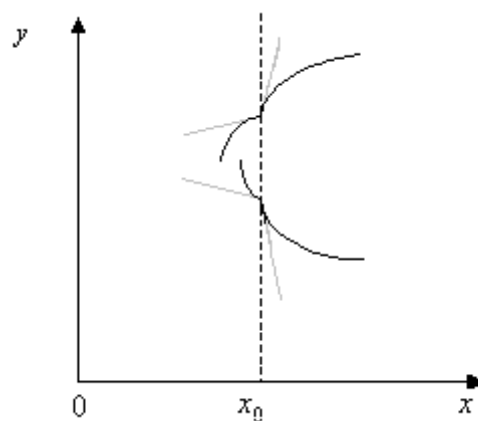
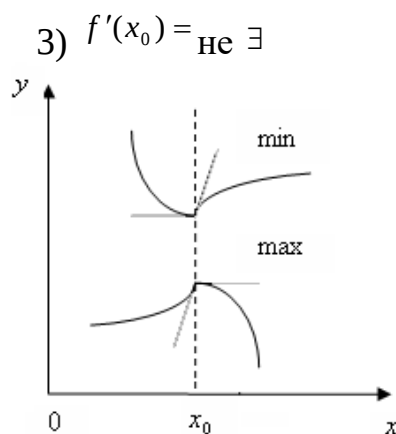


$$f'(x_0) = \pm\infty$$



Екстремуму немає.

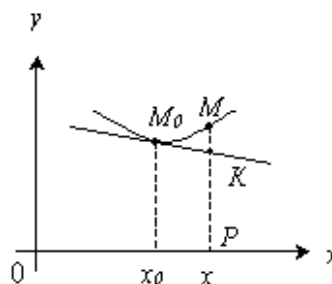
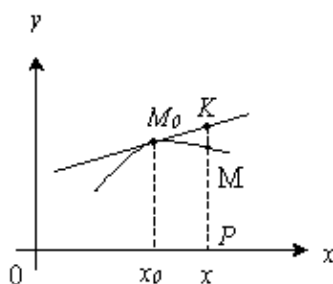




Екстремуму немає.

Опуклість вверх, опуклість вниз, точки перегину.

Графік функції диференційованої в $\delta(x_0)$ називається *опуклим вверх* у точці M_0 якщо для $\forall x \in \delta(x_0), x \neq x_0$ $y_{\text{dom}} - f(x) > 0$, і *опуклим вниз*, якщо $y_{\text{dom}} - f(x) < 0$. Тут $y_{\text{dom}} = KP$, $f(x) = MP$



Якщо в точці M_0 графік функції $y = f(x)$ змінює опуклість вверх на опуклість вниз (або навпаки), то точка M_0 називається точкою *перегину*.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ двічі неперервно диференційована в $\delta(x_0)$ і $f''(x) > 0$ у цьому околі, то крива в $\delta(x_0)$ опукла вниз, а при $f''(x) < 0$ - опукла вверх.

Висновки

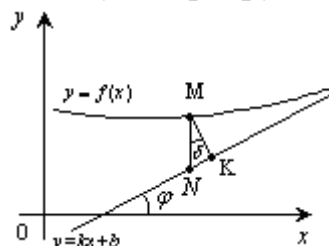
1. Необхідна умова існування точки перегину: якщо в точці M_0 перегин, то $f''(x_0)$ або дорівнює нулю, або $\pm\infty$, або не $\exists$.
2. Достатня умова існування точки перегину, якщо $f''(x_0)$ дорівнює нулю, або $\pm\infty$, або не $\exists$ й $f''(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак, то в точці M_0 перегин.

Асимптоти графіка функцій.

Якщо відстань δ від точки кривої M до прямої прямує до нуля при русі точки M по кривій у нескінченність, то пряма називається *асимптотою*.

а) $\Pi \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \delta = |MK| = |MN| \cos \varphi = |f(x) - (kx + b)| \cos \varphi$.

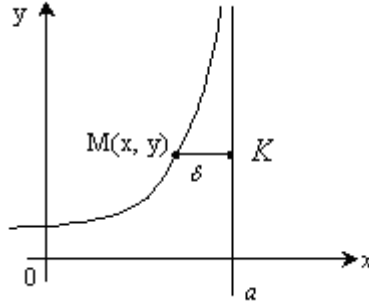
Оскільки $\cos \varphi = \text{const} \neq 0$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta = 0$ (за означенням асимптоти),



тоді $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ або $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$. Розглянемо $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} = 0$, або

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0 \Rightarrow \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$$

б) II $\varphi = \frac{\pi}{2}$,



$$\delta = |MK|,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |MK| = \lim_{y \rightarrow \infty} \delta = \lim_{y \rightarrow \infty} |x - a| = 0 \text{ або } \lim_{x \rightarrow a-0} y = \infty.$$

Аналогічно визначається рівняння вертикальної асимптоти $x = a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$.

Зауваження. Якщо при $x=a$ функція зазнає неусувного розриву 2-го роду, то графік цієї функції має вертикальну асимптоту $x = a$.

Загальна схема дослідження функцій і побудова графіків.

1. ОДЗ.
2. Дослідити поведінку функції на кінцях ОДЗ і в околі точок розриву.
3. Визначити асимптоти.
4. Визначити точки перетину графіка з осями координат.
5. Дослідити функцію на парність і періодичність.
6. Визначити y' й точки, «підозрілі» на екстремум. За першою достатньою умовою визначити екстремум функції.
7. Визначити y'' й точки, «підозрілі» на перегин. Дослідити y'' на зміну знака похідної при переході через точки, «підозрілі» на перегин.

Інтерактивні завдання

1. Знаходимо похідну функції
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/znakhodymo-pokhidnu>
2. Кутовий коефіцієнт дотичної
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/kutovyi-koefitsient-dotychnoi-11>
3. Рівняння дотичної
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/rivniannia-dotychnoi-11>
4. Точки екстремуму
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/tochky-ekstremumu>
5. Монотонність функції
<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/monotonnist-funktsii>
6. Максимум та мінімум функції

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/maksimum-ta-minimum-funktsii>

7. Дослідження функції

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/doslidzhennia-funktsii11>

8. Побудова графіка за допомогою похідної

<https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/pobudova-hrafika-za-dopomohoiu-pokhidnoi>

Практичні завдання для аудиторної роботи

1. Знайти похідну функції

- | | |
|---|--|
| 1) $y = 7x^5 - 15 \log_3 x - 4 \cdot 2^x + 3 \operatorname{arctg} x - 11$ | 2) $y = \ln \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})$ |
| 3) $y = (7 \operatorname{arcsinx} - 15) \cdot (2 \ln x + 3x^2)$ | 4) $y = \sin^4 5x \cdot \log_7(\operatorname{tg} 3x + 18)$ |
| 5) $y = \frac{2e^x - \cos x}{5 \operatorname{tg} x + 8}$ | 6) $y = \frac{5 \operatorname{arccctg} 8x^3}{\ln^2 \cos 9x}$ |

Розв'язання

$$1) y = 7x^5 - 15 \log_3 x - 4 \cdot 2^x + 3 \operatorname{arctg} x - 11$$

Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, тому кожний з доданків будемо диференціювати окремо, пам'ятаємо, що сталий множник можна виносити за знак похідної. Кожний з доданків – проста функція, тому скориставшись таблицею похідних, маємо:

$$\begin{aligned} y' &= (7x^5)' - (15 \log_3 x)' - (4 \cdot 2^x)' + (3 \operatorname{arctg} x)' - (11)' \\ &= 7 \cdot 5x^4 - 15 \cdot \frac{1}{x \ln 3} - 4 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + 3 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} - 0 \\ &= 35x^4 - \frac{15}{x \ln 3} - 4 \cdot 2^x \ln 2 + \frac{3}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$2) y = (7 \operatorname{arcsinx} - 15) \cdot (2 \ln x + 3x^2)$$

Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою знаходження похідної добутку. Для цього розіб'ємо функцію на

$$U = (7 \operatorname{arcsinx} - 15), V = (2 \ln x + 3x^2).$$

Знайдемо похідні цих функцій.

$$U' = \frac{7}{\sqrt{1 - x^2}}, V' = \frac{2}{x} + 6x$$

За формулою $(uv)' = u'v + uv'$ маємо, що

$$y' = \frac{7}{\sqrt{1 - x^2}} (2 \ln x + 3x^2) + \left(\frac{2}{x} + 6x \right) (7 \operatorname{arcsinx} - 15).$$

$$3) y = \frac{2e^x - \cos x}{5 \operatorname{tg} x + 8}$$

Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою похідна частки. Для цього розіб'ємо функцію на такі функції

$$U = 2e^x - \cos x, V = 5 \operatorname{tg} x + 8$$

Та знайдемо їх похідні

$$U' = 2e^x + \sin x, V' = \frac{5}{\cos^2 x}$$

За формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ маємо

$$y' = \frac{(2e^x + \sin x)(5 \operatorname{tg} x + 8) - \frac{5(2e^x - \cos x)}{\cos^2 x}}{(5 \operatorname{tg} x + 8)^2} \\ = \frac{\cos^2 x (2e^x + \sin x)(5 \operatorname{tg} x + 8) - 5(2e^x - \cos x)}{(5 \operatorname{tg} x + 8)^2 \cos^2 x}.$$

$$4) y = \ln \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})$$

Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Тут є і степенева, і показникова, і логарифмічна, і обернена тригонометрична функції. З якої функції почати диференціювання? Ланцюжок складної функції, який ми можемо скласти, дуже великий. Тому радимо скористатися таким прийомом: будемо промовляти кожного разу послідовність, у якій утворювалася надана функція; диференціювати ми завжди будемо в оберненому порядку. Тут можна провести аналогію процесу одягання – роздягання: ми завжди одягаємося в одному порядку, а роздягаємося в оберненому.

Отже, знаходження функції ми закінчили логарифмом, тому й диференціювати почнемо з логарифму.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot [\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})]' \\ = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2 + 1} \cdot (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})' = \\ = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{3x}}} \cdot (1 - e^{3x})' = \\ = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{3x}}} \cdot -e^{3x} \cdot (3x)' = \\ = - \frac{e^{3x} \cdot (3x)'}{2\sqrt{1 - e^{3x}} \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}) ((1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2 + 1)}$$

Далі при знаходженні похідних складних функцій ми будемо діяти аналогічно.

$$5) y = \sin^4 5x \cdot \log_7(\operatorname{tg} 3x + 18)$$

Функція представлена у вигляді добутку

$$U = \sin^4 5x, V = \log_7(\operatorname{tg} 3x + 18).$$

$$U' = 20 \sin^3 5x \cos 5x,$$

$$V' = \frac{3}{\ln 7 (\operatorname{tg} 3x + 18)} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} = \frac{3}{\ln 7 \cos^2 3x (\operatorname{tg} 3x + 18)}$$

$$y' = (UV)' = U'V + V'U =$$

$$20 \sin^3 5x \cos 5x \log_7(\operatorname{tg} 3x + 18) + \frac{3 \sin^4 5x}{\ln 7 \cos^2 3x (\operatorname{tg} 3x + 18)}$$

$$6) y = \frac{5^{\operatorname{arctg} 8x^3}}{\ln^2 \cos 9x}. \text{ Функція представлена у вигляді частки.}$$

тому що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$ (за теоремою про добуток н.м.ф. на обмежену функцію).

Отже, границя функції може існувати, хоча границя відношення похідних і не існує.

3. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x+1}$ на монотонність та екстремуми.

Знайдемо ОДЗ функції. $x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Знайдемо похідну функції

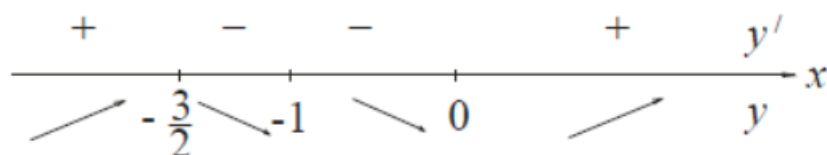
$$y' = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}.$$

Знайдемо критичні точки $y' = 0$

$$\frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2(2x+3) = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{3}{2}$$

З'ясуємо знак першої похідної в отриманих часткових інтервалах, встановимо характер поведінки функції. Результати досліджень зведемо у таблицю:

x	$(-\infty; -\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y	+	0	-	Не існує	-	0	+
y'	зростає	$y_{\max} = y(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{4}$	спадає	-	Спадає	$y_{\min} = y(0) = 0$	зростає



Отже, функція зростає на інтервалі $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (0; +\infty)$, спадає на $(-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; 0)$. У точці $x = -\frac{3}{2}$ функція досягає максимуму $y_{\max} = y(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{4}$, у точці $x = 0$ – мінімуму $y_{\min} = y(0) = 0$.

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x \ln x$ в інтервалі $[e^{-3}; 1]$

Розв'язання:

Проведемо дослідження функції на екстремум:

ОДЗ $\ln x \neq 0 \rightarrow x \in (0, \infty)$.

$$y' = (x \ln x)' = \ln x + 1$$

$$y' = 0 \rightarrow \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = e^{-1}.$$

Критична точка належить досліджуваному інтервалу. Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях інтервалу:

$$y(e^{-3}) = e^{-3} \ln e^{-3} = -3e^{-3}$$

$$y(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1}$$

$$y(1) = 1 \ln 1 = 0$$

Отже, найбільше значення функція набуває в точці $x = 1, M = y(1) = 0$
 найменшого значення функція набуває в точці $x = e^{-1}, m = y(e^{-1}) = -e^{-1}$.

5. Дослідити функцію на опуклість і знайти точки перегину функції
 $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$. ОДЗ $x \in R$.

Знайдемо першу і другу похідні функції: $y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x$, $y'' = 12x^2 - 72x + 96$.

Знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0, \quad 12x^2 - 72x + 96 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$$

Внесемо результати в таблицю

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y	+	0	-	0	+
y'	Опукла вниз	$y = 62$	Опукла вверх	$y = 206$	Опукла вниз

Отже, функція на інтервалі опукла вниз $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$, а на інтервалі $(2; 4)$ – опукла вверх. Точки $x = 2, x = 4$ – точки перегину.

6. Знайти асимптоти функції $y = \frac{e^{x-5}}{2x+3}$.

$$\text{ОДЗ } 2x + 3 \neq 0, x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Знайдемо вертикальну асимптоту. Візьмемо точку розриву функції $x = -\frac{3}{2}$ і перевіримо виконання умови

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x) = \infty. \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \infty$$

Отже, пряма $x = -\frac{3}{2}$ є вертикальною асимптотою. Знайдемо похилу асимптоту, для цього обчислимо границі

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{(2x+3)x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = [\text{за правилом Лопіталя}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{4x+3} = \frac{e^{x-5}}{4x} = \infty$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-5}}{(2x+3)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2x+3)xe^{-x+5}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Зауважимо, що обчислюючи границю при $x \rightarrow \infty$ ми двічі скористалися правилом Лопіталя, щоб уникнути невизначеності. Разом із тим кінцевої границі не отримали, тому при $x \rightarrow \infty$ похилої асимптоти не існує. При $x \rightarrow -\infty$ невизначеності не виникло; отримали кінцеву границю $k = 0$. А цей випадок відповідає горизонтальній асимптоті. Обчислимо b при $x \rightarrow -\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2x+3)e^{-x+5}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, при $x \rightarrow -\infty$ існує горизонтальна асимптота $y = 0$.

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік
 $y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

$$\text{ОДЗ: } (-\infty, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\frac{2}{3}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{1 + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{0}{3} = 0$$

(помножили чисельник і знаменник дробу на неповний квадрат суми).
Вертикальних асимптот немає.

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}}{x} = 0; \quad b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

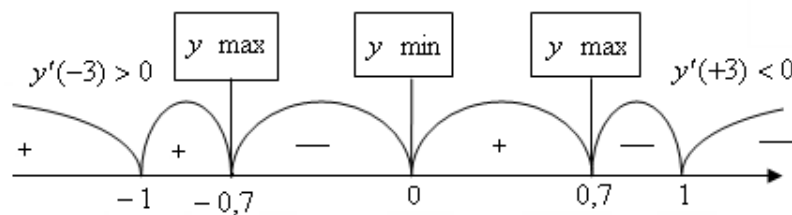
Горизонтальна асимптота $y = 0$.

При $x = 0$, $y = 1$; при $y = 0$, $x^{\frac{2}{3}} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^2 = x^2 - 1$; $0 = -1$. Розв'язку немає.

Функція парна, тому що ОДЗ симетрична й $y(-x) = y(x)$.

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Точки «підозрілі» на екстремум $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$, $x_{4,5} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7$



$$y_{\min} = 1, \quad y_{\max} = y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[3]{4} \approx 1,6.$$

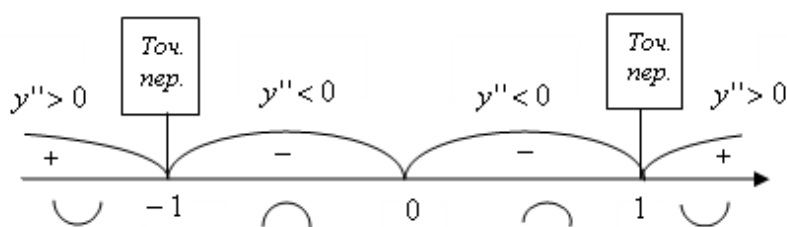
$$y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} \left((x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} + x \left(-\frac{2}{3} \right) (x^2 - 1)^{-\frac{5}{3}} 2x \right) =$$

II.

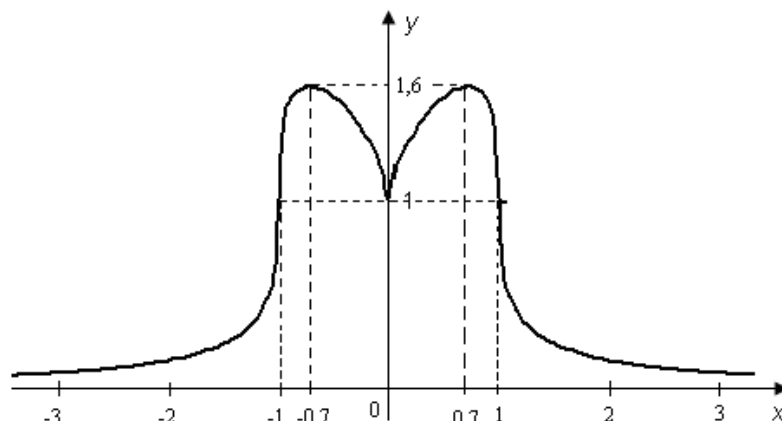
$$= -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} - \frac{4x^2}{3(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} \right) = -\frac{2}{9} \left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{3(x^2 - 1) - 4x^2}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} \right) = -\frac{2}{9} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}} - (x^2 + 3)x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{2}{9} \frac{(x^2 + 3)x^{\frac{4}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}.$$

Чисельник в області дійсних чисел коренів не має. Точки «підозрілі» на перегин: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$.



$$y_{\text{перез.}} = y(\pm 1) = 1$$



Практичні завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідну функції:

1.1 $y = \operatorname{tg} \sqrt[5]{x^4 - 3x^3 + 2x - 1}$

1.2 $y = x^3 \arcsin \frac{1}{x^2}$

1.3 $y = \frac{2x+3}{4x^2+7} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arccos \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

1.4 $y = \sqrt{\log_5 \frac{x}{x+4}}$

1.5 $y = \sin \frac{1}{\log_4 x}$

1.6 $y = \frac{7x^2+8x}{\sqrt{2x+3}} + \cos \sqrt{5x-3}$

1.7 $y = \ln \arccos \sqrt{x^2 - 5x + 3}$

Виконайте перевірку за допомогою сервісу <https://mathdf.com/der/uk/>

2. Знайти похідні складених функцій

5.1 $z = \sin(x^2 - y)$, де $x = e^{2t}$, $y = 2^t$

5.2 $z = \sin(4y - 3xy)$, де $x = 4^{5+2t}$, $y = 1 - t^2$

5.3 $z = \cos(4x + 5yx)$, де $x = 5^{1-2t}$, $y = t^2 + 3$

5.4 $z = (x^3 + y^4)^2$, де $x = 2^{t^2-4t}$, $y = 3^{t^3-5t}$

5.5 $z = \frac{x}{\sqrt[3]{y-2}}$, де $x = (1 - 2^t)^2$, $y = 3^{2t}$

5.6 $z = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, де $x = \ln \frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = 2^{4-t}$

5.7 $z = (x^2 + y^3)^2$, де $x = 3^{t^3-3t}$, $y = 4^{t^2-5t}$

3. Знайти екстремуми функцій $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x^2}$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$

4. Знайти точки перегину функції $f(x) = x^4$.

5. Знайти асимптоти функцій $f(x) = \frac{2x^2-1}{x}$, $f(x) = xe^x$, $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$

6. Чи існують асимптоти у графіка функції $f(x) = xe^{\frac{2}{x}} + 1$. Які саме?

7. Знайти інтервали зростання і спадання функції $f(x) = xe^{-x}$

8. Визначити інтервали, на яких функція $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 3$ опукла догори, і інтервали, на яких функція опукла донизу.

9. Проведіть загальне дослідження функції $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ і побудуйте її графік.

Питання для самоконтролю

1. Що таке похідна функції в точці?
2. Які функції є похідними від основних елементарних функцій (наведіть 5 прикладів з таблиці похідних)?
3. Чим відрізняється похідна функції від приросту функції?
4. Як знайти похідну складеної функції? Наведіть приклад.
5. Який геометричний зміст має похідна функції в точці?
6. Як записується рівняння дотичної до графіка функції в точці x_0 ?
7. Як знайти рівняння нормалі до графіка функції в точці? У чому її відмінність від дотичної?
8. Наведіть приклад знаходження рівняння дотичної до графіка функції $y = \ln x$ точці $x = 1$.
9. Які типи невизначеностей можна розкрити за допомогою правила Лопітала?
10. Сформулюйте правило Лопітала та поясніть його умови застосування.
11. Наведіть приклад обчислення границі виду $\frac{0}{0}$ за правилом Лопітала.
12. У чому полягає відмінність між звичайним обчисленням границі та методом Лопітала?
13. Як пов'язана похідна функції з її зростанням або спаданням?
14. Що таке критична точка функції? Як її знайти?
15. Сформулюйте необхідну та достатню умови існування екстремуму функції в точці.
16. Як визначити, чи є екстремум мінімумом чи максимумом? Наведіть приклад.
17. Що показує знак другої похідної функції? Як він пов'язаний з опуклістю?
18. Як знайти точки перегину графіка функції?
19. Чим відрізняється точка перегину від точки максимуму/мінімуму?
20. Які типи асимптот бувають у графіків функцій, і як їх знаходити? (горизонтальні, вертикальні, похилі — за допомогою границь)

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми

1. Похідні вищих порядків. Математичний і фізичний зміст
2. Похідна складеної, неявної та параметрично заданої функції
3. Диференціал функції. Його геометричний і прикладний зміст
4. Правило Лопітала для складних типів невизначеностей
5. Повна схема дослідження функції та побудова її графіка
6. Застосування похідної в фізиці та механіці
7. Опуклість функцій і економічні інтерпретації
8. Застосування похідної в оптимізаційних задачах
9. Графічне моделювання похідної за допомогою комп'ютерних засобів (GeoGebra, Desmos, Python)

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12-13

Вирішення практичних завдань «Алгоритми інтегрування: вправи з невизначеними і визначеними інтегралами»

Питання до обговорення

1. Первісна та невизначений інтеграл.
2. Основні властивості невизначеного інтегралу. Таблиця основних інтегралів.
3. Інтегрування способом заміни, частинами, безпосереднє інтегрування. Інтегрування дробово-раціональних функцій.
4. Означення інтегралу Рімана. Основна формула інтегрального числення (формула Ньютона – Лейбніца).
5. Практичне застосування визначеного інтегралу.

Основні теретичні поняття

Первісна та невизначений інтеграл.

Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі (a,b) . Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$, якщо для будь-якого $x \in (a,b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, нехай $f(x) = \cos x$, тоді її первісна $F(x) = \sin x$. Дійсно, за означенням первісної: $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$.

Якщо $F(x)$ первісна для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$, де C може приймати будь-яке стає значення, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$, де $\int$ - позначення інтегралу, $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз.

Таким чином, рівність $\int f(x)dx = F(x) + C$ є лише інший запис співвідношення $F'(x) = f(x)$, або $((F(x) + C)' = f(x))$.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл - це сім'я кривих (інтегральних кривих), кожна з яких отримується шляхом зсуву однієї з кривих паралельно самій собі угору або вниз вздовж осі Oy .

Операція знаходження невизначеного інтеграла (тобто відшукування $F(x) + C$) від даної функції $f(x)$ називається інтегруванням функції $f(x)$.

Теорема (про існування первісної). Якщо функція $f(x)$ непервна на деякому інтервалі, то для цієї функції існує первісна (а тому – і невизначений інтеграл).

Інтегрування – операція обернена операції диференціювання (тобто операції знаходження похідної від функції), тому правильність результату інтегрування можна завжди перевірити диференціюванням первісної.

Властивості невизначених інтегралів

1. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала $\int dF(x) = F(x) + C$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу $d \int f(x)dx = f(x)dx$

3. $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$, $c \neq 0$, тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

$$4. \int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$$

$$5. \text{Якщо } \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Таблиця невизначених інтегралів

$y' = f'(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + c$
$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \quad (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad (x \neq 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi(2n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z})$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad (x \neq \frac{\pi(2n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z})$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi, n \in \mathbb{Z})$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \quad (x \neq \pi, n \in \mathbb{Z})$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x < 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \quad (x < 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x < 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c \quad (x < a)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c \quad (x \neq 0)$
	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$ ($x \neq \pm a$)

	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + c, \text{ (для знака } (-) \text{)}$ $ x > a)$
--	--

Для розв'язання багатьох прикладів будемо користуватись таблицею інтегралів, властивостями інтегралів і формулами з елементарної математики. Це і є основні підходи при безпосередньому знаходженні інтеграла.

Приклад. Знайти інтеграли

$$1. \int \left(\frac{1}{4} e^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x} \right) dx = \int \frac{1}{4} e^x dx - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{8}{x} dx = \frac{e^x}{4} - 3\sqrt[3]{x} + 8\ln|x| + C.$$

$$2. \int \frac{5 + \sin^3 x}{\sin^2 x} dx = 5 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \sin x dx = -5 \operatorname{ctg} x - \cos x + C$$

$$3. \int \sin\left(\frac{3}{8}x + 2\right) dx = -\frac{8}{3} \cos\left(\frac{3}{8}x + 2\right) + C$$

$$4. \int \frac{dx}{4 + 9x^2} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$$

Інтегрування способом заміни

Один з найсильніших прийомів для інтегрування функцій метод заміни змінної, або метод підстановки. Розглянемо два можливі випадки.

1. Внесення функції під знак диференціала. Якщо підінтегральний вираз записаний у вигляді $g(t(x)) \cdot t'(x) dx$, де функція $g(t)$ відповідної множини X разом зі своєю похідною $t'(x)$, то справедлива наступна формула переходу від x до нової змінної інтегрування t

$$\int f(x) dx = \int g(t(x)) \cdot t'(x) dx = \int g(t) dt$$

При цьому похідна $t'(x)$ вноситься під знак диференціала відповідно до відомої властивості диференціала $t'(x) dx = d(t(x))$. У найпростіших випадках, щоб розпізнати цю ситуацію, буває достатньо знання табличних інтегралів, наприклад,

$$2x dx = d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \sin x dx = -d(\cos x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x), \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}), \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x).$$

Заміна змінної інтегрування здійснюється у тих випадках, коли отримана в результаті «нова» підінтегральна функція $g(t)$ є зручнішою для інтегрування порівняно з вихідною підінтегральною функцією $f(x)$. Основна складність цього методу полягає в тому, щоб «побачити» у вихідному підінтегральному виразі $f(x) dx$ більш простий для інтегрування вираз $g(t(x)) \cdot t'(x) dx = g(t) dt$. Практично реалізація методу полягає у внесенні функції $t'(x)$ під знак диференціала dx з утворенням нового диференціала dt . Обчисливши інтеграл $\int g(t) dt = G(t) + C$, в кінці необхідно повернутися до початкової змінної інтегрування x шляхом зворотної підстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

2. Використання підстановок. Якщо підінтегральна функція $f(x)$ неперервна на множині X , то, поклавши $x = x(t)$, де функція $x(t)$ неперервна на відповідній множині T разом зі своєю похідною $x'(t)$, отримаємо ще одну формулу переходу від x до нової змінної інтегрування t :

$$\int f(x)dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t)dt$$

Інтегрування частинами

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ - диференційовні на одній і тій множині функції та існує первісна для функції $u(x)v'(x)$, то існує первісна і для функції $v(x)u'(x)$, причому є справедливою формула інтегрування частинами:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

За функцію $u(x)$ обирається функція, яка спрощується диференціюванням, за dv - інша частина підінтегрального виразу, що містить dx , з якої можна визначити v шляхом інтегрування.

Вказаний метод використовується в тих випадках, коли інтеграл у правій частині формули обчислюється простіше вихідного інтеграла (лівої частини). Як правило, формула застосовується в ситуаціях, коли підінтегральна функція є добутком «різномірних» функцій, наприклад, алгебраїчної та трансцендентної функцій.

В цілому, інтегрування частинами має більш обмежену сферу застосування, ніж заміна змінної, але є цілі класи інтегралів, наприклад,

$$\int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \sin ax dx, \quad \int x^n \cos ax dx, \quad \int x^n \ln^m x dx, \quad \int \sin(\ln x) dx, \quad \int \cos(\ln x) dx$$

також

$$\int e^{ax} \cos bxdx, \quad \int e^{ax} \sin bxdx, \quad \int P(x) \sin ax dx, \quad \int P(x) e^{ax} dx, \quad \int P(x) \cos ax dx, \\ \int P(x) \ln x dx, \quad \int P(x) \arcsin x dx, \quad \int P(x) \arccos x dx, \quad \int P(x) \arctg x dx, \quad \int P(x) \operatorname{artctg} x dx$$

де $P(x)$ – цілий алгебраїчний багаточлен відносно x .

За допомогою інтегрування частинами іноді вдається вивести рекурентну формулу зниження для окремих типів інтегралів, що містять параметр n , що дозволяє звести обчислення даного інтеграла до обчислення інтеграла такого самого типу, але з меншим значенням n .

Наприклад, для інтегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ отримана формула пониження степеня

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1},$$

знаючи інтеграл $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, за скінчену кількість кроків прийдемо до інтеграла I_n .

Інтегрування дробово-раціональних функцій.

Інтеграл виду $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx$

Інтеграл від дробово-лінійної функції легко зводиться до суми двох табличних інтегралів виділенням підінтегрального дробу раціональної частини:

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \left(b - \frac{ad}{c}\right) \int \frac{dx}{cx+d} = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \int \frac{dx}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| + C.$$

Інтеграл виду $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a \neq 0)$

Виділенням повного квадрата у квадратному тричлені інтеграли даного виду зводяться до одного з двох типів табличних інтегралів:

$$\int \frac{dx}{t^2 + A^2} = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{t}{A} + C \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{t^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{t-A}{t+A} \right| + C$$

Інтеграл виду $\int \frac{dx}{(x+a)(x-b)} \quad (a \neq b)$

Для обчислення інтегралів цього виду можна скористатися такою очевидною тотожністю: $a-b = (x+a) - (x+b)$, тоді маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+a)(x-b)} &= \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a) - (x+b)}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x+b} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \\ &= \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

Інтеграл виду $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

Ці інтеграли обчислюються виділенням у чисельнику дробу виразу, що дорівнює похідній знаменника дробу

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \\ &+ \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \cdot I, \end{aligned}$$

де обчислення інтегралу $I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ми розглянули вище.

Інтеграл виду $\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n} \quad (n \in \mathbb{N}, b^2 - 4c < 0).$

Виділенням повного квадрату $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$ та заміною змінної $z = x + \frac{b}{2}$ інтеграл зводиться до виду $I_n = \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^n}$. Для обчислення останнього інтеграла використовується підстановка $z = a \cdot \operatorname{tg} u$ або виводиться рекурентне співвідношення, що дозволяє знизити степінь n знаменнику інтегрування частинами. Представляючи I_n в вигляді I_{n-1} та $\int \frac{z^2 dz}{(a^2 + z^2)^n}$, і обчислюючи останній з інтегралів інтегруваннями частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + z^2) - z^2}{(a^2 + z^2)^n} dz = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int z \frac{z dx}{(a^2 + z^2)^n} = \\ &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int z d \left(\frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(a^2 + z^2)^{n-1}} \right) = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{z}{2a^2(n-1)(a^2 + z^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \\ &\quad \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{n-1}} = \frac{z}{2a^2(n-1)(a^2 + z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \end{aligned}$$

Оскільки інтеграл $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C$, то за останнім співвідношенням при $n = 2$ отримаємо

$$I_2 = \frac{z}{2a^2(a^2 + z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{z}{2a^2(a^2 + z^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C.$$

Інтеграл виду $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} dx$

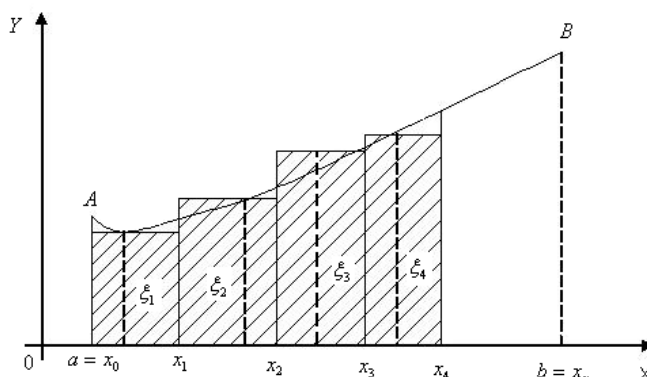
Для обчислення інтегралів виду $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} dx$ (квадратний вираз у знаменнику дроби не має дійсних коренів) уявімо лінійну комбінацію в чисельнику у вигляді комбінації похідної квадратного тричлена і деякої константи, тобто

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + b) + B - \frac{Ab}{2}}{(x^2 + bx + c)^n} dx = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2 + bx + c)}{(x^2 + bx + c)^n} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right) \\ &\quad \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right) \cdot J_n, \end{aligned}$$

де $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}$. Знаходження інтегралу J_n розглядалося вище.

Визначений інтеграл за Ріманом

Щ $y=f(x) \in C[a;b]$ і $f(x) \geq 0$. Довільним чином розбиваємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$. Довжина



кожного відрізка визначається за формулою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i=1,2,\dots,n$)... На кожному відрізку розбиття $[x_{i-1}; x_i]$ довільним чином вибирається точка ξ_i і визначається значення функції в цій точці $f(\xi_i)$. Складаємо суму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, що виражає площу заштрихованої області, ця сума називається n -ю інтегральною, вона залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ і вибору точок ξ_i .

Площа криволінійної трапеції $S_{abBA} \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, число $\lambda = \max_{[a;b]} \{\Delta x_i\}$ називається *рангом розбиття* й характеризує дрібність розбиття відрізка $[a; b]$. Чим дрібніше розбиття відрізка $[a; b]$, тим точніше рівність $S_{abBA} \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$. І, якщо $\lambda \rightarrow 0$, то $n \rightarrow \infty$ (але не навпаки).

Геометричний зміст визначеного інтегралу такий: площа фігури S , що обмежена ламаною AB , приймає значення, яке міститься між значеннями площі вписаної та описаної ламаних.

Щ $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$. Якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого розбиття відрізка $[a; b]$ і довільного вибору точок $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ при $\lambda < \delta$ $|I_n - I| < \varepsilon$, то говорять, що $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n$. I називають визначеним інтегралом за Ріманом і позначають $I = \int_a^b f(x) dx$.

Теорема. Якщо $y = f(x) \in C[a;b]$, то вона там і інтегрована.

Наслідок. Визначений інтеграл для неперервної на відрізку функції існує, не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ і вибору точок ξ_i .

Основні властивості визначеного інтеграла

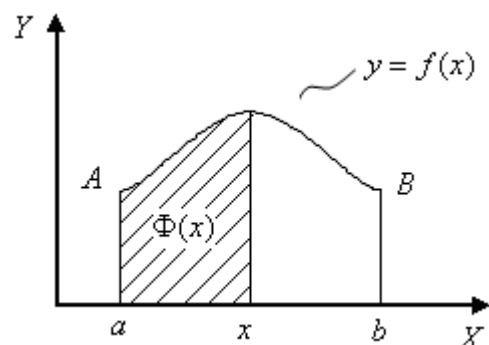
1. $\int_a^b dx = b - a$.	4. $\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$.
2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.	5. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
3. $\int_a^a f(x) dx = 0$.	6. Якщо $f(x) \in C[a;b]$ і $f(x) \geq 0$, то геометричний зміст $\int_a^b f(x) dx$ - площа криволінійної трапеції $ABba$.

Теорема про середнє. Якщо $f(x) \in C[a;b]$, то $\exists$ хоча б одна точка $\xi \in [a;b]$ така, що $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

Інтеграл Ньютона-Лейбніца

Розглянемо $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx$, $x \in [a; b]$ – інтеграл зі змінною верхньою межею.

Теорема. Похідна від інтеграла по змінній верхній межі дорівнює



підінтегральній функції.

Доведення

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi),\end{aligned}$$

де $x \leq \xi \leq x + \Delta x$ за теоремою про середнє, тоді при $\Delta x \rightarrow 0$ $\xi \rightarrow x$, оскільки $f(x) \in C[a; b]$, то $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow x}} f(\xi) = f(x)$, що й було потрібно довести.

Висновок. Таким чином, $\Phi(x)$ - первісна для функції $y = f(x)$, $\Phi(x) = F(x) + C$ або $\int_a^x f(x)dx = F(x) + C$.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a). \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

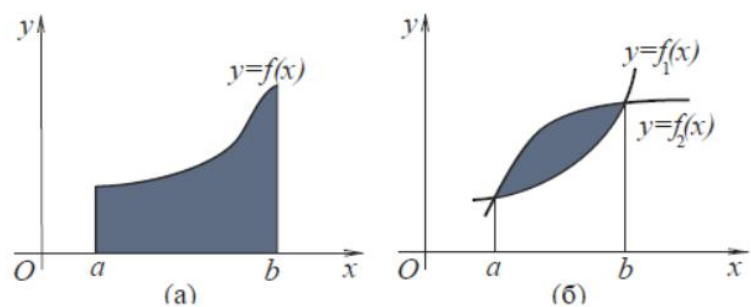
Остаточно одержимо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

За геометричним тлумаченням визначного інтегралу, площа криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, лініями $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox , обчислюється за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Якщо плоска фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, і $y = f_2(x)$, то для обчислення площі, необхідно знайти точки перетину кривих $x = a$ і $x = b$. Ці точки є границями інтегрування.



Шукана площа плоскої фігури може бути знайдена як різниця між площами криволінійних трапецій, обмежених лініями $y = f_1(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і $y = f_2(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, тобто

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Інтерактивні завдання

1. Похідна чи інтеграл? <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiatyi-klas/pokhidna-chy-intehral>

2. Первісні функції <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiati-klas/obchysliuiemo-intehral>

3. Обчисли інтеграл <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiati-klas/obchysliuiemo-intehral>

4. Визначений інтеграл <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiati-klas/vyznachenyi-intehral11>

5. Властивості визначених інтегралів <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiati-klas/vlastyvosti-vyznachenykh-intehraliv>

6. Площа криволінійної трапеції <https://learning.ua/matematyka/odynadtsiati-klas/ploshcha-kryvoliniinoi-trapetsii>

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти інтеграли безпосередньо

$$\int \left(\frac{1}{4} e^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x} \right) dx, \int \frac{5 + \sin^3 x}{\sin^2 x} dx, \int \sin \left(\frac{3}{8} x + 2 \right) dx, \int \frac{dx}{4 + 9x^2}$$

$$1. \int \left(\frac{1}{4} e^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x} \right) dx = \int \frac{1}{4} e^x dx - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int \frac{8}{x} dx = \frac{e^x}{4} - 3\sqrt[3]{x} + 8\ln|x| + C.$$

$$2. \int \frac{5 + \sin^3 x}{\sin^2 x} dx = 5 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \sin x dx = -5 \operatorname{ctg} x - \cos x + C$$

$$3. \int \sin \left(\frac{3}{8} x + 2 \right) dx = -\frac{8}{3} \cos \left(\frac{3}{8} x + 2 \right) + C$$

$$4. \int \frac{dx}{4 + 9x^2} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$$

Виконайте перевірку за допомогою сервісу <https://mathdf.com/int/uk/>

Приклад 2. Знайти інтеграли методом зміни змінної

$$1) \int \sin^3 x \cdot \cos x dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}; \quad 3) \int e^{5x} dx.$$

1) Оскільки $d(\sin x) = \cos x dx$, то, покладемо $t = \sin x$, перетворимо підінтегральний вираз на вигляд

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d(\sin x) = t^3 dt.$$

Інтеграл від останнього виразу $\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$. Залишилося лише повернутися до змінної x , підставивши $\sin x$ замість t :

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

При певній навичці нову змінну в простих випадках можна у явному вигляді і не вводити, зробивши це подумки. У розглянутому прикладі можна було уникнути введення нової змінної t . Тоді розв'язання завдання виглядало б коротшим:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C;$$

$$3) \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли методом зміни змінної $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1-й спосіб (підстановка $t = \frac{1}{x}$). ОДЗ: $|x| > 1$. Використаємо підстановку

$t = \frac{1}{x}$, тоді $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$, та, врахувавши тотожність $|t| = t \cdot \operatorname{sgn} t$, у результаті отримаємо:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} = -\arcsin|t| + C = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C$$

2-й спосіб (підстановка $t = \sqrt{1-x^2}$). Зробимо раціональну заміну змінної, поклавши $t = \sqrt{1-x^2}$, тоді $x^2 = t^2 + 1$, $xdx = tdt$ та

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{tdt}{t \cdot (t^2+1)} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) + C.$$

3-й спосіб (тригонометрична підстановка $x = \frac{1}{\sin t}$). Виконаємо

тригонометричну підстановку $x = \frac{1}{\sin t}$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, тоді

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{|\sin t|} = \operatorname{sgn}(\sin t) \cdot \operatorname{ctg} t, \quad dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \quad \text{та} \quad \text{для}$$

інтеграла маємо:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sgn}(\sin t) \int \frac{-\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt}{\frac{1}{\sin t} \cdot \operatorname{ctg} t} = -\operatorname{sgn}(\sin t) \int dt = -\operatorname{sgn}(\sin t) \cdot t + C = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C$$

Приклад 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$1. \int x^3 \ln x dx, \quad 2. \int x^2 \sin x dx, \quad 3. \int e^{ax} \sin bx dx$$

1. Оскільки знаходження похідної від $\ln x$ приводить до спрощення,

покладемо $\left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x^3 dx \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right|$ та інтегруючи частинами знайдемо

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

2. $\int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) d(x^2) = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx =$
 $= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = -x^2 \cos x + 2(x \cos x + \cos x) + C$. Загалом тут правило інтегрування частинами довелося застосовувати двічі.

3. Інтеграли виду $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$ обчислюються дворазовим інтегруванням частинами. В результаті виходить рівняння щодо невідомого інтегралу. У даному випадку покладемо

$$u = \sin bx, \quad dv = e^{ax} dx. \quad \text{Тоді } du = b \cos bxdx, \quad v = \frac{1}{a} e^{ax} \text{ і отримаємо:}$$

$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx$. Ще раз інтегруємо частинами утворений праворуч інтеграл, поклавши в ньому $u = \cos bx$, $dv = e^{ax} dx$. Тоді $du = -b \sin bxdx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ та отримаємо результат:

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx \right) =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \left(\sin bx - \frac{b}{a} \cos bx \right) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bxdx. \text{ Позначимо тепер вихідний}$$

інтеграл через I . Тоді маємо рівняння відносно I :

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \left(\sin bx - \frac{b}{a} \cos bx \right) - \frac{b^2}{a^2} I,$$

$$\text{звідки виражаємо } I = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx).$$

$$\text{Остаточно, } \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції

$$1. \int \frac{2x+1}{3x-2} dx. \quad 2. \int \frac{dx}{x^2+4x+13} \quad 3. \int \frac{dx}{x^2-6x-16} \quad 4. \int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad 5. \int \frac{dx}{x^2-x-2}.$$

$$6. \int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx \quad 7. \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} \quad 8. \int \frac{3x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$$

Розв'язок

$$1. \int \frac{2x+1}{3x-2} = \int \frac{\frac{2}{3}(3x-2) + \frac{7}{3}}{3x-2} dx = \frac{2}{3} x + \frac{7}{9} \int \frac{d(3x-2)}{3x-2} = \frac{2}{3} x + \frac{7}{9} \ln|3x-2| + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2-6x-16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{(x-3)-5}{(x-3)+5} \right| + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (x \neq \pm a).$$

$$5. \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{(x+2) - (x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right),$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} \right) = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln(x+2)) + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \quad (x \neq -2; 1)$$

6.. Так як $(x^2 + 2x + 5)' = 2(x+1)$, маємо:

$$\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{x+2}{(x+1)^2 + 4} dx = \int \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2 + 4} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2 + 4} dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 5)}{x^2 + 2x + 5} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + x^2) - x^2}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} - \frac{1}{a^2} \int x \frac{xdx}{(a^2 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \left(x \cdot \frac{1}{x^2 + a^2} - \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \right) = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + C.$$

Можна було скористатися тригонометричною підстановкою $x = atgt$, де

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді $dx = \frac{atgt}{\cos^2 t}$, $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$, і тому

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{a^3} \int \frac{(1 + \cos 2t)}{2} dt = \frac{1}{2a^3} (t + \sin t \cos t) + C.$$

Залишилось зробити зворотну підстановку: $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$,

$$\sin t = \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}; \quad \cos t = \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$7. \int \frac{3x+1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} dx -$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{3}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{3}{2(x^2 + x + 1)} -$$

Приклад 6. Обчислити визначений інтеграл

$$\begin{aligned} 1. & \int_0^1 (4\sqrt[3]{x} + 6x^2\sqrt{x} - 7\sqrt[5]{x^3}) dx, & 2. & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx, \\ 3. & \int_1^3 \frac{5x^4 - 3x^2 - 7x + 13}{2x^2} dx & 4. & \int_2^3 \frac{dx}{x^2 + 2x} & 5. & \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{1 + x^2} dx \\ 6. & \int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx & 7. & \int_{-2}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x} + 2} & 8. & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x} & 9. & \int_1^e \ln^3 x dx \end{aligned}$$

Розв'язок

$$\begin{aligned} 1. & \int_0^1 (4\sqrt[3]{x} + 6x^2\sqrt{x} - 7\sqrt[5]{x^3}) dx = \left(4 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} + 1} + 6 \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2} + 1} - 7 \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5} + 1} \right) \Bigg|_0^1 \\ & = \left(3x^{\frac{4}{3}} + 6 \cdot \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} - 7 \cdot \frac{5}{8} \cdot x^{8/5} \right) \Bigg|_0^1 \\ & = \left(3x^{\frac{4}{3}} + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{35}{8} x^{\frac{8}{5}} \right) \Bigg|_0^1 = 3 + \frac{12}{7} - \frac{35}{8} = \frac{19}{56}. \\ 2. & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3} (\cos \frac{3\pi}{4} - \cos 0) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{6} \\ 3. & \int_1^3 \frac{5x^4 - 3x^2 - 7x + 13}{2x^2} dx = \frac{5}{2} \int_1^3 x^2 dx - \frac{3}{2} \int_1^3 dx - \frac{7}{2} \int_1^3 \frac{dx}{x} + \frac{13}{2} \int_1^3 \frac{dx}{x^2} \\ & = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x - \frac{7}{2} \ln|x| - \frac{\frac{13}{2} x^{-1}}{-1} \right) \Bigg|_1^3 = \\ & = \left(\frac{5}{6} \cdot x^3 - \frac{3}{2} x - \frac{7}{2} \ln|x| + \frac{13}{2x} \right) \Bigg|_1^3 = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \ln 3 + \frac{7}{2} \ln 1 - \frac{13}{6} + \frac{13}{2} \\ & = 23 - \frac{7}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 + 2x} &= \int_2^3 \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) - 1} = \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{x+1-1}{x+1+1} \right) \Big|_2^3 \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{x}{x+2} \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t^3, 1 \rightarrow \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \\ \frac{dx}{1+x^2} = 3t^2 dt, \quad -1 \rightarrow \sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}} \end{array} \right] = \int_{\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} t \cdot 3t^2 dt \\
&= \frac{3}{4} t^4 \Big|_{\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{4} \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \right)^4 - \left(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}} \right)^4 \right\} = \frac{3}{4} \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \right)^4 - \left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \right)^4 \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$6. \int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x - 1, \\ du = e^x dx, \\ 0 \rightarrow 0, \\ 1 \rightarrow e - 1 \end{array} \right] = \int_0^{e-1} u^5 du = \frac{u^6}{6} \Big|_0^{e-1} = \frac{1}{6} (e - 1)^6$$

$$\begin{aligned}
7. \int_{-2}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}} &= \left[\begin{array}{l} x+2 = t^3, \\ dx = 3t^2 dt, \\ -2 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \sqrt[3]{2} \end{array} \right] = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3 \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt \\
&= 3 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) \right) \Big|_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{2}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x} &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x}, v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right] = -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x dx = \\
&= -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \ln |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \ln \left| \sin \frac{\pi}{3} \right| - \ln \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \int_1^e \ln^3 x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln^3 x, \quad du = 3 \ln^2 x \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right] = x \ln^3 x \Big|_1^e - \int_1^e 3x \ln^2 x \frac{dx}{x} = \\
&\left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right] = x \ln^3 x \Big|_1^e - 3 \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx \right) \\
&= x \ln^3 x \Big|_1^e - 3x \ln^2 x \Big|_1^e + 3 \int_1^e 2 \ln x dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right] = x \ln^3 x|_1^e - 3x \ln^2 x|_1^e + 6 \left(x \ln x|_1^e - \int_1^e dx \right) \\
&= x \ln^3 x|_1^e - 3x \ln^2 x|_1^e + 6x \ln x|_1^e - 6x|_1^e \\
&= e \ln^3 e - \ln^3 1 - 3e \ln^2 e + 3 \ln^2 1 + 6e \ln e - 6 \ln 1 - 6e + 6 = \\
&= e - 0 - 3e + 0 + 6e - 6e + 6 = -2e + 6
\end{aligned}$$

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2, y = x + 2$.

Побудуємо фігуру. Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2 \end{cases} \\
&x^2 = x + 2 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2. \\
&S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \\
&= 4 \frac{1}{2} \text{ (од. кв)}
\end{aligned}$$

Практичні завдання для самостійної роботи

1. Обчислити невизначений інтеграл за таблицею та методом заміни змінної

$$\begin{array}{lll}
\int \frac{2x+3}{x^3} dx & \int \frac{dx}{2+3x^2} & \int \frac{x^2 dx}{1-x^3} \\
\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx & \int \frac{dx}{\sqrt{5+3x^2}} & \int \frac{dx}{2x-1} \\
\int \cos(2x+1) dx & \int \frac{dx}{4-x^2} & \int x \cos x^2 dx \\
\int \sin(3x-4) dx & \int x e^{x^2} dx &
\end{array}$$

2. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами

$$\begin{array}{lll}
\int \arcsin x dx & \int (2x-1) \cos x dx & \int \frac{dx}{x \ln x} \\
\int \frac{\ln x}{x^2} dx & \int \ln(x^2+1) dx & \int e^{-2x} \cos 3x dx
\end{array}$$

3. Знайти невизначені інтеграли від алгебраїчних дробів, виділивши цілу частину.

$$\begin{array}{lll}
\int \frac{x^2 dx}{1-x} & \int \frac{(x^2+2x+3)}{x^2-4} dx & \int \frac{x^2 dx}{3+x^2} \\
\int \frac{x^4 dx}{1+x^2} & \int \frac{(x+1)^2 dx}{1+x^2} &
\end{array}$$

4. Знайти невизначені інтеграли

$$\begin{array}{lll}
\int \frac{dx}{1+x+x^2} & \int \frac{dx}{x^2+2x+5} & \int \frac{dx}{x^2+8x-9} \\
\int \frac{dx}{x^2-10x+16} & \int \frac{dx}{x^2+8x+15} &
\end{array}$$

5. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 (4x - 3)^3 dx \quad \int_0^5 (x^2 - 3x) dx \quad \int_{-1}^3 (2x + 3)^2 dx \quad \int_1^3 (40x - 2)^2 dx$$

$$\int_0^1 (e^x + 3^{2x}) dx \quad \int_1^9 \frac{2}{\sqrt{x}} dx \quad \int_{-2}^0 (3x^2 + 1)^3 dx$$

6. Знайти інтеграл раціональної функції

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-2)} \quad \int_1^2 \frac{(x+1)dx}{x^3 + 5x^2 + 6x} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x^2 - 2)(x^2 + 3)} \quad \int_0^1 \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x+3)(x+2)}$$

7. Знайти інтеграл за методом інтегрування частинами

$$\int_0^1 (4 - 3x)e^{-2x} dx \quad \int_0^1 x^3 \cdot e^{-x^2} dx \quad \int_1^e x \cdot \ln x dx \quad \int_1^e (x^2 + 1) \cdot \ln x dx$$

$$\int_0^1 x \cdot 2^x dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx \quad \int_0^3 (x+1) \cdot e^x dx$$

8. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

$$y = \sqrt{x}, y = 3, x = 1, x = 4 \quad y = 2x - x^2, x + y = 0$$

$$y = x^2 + 2x, y = x + 2 \quad y = x^2 - 2x, y = x + 4$$

$$y = 2^x, y = 8, x = 1, x = 2 \quad y = x^2 + 1, y = \frac{25-5x}{3}$$

$$y = x, y = 2x, x = 3$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке первісна функції на проміжку? Наведіть приклад.
2. Як пов'язані між собою поняття первісної та невизначеного інтегралу?
3. Що означає запис: $\int f(x) dx = F(x) + C$? Що означає C ?
4. Яку геометричну інтерпретацію має первісна функції?
5. Чим відрізняються первісна та визначений інтеграл?
6. Назвіть основні властивості невизначеного інтегралу.
7. Як виглядає формула для інтегрування суми функцій?
8. Які основні інтеграли ви знаєте? Наведіть принаймні п'ять.
9. Чи можна винести сталий множник за знак інтегралу? Обґрунтуйте відповідь.
10. Як знайти $\int (3x^2 + 4x + 5) dx$?
11. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування?

12. Як застосовується метод заміни змінної для інтегрування? Наведіть приклад.
13. У чому суть методу інтегрування частинами? Сформулюйте відповідну формулу.
14. Які функції зручно інтегрувати методом частинами? Наведіть приклад.
15. Що таке дробово-раціональна функція? Який метод використовується для її інтегрування?
16. Сформулюйте означення визначеного інтегралу за Ріманом?
17. Що таке інтегральна сума? Як вона використовується для побудови визначеного інтегралу?
18. Сформулюйте формулу Ньютона – Лейбніца.
19. Яке значення має формула Ньютона – Лейбніца для обчислення визначених інтегралів?
20. Яку геометричну інтерпретацію має визначений інтеграл?
21. Як обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції, віссю абсцис та вертикальними прямими?
22. Як обчислити площу між двома графіками функцій?

Напрями подальшого самостійного опрацювання теми

1. Подання раціонального дробу у вигляді суми найпростіших дробів з використанням методу невизначених коефіцієнтів
2. Інтегрування лінійних та дробово-лінійних ірраціональностей.
3. Інтегрування квадратичних ірраціональностей
4. Перша підстановка Ейлера
5. Друга підстановка Ейлера
6. Третя підстановка Ейлера
7. Інтегрування біноміальних диференціалів
8. Інтегрування тригонометричних функцій
9. Обчислення довжини дуги плоскої кривої
10. Обчислення об'єму тіла

5.2. Теми практичних занять

№ теми	Назва теми Форма заняття	Кількість годин
1	<i>Семінар «Алгебра матриць»</i>	2
2	<i>Вирішення практичних завдань «Визначники».</i>	2
3	<i>Майстер клас «Розв'язування систем лінійних рівнянь з n – невідомими»</i>	2
4	<i>Вирішення практичних завдань «Алгебраїчна форма запису комплексного числа, їх геометрична інтерпретація.</i>	2
5	<i>Вирішення практичних завдань «Вектори. Дії над векторами»</i>	2
6	<i>Семінар «Види рівнянь прямої на площині. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих».</i>	2
7	<i>Вирішення практичних завдань «Еліпс, гіпербола, парабола»</i>	2

8	Вирішення практичних завдань «Границя функції в точці»	4
9	Практичні заняття «Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій»	4
10	Вирішення практичних завдань «Алгоритми інтегрування: вправи з невизначеними і визначеними інтегралами»	4
Разом		26

5.3. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин денна	Форми контролю
1	Елементи теорії матриць	6	Індивідуальна, групова співбесіда усне опитування, перевірка практичних завдань, екзамен
2	Елементи теорії визначників	6	
3	Системи лінійних рівнянь і методи їх розв'язування.	6	
4	Комплексні числа	6	
5	Векторна алгебра	6	
6	Рівняння прямої на площині	5	
7	Площина	5	
8	Криві другого порядку	5	
9	Функції. Границя функції	5	
10	Диференціальне числення функції однієї змінної	5	
11	Інтегральне числення функції однієї змінної	5	
Разом		60	

5.4. Індивідуальні навчально-дослідні завдання (доповідь)

№ з/п	Тематика (за вибором)	Кількість годин
		Денна
1	Лінійна залежність, лінійна незалежність векторів	
2	Матричні рівняння	
3	Перетворення на площині.	
4	Обернена матриця і способи її обчислення	
5	Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка	
6	Диференціальні рівняння першого порядку	
Разом		10

ІНСТРУКЦІЙ ДО ІНДИВІДУАЛЬНОГО НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНОГО ЗАВДАННЯ (ДОПОВІДІ)

Форма подачі: мультимедійна презентація

✦ Кількість слайдів: до 10 основних + титульний слайд + список літератури

□ 1. Мета завдання:

Поглиблене опрацювання та презентація однієї з тем курсу вищої математики з аналітичним, науковим і практичним підходом. Тему доповіді кожен студент обирає у відповідній команді MS Teams під опублікованою робочою програмою дисципліни і вказує номер обраної теми. Темі не повторюються, робота виконується одноосібно.

□ 2. Структура презентації:

■ 1. Титульний слайд:

- Назва теми
- ПІБ студента
- Група, курс
- Назва дисципліни
- Дата

■ 2. Основна частина (до 10 слайдів):

Рекомендована структура:

- Актуальність теми (Чому обрана тема важлива? Яке її значення в математиці та/або прикладному контексті?)
- Мета та завдання дослідження
- Короткий теоретичний огляд (Основні визначення, твердження, формули, властивості)
- Виведення/доведення ключових тверджень (за потреби)
- Приклади розв'язання задач (Власноруч розв'язані приклади з поясненням кроків)
- Графічні ілюстрації, схеми, графіки (за можливості)
- Практичне застосування теми (Де використовується? Яке має значення в інших науках чи техніці?)
- Аналіз, висновки, узагальнення
- Проблеми та напрями подальшого дослідження (за бажанням)
- Підсумковий слайд з основними висновками

■ 3. Список використаної літератури (останній слайд):

- Не менше 3 джерел
- Допускаються: підручники, навчальні посібники, наукові статті, електронні ресурси з відкритим доступом (вказати повний URL).
- Література оформлюється відповідно до ДСТУ 2015. Для її оформлення можна користуватися онлайн-сервісом <https://www.grafiati.com/uk/>

Приклади оформлення:

Олефір О. І., Урум Г. Д. Основи лінійної алгебри : навч. посіб. Одеса : «Південноукр. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Уш.»», 2025. 121 с.

Болдарєва О. М., Урум Г. Д., Олефір О. І., [Деякі аспекти вивчення комплексних чисел в умовах сьогодення](https://doi.org/10.52058/2786-4952-2024-2(36)). Перспективи та інновації науки. 2024. № 2 (36). URL: [https://doi.org/10.52058/2786-4952-2024-2\(36\)](https://doi.org/10.52058/2786-4952-2024-2(36))

□ 3. Вимоги до змісту та оформлення:

- Текст має бути зрозумілим, лаконічним, без надлишку формул;
- Оформлення – акуратне і стримане (рекомендується єдиний стиль оформлення, шрифт не менше 20 пт);
- Формули вводити через редактор формул або LaTeX (якщо підтримується);
- Використовувати схеми, графіки, малюнки для ілюстрації;
- Уникати повних абзаців тексту на слайдах – лише тези і ключові пункти.

□ 4. Критерії оцінювання (орієнтовно):

Критерій	Максимум балів
Логічність та структура доповіді	2
Теоретична глибина викладення	3
Якість прикладів і розв’язань	3
Презентаційна форма та візуальність	1
Список джерел та академічна доброчесність	1
Разом:	10 балів

□ 5. Технічні вимоги до презентації:

- Формат: .pptx
- Назва файлу: Прізвище_ІО_тема.pptx
- Здавати у відповідне завдання у MS Teams до XX травня 202X року

□ 6. Перелік тем:

Повний перелік тем у команді в MS Teams – обираємо вільні теми серед коментарів до публікації робочої програми навчальної дисципліни.

Публічний виступ буде проходити під час практичних занять

Рекомендовані правила підготовки здобувача освіти до публічного виступу

1. Підготовка до виступу

- Сформулюйте головну ідею виступу: чітко визначте основну думку доповіді та побудуйте навколо неї тези.
- Структуруйте матеріал: виділіть ключові моменти, які потрібно донести, і повторюйте головні інсайти у різних формулюваннях.

2. Поведінка під час виступу

- Спостерігайте за реакцією аудиторії: адаптуйтеся до їхніх емоцій та зацікавлення.
- Говоріть короткими реченнями: кожна фраза — до 4–5 секунд, з паузами.
- Використовуйте приклади та метафори: це зробить виступ цікавішим та зрозумілішим.

- Залучайте слухачів: ставте запитання, пропонуйте відповісти або поділитися думками.

3. Формуйте довіру

- Спирайтеся на перевірені факти та власну обізнаність.
- Структуруйте думки логічно, використовуйте сигнальні слова: «дійсно», «важливо», «впевнений», «хочу підкреслити» тощо.
- Будьте впевненим, але відкритим до дискусії.

4. Виділяйте головне

- Підкреслюйте ключові думки упродовж виступу.
- Повертайтеся до основної ідеї кілька разів.
- Підсумовуйте інформацію разом із аудиторією.

5. Як утримати увагу аудиторії

- Змінюйте динаміку: інтонація, гучність, темп мовлення.
- Використовуйте інтерактив: звертайтеся до аудиторії, ставте питання.
- Змінюйте дистанцію: рухайтесь сценою або камерою.
- Нагадуйте про користь інформації: пояснюйте, чому це важливо знати.
- Додавайте емоційність: жести, міміка, приклади з життя, гумор.
- Підтримуйте зоровий контакт і посміхайтесь.

6. Методи навчання

У процесі викладання навчальної дисципліни для активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів передбачено застосування активних і інтерактивних освітніх методів, серед яких: проблемна лекція, лекція-діалог, лекція-презентація, робота в малих групах, робота з довідниковими, інформаційно-методичними джерелами, презентація результатів виконаних практичних завдань.

7. Форми поточного і підсумкового контролю

Розподіл балів, які отримують студенти за результатами поточного і підсумкового контролю

Поточний контроль (практичні, самостійна робота, письмові роботи)				ІНДЗ	Екзамен	Сума
Модулі	Бали	Контрольна (письмова) робота	Разом	0-10	0-20	0-100
Елементи лінійної алгебри						
Тема 1.	4	0-10	0-24			
Тема 2.	4					
Тема 3.	3					
Тема 4.	3					
Елементи аналітичної геометрії						
Тема 5.	4	0-10	0-23			
Тема 6.	3					
Тема 7.	3					
Тема 8.	3					

Елементи теорії функцій однієї змінної						
Тема 9.	9	0-10	0-23			
Тема 10.	2					
Тема 11.	2					

Шкала оцінювання за всіма видами контролю:

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
90–100	A	відмінно
82–89	B	добре
74–81	C	
64–73	D	задовільно
60–63	E	
35–59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання
0–34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

8. Методичне забезпечення

- Болдарєва О. М. Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Основи вищої математики» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньо-професійної програми «Середня освіта (Інформатика. Англійська мова)» спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика) / О. М. Болдарєва. - Одеса : Ун-т Ушинського, 2023. - 36 с.
- Робоча програма навчальної дисципліни «Основи вищої математики»
- Матриці та системи лінійних рівнянь / О. Савастру та ін. ; ред. О. В. Савастру. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2019. 120 с.
- Силабус

9. Забезпечення навчання осіб з особливими освітніми потребами

Метою інклюзивного навчання в Університеті Ушинського є забезпечення рівного доступу до якісної освіти особам з особливими освітніми потребами шляхом організації їхнього навчання на основі застосування особистісно-орієнтованих методів навчання з урахуванням їхніх індивідуальних особливостей

10. Рекомендовані джерела інформації

Основна література

1. Вища математика. Практичні заняття по темі: «Основи лінійної алгебри» для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»/ Ірина Калиній, Ольга Якимович – Бережани: ВІКТ ВП НУБіП України «Бережанський агротехнічний інститут», 2021. – 49 с.
2. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська – К. : Видавничополіграфічний центр “Київський університет”, 2016. – 255 с.

3. Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. 2-ге вид. Київ : Алерта, 2017. 574 с.
4. Зайцев Є.П. Вища математика: інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди : навч. посіб. 2-ге вид. Київ : Алерта, 2018. 608 с.
5. Коваленко Л. Вища математика для менеджерів : підручник. 2-ге вид. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекет., 2019. 342 с.
6. Клепко В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : Центр навч. літ., 2019. 594 с.
7. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2018. Т. 1, Ч 1., 268 с.
8. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2018. Т. 1., Ч 2., 237 с.
9. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2019. Т. 2., Ч 1., 244 с.
10. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2019. Т. 2., Ч 2., 220 с.

Допоміжна

1. Вища математика. / О. Барабаш та ін. Київ : ДУТ, 2015. Ч. 1 : Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. 187 с.
2. Вища математика. / О. Барабаш та ін. Київ : ДУТ, 2019. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних. 232 с.
3. Дисковський О., Косиченко О., Рибальченко Л. Вища математика : навч. посіб. Дніпро : ДДУВС, 2019. 108 с.
4. Панченко Н., Резуненко М. Вища математика : навч. посіб. Харків : УкрДУЗТ, 2022. Ч. 1. 231 с.
5. Практикум з лінійної алгебри / Навчальний посібник. Видання друге. Яковлєва О.М. – ПНПУ імені К. Д. Ушинського. – Одеса, 2016. – 36 с.
6. Практикум з лінійної алгебри / Навчальний посібник. Видання друге. Яковлєва О.М. – ПНПУ імені К. Д. Ушинського. – Одеса, 2013. – 60 с.

Інформаційні ресурси

1. Електронний архів наукових публікацій Українського державного університету імені Михайла Драгоманова
URL : <https://lib.npu.edu.ua/>
2. Електронний архів Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди
URL : <https://dspace.hnpu.edu.ua/>
3. Одеська національна наукова бібліотека : офіційний сайт.
URL : <http://odnb.odessa.ua/>.
4. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт.
URL : <https://library.pdpu.edu.ua/>