Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»

Навчально-науковий інститут природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту
Кафедра вищої математики і статистики

Ольга Яковлєва

НАУКОВІ ЗАСАДИ СУЧАСНИХ КУРСІВ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ (ПРОФІЛЬНА ШКОЛА)

Навчальний посібник

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
за предметною спеціальністю Середня освіта (Математика)

Одеса – 2025

УДК: 512:517:373.5.016 (075.034)

Друк за ухвалою вченої ради Університету Ушинського
(протокол № 14 від 24 квітня 2025 року)

Укладач: *Яковлєва Ольга Миколаївна*, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»

Рецензенти:
Варбанець Сергій Павлович – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.
Васильєва Наталія Семенівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва і архітектури

Яковлєва О. Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа) : навчальний посібник для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти за предметною спеціальністю Середня освіта (Математика). Одеса : Університет Ушинського, 2025. 119 с.

Навчальний посібник укладено за кредитно-модульною системою організації навчального процесу. Теоретичний і практичний матеріал згруповано за чотирма змістовими модулями. Кожна тема змістового модуля містить перелік теоретичних питань, список рекомендованої літератури, основний теоретичний матеріал, систему вправ для різних за формою аудиторних практичних занять та самостійної роботи здобувачів освіти. В навчальному посібнику наявна робоча програма навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)», теми індивідуальних навчально-дослідних завдань з рекомендаціями до їхнього виконання, критерії оцінювання всіх видів робіт, а також додатки, призначені оптимізувати практичний перебіг навчального процесу й сприяти усвідомленому засвоєнню здобувачами вищої освіти навчальної інформації.
Навчальний посібник відповідає стандарту вищої освіти і принципам професійної та особистої зорієнтованості навчання на засадах компетентнісного, інтегрованого та технологічного підходів.

Для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти за предметною спеціальністю Середня освіта (Математика), вчителів математики, викладачів математики та всіх зацікавлених питаннями наукового обґрунтування шкільного курсу математики.

УДК: 512:517:373.5.016 (075.034)

ЗМІСТ

Передмова

Представлений навчальний посібник «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» розроблено з метою надання науково-методичного забезпечення для викладання відповідних розділів математики в шкільному курсі математики в умовах модернізації освітнього процесу і фундаментальної підготовки фахівців для забезпечення високого рівня математичної освіти в школі, для формування у здобувачів освіти наукового світогляду на елементарну математику з точки зору вищої математики. В посібнику представлено наукові основи низки важливих теоретичних питань алгебри та початків аналізу шкільного курсу математики (профільна школа), які не можуть бути обґрунтовані у ньому з усією повнотою та строгістю.

Сучасний шкільний курс алгебри і початків аналізу, структура та зміст якого визначаються чинними освітніми стандартами та програмами, орієнтований не лише на оволодіння учнями системою знань, умінь і навичок, а й на формування в них ключових компетентностей, що включають здатність до логічного та алгоритмічного мислення, аналізу та інтерпретації даних, моделювання реальних процесів, а також застосування математичних методів для розв'язування проблем у різних сферах діяльності. Важливість наукового підходу до розуміння понять алгебри і початків аналізу в шкільному курсі математики неможливо переоцінити. Глибоке, науково обґрунтоване розуміння базових концепцій є запорукою успішного засвоєння матеріалу учнями, формування в них цілісної математичної картини світу та розвитку їхнього математичного мислення. Поверхневе, формальне ознайомлення з поняттями призводить до фрагментарних знань, труднощів у застосуванні математичного апарату на практиці та, як наслідок, до втрати інтересу до предмета.

Даний посібник покликаний поглибити розуміння наукових основ тих розділів шкільного курсу математики, які традиційно належать до алгебри та початків аналізу. Зокрема, у посібнику розглядаються теоретико-множинні основи математики, поняття відношення між елементами множин, види відношень, зокрема, поняття функції як відношення між елементами двох множин, роль функції як наскрізної змістової лінії шкільного курсу математики, елементи математичного аналізу, які надають потужні інструменти для дослідження функцій, розв’язування прикладних задач, розуміння фізичних процесів, основи комбінаторики і теорії ймовірностей з точки зору теорії множин тощо.

Матеріал посібника може слугувати теоретичною основою для проведення уроків алгебри на високому науково-методичному рівні, а також для організації позакласної роботи з обдарованими учнями. Розуміння наукових основ алгебри і початків аналізу в шкільному курсі математики дає змогу викладачу вибирати найефективніші методи, прийоми та технології навчання, будувати логічно обґрунтований навчальний процес. Матеріал навчального посібника може бути ресурсом для професійного зростання здобувачів освіти, сприятиме підвищенню якості викладання шкільного курсу математики та формуванню в учнів цілісного наукового світогляду, розвитку їхнього інтелектуального потенціалу.

Структура навчального посбіника «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» наступна. Теоретичний матеріал посібника забезпечує здобувачів освіти знаннями про математичні основих ключових понять і фактів курсу алгебри і початків аналізу в профільній школі, надає можливість використовувати набуті знання для викладання теоретичних питань шкільної математики, практична частина посібника відображає зміст навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» та надає змогу здобувачам освіти набути навичок використовувати отримані знання при розв’язанні задач і вправ алгебри і початків аналізу в шкільному курсі математики, задач підвищеного рівня складності, задач олімпіадного характеру тощо.

Структурними компонентами навчального посібника є також наявність робочої програми навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)», теми індивідуальних навчально-дослідних завдань із рекомендаціями до їхнього виконання та критерії оцінювання всіх видів робіт, які виконують здобувачі освіти, орієнтовані завдання для контрольної роботи, список рекомендованих джерел інформації.

Опис і пояснювальна записка навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, ОПП, спеціальність, рівень вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td>Кількість кредитів – 5</td><td>Галузь знань
01 Освіта / Педагогіка</td><td colspan="2">Статус дисципліни
Обов’язкова</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Змістових модулів – 4</td><td rowspan="5">ОПП Середня освіта (Математика)

Спеціальність
014.04 Середня освіта (Математика)</td><td colspan="2">Рік підготовки</td></tr>
<tr><td>1-й</td><td>1-й</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне навчально-дослідне завдання – доповідь</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 150</td><td>1-й</td><td>1-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="8"></td><td rowspan="8">Рівень вищої освіти
другий (магістерський)</td><td>24 год.</td><td>6 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні</td></tr>
<tr><td>26 год.</td><td>8 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>90 год.</td><td>126 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання</td></tr>
<tr><td>10 год.</td><td>10 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:
екзамен</td></tr>
</table>

Мета навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу» в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» полягає в формуванні у здобувачів освіти наукового світогляду на елементарну математику з точки зору вищої математики. Викладаються наукові основи низки важливих теоретичних питань алгебри та початків аналізу, які не можуть бути обґрунтовані у ШКМ з усією повнотою та строгістю. Це стосується питань теорії множин та її додатків, розширення числових множин, елементів теорії многочленів, теорії алгебраїчних рівнянь, розвитку функціональної лінії тощо, що розширить, поглибить знання і уміння здобувача освіти в предметній області та допоможе сформувати у них мотивацію щодо ефективного використання набутих знань та умінь у професійній діяльності.

Очікувані програмні результати навчання

ПРН 07. Визначати предметний зміст і послідовність його опрацювання з урахуванням вимог державного стандарту освіти, типових освітніх програм, попередніх результатів навчання здобувачів освіти, їхніх освітніх потреб; формувати в здобувачів освіти уявлення про навчальний предмет на основі сучасних наукових досягнень.

ПРН 09. Демонструвати навички самостійної роботи з різними джерелами інформації, навички самоосвіти.

ПРН 12. Відтворювати знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії.

ПРН 13. Володіти математичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів моделей, математичними способами інтерпретації числових даних та принципами функціонування природничих процесів.

ПРН 16. Планувати траєкторію власного професійного розвитку.

Очікувані результати вивчення дисципліни

знати:

- основні змістові лінії алгебри у курсі математики закладів загальної середньої освіти (профільна школа);
- основні змістові лінії початків аналізу у курсі математики закладів загальної середньої освіти (профільна школа);
- основні поняття та положення теорії множин;

- поняття бінарної алгебраїчної операції, властивості алгебраїчних операцій, поняття та умови існування обернених операцій, бінарні алгебраїчні операції в шкільному курсі математики;
- поняття відношення, види відношень, відношення в шкільному курсі математики, функція як відношення спеціального виду;
- основні поняття та положення комбінаторики та теорії ймовірності з точки зору теорії множин;
- елементи теорії многочленів;
- теорію рівносильних перетворень рівнянь, нерівностей та їх систем;
- властивості функцій, перетворення графіків функцій;
- операції диференціювання та інтегрування функцій, зв'язок між ними;
- практичні додатки похідної та інтегралу у шкільному курсі математики.

уміти:

- обґрунтовувати основні поняття та методи елементарної алгебри з точки зору вищої алгебри;
- аналізувати складову змістових ліній алгебри у шкільному курсі математики для різних рівнів навчання;
- обґрунтовувати основні поняття та методи аналізу в шкільному курсі математики профільної школи;
- аналізувати складову змістових ліній математичного аналізу у шкільному курсі математики для різних рівнів навчання;
- аналізувати еволюцію математичних понять та методів у контексті історичного розвитку;
- використовувати набуті знання для викладання теоретичних питань шкільної математики;
- використовувати набуті знання при розв'язанні задач і вправ шкільної математики, задач підвищеного рівня складності, задач олімпіадного характеру тощо.

Унаслідок досягнення результатів навчання здобувачі вищої освіти в контексті змісту навчальної дисципліни мають опанувати такі компетентності.

Загальні компетентності:

ЗК 04. Здатність до генерування нових ідей, виявлення та розв'язання проблем, ініціативності та підприємливості.

ЗК 07. Знання та розуміння предметної області і професійної діяльності.

Спеціальні компетентності:

СК 10. Здатність на основі знання фундаментальних розділів математики формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою їхнього аналізу й розв’язання.

СК 12. Здатність до поглиблення знань і розуміння предметної області та професійної діяльності.

Міждисциплінарні зв’язки: «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)», «Методика навчання математики в закладах передвищої освіти освіти», «Виробнича практика з математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)», «Виробнича практика з математики в закладах фахової передвищої освіти» «Теорія графів».

Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Теорія множин, комбінаторика і теорія ймовірностей

Тема 1. Змістові лінії алгебри у сучасному шкільному курсі математики

Історія виникнення та розвитку алгебри як одного з основних розділів математики. Зародження алгебраїчних знань у стародавніх цивілізаціях. Вавилонська та єгипетська математика: розв'язування рівнянь, обчислення площ і об'ємів. Індійська та китайська математика: розвиток методів розв'язування лінійних та квадратних рівнянь.Формування алгебри як окремої галузі математики в середньовічному ісламському світі. Робота аль-Хорезмі «Аль-джабр валь-мукабала» та походження терміна «алгебра». Систематизація методів розв'язування рівнянь першого та другого ступенів.

Розвиток алгебри в Європі в епоху Відродження. Внесок італійських математиків Н. Тартальї, Дж. Кардано, Л. Феррарі у розв'язування алгебраїчних рівнянь. Поява символічної нотації: роботи Ф. Вієта та Р. Декарта. Перехід до абстрактної алгебри в XIX–XX століттях. Виникнення теорії груп, кілець, полів. Розвиток лінійної алгебри та її застосування в різних галузях науки.Міждисциплінарні зв'язки алгебри з іншими науками.

Основні змістові лінії алгебри у сучасному ШКМ та їх методологічний аналіз з урахуванням рівня навчання математики у закладах загальної середньої освіти. 7–9 класи: Числа: розширення поняття числа, включаючи раціональні та ірраціональні числа, їх властивості та операції з ними; Алгебраїчні вирази: вивчення буквено-числових виразів, тотожних перетворень, формул скороченого множення та операцій з многочленами; Рівняння та нерівності: розв’язування лінійних, квадратних рівнянь і нерівностей, а також їх систем; застосування методів розв’язування до практичних задач; Функції: ознайомлення з поняттям функції, її властивостями, побудова та аналіз графіків функцій, дослідження залежностей між змінними; Математичні задачі та моделювання: застосування математичних знань для моделювання реальних ситуацій, розвиток умінь аналізувати та розв’язувати прикладні задачі. 10-11 класи: Функціональна лінія: вивчення різних типів функцій (степеневої, показникової, логарифмічної, тригонометричної), їх властивостей, графіків та застосувань; Алгебраїчна лінія: розв’язування рівнянь і нерівностей (ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних), систем рівнянь, а також робота з виразами та перетвореннями; Математичне моделювання: застосування математичних знань для моделювання реальних процесів і явищ, формулювання та розв’язування прикладних задач.

Методологічний аналіз основних змістових ліній алгебри в сучасному ШКМ як комплексне дослідження теоретичних, дидактичних і практичних засад викладання алгебри в закладах загальної середньої освіти. Основні компоненти методологічного аналізу: Теоретичні засади змістових ліній алгебри (визначення сутності та ролі кожної змістової лінії у формуванні математичної компетентності учнів); Дидактичні принципи та методи викладання (застосування принципів науковості, доступності, систематичності та послідовності у викладанні алгебри); Інтеграція з іншими предметами та реальним життям (застосування міжпредметних зв'язків для підвищення мотивації та практичної значущості алгебраїчних знань, використання прикладів з реального життя для демонстрації застосування алгебри у повсякденних ситуаціях).

Тема 2. Теорія множин

Множина, скінченні та нескінченні множини. Способи завдання множин (переліком елементів, характеристичною властивістю, аналітично, графічно тощо). Порожня множина. Основні числові множини в шкільному курсі математики. Підмножина множини, властивості відношення «бути підмножиною». Власні та невласні підмножини. Булеан множини, теорема про кількість елементів в булеані скінченої множини.

Операції над множинами та їх властивості (операції об'єднання, перетину та різниці множин). Діаграми Ейлера-Вена, графічне зображення взаємозв'язків між множинами. Універсальна множина. Операція доповнення множини, її властивості.

Потужність множин. Скінченні множини, їх потужність. Натуральне число як потужність непорожньої скінченої множини. Формула включень-виключень. Нескінченні множини. Потужності нескінчених множин: злічені множини, множини потужності континуум. Континуум-гіпотеза. Принцип Діріхле. Формулювання принципу Діріхле у різних формах.

Елементи теорії множин як фундаментальна складова шкільного курсу математики в Україні на різних етапах шкільної освіти, як основа для вивчення чисел, алгебраїчних структур, функцій, рівнянь та інших математичних понять, аналізу статистичних даних та ймовірнісних моделей.

Тема 3. Комбінаторика і теорія ймовірностей

Обґрунтування комбінаторики з точки зору теорії множин. Декартовий добуток множин: формування впорядкованих пар елементів з двох, трьох тощо множин. Приклади декартових добутків множин в ШКМ (координати точки на декартовій площині, просторі як декартовий добуток двох, трьох дійсних чисел, графік функції як підмножина декартового добутку дійсних чисел, множина всіх можливих пар результатів підкидання двох гральних кубиків тощо). Відношення та відповідності: короткий огляд основних понять, зв'язок з декартовим добутком.

Правило суми, правило добутку як основні положення комбінаторики, обґрунтування з точки зору теорії множин Факторіал числа, означення, властивості факторіалу, спрощення виразів, знаходження границь послідовностей, рішення рівнянь та нерівностей, що містять факторіал.

Розміщення елементів без повторень, вивід формули для обчислення числа розміщень без повторень. Поняття перестановки з n елементів, формула для обчислення числа перестановок. Комбінації без повторень, вивід формули для обчислення числа комбінацій без повторень. Використання комбінаторних формул для обчислення кількості сприятливих та загальної кількості результатів при класичному визначенні ймовірності. Біном Ньютона. Біноміальні коефіцієнти та їх властивості. Побудова та аналіз трикутника Паскаля. Використання трикутника Паскаля для знаходження біноміальних коефіцієнтів. Рішення комбінаторних рівнянь, нерівностей та їх систем.

Аксіоми теорії ймовірностей, зв’язок теорії ймовірностей у ШКМ з теорією множин. Простір елементарних подій (Ω). Приклади просторів елементарних подій для різних випадкових дослідів (скінченні, нескінченні дискретні, неперервні). Події як підмножини простору елементарних подій. Операції над подіями та їх відповідність операціям над множинами. Використання діаграм Ейлера-Вена для ілюстрації операцій над подіями. Класичне означення ймовірності. Основні аксіоми теорії ймовірності, наслідки з них.

Змістовий модуль 2. Числа

Тема 4. Розвиток поняття числа у ШКМ

Бінарна алгебраїчна операція, її властивості. Обернена операція. Бінарні алгебраїчні операції, обернені операції у шкільному курсі математики. Розвиток числової лінії в ШКМ – від натуральних чисел до дійсних чисел..

Тема 5. Десяткові дроби

Історія створення теорії десяткових дробів. Теорія десяткових дробів Карла Веейрштраса. Зображення дійсних чисел десятковими дробами. Поняття про десятковий дріб як збіжний числовий ряд. Єдиний запис десяткового дробу. Класифікація десяткових дробів: скінченні десяткові дроби, чисто періодичні десяткові дроби, змішані періодичні десяткові дроби, неперіодичні десяткові дроби. Перетворення звичайних дробів у десяткові, визначення виду десяткового дробу в залежності від виду звичайного дробу, знаходження кількості цифр перед періодом та у періоді в запису десяткового дробу. Перетворення періодичних десяткових дробів у звичайні, зв'язок з геометричною прогресією.

Тема 6. Комплексні числа

Розширення поля дійсних чисел. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі, розв’язування алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Модуль та аргумент комплексного числа. Тригонометрична форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Геометрична інтерпретація дій над комплексними числами.

Змістовий модуль 3. Рівняння

Тема 7. Вирази

Вирази в шкільному курсі математики, їх класифікація. Многочлени з однією змінною, канонічна форма запису многочлена, степінь многочлена, старшій коефіцієнт. Теорема Безу. Схема Горнера. Знаходження значення многочлена в точці за допомогою схеми Горнера. Корінь многочлена, еквівалентні означення кореня многочлена. Кратний корінь. Застосування схеми Горнера для визначення кратності кореня многочлена. Операція ділення з остачею для многочленів.

Тема 8. Рівняння

Поняття рівняння, ОДЗ рівняння. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильні перетворення рівнянь. Нерівносильні перетворення, рівняння-наслідок, приклади нерівносильних перетворень, наслідки нерівносильних перетворень. Звуження та розширення ОДЗ під час перетворень рівнянь. Випадки, коли перетворення призводять до звуження ОДЗ: перехід від рівняння до системи, де накладаються додаткові обмеження на змінні, застосування тотожностей, що мають обмежену область визначення. Випадки, коли перетворення призводять до розширення ОДЗ: звільнення від знаменників, піднесення до парного степеня. Важливість постійного контролю за ОДЗ під час розв'язування рівнянь, особливо при використанні перетворень, які можуть змінювати ОДЗ. Приклади розв’язування рівнянь з детальним аналізом впливу перетворень на ОДЗ.

Тема 9. Алгебраїчні рівняння

Теорія алгебраїчних рівнянь в шкільному курсі математики. Знаходження раціональних коренів алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами. Теорема про раціональні корені рівняння з цілими коефіцієнтами, наслідок про корені алгебраїчного рівняння зі старшим коефіцієнтом 1. Застосування схеми Горнера для перевірки коренів та пониження степеня рівняння.

Змістовий модуль 4. Функції

Тема 10. Початки аналізу у ШКМ

Історія виникнення та розвитку математичного аналізу як одного з основних розділів математики. Задачі на площі та дотичні з античності до XVII ст. Винахід диференціального (Ньютон: флюксії, Лейбніц: диференціали) та інтегрального числення у XVII ст. Формула Ньютона-Лейбніца. Розвиток математичного аналізу в XVIII ст.: систематизація та розширення аналізу Ейлером (поняття функції, диференціальні рівняння). Обґрунтування математичного аналізу в XIX ст.: строга теорія границь Коші та Вейєрштрасса. Визначення основних понять математичного аналізу. Широкі застосування у XX-XXI ст. Міждисциплінарні зв'язки математичного аналізу з іншими науками.

Основні змістові лінії математичного аналізу у сучасному ШКМ та їх методологічний аналіз з урахуванням рівня навчання математики у закладах загальної середньої освіти. Основні змістові лінії математичного аналізу в сучасному ШКМ включають: Функції: означення функції як відповідності між множинами, способи завдання, властивості функцій, графіки функцій; Границя та неперервність функції: поняття границі функції в точці, неперервність функції в точці та на проміжку; Похідна та її застосування: поняття похідної, інтерпретація похідної як швидкості зміни функції в точці, геометричний зміст похідної, правила диференціювання, застосування похідної до дослідження та побудови графіків функцій, знаходження найбільших/найменших значень на проміжку; Первісна та інтеграл (на початковому рівні): поняття первісної функції, таблиця первісних основних елементарних функцій. Невизначений інтеграл: Поняття невизначеного інтеграла як множини всіх первісних даної функції. Визначений інтеграл. Визначений інтеграл як площа криволінійної трапеції. Формула Ньютона-Лейбніца. Застосування інтеграла: обчислення площ плоских фігур, об'ємів тіл обертання.

Методологічний аналіз основних змістових ліній математичного аналізу в сучасному ШКМ як комплексне дослідження теоретичних, дидактичних і практичних засад викладання математичного аналізу в закладах загальної середньої освіти. Основні компоненти методологічного аналізу: Теоретичні засади змістових ліній математичного аналізу (визначення сутності та ролі кожної змістової лінії у формуванні математичної компетентності учнів); Дидактичні принципи та методи викладання (застосування принципів науковості, доступності, систематичності та послідовності у викладанні математичного аналізу); Інтеграція з іншими предметами та реальним життям (застосування міжпредметних зв’язків для підвищення мотивації та практичної значущості знань, використання прикладів з реального життя для демонстрації застосування математичного аналізу у повсякденних ситуаціях). Методологічний аналіз за рівнями навчання в 10-11 класах. Рівень стандарт: ознайомлення з поняттям первісної. Таблиця первісних. Поняття визначеного інтеграла як площі (без строгого означення). Формула Ньютона-Лейбніца для простих функцій. Рівень профіль: Більш глибоке розуміння первісної. Властивості невизначеного інтеграла. Означення визначеного інтеграла як границі сум Рімана на інтуїтивному рівні. Властивості визначеного інтеграла. Застосування для обчислення площ більш складних фігур, об'ємів тіл обертання. Ознайомлення з методами інтегрування (заміна змінної, інтегрування частинами - найпростіші випадки).

Тема 11. Функції

Функція як частинний випадок відношення, способи завдання функції. Розвиток поняття функції у шкільному курсі математики. Область визначення, множина значень функції. Властивості функцій (парність, непарність, зростання, спадання, періодичність, неперервність, диференційованість). Елементарні функції та їх властивості. Графік функції, перетворення графіків функцій. Операція композиції функцій, її властивості. Поняття про складену функцію в ШКМ. Обернена функція та умови її існування. Графік оберненої функції. Зворотні функції в ШКМ.

Тема 12. Похідна та інтеграл

Операції диференціювання та інтегрування функцій, їх зв'язок. Умови диференціювання функції. Застосування похідної до дослідження функцій. Додатки до розв’язку задач практичного змісту, екстремальні задачі. Первісна функції, основна властивість, поняття невизначеного інтегралу. Умови інтегрування функції. Визначений інтеграл, геометричний зміст визначеного інтеграла, фізичний зміст визначеного інтеграла (наприклад, робота змінної сили).Формула Ньютона-Лейбніца. Додатки до розв’язку задач практичного зміст. Методи знаходження площ фігур, об’ємів тіл в шкільному курсі математики.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин									
	Денна форма					Заочна форма				
	усього	л	п	інд.	с.р.	усього	л	п	інд.	с.р.
Змістовий модуль 1. Теорія множин, комбінаторика і теорія ймовірностей										
Тема 1. Змістові лінії алгебри у сучасному ШКМ	7	1	1		5	7	1	1		6
Тема 2. Теорія множин	16	3	3		10	16				15
Тема 3. Комбінаторика й теорія ймовірностей	18	4	4		10	18	1	2		15
Разом за змістовим модулем 1	41	8	8		25	41	2	3		36
Змістовий модуль 2. Числа										
Тема 4. Розвиток поняття числа у ШКМ	7	1	1		5	7	1	1		6
Тема 5. Десяткові дроби	7	1	1		5	7				7
Тема 6. Комплексні числа	14	2	2		10	14				13
Разом за змістовим модулем 2	28	4	4		20	28	1	1		26
Змістовий модуль 3. Рівняння										
Тема 7. Вирази	11	2	2		7	11	1	2		10
Тема 8. Рівняння	13	2	4		7	13				12
Тема 9. Алгебраїчні рівняння	10	2	2		6	10				9
Разом за змістовим модулем 3	34	6	8		20	34	1	2		31

Змістовий модуль 4. Функції										
Тема 8. Початки аналізу у ШКМ	7	1	1		5	7	1	1		6
Тема 9. Функції	16	3	3		10	16				15
Тема 10. Похідна та інтеграл	14	2	2		10	14	1	1		12
Разом за змістовим модулем 4	37	6	6		25	37	2	2		33
ІНДЗ	10			10		10			10	
Усього годин	150	24	26	10	90	150	6	8	10	126

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

№ з/п	Тематика (за вибором)	Кількість годин	
		Денна	Заочна
1	Метод раціоналізації для нерівностей з модулем		
2	Метод раціоналізації для показникових нерівностей		
3	Метод раціоналізації для логарифмічних нерівностей		
4	Нерівність трикутника та її застосування до рішення прикладів і задач геометрії та алгебри		
5	Нерівність Коші та її застосування до рішення прикладів і задач геометрії та алгебри		
6	Нерівність Коші-Буняковського та її застосування до рішення прикладів і задач		
7	Графічний метод розв'язування задач з параметром		
8	Нерівносильні перетворення рівнянь та нерівностей		
9	Періодичні функції та їх властивості		
10	Парні, непарні функції та їх властивості		
11	Метод інтервалів, його обгрунтування		
12	Історія виникнення та розвитку теорії комплексних чисел		
13	Нерівності між середніми		

14	Функціональні рівняння та методи їх розв’язування (2 метода на вибір)		
15	Методи доведення нерівностей (2 метода на вибір)		
16	Метод мажорант (метод оцінок) розв’язування рівнянь		
17	Принцип Кавальєрі та його застосування в геометрії		
18	Принцип Діріхле		
	Разом	10	10

Індивідуальне навчальне дослідне завдання виконується у формі доповіді з використанням мультимедійної презентації.

Структура доповіді: вступ, основна частина, висновок, використані джерела інформації. Наведені дані, факти, приклади, представлені в доповіді, повинні адекватно обґрунтовувати/ілюструвати тези доповіді. Текст доповіді повинен характеризуватися цілісністю та композиційною грамотністю. Використовуйте достатній обсяг високоякісних інформаційних джерел.

Умови захисту: протягом виразного читання доповіді звертайте увагу слухачів на слайди презентації (1 слайд титульний; 2-5 – основна частина доповіді; 6 слайд – використана література).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

1. *Семінар «Змістові лінії алгебри у сучасному ШКМ. Теорія множин як основа сучасної математики».*

Питання до обговорення:

1) Еволюція змісту шкільного курсу алгебри. Як змінювався зміст шкільної алгебри з часом? Які нові теми та підходи з'явилися в сучасному ШКМ?
2) Коротко охарактеризуйте роль Георга Кантора у створенні теорії множин. Чому теорія множин вважається основою сучасної математики?
3) Охарактеризуйте основні змістові лінії сучасного шкільного курсу алгебри.
4) Наведіть конкретні приклади тем зі шкільного курсу алгебри, які ґрунтуються на поняттях і операціях теорії множин (наприклад, розв'язування систем рівнянь як перетин множин розв'язків окремих рівнянь, поняття функції як відповідності між множинами тощо).
5) Підготуйте приклади завдань зі шкільного курсу алгебри, для розв'язання яких необхідні знання з теорії множин.

Теоретичний матеріал

Одним з основних математичних понять, якому не дають означення, є множина.

Множину можна задати *переліком її елементів*, якщо множина є скінченою. Елементи множини при такому способі завдання записують у фігурних дужках. Наприклад, якщо A – множина натуральних дільників числа 12, то $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Якщо множина має тільки один елемент a, то пишуть $A = \{a\}$.

Множину можна задати за допомогою *характеристичної властивості*, тобто властивості, яка притаманна елементам цієї множині, і тільки їм.

Наприклад, характеристичною властивістю множини всіх простих чисел є те, що кожний елемент цієї множини – це натуральне число, яке має тільки два натуральних дільника.

Множину можна задати *аналітичним способом або формально*, тобто за допомогою формули.

Наприклад, якщо A – множина натуральних дільників числа 12, то її можна записати аналітично так: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 12 \vdots x\}$. Цей запис прочитується наступним чином: «A – множина, яка складається з таких елементів, які є натуральними числами і є дільниками числа 12».

Множину можна задати *графічно*.

Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B. В цьому разі пишуть $A \subset B$ і кажуть, що множина A міститься у множині B (включається у множину B), або, що A – це підмножина множини B.

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Наприклад, якщо A – множина двозначних натуральних чисел, B – множина парних двозначних натуральних чисел, то легко помітити, що кожне число множини B міститься у множині A. Отже, $B \subset A$.

Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B і, навпаки, кожен елемент множини B є елементом множини A, то множини A і B називають *рівними* і записують: $A=B$.

$$A = B \iff (\forall\, a \in A \implies a \in B \text{ і } \forall\, b \in B \implies b \in A).$$

Рівні множини складаються з одних і тих же елементів.

Для наочності оперування з множинами використовують їх графічні зображення за допомогою так званих *діаграм Ейлера-Венна*. При цьому множини зображують деякими зв'язними (суцільними) геометричними фігурами, найчастіше кругами (рис. 1).

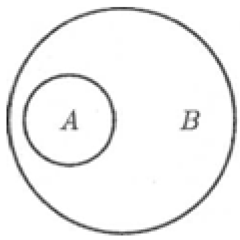


Рис.1. $A \subset B$

Наприклад, якщо множина $A = \{1; 2\}$, то її підмножинами будуть $\emptyset$, A (невласні підмножини) та $\{1\}, \{2\}$ (власні підмножини). Сукупність всіх підмножин даної множини називається *булеаном* цієї множини. Булеан множини A записуємо так $P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}\}$.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Знайти елементи наступних множин:

а) Множина A містить натуральні числа, які більше 2 і менші чи рівні 5, тобто $A = \{3, 4, 5\}$.

б) Множина B – множина двозначних натуральних чисел, таких що при діленні на 12 дають остачу 5.

Найменше двозначне натуральне число – 10, найбільше – 99. Ми шукаємо числа вигляду $12k + 5, k \in \mathbb{N}$.

Перше таке число 17 (при $k = 1$), далі 29 (при $k = 2$), далі 41, $53, 65, 77, 89, 101, \dots$, тому $B = \{17, 29, 41, 53, 65, 77, 89\}$.

Приклад. Задати множину $A = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, 2x^2 - 3x - 5 = 0\}$ переліком елементів.

A – множина, яка складається з таких цілих чисел, які є коренями рівняння $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Розв'яжемо його.

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{3 - 7}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2}$$

$x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \notin \mathbb{Z}$, тому переліком елементів множина записується $A = \{-1\}$.

Приклад. Задати наступні множини аналітично:

1. $A = \{\ 5; 8; 11; 14; \dots\}$.
2. B =$\{8;\ 4;\ 1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16}; \dots\}$.

1. Слід зазначити, що кожне наступне число даної множини більше попереднього на три. Елементи множини A $-$ це члени арифметичної прогресії, де $a_1 = 5$ і $d = 3$. Тому ми можемо зробити висновок, що числа даної послідовності $-$ це числа виду $2 + 3k$, де $k \in\ \mathbb{N}$.

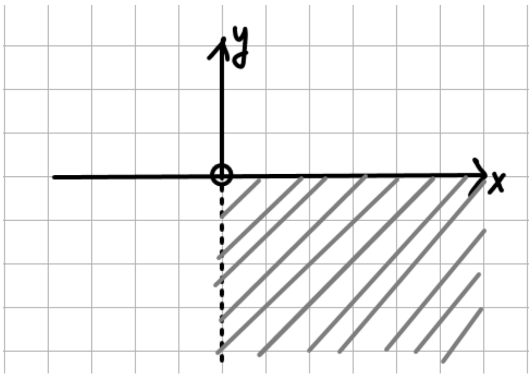
Отже $A = \{x|\ x = 2 + 3k,\ \ k \in \mathbb{N}\}$.

2. Кожне наступне число послідовності менше попереднього в чотири рази. Тому ми можемо зробити висновок, що числа даної послідовності $-$ це члени геометричної прогресії, де $b_1 = 8$ і $q = \frac{1}{4}$.

Отже $B = \{x|\ x = 8 \cdot (0{,}25)^n$, де $n \in \mathbb{N}\}$.

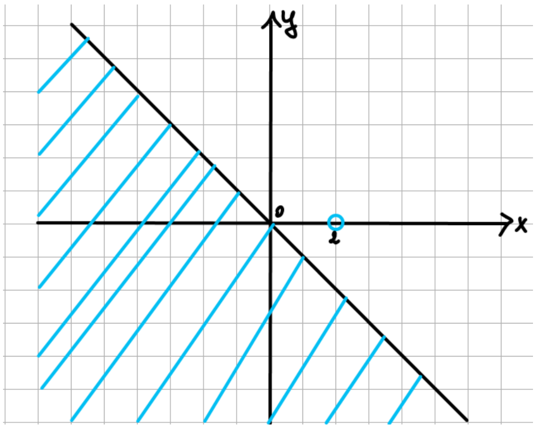
Приклад. Задати множини графічно:

B=$\{(x, y)|\ x, y \in \mathbb{R},\ \ x \geq 0,\ \ y < 0\}$ – це множина точок площини, перша координата яких невід'ємна, а друга – від'ємна.



C= $\{(x, y)|\ x, y \in \mathbb{R},\ \ x + y \leq 0\ \}$

Побудуємо спочатку границю нашої області – пряму $x + y = 0$. Пряма розбиває площину на дві півплощини, тому шукана множина є одною з двох півплощин, включаючи границю (нерівність нестрога). Візьмемо для перевірки будь-яку точку в одній з півплощин, наприклад, візьмемо точку з координатами (2,0), яка не лежить на границі області. Підставляємо координати точки в задану умову: $2 + 0 \leq 0$ – невірно, тому множина C є іншою півплощиною.



Приклад. Множина M деяких трикутників задана довжинами сторін цих трикутників. Знайти підмножини: Γ – гострокутних трикутників, P – прямокутних трикутників, T – тупокутних трикутників множини M.

$M = \{(18,3,16); (8;7;10); (6,8,10)\}$

Згадаємо, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут трикутника. За теоремою косинусів маємо:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Оберемо у кожній трійці більшу довжину сторони даного трикутника. Позначимо її через c, а довжини двох інших сторін – через a і b. Обчислимо $\cos C$.

$(18,3,16)$, $c = 18$ – більша сторона

$$\cos C = \frac{16^2 + 3^2 - 18^2}{2 \cdot 16 \cdot 3} = -\frac{59}{96} < 0.$$ Тому $\angle C$ – тупий.

Трикутник зі сторонами 18, 3, 16 – тупокутний.

$(8;7;10)$, $c = 10$ – більша сторона

$$\cos C = \frac{8^2 + 7^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{13}{112} > 0.$$ Тому $\angle C$ – гострий.

Трикутник зі сторонами 8, 7, 10 – гострокутний.

$(6,8,10)$, $c = 10$ – більша сторона

$$\cos C = \frac{8^2 + 6^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = 0.$$ Тому $\angle C$ – прямий.

Трикутник зі сторонами 8, 6, 10 – прямокутний.

$\Gamma = \{(8,7,10)\}$.

$P = \{(6,8,10)\}$.

$T = \{(18,3,16)\}$.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Задати множини графічно:

а) $\{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{R}, xy < 0\}$;

б) $\{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{R},\ \ y = 3 - (x + 1)^2\}$;

в) $\{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + y^2\ < 0\}$.

Завдання 2. Дано множину M={25,42,53,84,93,17,21,37,36,123}. Виписати підмножини множини M: P – підмножину простих чисел; C – підмножину непарних чисел; D – підмножину парних чисел; K – підмножину чисел, кратних 3; L – підмножину чисел, кратних 9; S – підмножину чисел, кратних 4. Чи вірно, що C⊂P,P⊂C,K⊂C,K⊂L,C⊂S,S⊂D?

Завдання 3. Які відношення включення або рівності мають місце для множин P і K, якщо:

1. $P = \emptyset,\ K = \{m; p; l\}$.
2. $P = \big\{\{a\}; b; \emptyset\big\},\ K = \{a\}$.
3. $P = \{a | a \in \mathbb{Z}, a^2 \leq 4\},\ K = \{b | b \in \mathbb{Z}, -2 \leq b < 3\}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

1. *Вирішення практичних завдань «Операції над множинами».*

Теоретичний матеріал

Перетином множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, кожен з яких належить як множині A, так і множині B (рис.2). Позначають: $C = A \cap B$.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \; i \; x \in B)$$

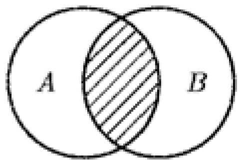


Рис.2. $A \cap B$

Тобто, перетин множин містить спільні елементи цих множин.

Для довільних множин A, B, C операція перетину множин має властивості:

1) $A \cap B = B \cap A$ (переставна властивість або комутативність).
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (сполучна властивість або асоціативність).
3) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
4) $A \cap A = A$.
5) $A \cap B \subseteq A$ і $A \cap B \subseteq B$.

Об'єднанням множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать або множині A, або множині B (рис. 4). Позначають: $C = A \cup B$.

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ або } x \in B)$$

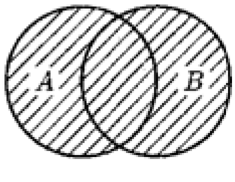


Рис.4. $A \cup B$

Для довільних множин A, B, C операція об'єднання множин має властивості:

1) $A \cup B = B \cup A$ (переставна властивість або комутативність).

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (сполучна властивість або асоціативність).

3) $A \cup \emptyset = A$.

4) $A \cup A = A$.

5) $A \subseteq A \cup B$ і $B \subseteq A \cup B$.

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ і $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (розподільні властивості або дистрибутивність)

Різницею множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів множини A, які не належать множині B (рис. 5).

Позначають: $C = A \setminus B$. Символ «\» є знаком теоретико-множинного віднімання.

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ і } x \notin B)$$

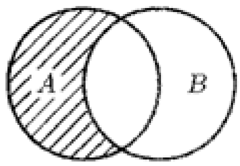


Рис.5. $A \setminus B$

Для довільних множин A, B, C операція віднімання множин має властивості:

1) $A \setminus \emptyset = A$.
2) $A \setminus A = \emptyset$.
3) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
4) $(A \setminus B) \cap C = (A \setminus \mathrm{C}) \cap (B \setminus C)$ (розподільна властивість або дистрибутивність).

Симетричною різницею множин A і B називається множина, яка позначається як $A \Delta B$ і визначається наступним чином:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

У будь-якому конкретному завданні доводиться мати справу з підмножинами деякої, фіксованої для цього завдання, множини. Її прийнято називати *універсальною* (універсумом) і позначати символом U. Наприклад, нехай дано множини: A – множина ромбів, B – множина прямокутників, C – множина трапецій. Для множин A, B, C универсальною є множина U – множина чотирикутників.

Якщо ми в конкретній задачі розглядаємо множину A, яка включає в себе студентів, які навчаються на першому курсі університету, і множину B, яка включає в себе студентів, які навчаються на другому курсі університету, то в якості універсальної множини U можна розглядати множину всіх студентів університету. Вибір універсальної множини можна виконати не єдиним способом.

При графічному зображенні множин і відношень між ними зручно використовувати діаграми Ейлера-Венна, на яких універсальну множину U зазвичай представляють у вигляді прямокутника, а інші множини у вигляді овалів, що розташовані усередині цього прямокутника.

Множину $U \setminus A$ називають *доповненням* множини A до універсальної множини U і позначають символом $\overline{A}$ (рис. 6).

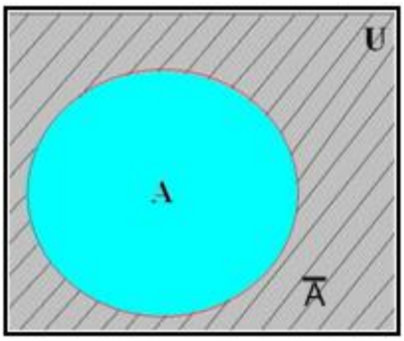


Рис. 6

$$\overline{A} = U \setminus A$$

Для довільних підмножин A і B універсальної множини U виконуються наступні властивості:

1) $A \cup U = \mathrm{U}$;

2) $A \cap U = A$;

3) $A \cup \overline{A} = U$;

4) $A \cap \overline{A} = \emptyset$;

5) $\overline{\overline{A}} = A$;

6) якщо $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$;

7) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

8) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Знайдіть об’єднання множин A і B, якщо:

1) A – множина рівнобедрених трикутників, B – множина рівносторонніх трикутників;
2) A – множина простих чисел, B – множина складених чисел;
3) A – множина простих чисел, B – множина непарних чисел.

1) Об’єднанням множин A і B буде множина рівнобедрених трикутників (множина A), бо множина рівносторонніх трикутників (множина B) є підмножиною множини A (кожний рівносторонній трикутник є рівнобедреним)

   $A \cup B = A$.

2) Об’єднанням множин простих чисел і складених чисел буде множина натуральних чисел без числа 1, так як число 1 не є ані простим, ані складеним.

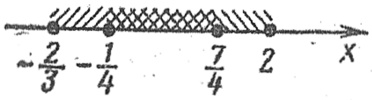
   $A \cup B = \{2, 3,4, 5, \dots\}$.

3) Об’єднанням множин простих чисел і непарних чисел буде об’єднання множини непарних чисел і числа 2, тому що 2 – це єдине парне просте число, всі інші прості числа – непарні числа, більші за 1.

   $A \cup B = \{1,2, 3, 5,7, 9, 11, \dots\}$.

Приклад. Знайти $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$, якщо

$$A = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4}\right\};\ B = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \le x \le 2\right\}.$$



Різницею $A \setminus B$ є частина відрізку, що зображує частину множини A, яка не є частиною множини В, тобто півінтервал $[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4})$.

Іншими словами, $A \setminus B = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{4}\right\}$ (точка $x = -\frac{1}{4}$ належить множині B, тому не належить множині $A \setminus B$).

Аналогічно $B \setminus A = (\frac{7}{4}; 2] = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R},\ \frac{7}{4} < x \leq 2\right\}$ (точка $x = \frac{7}{4}$ належить множині A, тому не належить множині $B \setminus A$).

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = [-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4}; 2].$$

Приклад. Дано множини:

$A = \{x|x \in \mathbb{R}, |x| \leq 4\}$ і $B = \{x|x \in \mathbb{R}, |x-1| \geq 3\}$.

Знайти: $A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cup B,\ A \cap B$.

Нерівність $|x| \leq a$ має розв'язок $x \in [-a; a]$, нерівність $|x| \geq a$ має розв'язок $x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ при $a > 0$. Запишемо множини у вигляді числових проміжків.

$|x| \leq 4$

$-4 \leq x \leq 4$

$x \in [-4; 4]$

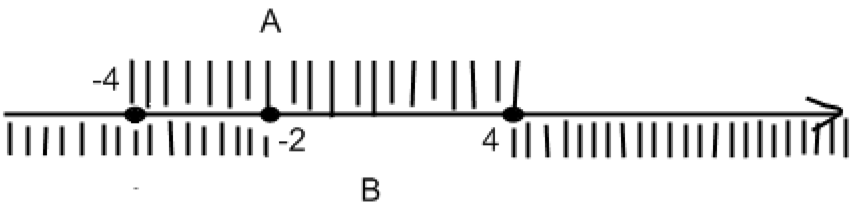
$A = [-4; 4]$

$|x-1| \geq 3$

$\left[\begin{array}{l} x-1 \geq 3 \\ x-1 \leq -3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

$B = (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$



$A \setminus B = (-2; 4)$,

$B \setminus A = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$,

$A \cup B = (-\infty; \infty)$,

$A \cap B = [-4; -2] \cup \{4\}$.

Приклад. Дано множини: P – множина паралелограмів; M – множина прямокутників; R – множина ромбів; K – множина квадратів. Охарактеризувати множини: $M \cap R, M \setminus R\ , R \setminus K$.

$M \cap R$ – це множина, яка містить прямокутники, які є ромбами, тобто – квадрати, $M \cap R = K = K$.

$M \setminus R$ – це множина, яка містить прямокутники, які не є ромбами, тобто прямокутники, у яких довжина та ширина різні.

$R \setminus K$ – це множина, яка містить ромби, які не є квадратами, тобто ромби, які не мають прямих кутів.

Приклад. Проілюструвати на діаграмах Ейлера-Венна справедливість властивості $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

На рис. а і б зображено формування лівої частини рівності – $A \cup (B \cap C)$.

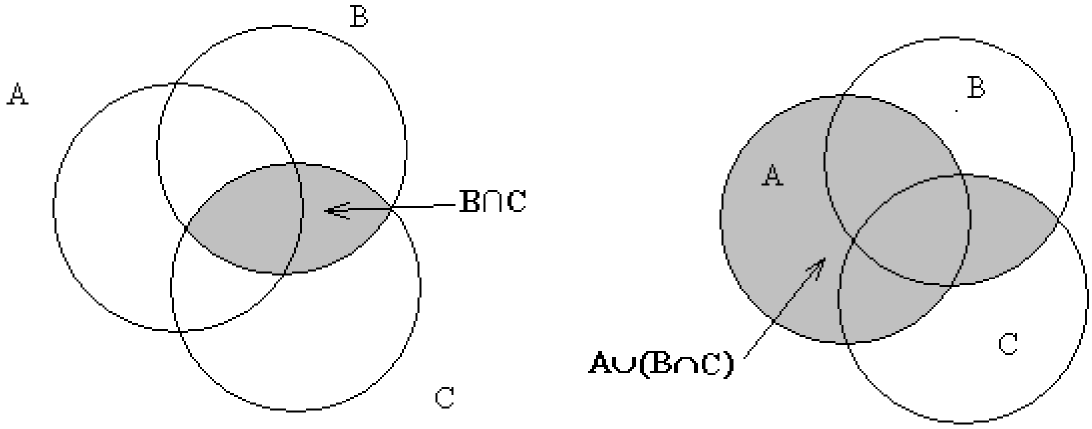


Рис. а Рис. б

На рис. в, г і д зображено формування правої частини рівності –

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

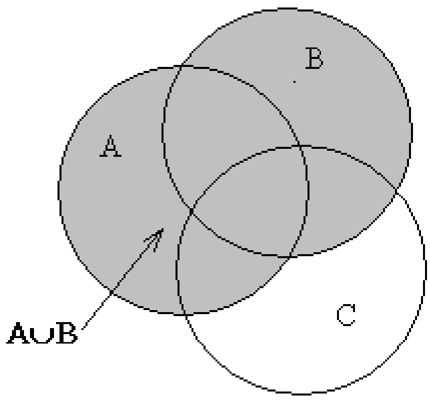


Рис. в

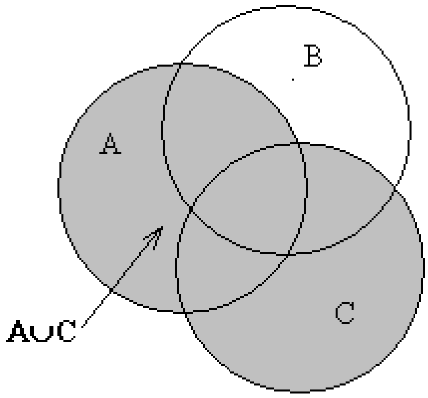


Рис. г

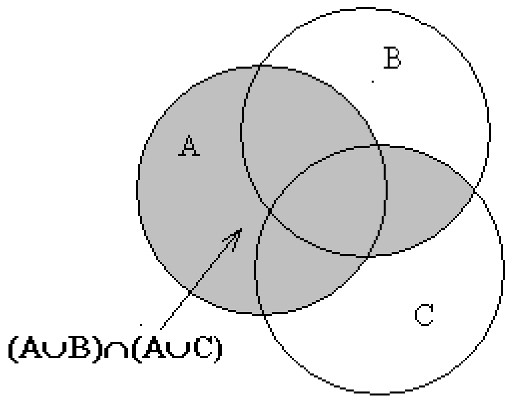


Рис. д

Ми бачимо, що заштриховані множини на рисунках б і д є рівними, з чого робимо висновок, що дана рівність є вірною.

Приклад. Дано множину $A = \{2, 3\}$. Знайти $\overline{A}$, якщо: 1) $U = \mathbb{N}$; 2) $U = \mathbb{Z}$; 3) $U = \mathbb{R}$.

Згідно з визначенням доповнення до універсальної множини, маємо:

1) $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A = \{1; 4; 5; 6; \ldots\}$
2) $\overline{A} = \mathbb{Z} \setminus A = \{\ldots -2; -1; 0; 1; 4; 5; 6; \ldots\} = \{0; \pm 1; -2; -3; \pm 4; \pm 5; \ldots\}$
3) $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$ – цей випадок зобразимо на координатній прямій.

Остаточно маємо: $\overline{A} = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. З'ясувати за допомогою діаграм Ейлера-Венна, чи вірні наступні рівності для будь-яких множин A, B та C:

1) $(A \cup B) \setminus B = A$; 2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Завдання 2. Нехай U – множина учнів деякого 11 класу. Визначимо її підмножини: A – множина учнів цього класу, які додатково займаються програмуванням, B – множина учнів цього класу, які додатково займаються математикою. Опишіть множини: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap \bar{B}$; 3) $B \cap \bar{A}$; 4) $\overline{A \cup B}$.

Завдання 3. Множини A та B точок площини задано аналітично. Побудувати на площині ці множини та зобразити множини $A \cap B$, $B \setminus A$.

$A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x - y \geq 2\}$; $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x < -3\}$.

Завдання 4. Знайти множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ та $B \setminus A$, якщо:

1) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x + 3| \leq 2\}$; $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, \frac{x^2+3x}{x+2} \geq -2\}$.

3) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, |x - 1| \geq 2\}$; $B = \{x | x \in \mathbb{R}, |5 - 2x| \leq 3\}$.

Завдання 5. Дано множину A і універсальну множину U. Знайти множину $\bar{A}$.

1) $A = [-1; 4)$, $U = \mathbb{R}$.

2) $A = \{0; 2\}$, $U = \mathbb{Z}$.

3) A – прості числа, $U = \mathbb{N}$.

4) $A = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.

5) A – множина ромбів, U – множина паралелограмів.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

1. *Вирішення практичних завдань «Потужність множин. Формула включень-виключень».*

Теоретичний матеріал

Потужність множини (кардинальне число) – поняття теорії множин, яке узагальнює на довільні множини поняття «число елементів». Потужність множини в літературі може позначатися декількома символами: n (A) або $|A|$ (читаємо – потужність множини A). Ми будемо позначати потужність множини A символом $|A|$. Вважають, що $|\emptyset| = 0$.

Дві множини A і B називаються *рівнопотужними*, якщо між ними можна встановити *взаємно-однозначну відповідність*, тобто відповідність, при якій кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B і, навпаки, кожному елементу множини В відповідає один і тільки один елемент множини A.

В такому випадку пишуть, що $A \sim B$, тоді $|\ A\ | = |B|$.

Кожна множина має потужність, але потужність скінченних і нескінченних множин різного роду. Потужність скінченної множини виражається натуральним числом і співпадає з кількістю елементів цієї множини. Наприклад, якщо $A = \{1, 3, 5, 7\}$, то $|A| = 4$.

Коли виникає необхідність говорити про потужність скінченої множини, то говорять про кількість елементів множини.

Теорема. Якщо множина А містить n елементів, то булеан Р(А) містить 2^n елементів, тобто $|\mathrm{P}(A)| = 2^n$.

Для скінченних множин справедливе наступне твердження.

Правило суми.

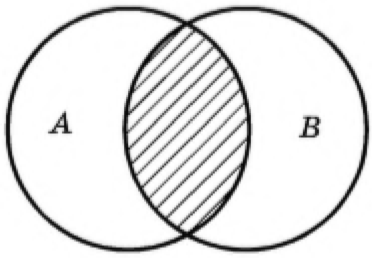
Якщо A і В – скінчені множини і $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Якщо A і В – скінчені множини і $A \cap B \neq \emptyset$, то $|A \cup B| < |A| + |B|$.

Теорема. Потужність об'єднання двох скінченних множин можна знайти за формулою:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Цю формулу називають *формулою включень-виключень.*



Дійсно, в формулі в суму $|A| + |B|$ двічі входить число елементів, що належить перетину множин A і B, тому, щоб отримати число елементів в об'єднанні множин A і B, потрібно записати:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$ що і потрібно було довести.

Формулу включень-виключень можна узагальнити на випадок будь-якого скінченого числа множин.

Теорема. Для трьох скінченних множин A, B, C справедлива формула:
$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |\mathrm{C}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| - |\mathrm{B} \cap \mathrm{C}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{C}| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}|.$

Поняття потужності множини узагальнює звичне поняття кількості елементів для скінченних множин на випадок нескінченних множин. Найменшою потужністю серед нескінченних множин є потужність множини натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Множини, рівнопотужні множині натуральних чисел, називаються зліченними. Це означає, що елементи такої множини можна занумерувати як нескінчену послідовність.

Приклади зліченних множин:

– множина цілих чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$;

– множина раціональних чисел $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n},$ де $m \in$ Z, $n \in$ N$\}$.

Потужність зліченних множин позначається кардинальним числом $\aleph_0$ (алеф-нуль).

Існують нескінченні множини, які не є зліченними. Їх називають незліченними. Найвідомішим прикладом незліченної множини є множина дійсних чисел $\mathbb{R}$. Потужність множини дійсних чисел позначається кардинальним числом *с*. Множини, рівнопотужні множині дійсних чисел, називаються множинами потужності континуум. Існують нескінчені множини, потужність яких більша, ніж потужність *с*.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Нехай M – множина дільників числа 20. Обчислити потужність множини M та її булеану P(M).

Запишемо множину M = {1, 2, 4, 5, 10, 20}, тоді |M| = 6, а |P(M) | = 2^6 = 64.

Приклад. Зі 130 студентів факультету 105 вивчають англійську мову, 30 – німецьку мову, 13 студентів вивчають тільки французьку мову. Скільки студентів одночасно вивчають англійську і німецьку мову?

Нехай A – множина студентів, які вивчають англійську мову, $|A| = 105$, B – множина студентів, які вивчають німецьку мову, $|B| = 30$. Зі 130 студентів не вивчають англійську і німецьку мову 13 студентів. Отже, 130-13=117 студентів вивчають хоча б одну з мов (англійську або німецьку).

Тоді $|A \cup B| = 117.$ Тоді за формулою включень-виключень маємо:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$

$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 105 + 30 - 117 = 18.$

Отже, 18 студентів одночасно вивчають англійську і німецьку мову.

Відповідь: 18 студентів.

Приклад. Вибрано деяку підмножину множини натуральних чисел. Відомо, що серед обраних натуральних чисел 100 чисел кратні 2; 115 чисел кратні 3; 120 чисел кратні 5; 45 чисел кратні 6; 38 чисел кратні 10; 50 чисел кратні 15; 20 чисел кратні 30. Скільки чисел в обраній множині?

Нехай A – множина чисел, кратних 2, $|A| = 100$, B – множина чисел, кратних 3, $|B| = 115$, C – множина чисел, кратних 5, $|C| = 120$.

Числа, які кратні 6, належать множині A ∩ B, бо ці числа діляться і на 2, і на 3, тому $|A \cap B| = 45$.

Числа, які кратні 10, належать множині $A \cap C$, $|A \cap C| = 38$.

Числа, які кратні 15, належать множині $B \cap C$, $|B \cap C| = 50$.

Числа, які кратні 30, належать множині $A \cap B \cap C$, $|A \cap B \cap C| = 20$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$100 + 115 + 120 - 45 - 38 - 50 + 20 = 222.$

Відповідь: 222 числа.

Приклад. В одній групі студентів 10 чоловік знають англійську мову, 10 – німецьку мову, 6 – італійську мову. Одночасно знають англійську і німецьку мову 6 чоловік, німецьку і італійську мову – 4 людини, англійську і італійську мову – 3 людини. Одна людина знає всі три мови. Скільки студентів в групі? Скільки студентів знають тільки англійську мову?

Нехай A – множина студентів, які знають англійську мову, $|A| = 10$, B – множина студентів, які знають німецьку мову, $|B| = 10$, C – множина студентів, які знають італійську мову, $|C| = 6$.

Студенти, які знають англійську і німецьку мову відносяться до множини $A \cap B$, тому $|A \cap B| = 6$ – кількість студентів, які знають англійську і німецьку мову.

Студенти, які знають німецьку і італійську мову відносяться до множини $B \cap C$, тому $|B \cap C| = 4$ – кількість студентів, які знають німецьку і італійську мову.

Студенти, які знають англійську і італійську мову відносяться до множини $A \cap C$, тому $|A \cap C| = 3$ – кількість студентів, які знають англійську і італійську мову.

$A \cap B \cap C -$ множина студентів, які знають всі три мови, тому $|A \cap B \cap C| = 1$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$10 + 10 + 6 - 6 - 4 - 3 + 1 = 14$ студентів у групі.

$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 10 - 6 - 3 + 1 = 2$ студентів знають тільки англійську мову.

Відповідь: всього у групі 14 студентів, 2 студенти студентів знають тільки англійську мову.

Завдання. Довести формулу включень-виключень для трьох множин.

Для трьох скінченних множин A, B, C справедлива формула:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Для доведення теореми використаємо рис. 7, на якому позначимо буквами число елементів у відповідних частинах множин A, B, C.

Запишемо потужності множин:

$|\mathrm{A}| = a + m + p + k$

$|\mathrm{B}| = b + m + p + r$

$|\mathrm{C}| = c + k + p + r$

$|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = m + p$

$|\mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = p + r$

$|\mathrm{A} \cap \mathrm{C}| = k + p$

$|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = p$

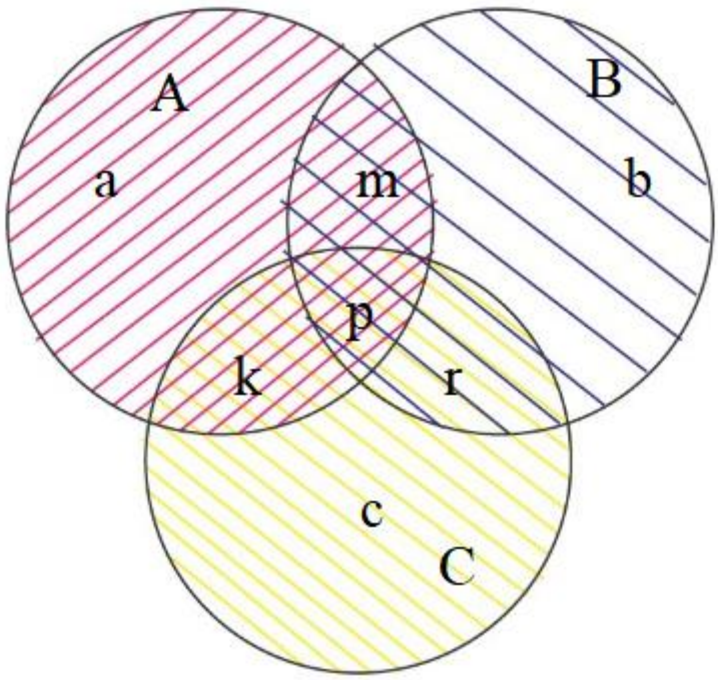


Рис. 7

Запишемо потужність множини $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}|$:

$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}| = a + m + p + k + b + r + \mathrm{c} =$

$= (a + m + p + k) + (b + m + p + r) + (c + k + p + r) - (m + p) - (p + r)$

$-(k + p) + \mathrm{p} = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |\mathrm{C}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| - |\mathrm{B} \cap \mathrm{C}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{C}| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}|,$

що і потрібно будо довести.

Розглянемо рішення однієї історичної задачі, яку називають задачею Льюїса Керола. *Lewis Carroll*, справжнє ім'я Чарльз Латвідж Доджсон (1832-1898 рр) – британський письменник, математик, філософ, логік, англіканський клірик і фотограф. Найвідоміші літературні твори Керролла: «Пригоди Аліси у Дивокраї» і продовження «Аліса в задзеркаллі».

Задача Льюїса Керола. В жорсткому бою 70 зі 100 піратів втратили одне око, 75 – одне вухо, 80 – одну руку, 85 – одну ногу. Яка мінімальна кількість тих, хто втратив одночасно глаз, вухо, руку і ногу?

Нехай U – множина всіх піратів, $|\mathrm{U}| = 100$, A – множина піратів, які втратили одне око, $|\mathrm{A}| = 70$, B – множина піратів, які втратили одне вухо, $|\mathrm{B}| = 75$, C – множина піратів, які втратили одну руку, $|\mathrm{C}| = 80$, D – множина піратів, які втратили одну ногу, $|\mathrm{D}| = 85$.

$$|\bar{A}| = |\mathrm{U} \backslash \mathrm{A}| = 100 - 70 = 30.$$

$$|\bar{B}| = |\mathrm{U} \backslash \mathrm{B}| = 100 - 75 = 25.$$

$$|\bar{C}| = |\mathrm{U} \backslash \mathrm{C}| = 100 - 80 = 20.$$

$$|\bar{D}| = |\mathrm{U} \backslash \mathrm{D}| = 100 - 85 = 15.$$

$$|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C} \cap \mathrm{D}| = 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10.$$

Отже, не менше ніж 10 піратів одночасно втратили і око, і вухо, і руку, і ногу.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. На олімпіаді з математики було запропоновано три задачі: з алгебри, планіметрії і стереометрії. Зі 100 учасників задачу з алгебри розв’язали 80 учасників, з планіметрії – 70 учасників, а зі стереометрії – 60 учасників. При цьому задачі з алгебри і планіметрії розв’язали 60 учасників, з алгебри і стереометрії – 50 учасників, з планіметрії і стереометрії – 40 учасників. Усі три задачі розв’язали 30 учасників. Чи були учасники, що не розв’язали жодної задачі, і якщо так, то скільки їх?

Завдання 2. У класі 25 учнів. З них 11 шахістів, 8 плавців і 12 велосипедистів, причому кожен спортсмен займається тільки двома видами спорту і вчиться на 3 або на 4. У класі 6 відмінників. Скільки в класі спортсменів? Скільки в класі невстигаючих?

Завдання 3. У музичному ансамблі використовується 4 інструменти. Для кожного інструменту в ансамблі є 4 музиканти, що володіють цим інструментом, грою на двох інструментах володіють 3 музиканти, грою на 3 інструментах – 2 музиканти. 1 музикант володіє усіма чотирма інструментами. Скільки музикантів в ансамблі?

Завдання 4. Нехай P – множина простих чисел, менших за 20. Знайдіть потужність множини P.

Завдання 5. Доведіть, що множина цілих чисел є зліченною.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

1. *Вирішення практичних завдань «Основні комбінаторні схеми. Комбінаторні рівняння та нерівності».*

Теоретичний матеріал

Нехай A і B – скінчені множини з потужностями $|A| = n, |B| = m$. Комбінаторика будується на двох правилах (суми і добутку):

1. Правило суми

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ якщо } A \cap B = \emptyset.$$

Це випливає з формули включень-виключень. Дійсно, елемент $a \in A$ можна обрати n способами, елемент $b \in B$ можна обрати m способами. Тоді елемент $x \in A \cup B$ можна вибрати $n + m$ способами.

Формулу можна узагальнити для більшого числа множин. Нехай $\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, \cdots, \mathrm{A_k}$ – множини, які попарно не перетинаються (тобто $\mathrm{A_i} \cap \mathrm{A_j} = \emptyset$, якщо $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$) . Тоді число елементів у їх об'єднанні, тобто число способів вибору одного з них, дорівнює:

$$|\mathrm{A_1} \cup \ldots \cup \mathrm{A_k}| = |\mathrm{A_1}| + \cdots + |\mathrm{A_k}| = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} |\mathrm{A_i}|.$$

2. Правило прямого добутку

Декартовим (прямим) добутком множин A і B називається множина впорядкованих пар виду (a, b), де $a \in A, b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}.$$

Правило прямого добутку:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Дійсно, нехай множина $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Вибір елемента з множини A не залежить від вибору елемента з множини B. Порахуємо, скільки впорядкованих пар виду $(a_i, b_j), i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$, можна скласти. Зафіксуємо елемент $a_1 \in A$. З цим елементом можна скласти пари $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \ldots, (a_1, b_m)$ – всього m пар. Аналогічно, з елементом a_2 можна скласти m пар, з елементом a_n також m пар. Тоді всього можна скласти $n \cdot m$ пар. Тобто $|A \times B| = n \cdot m$.

Формулу можна узагальнити для більшого числа множин.

Основні комбінаторні схеми

Розміщення з повтореннями

Означення. Довільний упорядкований набір k елементів n-елементної множини A називається *розміщенням з повтореннями* з n *елементів по* k.

1) Елементи в розміщенні можуть повторюватися.

2) Розміщення з повтореннями вважаються різними, якщо вони або мають різний склад елементів, або, в разі однакового складу елементів, відрізняються порядком розміщення елементів.

Наприклад, нехай множина $A = \{a, b, c\}$ і оберемо $k = 2$.

Складемо всілякі розміщення елементів множини A по 2 елементи: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ – отримали 9 (9=3^2) розміщень з повтореннями, причому розміщення ab і ba вважаються різними: у них однаковий склад елементів, але різний порядок слідування елементів у розміщенні.

Теорема. Число розміщень з повтореннями з n по k дорівнює n^k.

Нехай з n-елементної множини A нам потрібно вибрати розміщення з повтореннями по k елементів: $(a_1, a_2, \cdots a_k)$. Порахуємо кількість можливих варіантів вибору. Елемент $a_1 \in A$ можна вибрати n способами, елемент $a_2 \in A$ можна вибрати n способами, …, елемент $a_k \in A$ можна вибрати n способами. Тоді число розміщень з повтореннями з n по k дорівнює:

$|A \times A \times \cdots (k \text{ разів}) \cdots \times A| = n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^k$ (як наслідок з правила добутку).

Приклад. Скільки тризначних чисел можна скласти:

1) з цифр 2, 3 7, 8 за умови, що цифри в числі можуть повторюватися.
2) з цифр 0,3,4 за умови, що цифри в числі можуть повторюватися.

1) Тут $A = \{2, 3, 7, 8\}, |A| = 4, k = 3$. Кількість тризначних чисел дорівнює $4^3 = 64$.

2) Тут $A = \{0, 3, 4\}, |A| = 3$. Потрібно відмітити, що перша цифра числа не може дорівнювати 0, тому першу цифру ми можемо обрати тільки двома способами, а дві інші цифри – 3^2 способами ($n = 3, k = 2$). Тому існує $2 \cdot 9 = 18$ шуканих чисел.

Розміщення без повторень

Нехай множина A скінчена, $|A| = n$ і відомим є число $0 \leq k \leq n$.

Означення. Довільний упорядкований набір k елементів n-елементної множини A, яка не містить повторюваних елементів, називається *розміщенням без повторень з* n *елементів по* k.

1) Елементи в розміщенні не можуть повторюватися.

2) Розміщення без повторень вважаються різними, якщо вони або мають різний склад елементів, або, в разі однакового складу елементів, відрізняються порядком розміщення елементів.

Число розміщень без повторень позначається символом A_n^k (читаємо: A з n по k).

З'ясуємо, скільки розміщень без повторень довжини k можна скласти з n елементів множини A.

Спочатку розберемо завдання на конкретному прикладі. Нехай дано множину $A = \{1, 2, 3\}$ і нехай $k = 2$. Складемо всілякі розміщення з повтореннями, їх 9.

1,1 1,2 1,3

2,1 2,2 2,3

3,1 3,2 3,3

Оберемо з них розміщення без повторень Їх 6.

1,2 1,3.

2,1 2,3

3,1 3,2

Теорема. Число розміщень без повторень з n по k дорівнює $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Необхідно вибрати упорядкований набір різних елементів $a_1, a_2, \cdots a_k$ з множини A, $|A| = n$. Перший елемент a_1 ми можемо вибрати n способами, другий елемент a_2 – $(n-1)$ способом, оскільки перший елемент буде вже обраний, і другий елемент можна вибрати з $(n-1)$ елементів, що залишилися і т.д. Тоді отримуємо, що:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Формулу можна перетворити таким способом:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад. На змаганнях з волейболу розігрується комплект медалей між 7 командами-учасницями. Скількома способами можуть бути розподілені медалі?

Тут $n = 7, k = 3$. Обчислимо $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ способів розподілення медалей.

Потрібно пам'ятати, що при обчисленні числа розміщень порядок слідування елементів враховується.

Перестановки

Означення. Будь-яке розміщення без повторень n елементів по n називається *перестановкою*.

Перестановка P_n – окремий випадок розміщень без повторення A_n^k при $k = n$.

Тому $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$.

Комбінації

Означення. Комбінаціями з n елементів по k без *повторень* називаються можливі розміщення довжини k, які відрізняються один від одного тільки складом.

Позначаються комбінації як C_n^k (читаємо: С з n по k).

Розглянемо для прикладу множину $A = \{1, 2, 3\}$ і оберемо $k = 2$. Випишемо всі впорядковані набори елементів множини A по два.

1,1	1,2	1,3
2,1	2,2	2,3
3,1	3,2	3,3

Комбінації повинні відрізнятися тільки складом елементів, порядок слідування елементів не враховується. З виписаних наборів комбінацій рівно три комбінації є комбінаціями без повторень: 1,2 1,3 і 2,3, тобто $C_3^2 = 3$.

За означенням вважаємо, що $C_n^0 = C_n^n = 1$ для всіх цілих $n \geq 0$.

Теорема. Число комбінацій з n по k дорівнює $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ при $k \geq 1$.

Зрозуміло, що число $C_n^k < A_n^k$. При $k < n$ число комбінацій C_n^k можна отримати, якщо з числа розміщень без повторень прибрати розміщення з тими ж елементами, але які відрізняються порядком слідування елементів, це число дорівнює $P_k = k!$ Тоді: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Приклад. Скільки 4-х елементних підмножин можна вибрати з 7-ми елементної множини?

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3} = 35 \text{ підмножин.}$$

Розглянемо деякі властивості C_n^k.

Теорема.

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ для всіх k, $0 \leq k \leq n$.

2) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ для всіх k, $0 < k \leq n$.

1) Обчислимо за формулою:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Також достатньо помітити, що вибрати k з n це все одно, що вибрати $n - k$, які не слід вибирати.

2) k предметів, вибрані з $n+1$ предмета $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ можуть містити x_{n+1} або не містити x_{n+1}. Якщо не містять, то k предметів обираються з $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Способів такого вибору C_n^k.

Якщо вибрані k предметів містять x_{n+1}, то інші $k-1$ предмет повинні бути вибрані з $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Способів такого вибору існує C_n^{k-1}. Результат тепер слідує за правилом суми.

Інший спосіб доведення:

$$\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} +$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!(n+1)}{k(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} =$$

$$\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \mathrm{C}_{n+1}^k.$$

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Скільки існує чотиризначних чисел? Чотиризначних чисел, що діляться на 5? Чотиризначних чисел, що закінчуються на цифри 23?

Позначимо цифри чотиризначного числа зірочками: ****, першу цифру числа можна обрати 9 способами з цифр 1, 2, …, 9, інші цифри можна обрати 10 способами з цифр 0, 1, 2, …, 9. Тому, за правилом добутку, кількість чотиризначних чисел буде дорівнювати добутку $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

За ознакою подільності на 5, число повинно закінчуватися на цифри 0 або 5, тому першу цифру можна обрати 9 способами, другу і третю – 10 способами, а четверту цифру можна обрати тільки двома способами. Тому кількість чотиризначних чисел, що діляться на 5, за правилом добутку буде дорівнювати $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Якщо число закінчується на 23, то воно має вигляд **23, тобто кількість таких чисел буде дорівнювати добутку $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$.

Приклад. На площині розташовано 5 різних точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки різних відрізків можна утворити, з’єднавши кожну точку з кожною іншою?

Кожен відрізок утворюється вибором 2 різних точок із наявних 5. Порядок вибору точок не має значення (відрізок AB є тим самим, що й відрізок BA). Тому нам потрібно знайти кількість комбінацій з 5 елементів по 2.

$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$ відрізків

Прилад. На колі розташовано 6 різних точок. Кожну пару точок з’єднують хордою.

а) Скільки всього хорд буде проведено? б) Скільки точок перетину утворять ці хорди всередині кола, якщо жодні три хорди не перетинаються в одній точці? в) На скільки частин ці хорди поділять внутрішню область кола?

а) Кожна хорда утворюється вибором двох різних точок з 6 наявних. Порядок вибору точок не має значення (хорда AB є тією ж самою, що й хорда BA). Тому кількість хорд дорівнює кількості комбінацій з 6 елементів по 2:

$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$

б) Кожна точка перетину всередині кола утворюється внаслідок перетину двох хорд. Кожна пара хорд визначається чотирма різними точками на колі (по дві точки для кожної хорди). І навпаки, будь-який вибір чотирьох різних точок на колі однозначно визначає дві хорди, які перетинаються всередині кола (якщо з'єднати точки попарно «навхрест»). Тому кількість точок перетину дорівнює кількості способів вибрати 4 точки з 6, що є кількістю комбінацій з 6 елементів по 4:

$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$

Отже, утвориться 15 точок перетину всередині кола.

в) Існує формула, яка пов'язує кількість точок на колі (n) з максимальною кількістю частин (R_n), на які поділяється внутрішня область кола проведеними хордами (за умови, що жодні три хорди не перетинаються в одній точці):

$$R_n = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4$$

У нашому випадку $n=6$, тому:

$$R_6 = C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 = 1 + 15 + 15 = 31.$$

Отже, 15 хорд поділять внутрішню область кола на 31 частину.

Приклад. На полиці розставлено 6 книг, 4 з математики, 2 – з фізики. Скількома способами можна розставити ці книги на одній полиці? Скількома способами можна розставити книги на полиці так, щоб книги з математики стояли поруч? Скількома способами можна розставити книги на полиці так, щоб книги з фізики не стояли поруч?

Число можливих способів розставити 6 книг на полиці дорівнює

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Щоб обчислити кількість способів розміщення книг таким чином, щоб книги з математики стояли поруч, «склеїмо» книги з математики. Тоді маємо 3 «книги», число способів їх розміщення дорівнює $3! = 6$, а тепер обчислимо кількість варіантів розміщення 4 книг з математики між собою, коли вони стоять поруч, число варіантів дорівнює $4! = 24$. Тоді число шуканих варіантів за правилом добутку дорівнює $6 \cdot 24 = 144$.

Щоб обчислити кількість способів розміщення книг таким чином, щоб книги з фізики не стояли поруч, підрахуємо спочатку число варіантів можливого розміщення книг без обмежень та віднімемо число варіантів, коли книги з фізики стоять поруч.

Маємо $6! - 5! \cdot 2! = 720 - 240 = 480$ варіантів.

Приклад. У класі навчаються 10 хлопців та 5 дівчат. Скількома способами можна обрати делегацію з трьох осіб так, щоб до її складу входило не менше ніж дві дівчини?

Делегація з трьох осіб повинна містити не менше ніж дві дівчини. Це означає, що можливі два варіанти складу делегації:

1. Дві дівчини та один хлопець.
2. Три дівчини.

Розглянемо кожен випадок окремо:

Випадок 1: Дві дівчини та один хлопець.

Кількість способів обрати 2 дівчат з 5 дорівнює кількості комбінацій з 5 елементів по 2: $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.

Кількість способів обрати 1 хлопця з 10 дорівнює кількості комбінацій з 10 елементів по 1: $C_{10}^1 = \frac{10!}{1!(10-1)!} = 10$.

За правилом множення, кількість способів утворити делегацію з двох дівчат та одного хлопця дорівнює $10 \cdot 10 = 100$.

Випадок 2: Три дівчини

Кількість способів обрати 3 дівчат з 5 дорівнює кількості комбінацій з 5 елементів по 3: $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$.

Щоб знайти загальну кількість способів утворити делегацію, що задовольняє умову задачі, потрібно додати кількість способів для кожного з розглянутих випадків (за правилом додавання, оскільки ці випадки є взаємовиключними), тобто $100 + 10 = 110$.

Приклад. Розв’язати рівняння:

1) $A_x^2 = 42$

Це комбінаторне рівняння, воно має відповідну ОДЗ.

ОДЗ: $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$.

За означенням:

$\frac{x!}{(x-2)!} = 42$

$$\frac{(x-2)!\,(x-1)x}{(x-2)!} = 42$$

$x^2 - x - 42 = 0$

$x = -6 \notin$ ОДЗ рівняння або $x = 7$

Відповідь: $x = 7$.

2) $C_{x-3}^{2} = 21$

ОДЗ: $x - 3 \in \mathbb{N}, x - 3 \geq 2$, тобто $x \in \mathbb{N}, x \geq 5$.

За означенням:

$$\frac{(x-3)!}{2!\,(x-5)!} = 21$$

$$\frac{(x-5)!\,(x-4)(x-3)}{2(x-5)!} = 21$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$x = -3 \notin$ ОДЗ рівняння або $x = 10$

Практичні завдання для самостійної роботи

1. Скількома способами можна скласти розклад уроків на один день із 6 різних предметів? При умові, що серед цих предметів є алгебра і геометрія і уроки з алгебри і геометрії повинні стояти поруч?

2. Скільки різних чотиризначних чисел можна утворити, використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожну цифру можна використовувати кілька разів? Лише один раз?

3. Скільки існує непарних чотиризначних чисел? Чотиризначних чисел, що не діляться на 10?

4. У кошику є 7 яблук і 5 груш. Скількома способами можна вибрати 3 фрукти так, щоб серед них було не менше ніж 2 яблука?

5. На полиці стоять 8 різних підручників з алгебри, 5 різних підручників з геометрії та 3 різних підручники з інформатики. Скількома способами можна вибрати один підручник з математики (алгебри або геометрії) або один підручник з інформатики?

6. У їдальні пропонують на вибір 3 види перших страв, 5 видів других страв та 4 види напоїв. Скількома способами можна скласти обід з однієї першої, однієї другої страви та одного напою?

7. Для участі в естафеті потрібно скласти команду з 4 бігунів. У секції легкої атлетики є 7 кандидатів. Скількома способами можна сформувати команду та

8. Є 6 різних блакитних кульок та 4 різні червоні кульки. Скількома способами можна вибрати дві кульки так, щоб вони були або обидві блакитні, або обидві червоні?

9. У класі 12 учнів. Скількома способами можна розділити їх на три групи по 4 учні в кожній, якщо відомо, що двоє конкретних учнів (назвемо їх А і Б) не повинні опинитися в одній групі?

10. Розглянемо решітку, утворену лініями *x=0,x=1,...,x=m* та *y=0,y=1,...,y=n.* Скільки існує різних шляхів з точки (0,0) до точки (*m,n*), якщо кожен крок може бути зроблений лише вправо або вгору?

11. Розв'яжіть комбінаторні рівняння і нерівності:

1) $3C_x^3 = A_x^2$;

2) $C_x^1 + C_x^2 < 15$;

3) $P_x \geq A_x^2$;

4) $\frac{P_x}{x-2} > 6$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

1. *Тренінг «*Класичне означення ймовірності. Застосування теорії множин при обчисленні ймовірності».

Теоретичний матеріал

Ймовірність – це фундаментальне поняття в математиці, що кількісно вимірює ступінь вірогідності настання певної події. Існує кілька підходів до означення ймовірності, і одним з найперших та найбільш зрозумілих є класичне означення. Класичне означення ймовірності застосовується до випадків, коли простір елементарних подій є скінченним і всі ці події є рівноможливими.

Означення. Ймовірність події А, що позначається як Р(А), визначається як відношення кількості випадків, сприятливих для настання події А, до загальної кількості всіх можливих рівноможливих елементарних випадків.

Математично це виражається формулою:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n},$$

де Р(А) – ймовірність події А; m – кількість випадків (елементарних подій), що сприяють настанню події А; n – загальна кількість усіх можливих рівноможливих елементарних подій у даному випробуванні.

Умови застосування класичного означення:

1. Простір елементарних подій є скінченним.
2. Усі елементарні події є взаємовиключними (настання однієї виключає настання іншої).
3. Усі елементарні події є рівноможливими (тобто, немає причин вважати, що одна з них відбудеться частіше, ніж інша).

Приклад. При підкиданні грального кубика знайти ймовірність випадання парного числа.

Загальна кількість можливих результатів (елементарних подій), $n = 6$ (грані з числами 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Кількість випадків, сприятливих для події «випадання парного числа», $m = 3$ (це числа 2, 4, 6).

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Теорія множин надає потужний апарат для формалізації та обчислення ймовірностей, дозволяючи чітко визначити простір подій та їхні взаємозв'язки.

Основні поняття теорії множин у теорії ймовірностей:

1) Простір елементарних подій (або простір вибірки) – множина Ω, що містить усі можливі елементарні результати випадкового експерименту. Кожен елемент цієї множини є елементарною подією. Будь-яка підмножина простору елементарних подій Ω. Подія настає, якщо результатом експерименту є один з елементів цієї підмножини.

2) Використання операцій над множинами дозволяє формулювати складні події через простіші.

Об'єднання подій (Сума подій): A∪B. Це подія, яка настає, якщо настає подія A, або подія B, або обидві одночасно.

Приклад. Підкидається гральний кубик. Нехай подія A – «випало парне число», подія B – «випало число більше 4», простір елементарних подій Ω={1,2,3,4,5,6}, A={2,4,6}, B={5,6}. Тоді A∪B={2,4,5,6}.

Формула ймовірності для об'єднання подій:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Перетин подій (Добуток подій): A∩B (або AB). Це подія, яка настає, якщо настають обидві події A і B одночасно.

Приклад. Підкидається гральний кубик. Нехай подія A – «випало парне число», подія B – «випало число більше 4», простір елементарних подій Ω={1,2,3,4,5,6}, A={2,4,6}, B={5,6}. Тоді A∩B={6}.

Формула ймовірності для перетину незалежних подій:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Різниця подій: A\B (або A−B). Це подія, яка настає, якщо настає подія A, але не настає подія B.

Доповнення (Протилежна подія): $\overline{A}$. Це подія, яка настає, якщо не настає подія A. $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Наприклад, якщо подія A – «на гральному кубику випало парне число», то подія $\overline{A}$ – «на гральному кубику випало непарне число».

Формула ймовірності для доповнення:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Дві події A і B називаються несумісними, якщо вони не можуть настати одночасно, тобто їхній перетин є порожньою множиною: $A \cap B = \emptyset$.

Для несумісних подій: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. З повної колоди у 36 карт навмання витягують 4 карти. Яка ймовірність того, що серед них буде рівно два тузи?

Ми витягуємо 4 карти з 36, причому порядок вибору не має значення. Отже, це задача на комбінації.

$C_{36}^{4} = \frac{36!}{4!(36-4)!} = \frac{36!}{32!\cdot 4!}$ – число комбінацій 4 довільних карт з 36 карт

$C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{32!}{2!\cdot 30!}$ – число комбінацій вибору 4 карт, серед яких 2 тузи обираються серед 4 тузів, а дві інші карти обираються серед 32 карт (не тузів).

$$P = \frac{C_{4}^{2}\cdot C_{32}^{2}}{C_{36}^{4}} = \frac{32!\cdot 4!\cdot 32!\cdot 4!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 30!\cdot 36!} = \frac{992}{19635}.$$

Приклад. В урні лежать 6 білих, 4 чорні та 2 червоні кулі. Навмання виймають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі три кулі будуть одного кольору? Яка ймовірність того, що дві кулі будуть білими, а одна – чорною?

Загальна кількість куль в урні 6+4+2=12.

Визначимо загальну кількість можливих результатів. Ми виймаємо 3 кулі з 12. Порядок не має значення.

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = 220.$$

Визначимо кількість сприятливих результатів. Це може бути:

3 білі кулі з 6: $C_{6}^{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20.$

3 чорні кулі з 4: $C_{4}^{3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4.$

3 червоні кулі з 2 – неможливо (ми маємо лише 2 червоні кулі).

Кількість сприятливих результатів 20+4=24.

Обчислимо ймовірність:

$P = \frac{24}{220} = \frac{6}{55}$ – ймовірність того, що всі три витягнуті кулі будуть одного кольору.

Ймовірність того, що дві кулі будуть білими, а одна – чорною.

Визначимо кількість сприятливих результатів:

2 білі кулі з 6: $C_{6}^{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15.$

1 чорна куля з 4: $C_{4}^{1} = 4.$

За правилом добутку кількість сприятливих результатів дорівнює $15\cdot 4=60$.

Обчислимо ймовірність:

$P = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$ – ймовірність того, що дві витягнуті кулі будуть білими, а одна – чорною.

Приклад. На полиці стоять 8 різних книг, серед яких є 3 томи енциклопедії. Навмання обирають 4 книги і ставлять їх поруч на іншій полиці. Яка ймовірність того, що всі три томи енциклопедії опиняться серед вибраних книг?

Визначимо загальну кількість можливих результатів. Ми обираємо 4 книги з 8 і ставимо їх на іншій полиці.

$C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70.$

Визначимо кількість сприятливих результатів. Серед 4 обраних книг 3 книги повинні буди томами енциклопедії.

$C_5^1 \cdot C_3^3 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot 1$=5 – способів обрати чотири потрібних книги.

Обчислимо ймовірність:

$P = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

Приклад. У торбинці знаходяться сині та зелені кульки. Всього в торбинці 15 кульок. Якщо навмання витягнути дві кульки, ймовірність того, що обидві вони виявляться синіми, дорівнює $\frac{2}{21}$. Скільки синіх кульок знаходиться у торбинці?

Нехай x синіх кульок знаходиться у торбинці.

Загальна кількість способів витягнути 2 кульки з 15 дорівнює

$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = 105.$

Загальна кількість способів витягнути 2 кульки з x синіх кульок дорівнює

$C_x^2 = \frac{x!}{2!(x-2)!} = \frac{x(x-1)}{2}.$

Складемо рівняння відносно ймовірності:

$$\frac{\frac{x(x-1)}{2}}{105} = \frac{2}{21}$$

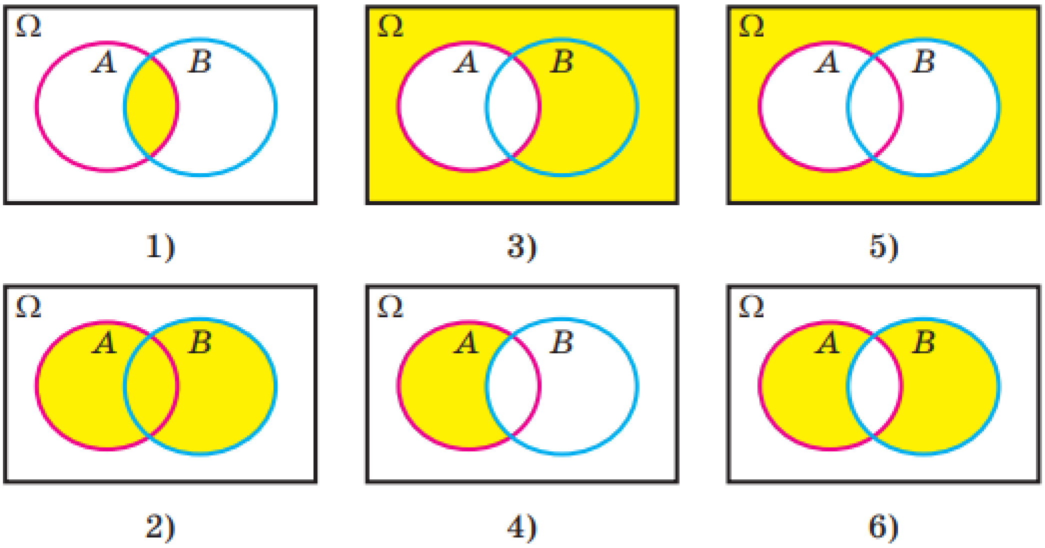
або

$x^2 - x - 20 = 0.$

$x = -4$ або $x = 5.$

В умовах задачі $x = 5$ – в торбинці 5 синіх кульок.

15.11.° Серед членів спортклубу вибирають навмання одну людину. Подія A полягає в тому, що вибрана людина відвідує заняття в тренажерному залі, а подія B — у тому, що вона відвідує басейн. У чому полягає подія, проілюстрована на діаграмі (рис. 15.8)?



1) $A \cap B$. Подія полягає у тому, що людина відвідує заняття і в тренажерному залі, і в басейні;

2) $A \cup B$. Людина відвідує заняття хоча би в тренажерному залі або в басейні;

3) $\overline{A}$. Людина не відвідує заняття в тренажерному залі;

4) $A \setminus B$. Людина відвідує заняття тільки в тренажерному залі;

5) $\overline{A \cup B}$. Людина не відвідує заняття в тренажерному залі і в басейні;

6) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Подія полягає у тому, що людина відвідує заняття або тільки в тренажерному залі, або тільки в басейні.

Приклад. У групі студентів було проведено опитування щодо їхньої успішності з двох предметів: математики (М) та фізики (Ф). Відомо, що ймовірність того, що студент успішно складе математику, становить $P(M)=0{,}75$, ймовірність того, що студент успішно складе фізику, становить $P(Ф)=0{,}60$, ймовірність того, що студент успішно складе обидва предмети (математику *і* фізику), становить 0,5.

Знайдіть ймовірність того, що навмання обраний студент:

1. Успішно складе хоча б один з цих предметів.
2. Не складе математику.
3. Не складе жодного з цих предметів.
4. Складе математику, але не складе фізику.

Позначимо події:

М – студент успішно склав математику.

Ф – студент успішно склав фізику.

Умову, що ймовірність того, що студент успішно складе обидва предмети (математику *і* фізику), становить 0.5, можна записати так: $P(М \cap Ф) = 0{,}50$.

Маємо $P(М) = 0{,}75$, $P(Ф) = 0{,}60$, $P(М \cap Ф) = 0{,}50$.

1) Ймовірність того, що студент успішно складе хоча б один з цих предметів $P(М \cup Ф)$.

Використовуємо формулу для ймовірності об'єднання двох довільних подій:

$P(М \cup Ф) = P(М) + P(Ф) - P(М \cap Ф) = 0{,}75 + 0{,}60 - 0{,}50 = 0{,}85$.

2) Ймовірність того, що студент не складе математику $P(\overline{М})$.

Подія $\overline{М}$ є доповненням до події М. Використовуємо формулу для ймовірності доповнення події:

$P(\overline{М}) = 1 - P(М) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

3) Ймовірність того, що студент не складе жодного з цих предметів $P(\overline{М \cup Ф})$.

$P(\overline{М \cup Ф}) = 1 - P(М \cup Ф) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

4) Ймовірність того, що студент складе математику, але не складе фізику $P(М \cap \overline{Ф})$.

Запишемо, з чого складається ймовірність, якщо студент складе математику, – з суми двох ймовірностей, коли він складає математику і фізику одночасно і з ймовірності, коли він складає математику, але не складає фізику, тобто:

$P(М) = P(М \cap Ф) + P(М \cap \overline{Ф})$, звідки

$P(М \cap \overline{Ф}) = P(М) - P(М \cap Ф) = 0{,}75 - 0{,}50 = 0{,}25$.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання. За результатами соціологічного опитування серед мешканців міста встановлено, що ймовірність того, що мешканець читає новини в інтернеті (подія I), становить P(I)=0,6, ймовірність того, що мешканець дивиться новинні телепрограми (подія T), становить P(T)=0,4, ймовірність того, що мешканець читає новини в інтернеті і дивиться новинні телепрограми, становить 0.25.

Знайдіть ймовірність того, що навмання обраний мешканець:

1. Читає новини в інтернеті або дивиться новинні телепрограми (тобто, користується хоча б одним з цих джерел).
2. Не читає новини в інтернеті.
3. Читає новини в інтернеті, але не дивиться новинні телепрограми.

Завдання. На заводі виробляються деталі, які можуть мати два типи дефектів: дефект A та дефект B. Відомо, що ймовірність того, що деталь має дефект A, становить P(A)=0,08, ймовірність того, що деталь має дефект B, становить P(B)=0,05, ймовірність того, що деталь має хоча б один з цих дефектів, становить 0.11.

Знайдіть ймовірність того, що навмання обрана деталь:

1. Має обидва дефекти.
2. Не має дефекту A.
3. Має дефект B, але не має дефекту A.

Завдання. У лотереї «6 з 49» учасник обирає 6 різних номерів з 49 можливих. Яка ймовірність того, що навмання обраний лотерейний квиток міститиме рівно 4 виграшні номери?

Завдання. В групі є 7 хлопців та 5 дівчат. Між ними випадковим чином розподіляють 3 однакові квитки на концерт (кожен студент може отримати максимум один квиток). Яка ймовірність того, що всі три квитки дістануться дівчатам?

Завдання. Розглянемо випадковий експеримент: одноразове кидання грального кубика. Нехай Ω – простір усіх можливих елементарних подій (результатів кидка). Визначимо наступні події як підмножини простору Ω:

- Подія A: Випало парне число.
- Подія B: Випало число, більше за 3.
- Подія C: Випало число, менше за 3.

Використовуючи теорію множин, виконайте наступні дії:

1. Запишіть простір елементарних подій Ω у вигляді множини.
2. Запишіть події A, B, C у вигляді підмножин Ω.
3. Опишіть та перелічіть елементи наступних подій, використовуючи операції над множинами, а також поясніть їх значення:

а) $A \cap B$, б) $A \cup B$, в) $\bar{A}$, г) $B \setminus A$, д) $A \cap C$, е) $B \cup C$, є) $\bar{C}$, ж) $(A \cup B) \cap C$, з) $A \cap C$.

4. Визначте, чи є події A і C, B і C несумісними. Обґрунтуйте свою відповідь, використовуючи поняття перетину множин.

Завдання. У класі навчаються хлопці та дівчата. Всього у класі 25 учнів. Якщо для участі в шкільній олімпіаді навмання обирають двох учнів, ймовірність того, що обоє вони виявляться хлопцями, становить 0,07. Скільки хлопців навчається в цьому класі?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

1.*Вирішення практичних завдань* «Раціональні та ірраціональні числа. Представлення дійсних чисел десятковими дробами».

Теоретичний матеріал

Становлення теорії десяткових дробів пройшло довгий шлях. Відкриття та популяризація десяткових дробів в Європі – заслуга перед математикою фламандського інженера Симона Стевіна (1548-1620), що зазвичай визнається винахідником десяткових дробів. Стевін створив систематичне вчення про десяткові дроби, виступивши популяризатором їх використання.

Один з найвизначніших математиків XIX століття Карл Веєрштрас (1815-1897) працював над обґрунтуванням теорії десяткових дробів. Він розглядав десяткові дроби як модель множини дійсних чисел. В основу своєї теорії десяткових дробів Веєрштрас заклав поняття нескінченного ряду, визначивши десятковий дріб як числовий ряд виду $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{10^i}$.

Десятковим рядом (або нескінченним десятковим дробом) називається числовий ряд виду

$$\mathrm{C}_0+\frac{\mathrm{C}_1}{10^1}+\frac{\mathrm{C}_2}{10^2}+\frac{\mathrm{C}_3}{10^3}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_n}{10^n}+\ldots ,$$

де числа c_i при $i \neq 0$ є невід'ємними цілими числами з множини {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, а число c_0– ціле число.

Для зручності десятковий дріб записують так: $c_0, c_1 c_2\, c_3 \ldots c_i \ldots$; число c_0 називають цілою частиною десяткового дробу, а $0, c_1 c_2\, c_3 \ldots c_i \ldots$ – дробовою частиною десяткового дробу. Цей числовий ряд є збіжним.

Теорема. Будь-яке натуральне число n можна представити двояко у вигляді десяткового дробу $n = n, 000 \ldots 0 \ldots = n, (0)$ або $n = (n-1), 999 \ldots 9 \ldots = (n-1), (9)$.

Розглянемо, число:

$$n -1{,}999.. = n - 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = n -1 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{9}{10} + + \frac{9}{10^2} + \cdots \right).$$

Вираз в дужках є спадною геометричною прогресією, знаменник якої $\frac{1}{10}$. Знайдемо суму даної прогресії за формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$ при $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{10}$. Отримаємо, що $S = \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$.

Тоді: $n \quad -1{,}999\ldots = n - 1 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = n - 1 + \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = n$, що і мали довести.

Для того, щоб уникнути двоякості у записі десяткового дробу, будемо записувати десятковий дріб в першому вигляді, де період містить тільки 0.

Десяткові дроби бувають:

1) скінченні, наприклад, 5,342;
2) чисто періодичні, наприклад 7,(23);
3) змішані періодичні, наприклад, 1,45(8);
4) неперіодичні, наприклад, 3,1415..

Теорема. Будь-яке раціональне число можна представити у вигляді десяткового дробу, і до того ж єдиним чином.

1) дріб виду $\frac{k}{2^n 5^m}$ виражається *скінченним десятковим дробом* з числом знаків після коми, що дорівнює максимальному із значень n і m, де показники m і n – цілі невід'ємні числа;

2) дріб виду $\frac{k}{b}$, де $(b,10)=1$, виражається *чисто періодичним дробом*, число цифр в періоді якого дорівнює найменшому натуральному числу δ такому, що $10^\delta - 1 \vdots b$;

3) дріб виду $\frac{k}{2^n 5^m \cdot b}$, де $(b,10)=1$, виражається *змішаним періодичним дробом*, в якому число цифр до періоду дорівнює максимальному із значень n і m, де показники m і n – цілі невід'ємні числа, а число цифр в періоді дорівнює найменшому натуральному числу δ такому, що $10^\delta - 1 \vdots b$.

Кожне раціональне число за наведеним правилом записується у вигляді або скінченного десяткового дробу, або десяткового періодичного дробу. Але кожен скінченний десятковий дріб можна вважати дробом, періодичним з цифрою 0 у періоді. Таким чином, кожне раціональне число записується у вигляді періодичного десяткового дробу. З другого боку, кожен періодичний десятковий дріб є записом деякого раціонального числа.

Теорема. Кожний періодичний десятковий дріб виражає деяке раціональне число, і до того ж лише одне.

Тепер розглянемо множину ірраціональних чисел.

Теорема. Усякий нескінченний *неперіодичний* десятковий дріб виражає собою ірраціональне число, і до того ж лише одне.

Тим самим встановлюється взаємно-однозначна відповідність між множиною дійсних чисел та множиною нескінченних десяткових дробів.

Теорема. Кожне дійсне число зображується єдиним нескінченним десятковим дробом, і навпаки, кожний нескінчений десятковий дріб зображає єдине дійсне число.

Під дійсними числами розумітимемо нескінченні десяткові дроби без дев'ятки в періоді: під раціональними числами розумітимемо десяткові періодичні дроби, а під ірраціональними – нескінченні, неперіодичні десяткові дроби.

Розглянемо метод переводу десяткового дробу у звичайний.

1. *Скінченні десяткові дроби.*

Нехай $c_0, c_1c_2 \ldots c_k$ – даний десятковий дріб. Тоді,

$$c_0, c_1c_2 \ldots c_k = \frac{\overline{c_0c_1c_2 \ldots c_k}}{1\underbrace{00\ldots0}_{k}} = \frac{\overline{c_0c_1c_2 \ldots c_k}}{10^k}$$

Запишемо десятковий дріб порозрядно та зведемо до спільного знаменника:

$$c_{0,}\, c_1c_2 \ldots c_k = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} = \frac{c_0 \cdot 10^k + c_1 \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_k}{10^k} = \frac{\overline{c_0c_1c_2 \ldots c_k}}{10^k},$$

що і мали довести.

Приклад. Перетворіть десятковий дріб 2, 349 у звичайний.

$$2,348 = \frac{2348}{1000} = \frac{587}{250}.$$

2. *Чисті періодичні десяткові дроби.*

Нехай $0,(c_1c_2 \ldots\ c_k)$ – даний десятковий дріб. Тоді,

$$0,(c_1c_2 \dots c_k) = \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{k}}.$$

Запишемо десятковий дріб порозрядно, винесемо спільні множники та зведемо до спільного знаменника:

$$0,(c_1c_2 \dots c_k) = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{c_1}{10^{k+1}} + \frac{c_2}{10^{k+2}} + \dots + \frac{c_k}{10^{2k}} + \dots =$$

$$\frac{c_1}{10}\left(1 + \frac{1}{10^k} + \cdots\right) + \frac{c_2}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^k} + \cdots\right) + \dots + \frac{c_k}{10^k}\left(1 + \frac{1}{10^k} + \cdots\right) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{10^k} + \cdots\right)\left(\frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_k}{10^k}\right) = \left[S = \frac{b_1}{1-q};\ \begin{matrix} b_1 = 1 \\ q = \frac{1}{10^k} \end{matrix}\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{10^k}} \cdot \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_k}}{10^k} =$$

$$\frac{\overline{c_1c_2 \dots c_k}}{10^k - 1} = \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_k}}{\underbrace{999 \dots 9}_{k}},$$ що і мали довести.

Приклад. Перетворіть десятковий дріб $0,(531)$ у звичайний.

$$0,(531) = \frac{531}{999} = \frac{59}{111}.$$

3. Змішані періодичні десяткові дроби.

Нехай $0,c_1c_2 \dots c_k(\underbrace{c_{k+1} \dots c_m}_{n})$ – даний десятковий дріб. Тоді,

$$0,c_1c_2 \dots c_k(\underbrace{c_{k+1} \dots c_m}_{n}) = \frac{\overline{c_1c_2 \dots c_m} - \overline{c_1c_2 \dots c_k}}{\underbrace{99..9}_{n}\underbrace{00 \dots 0}_{k}}$$

Приклад. Перетворіть десятковий дріб $0,27(54)$ у звичайний.

$$0,27(54) = \frac{2754 - 27}{9900} = \frac{2727}{9900} = \frac{303}{1100}.$$

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Знайти число цифр періоду десяткового дробу, в яку перетворюється дріб $\frac{7}{39}$.

Так як знаменник 39 не ділиться ні на 2, ні на 5, то даний дріб перетворюється у чисто періодичний десятковий дріб.

Число цифр δ у періоді знаходимо з умови $10^\delta - 1 \vdots 39$. Ділимо на 39 вираз $10^\delta - 1$, послідовно надаючи δ значення 1, 2, 3 і так далі. Встановлюємо, що при $\delta = 6$ число $10^6 - 1 = 999999$ ділиться без остачі на число 39. Довжина періоду: 6.

Перевіряємо діленням: $\frac{7}{39} = 0,(179487)$.

Приклад. Знайти число цифр, які знаходяться до періоду, і довжину періоду періодичного дробу, в яку перетворюється дріб $\frac{13}{550}$.

Розкладаємо знаменник на множники: $550 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$. Дріб перетворюється на змішаний періодичний дріб.

Число цифр до періоду дорівнює $y = \max(\alpha, \beta) = 2$ – більший показник степеню чисел 2 і 5. Це означає, що періодичний десятковий дріб має дві цифри до періоду.

Число цифр δ у періоді знаходимо з умови $10^{\delta} - 1 \vdots 11$. 99 ділиться на 11, тому $\delta=2$.

Легко перевірити, що розглянутий дріб перетворюється в саме такий періодичний дріб: $\frac{13}{550} = 0{,}02(36)$.

Приклад. Знайти число цифр, які знаходяться до періоду, і довжину періоду періодичного дробу, в яку перетворюється дріб $\frac{27}{80}$.

Розкладаємо знаменник на множники: $80 = 2^4 \cdot 5$. Розклад містить лише 2 і 5, це означає, що дріб перетворюється в скінчений десятковий дріб.

Число цифр після коми дорівнює максимуму з показників степенів 2 і 5. Тобто максимуму з чисел 4 і 1.

Дріб перетворюється в скінчений, кількість знаків після коми 4.

$$\frac{27}{80} = 0{,}3375.$$

Приклад. Обчислити $0,(81) \cdot 1(2)$.

$$0,(81) \cdot 1,(2) = \frac{81}{99} \cdot 1\frac{2}{9} = \frac{9}{11} \cdot \frac{11}{9} = \frac{99}{99} = 1.$$

Приклад. Раціональними чи ірраціональними є числа:

1) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

2) $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3})$

3) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$

4) cos 24° + cos 48° – cos 84° – cos 12°

5) $sin\ (arctg\ \frac{3}{4} - arccos\ \frac{12}{13})$?

1) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

$\sqrt{29-12\sqrt{5}} = \sqrt{9+20-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}} = \sqrt{(3-2\sqrt{5})^2} = |\,3-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5}-3$

$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-2\sqrt{5}+3}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\sqrt{5}-|\,1-\sqrt{5}\,|} = \sqrt{\sqrt{5}-(-1+\sqrt{5})} =$

$\sqrt{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = \sqrt{1} = 1$ є Q.

2) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})$

$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3}) = \sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})^3}$.

Застосуємо формулу $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Маємо:

$(2-\sqrt{3})^3 = 8-12\sqrt{3} + 18 - (\sqrt{3})^3 = 26-12\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 26-15\sqrt{3}$.

Тоді:

$\sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})\cdot(26-15\sqrt{3})} = \sqrt[3]{676-225\cdot3} = \sqrt[3]{676-675} = \sqrt[3]{1}$

= 1 є Q.

4) $log_2 3\cdot log_3 4\cdot log_4 5$

$log_2 3\cdot log_3 4\cdot log_4 5 = \frac{log_3 3}{log_3 2}\cdot log_3 4\cdot log_4 5 = \frac{log_3 4}{log_3 2}\cdot log_4 5 = 2\cdot log_4 5$.

Нехай $log_4 5$ – раціональне число, тобто його можна представити у вигляді звичайного дробу $\log_4 5 = \frac{a}{b}$, a є Z, b є N.

За означенням маємо:

$$4^{\frac{a}{b}} = 5$$

тоді

$4^a = 5^b$.

НСД (4,5)=1, рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$, що неможливо. Тому $log_4 5$ не є раціональним числом, а добуток раціонального та ірраціонального числа є числом ірраціональним.

$log_2 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5$ – ірраціональне число.

4) $cos\ 24° + cos\ 48° – cos\ 84° – cos\ 12°$

$cos\ 24° + cos\ 48° - cos\ 84° - cos\ 12° =$

$= (cos\ 24° + cos\ 48°) – (cos\ 84° + cos 12°) =$

$= 2\ cos\ 36°\ cos\ 12° - 2\ cos\ 48°\ cos\ 36° = 2\ cos\ 36°\ (cos\ 12° - cos\ 48°) =$

$= 2\ cos\ 36°\ (-2\ sin\ 30°\ sin\ (-18°)) = 4\ cos\ 36° \cdot \frac{1}{2} \sin 18° = 2\ cos\ 36° \cdot \sin 18° =$

$= \frac{2\ cos\ 36° \cdot \sin 18°\ cos\ 18°}{\cos 18°} = \frac{2\ cos\ 36° \cdot \sin 36°}{2\ \cos 18°} = \frac{\sin 72°}{2 \cos 18°} = \frac{1}{2}\ є\ Q.$

5) $sin\ (arctg\ \frac{3}{4} – arccos\ \frac{12}{13})$

$sin\ (arctg\ \frac{3}{4} – arccos\ \frac{12}{13}) =$

$= sin\ (arctg\ \frac{3}{4}) \cdot \cos\ (arccos\ \frac{12}{13}) - cos\ (arctg\ \frac{3}{4}) \cdot \sin\ (arccos\ \frac{12}{13}) =$

$= sin\ (arcsin\ \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} \cdot \frac{12}{13} - cos\ (arccos\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}) \cdot sin\ (arcsin\ \sqrt{1 - \frac{144}{169}}) =$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \cdot \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{36}{5 \cdot 13} - \frac{20}{5 \cdot 13} = \frac{16}{65}\ є\ Q.$

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання. У який десятковий дріб переводиться даний звичайний дріб? Визначить кількість цифр після коми, довжину періоду, кількість цифр до періоду.

$\frac{27}{250}, \frac{15}{64}, \frac{12}{55}, \frac{7}{528}, \frac{2}{3}, \frac{7}{99}, \frac{9}{52}.$

Завдання. Виконайте дії:

1) $0,1(12) : 0,(3);$

2) $2,34 \cdot 0,(25);$

3) $0,02(3) + 0,1(03)$.

Завдання. Раціональним чи ірраціональним є число?

$\frac{1}{2\sin 10°} - 2\sin 70°$;

$sin16^0 + cos16^0 \cdot tg37^0$;

$\sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$;

$\sqrt{34-24\sqrt{2}} - \sqrt{233+60\sqrt{2}}$;

$\sin\left(2arctg\,\frac{1}{2}\right) - tg(\frac{1}{2}arcsin\,\frac{5}{17})$;

$\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{3\pi}{5}$?

Завдання. Доведіть методом від супротивного ірраціональність числа

1)$\sqrt{7}$;

2) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Завдання. Доведіть, що коли $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ раціональні, то $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ також раціональні.

Завдання. Доведіть, що дріб $\frac{n}{n^2+n+1}$, n ϵ $\boldsymbol{N}$ перетворюється у чисто періодичний дріб.

Завдання. Чи має раціональні корені рівняння: $2arccos\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} = arcsin\frac{2x}{5}$?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7

«Форми запису комплексних чисел. Дії над комплексними числами»

Теоретичний матеріал

Необхідність введення комплексних чисел виникла через те, що у множині дійсних чисел не можна розв'язати певні типи рівнянь, приміром рівняння $x^2 + 1 = 0$. Множина комплексних чисел отримується об'єднанням множини дійсних чисел з одним числом, яке не належить до множини дійсних чисел. Це число позначається символом i і називається уявною одиницею. Уявна одиниця має властивість: $i^2 = -1$, тобто $i = \sqrt{-1}$. Множину комплексних чисел позначають символом C.

Будь-яке комплексне число можна записати у виді $z = a + bi$, де $a, b -$ дійсні числа. Така форма запису комплексного числа називається *алгебраїчною формою*. Число a називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $Re\, z$, а число b називається уявною частиною числа z і позначається $Im\, z$. Комплексне число, дійсна частина якого дорівнює нулю ($Re\, z = a = 0$), називається уявним і записується у виді $z = bi$. Ототожнюючи запис $z = a + 0i$ і a отримуємо, що будь яке дійсне число є комплексним, тобто, множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел.

Теорема. Будь яке комплексне число можна єдиним чином записати в алгебраїчній формі.

Теорема. Два комплексних числа є рівними, якщо співпадають їх дійсні і уявні частини.

Алгебраїчна форма запису комплексного числа є основною для виконання арифметичних операцій над комплексними числами, таких як додавання, віднімання, множення та ділення.

1. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

2. $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$

3. $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$

$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$

Множення та ділення комплексних чисел іноді зручніше виконувати, надавши їм іншу форму запису. Для цього між множиною комплексних чисел та точками координатної площини встановлюють взаємно-однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z = a + bi$ ставлять у взаємно-однозначну відповідність точку з координатами $(a; b)$ декартової площини. Комплексною площиною називається координатна площина, точки якої зображають комплексні числа.

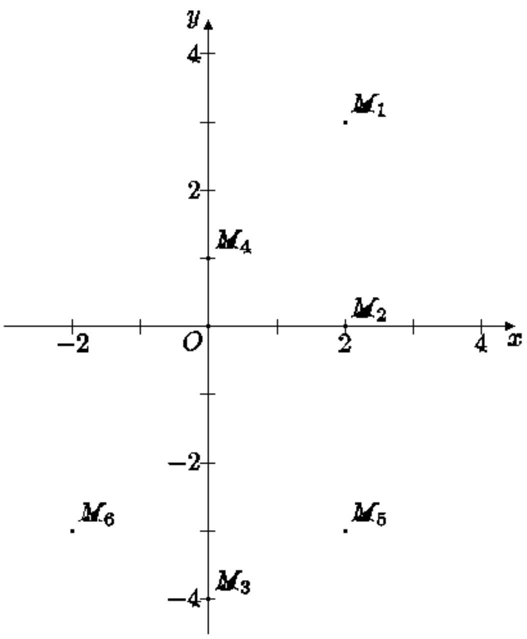


Рис. 1

Так, на рисунку 1 точка M_1 зображує комплексне число $z_1 = 2 + 3i$, точка M_2 зображеє комплексне число $z_2 = 2$, точка M_3 зображує комплексне число $z_3 = -4i$, точка M_4 зображує комплексне число $z_4 = i$, точка M_5 зображує комплексне число $z_5 = 2 - 3i$.

Означення. Радіус-вектором комплексного числа $z = a + bi$ називається вектор $\overline{\mathrm{OM}}$, який з'єднує початок координат (точку О) з точкою комплексної площини М, що зображує дане число.

Означення. Модулем комплексного числа $\boldsymbol{z}$ називається довжина його радіус-вектору.

Модуль комплексного числа $\boldsymbol{z}$ позначається символом $|\boldsymbol{z}|$ або літерою $\boldsymbol{r}$. Зрозуміло, що $\boldsymbol{r} \geq \mathbf{0}$.

Модуль комплексного числа $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}.$$

1) $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2} = \mathbf{0}$ тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{z} = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}\boldsymbol{i}$.

2) Модуль комплексного числа z – це відстань від початку координат (0,0) до точки, що зображує комплексне число z на комплексній площині.

3) Всі комплексні числа, модулі яких співпадають і дорівнюють r, зображуються точками кола $x^2 + y^2 = r^2$.

Означення. Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ називається кут φ, який належить інтервалу [0,2π), і який утворює радіус-вектор, що з'єднує початок координат з точкою, що відповідає числу $\boldsymbol{z}$ на комплексній площині, з додатним напрямком осі Ox (рис. 2).

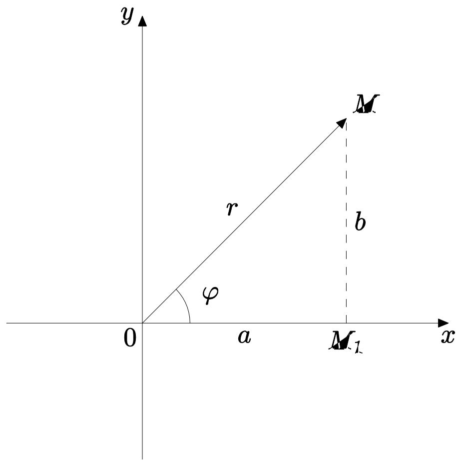


Рис. 2

Аргумент комплексного числа z позначається як $\arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не визначений.

З властивостей прямокутних трикутників випливають формули, що зв'язують дійсну та уявну частини комплексного числа з його модулем та аргументом.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

Звідки

$\boldsymbol{a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\varphi = r\cos\varphi}$

$\boldsymbol{b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\varphi = r\sin\varphi}.$

За допомогою модуля та аргументу комплексному числу можна надати іншу форму запису:

$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$

Форма запису комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

називається *тригонометричною формою* комплексного числа z.

Над комплексними числами в тригонометричній формі виконуються дії множення та ділення, а також піднесення комплексного числа до цілого степеня і добування кореня натурального степеня із нього.

Нехай $z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), z_2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$

1. Множення комплексних чисел в тригонометричній формі.

$z_1\, z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\rho(\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)).$

2. Ділення комплексних чисел в тригонометричній формі.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{r}{\rho}(\cos(\varphi - \alpha) + \sin(\varphi - \alpha)).$

3. Формула Муавра.

${z_1}^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,, n \in Z.$

4. Добування кореня з комплексного числа в тригонометричній формі.

$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n-1,\ n \in N$.

Зауважимо, що всі корені n-го степеня з числа $\boldsymbol{z_1}$ розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\boldsymbol{r}}$ з центром у початку координат.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Знайти суму, різницю, добуток, частку двох комплексних чисел:

$z_1 = 2 - 3i$ та $z_2 = -5 + 2i$.

$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-5 + 2i) = -3 - i$.

$z_1 - z_2 = (2 - 3i) — (-5 + 2i) = 7 - 5i$.

$z_1 z_2 = (2 - 3i)(-5 + 2i) = -10 + 4i + 15i - 6i^2 = -4 + 19i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-5+2i} = \frac{(2-3i)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)} = \frac{-10-4i+15i+6i^2}{(-5)^2-(2i)^2} = \frac{-16+11i}{25+4} =$$

$$= -\frac{16}{29} + \frac{11}{29}i.$$

Приклад. Обчислити $i^{39} + i^{52} - i^{61} - i^{66}$.

Використаємо властивість уявної одиниці $i^2 = -1$.

$$i^{39} + i^{52} - i^{61} - i^{66} = (i^2)^{19} \cdot i + (i^2)^{26} - (i^2)^{30} \cdot i - (i^2)^{33} = -i + 1 - i + 1$$

$$= 2 - 2i.$$

Приклад. Обчислити $(2 - i)^3 + \frac{1-3i^{33}}{i^{27}}$.

За формулою $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ маємо:

$(2 - i)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$.

Обчислимо $i^{33} = (i^2)^{16} \cdot i = i, i^{27} = (i^2)^{13} \cdot i = -i$.

Тоді $(2 - i)^3 + \frac{1-3i^{33}}{i^{27}} = 2 - 11i + \frac{1+3i}{-i} = 2 - 11i + \frac{(1+3i)\cdot i}{-i\cdot i} = 2 - 11i + i + 3 = 5 - 10i$.

Приклад. При яких значеннях $x, y \in \mathrm{R}$ комплексні числа z_1 і z_2 рівні, якщо:

$z_1 = 2(5 - 4ix) + 7y - 3$ і $z_2 = 4x - 1 + 3i(4y - ix) - 5i$?

Запишемо дані комплексні числа у алгебраїчній формі:

$z_1 = 2(5-4ix)+7y-3 = 10-8ix+7y-3 = (7+7y)-8xi,$

$z_2 = 4x-1+3i(4y-ix)-5i = 4x-1+12iy+3x-5i = (7x-1)+(12y-5)\cdot i.$

Два комплексних числа у алгебраїчній формі рівні, якщо рівні відповідно їх дійсні та уявні частини. Таким чином, маємо систему $\begin{cases} 7+7y = 7x-1 \\ -8x = 12y-5 \end{cases}$ або $\begin{cases} 7x-7y = 8 \\ 8x+12y = 5 \end{cases}$.

Якщо вам відомі формули Крамера, то краще розв'язати отриману систему лінійних рівнянь цим методом. Також можна розв'язати цю систему методом елементарних перетворень. Отримаємо рішення $x = \frac{131}{140}, y = -\frac{29}{140}$.

Приклад. Обчислити $\sqrt{-3+4i}$.

Квадратний корінь з комплексного числа – число комплексне.

Нехай $\sqrt{-3+4i} = a+bi$, де *a, b* – невідомі дійсні числа. Піднесемо обидві частини рівності до квадрату. Отримаємо рівність:

$-3+4i = (a+bi)^2$

$-3+4i = a^2-b^2+2abi$

За теоремою про рівність чисел у алгебраїчній формі отримуємо наступну систему:

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Методом підбору знаходимо, що:

$a = 1$, $b = 2$ або $a = -1$, $b = -2$.

Тоді $\sqrt{-3+4i} = 1+2i$ або $\sqrt{-3+4i} = -1-2i$.

Приклад. Розв'язати квадратні рівняння:

1) $z^2-(5+2i)\cdot z+5+5i = 0$;

2) $3z^2+5z+4 = 0$;

3) $(1+i)\cdot z^2-z+1+2i = 0$.

1) $z^2-(5+2i)\cdot z+5+5i=0$.

Тут a = 1, b = – (5 + 2i), c = 5 + 5i.

$$D=b^2-4ac=(5+2i)^2-4\cdot(5+5i)=25+20i+4i^2-20-20i=$$
$$=25+20i-4-20-20i=1.$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{1}=1.$$
$$z_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+2i-1}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i,$$
$$z_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+2i+1}{2}=\frac{6+2i}{2}=3+i.$$

2) $3z^2+5z+4=0$.

Тут a = 3, b = 5, c = 4.

$$D=5^2-4\cdot3\cdot4=25-48=-23=23\cdot(-1)=23i^2.$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{23i^2}=i\sqrt{23}.$$
$$z_1=\frac{-5-i\sqrt{23}}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}i,$$
$$z_2=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}i.$$

3) $(1+i)\cdot z^2-z+1+2i=0$.

Тут a = 1+i, b = –1, c = 1+2i.

$$D=(-1)^2-4\cdot(1+i)\cdot(1+2i)=1-4\cdot(1+2i+i+2i^2)=1-4(1+3i-2)=$$
$$=1-4(3i-1)=1-12i+4=5-12i.$$

Обчислимо $\sqrt{D}=\sqrt{5-12i}=a+bi$. Використаємо схему розв’язку попереднього прикладу:

$5-12i=a^2-b^2+2abi$, де a, b – невідомі дійсні числа.

$$\begin{cases}a^2-b^2=5\\ ab=-6\end{cases}$$

Числа $a=3,\quad b=-2$ є розв'язком цієї системи. Тоді $\sqrt{D}=\sqrt{5-12i}=3-2i.$

$$z_1=\frac{1+3-2i}{2(1+i)}=\frac{4-2i}{2(1+i)}=\frac{2-i}{1+i}=\frac{(2-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{2-2i-i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{1-3i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i,$$

$$z_2=\frac{1-(3-2i)}{2(1+i)}=\frac{1-3+2i}{2(1+i)}=\frac{2i-2}{2(1+i)}=\frac{i-1}{1+i}=\frac{(i-1)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{i-i^2-1+i}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i.$$

Очевидно, що $\sqrt{D}=\pm(3-2i)$. Ми обрали значення $\sqrt{D}=3-2i.$ Якщо ми оберемо значення $\sqrt{D}=-3+2i$, то спочатку отримаємо корінь z_2, а потім z_1. Це означає, що при розв'язку квадратних рівнянь над полем **C**, значення $\sqrt{D}$ можна вибрати з двох можливих.

Приклад. Записати комплексні числа в тригонометричній формі:

1) $1+i$; 2) $-\sqrt{3}+i$; 3) 2; 4) $2i$.

Тригонометрична форма комплексного числа має вигляд

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

де r – модуль комплексного числа ($r \geq 0$), φ – аргумент комплексного числа ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Якщо число z задано в алгебраїчній формі $z = a + bi$, то $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $tg\varphi=\frac{b}{a}$.

Доцільно використовувати наступну схему:

1. Визначити розташування точки $M(a;\, b)$, яка відповідає числу $z = a + bi$, на координатній площині (якій координатній чверті або якій координатній вісі належить M).

2. Обчислити r – модуль числа z .

3. Обчислити $tg\varphi_0=\left|\frac{b}{a}\right|$. Знайти значення φ_0 з таблиці, якщо це можливо.

φ_0	$0^0(0)$	$30^0(\frac{\pi}{6})$	$45^0(\frac{\pi}{4})$	$60^0(\frac{\pi}{3})$	$90^0(\frac{\pi}{2})$
$tg\varphi_0$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	*1*	$\sqrt{3}$	не існує

Кут φ можна обчислити так:

Якщо $M \in$ I чверті, то $\varphi = \varphi_0$.

Якщо $M \in$ II чверті, то $\varphi = 180^\circ - \varphi_0 = \pi - \varphi_0$.

Якщо $M \in$ III чверті, то $\varphi = 180^\circ + \varphi_0 = \pi + \varphi_0$.

Якщо $M \in$ IV чверті, то $\varphi = 360^\circ - \varphi_0 = 2\pi - \varphi_0$.

У випадку, коли $\mathrm{tg}\varphi = 0$ або не існує, кут φ знаходять, виходячи із розташування точки $M(a;\ b)$ на координатній площині.

1) $z = 1 + i$.

$a = 1$, $b = 1$, точка $M(1;\ 1)$, що відповідає даному комплексному числу, належить I координатній чверті.

Тоді $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

$tg\varphi_0 = \left|\frac{1}{1}\right| = 1, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$.

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

2) $z = -\sqrt{3} + i$.

$a = -\sqrt{3}$, $b = 1$, $M(-\sqrt{3};\ 1) \in$ III чв.

Тоді $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$

$tg\varphi_0 = \left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$.

3) $z = 2$.

$a = 2$, $b = 0$, $M(2;\ 0) \in OX$.

Тоді: $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{2^2} = 2$.

Кут φ можна легко обчислити, беручи до уваги розташування точки M на координатній площині: φ = 0.

$$z = 2(\cos 0 + i\sin 0).$$

4) $z = 3i$.

$a = 0$, $b = 3$, точка $M(0;\,3) \in Oy$.

Тоді: $r = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{3^2} = 3$.

Кут φ можна легко обчислити, беручи до уваги розташування точки M на координатній площині: φ = $\dfrac{\pi}{2}$.

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад. Виконати дії : $1)\ \left(\sqrt{3} - i\right)^7,\quad 2)\ \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$.

1) Запишемо число $z = \sqrt{3} - i$ у тригонометричній формі:

$a = \sqrt{3}$, $b = -1$, $M(\sqrt{3};\,-1) \in$ IV чв.

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$tg\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varphi_0 = 30^0,\quad \varphi = 360^0 - 30^0 = 330^0.$$

$$z = 2(\cos 330^0 + i\sin 330^0).$$

За формулою Муавра $z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$, отримаємо:

$$z^7 = \left(\sqrt{3} - i\right)^7 = 2^7\left(\cos(7\cdot 330^0) + i\sin(7\cdot 330^0)\right) = 128(\cos 2310^0 + i\sin 2310^0) =$$
$$= 128(\cos(6\cdot 360^0 + 150^0) + i\sin(6\cdot 360^0 + 150^0)) = 128(\cos 150^0 + i\sin 150^0) =$$
$$= 128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -64\sqrt{3} + 64i.$$

2) Запишемо чисельник і знаменник дробу у тригонометричній формі:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Застосовуючи формулу: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$ та формулу Муавра, отримаємо:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}=\left(\frac{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})}\right)^{40}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right)^{40}=$$

$$=(\sqrt{2})^{40}\left(\cos\left(-\frac{17\cdot 40\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{17\cdot 40\pi}{12}\right)\right)=2^{20}\left(\cos\frac{170\pi}{3}-i\sin\frac{170\pi}{3}\right)=$$

$$=2^{20}\left(\cos\left(56\pi+\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(56\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{20}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=$$

$$=-2^{19}\cdot\sqrt{3}-2^{19}\cdot i.$$

*Приклад***.** Використовуючи тригонометричну форму комплексного числа, виконати вказані дії: $\sqrt[3]{\dfrac{-3i}{2+2\sqrt{3}\cdot i}}$.

Запишемо числа $z_1=-3i$ і $z_2=2+2\sqrt{3}i$ в тригонометричній формі.

1) $z_1=-3i$.

$a=0$, $b=-3$, $M(0;-3)\in OY$.

$r_1=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$, $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$.

$$z_1=3(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

2) $z_2=2+2\sqrt{3}i$.

$a=2$, $b=2\sqrt{3}$, $M(2;2\sqrt{3})\in$ І чв.

$r_2=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$.

$\mathrm{tg}\varphi_0=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, $\varphi_0=\dfrac{\pi}{3}$, $\quad\varphi=\varphi_0=\dfrac{\pi}{3}$.

$$z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

3) Знайдемо частку

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Застосуємо формулу $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, де k приймає значення від 0 до $n-1$, отримаємо:

$$\sqrt[3]{\frac{-3i}{2+2\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\frac{3}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6}+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{6}+2\pi\kappa}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

Якщо $k = 0$, то $\omega_0=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$,

якщо $k = 1$, то $\omega_1=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{19\pi}{18}+i\sin\frac{19\pi}{18}\right)$,

якщо $k = 2$, то $\omega_2=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{31\pi}{18}+i\sin\frac{31\pi}{18}\right)$.

Приклад. Записати в тригонометричній формі комплексні числа:

1) $z=-\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$, 2) $z=1+\cos 40^0+i\sin 40^0$,

1) $z=-\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, звідки:

$$\begin{cases} r=1 \\ \cos\alpha=-\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\alpha=\cos\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Так як $\cos\alpha < 0$, а $\sin\alpha > 0$, то робимо висновок, що $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Для знаходження кута α використаємо формули зведення:

$$\sin\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}.$$

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

2) $z = 1 + \cos 40^0 + i\sin 40^0,$

$a = 1 + \cos 40^0,\ b = \sin 40^0.$

$$r = \sqrt{\left(1+\cos 40^0\right)^2 + \left(\sin 40^0\right)^2} = \sqrt{1 + 2\cos 40^0 + \cos^2 40^0 + \sin^2 40^0} = \sqrt{2(1+\cos 40^0)} =$$
$$= \sqrt{4\cos^2 20} = 2\cos 20^0,$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin 40^0}{1+\cos 40^0} = \mathrm{tg}\, 20^0, \quad \text{звідки } \alpha = 20^0.$$

$$z = 2\cos 20^0(\cos 20^0 + i\sin 20^0).$$

Приклад . Розв’язати рівняння $z + |z+1| + i = 0.$

$z + |z+1| + i = 0.$

Якщо $z = x + iy$, то $z + 1 = x + iy + 1 = (x+1) + iy$, тоді $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$.

Рівняння прийме вид:

$x + iy + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + i = 0.$

Застосовуючи теорему про рівність комплексних чисел в алгебраїчній формі, отримуємо систему:

$$\begin{cases} x + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x + 1 + 1} = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$(\sqrt{x^2 + 2x + 2})^2 = (-x)^2, x < 0$$
$$x^2 + 2x + 2 = x^2$$
$$2x = -2$$

$x = -1,\ y = -1.$

Відповідь: $z = -1 - i$.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання. Обчислити:

1) $3i^4+i^{18}+i^{23}-i^9$; 2) $2i^7+5i^{12}+i^{73}-i^{13}$; 3) $\frac{(2-3i)^2(1+2i)}{2+i}$;

4) $\frac{(1+i)^3(1+3i)}{3-i}$; 5) $\left(\frac{-1+5i}{(2+3i)\sqrt{2}}\right)^{-25}$; 6) $\left(\frac{(2+i)\sqrt{2}}{i-3}\right)^{-41}$.

Завдання. Розв’язати квадратні рівняння:

1) $z^2-2z+10=0$.

2) $4z^2+9=0$.

3) $z^2-2(1+i)z+2i-1=0$.

4) $z^2-4z+4+2i=0$.

5) $z^2-(4-i)z+5-5i=0$.

Завдання. При яких значеннях $x, y \in R$ комплексні числа z_1 та z_2 рівні?

1) $z_1=3(6-4ix)+9y-3$ та $z_2=5x-1+4i(4y+ix)-6i$.

2) $z_1=2(7+3ix)+7y+2$ та $z_2=7x+1-3i(6y-2ix)+3i$.

Завдання. Розв’язати рівняння, зробити перевірку:

1) $z-6+|z-1|^2=0$.

2) $4-z+|z+5|-3i=0$.

3) $iz+|z|=2+4i$.

Завдання. Записати комплексні числа у тригонометричній формі:

1) $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$; $z=-5$; $z=\cos 50^0-i\sin 50^0$.

2) $z=-2\sqrt{3}-2i$; $z=-2i$; $z=-\sin 50^0-i\cos 50^0$.

Завдання. Використовуючи тригонометричну форму комплексного числа, обчислити:

1) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{21}$; 2) $(\sqrt{3}-i)^8$; 3) $(\sqrt{3}+3i)^6$; 4) $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{20}$; 5) $\sqrt[4]{\frac{-i-1}{\sqrt{3}+i}}$;

6) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}i-1}{-1-i}}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8

«Схема Горнера. Корінь, кратний корінь многочлена»

Теоретичний матеріал

Означення. Многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$, $g(x)\,)\not\equiv 0$, якщо існує такий многочлен $q(x)$, що $f(x)= g(x)\cdot q(x)$, де $f(x), g(x), q(x) \in P[x]$, P – поле.

При цьому $f(x)$ називають діленим, $g(x)$ – дільником, $q(x)$ – часткою.

Означення. Многочлен $f(x)$ ділиться з остачею на многочлен $g(x)$, $g(x)\not\equiv 0$, якщо знайдуться многочлени $q(x)$ і $r(x)$ такі, що $f(x)=g(x)\cdot h(x)+r(x)$, при чому $0\leq deg\, r(x) < deg\, g(x)$ і $f(x),g(x), q(x),r(x)\in P[x]$.

Теорема про ділення з остачею. Для будь-яких многочленів $f(x),g(x)\in P[x]$, $g(x)\not\equiv 0$ існує єдина пара многочленів $q(x),r(x)\in P[x]$, таких що виконується рівність $f(x)=g(x)\cdot h(x)+r(x)$, при чому $0 \leq deg\, r(x)< deg\, g(x)$ або $r(x) \equiv 0$.

Сформулюємо одну з основних теорем теорії многочленів.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $(x-\alpha)$ дорівнює $f(\alpha)$, тобто $f(x) = (x - \alpha)\cdot g(x)+ f(\alpha)$.

Розглянемо схему ділення многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $(x - \alpha)$. За теоремою про ділення з остачею можемо записати, що

$$f(x) = (x - \alpha)\cdot g(x) + f(\alpha)$$

або

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - \alpha)(A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0)+ f(\alpha).$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, дістаємо:

$$\begin{cases} a_n = A_{n-1} \\ a_{n-1} = A_{n-2} - \alpha A_{n-1} \\ \quad . \; . \; . \\ a_1 = A_0 - \alpha A_1 \\ a_0 = f(\alpha) - \alpha A_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{n-1} = a_n \\ A_{n-2} = a_{n-1} + \alpha A_{n-1} \\ . \; . \; . \\ A_0 = a_1 + \alpha A_1 \\ f(\alpha) = a_0 + \alpha A_0 . \end{cases}$$

Такий метод ділення називається *схемою Горнера* та записується у вигляді таблиці.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
α	a_n	$\alpha\, a_n + a_{n-1}$	$\alpha A_{n-2} + a_{n-2}$	…	$\alpha A_1 + a_1$	$\alpha A_0 + a_0$
	A_{n-1}	A_{n-2}	A_{n-3}	…	A_0	$f(\alpha)$

Означення. Коренем многочлена $f(x)$ називається число α таке, що $f(\alpha) = 0$.

З теореми Безу випливає важливий наслідок:

Наслідок. Число α є коренем многочлена $f(x)$, тоді і тільки тоді, коли многочлен $f(x)$ ділиться на двочлен $(x - \alpha)$, тобто $f(x) = (x - \alpha)\cdot g(x)$.

Таким чином, відшукування коренів многочлена $f(x)$ рівносильне відшукуванню лінійних дільників цього многочлена.

Означення. Якщо многочлен $f(x)$ ділиться без остачі на $(x - \alpha)^k$, але не ділиться на $(x - \alpha)^{k+1}$, то α називається k-кратним коренем $(k \geq 1)$ або коренем кратності k многочлена $f(x)$.

В цьому випадку $f(x) = (x - \alpha)^k \cdot g(x)$, $g(\alpha) \neq 0$.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Поділити $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$ на $x - 3$.

Тут $a_4 = 2$, $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $\alpha = 3$.

Складемо схему Горнера:

	2	1	–3	0	1
3	**2**	$3\cdot 2 + 1 = \mathbf{7}$	$3\cdot 7 - 3 = \mathbf{18}$	$3\cdot 18 + 0 = \mathbf{54}$	$3\cdot 54 + 1 = \mathbf{163}$

Або, якщо обчислення не записувати в таблицю:

	2	1	–3	0	1
3	**2**	7	18	54	163

Шукана частка $g(x) = 2x^3 + 7x^2 + 18x + 54$, остача $r = 163$.

$f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 3)(2x^3 + 7x^2 + 18x + 54) + 163.$

Приклад. Обчислити значення многочлена $f(x) = (1 + i)x^4 - 2x^3 + ix^2 - (1+i)x + 3$ в точці $x_0 = 1 - i$.

Згідно з теоремою Безу, значення многочлена в точці x_0 є остачею від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - x_0)$.

	$1+i$	-2	i	$-(1+i)$	3
$1-i$	$1+i$	0	i	0	$\mathbf{3}$

Обчислення будемо проводити не в таблиці:

$(1-i)(1+i) - 2=1+i-i-i^2-2=0$

$(1-i)\cdot 0 + i=i$

$(1-i)\cdot i - (1+i)=i-i^2-1-i=0$

$(1-i)\cdot 0+3=3$

$f(1 - i) = 3.$

Приклад. Визначити кратність кореня $\alpha = 4$ для многочлена $f(x) = x^4 - 7x^3 + +9x^2 + 8x +16.$

За допомогою розкладу многочлена за степенями різниці $(x - \alpha)$ зручно визначити кратність кореня $x = \alpha$ для многочлена $f(x)$. Для цього необхідно обчислити послідовні остачі від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - \alpha)$. Кількість перших нульових остач в схемі Горнера є кратністю кореня $x = \alpha$ для $f(x)$.

	1	-7	9	8	16
4	1	-3	-3	-4	0
4	1	1	1	0	
4	1	5	$21\neq 0$		

Як бачимо, при послідовному діленні отримали дві нульові остачі, це свідчить про те, що $\alpha = 4$ для многочлена $f(x)$ є коренем кратності 2. Многочлен $f(x)$ ми можемо представити у вигляді (користуючись схемою Горнера):

$f(x) = (x - 4)^2(x^2 + x +1).$

Приклад. При яких значеннях a, b, c многочлен $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-24$ має число $\alpha = -2$ коренем не нижче третьої кратності?

Припустимо, що $\alpha = -2$ є коренем многочлена $f(x)$ кратності $k \geq 3$. Будемо ділити $f(x)$ послідовно на $x+2$:

	1	a	b	c	-24
-2	1	$a-2$	$b-2a+4$	$c-2b+4a-8$	$-2c+4b-8a-8=0$
-2	1	$a-4$	$b-4a+12$	$c-4b+12a-32=0$	
-2	1	$a-6$	$b-6a+24=0$		

Так як перші три остачі в схемі Горнера повинні дорівнювати 0, маємо систему:

$$\begin{cases} -2c + 4b - 8a - 8 = 0 \\ c - 4b + 12a - 32 = 0 \\ b - 6a + 24 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -4 \\ 12a - 4b + c = 32 \\ 6a - b = 24, \end{cases}$$

розв'язками якої є числа $a = 3, b = -6, c = -28$.

Одержана умова являється не тільки необхідною, але і достатньою.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{3x^4+x^3-2x^2+1}{(x+2)^3}dx.$$

Розкладемо чисельник дробу по степеням двочлена $(x+2)$. Запис многочлена у виді $f(x) = c_n(x-\alpha)^n + c_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + c_1(x-\alpha) + c_0$ називається *розкладом многочлена $f(x)$ за ступенями двочлена $(x-\alpha)$.* Коефіцієнти розкладу $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ одержані при послідовному діленні многочлена $f(x)$ на двочлен $(x-\alpha)$. Обчислення зручно робити за схемою Горнера.

	3	1	–2	0	1
–2	3	–5	8	–16	$33=c_0$
–2	3	–11	30	$–76=c_1$	
–2	3	–17	$64=c_2$		
–2	3	$–23=c_3$			
–2	$3=c_4$				

$$\int \frac{3x^4+x^3-2x^2+1}{(x+2)^3}dx=\int \frac{3(x+2)^4-23(x+2)^3+64(x+2)^2-76(x+2)+33}{(x+2)^3}dx=$$

$$=3\int(x+2)dx-23\int dx+64\int\frac{dx}{x+2}-76\int\frac{dx}{(x+2)^2}+33\int\frac{dx}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{3(x+2)^2}{2}-23x+64\ln|x+2|+\frac{76}{(x+2)}-\frac{33}{2(x+2)^2}+C.$$

Приклад. Визначити коефіцієнти a і b так, щоб многочлен $f(x)=ax^4+bx^3+1$ ділився на многочлен $g(x)=(x-1)^2$.

Так як $f(x)\vdots(x-1)^2$, то $x = 1$ – корінь кратності 2 многочлена $f(x)$.

	a	b	0	0	1
1	a	$a+b$	$a+b$	$a+b$	$a+b+1=0$
1	a	$2a+b$	$3a+2b$	$4a+3b=0$	

Маємо систему:

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 4a+3b=0, \end{cases}$$

розв’язками якої є числа $a = 3,\ b = -4$.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання. Обчислити значення многочлена в точці $x=x_0$:

1) $f(x)=3x^5-2x^4+x^2-x+5$ в точці $x_0 = 2$.

2) $f(x)=2x^4+5x^3+3x^2-2x+1$ в точці $x_0 = -1$.

3) $f(x)= ix^3+(4–3i)x^2–(1+i)x+7–3i$ в точці $x_0 = 1+2i$.

4) $f(x)=3x^4– (3+2i)x^3 + ix^2– (2–i)x + 4i$ в точці $x_0 = – i$.

Завдання. Перевірити, чи є дані числа коренями даного многочлена.

1) $f(x)=x^4–3x^3–7x^2+27x–18$, $\alpha =2;3; –1$.

2) $f(x)= 4x^4–8x^3–3x^2+7x–2$, $\alpha =2; –¼;½$.

3) $f(x)= 2x^4+3x^3+3x^2+3x+1$, $\alpha =½;–½; –2$.

Завдання. Визначити кратність кореня $x = \alpha$ для $f(x)$.

1) $f(x)= x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+1, x = –1$.

2) $f(x)= 5x^3–28x^2+33x+18, x = 3$.

3) $f(x)= x^4+(2–6i)x^3+(6i-12)x^2+(6-8i)x+3+2i, x = i$.

Завдання. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями різниці $(x – \alpha)$.

1) $f(x)= x^4–x^3+3x^2+x+5, \alpha = 1$.

2) $f(x)= x^3–x^2+4x+1, \alpha = –2$.

3) $f(x)= x^4+2x^2–x–4, \alpha = 3$.

Завдання. При яких цілих значеннях p і q многочлен:

1) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + px^2 + qx$ ділиться на $g(x) = x^2 - 1$.

2) $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 1$ ділиться на $g(x) = (x-1)^2$.

3) $f(x) = px^4 - qx^3 + 1$ ділиться на $g(x) = (x+1)^2$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9

«Раціональні корені алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Рівносильні та нерівносильні перетворення рівнянь»

Теоретичний матеріал

Теорема (*про раціональні корені алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами*). Якщо $\frac{p}{q}$ – нескоротній дріб $(q \neq 0)$, який є коренем алгебраїчного рівняння $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ з цілими коефіцієнтами, то p є дільником вільного члену a_0 $(a_0 \vdots p)$, а q є дільником старшого коефіцієнта a_n $(a_n \vdots q)$.

Доведення:

Число $\frac{p}{q}$ є коренем рівняння, якщо

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Щоб позбутися дробу, помножимо обидві частини рівняння на q^n.

В результаті отримаємо наступне рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Ми бачимо, що всі доданки лівої частини, крім останнього, мають спільний множник p, а тому діляться на нього. При цьому права частина також ділиться на p також ділиться, звідки слідує, що доданок $a_0 q^n$ ділиться на p, тобто $a_0 \vdots p$.

Так само ми бачимо що частина $a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$ має спільний множник q, а тому ділиться націло на нього. Значить, доданок $a_n p^n$ також ділиться на q, права частина рівняння також ділиться на q, з чого випливає: $a_n p^n \vdots q$, тобто $a_n \vdots q$.

Наслідок. Якщо старший коефіцієнт алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнює 1 $(a_n = 1)$, то всі можливі раціональні корені рівняння є цілими числами і дільниками вільного члена a_0.

Якщо старший коефіцієнт $a_n = 1$, то за теоремою знаменник q дробу $\frac{p}{q}$ може бути лише ±1. Це означає, що всі раціональні корені такого рівняння, якщо вони існують, є цілими числами.

Перевіряти, чи є задане число коренем рівняння доцільно за схемою Горнера.

Теорема про раціональні корені лише дає перелік можливих раціональних коренів, але вона не гарантує їхнього існування. Може трапитися так, що жодне з чисел зі списку не є коренем даного рівняння, тобто рівняння не має раціональних коренів.

Існують інші необхідні умови для того, щоб раціональне число було коренем алгебраїчного рівняння $f(x)=0$ з цілими коефіцієнтами.

Зокрема, щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ був раціональним коренем рівняння $f(x)=0$, необхідно, щоб при довільному цілому k число $f(k)$ ділилося на число $p - qk$, де $p - qk \neq 0$. Така умова на практиці найчастіше використовується для $k = \pm 1$, при цьому числа $\frac{f(-1)}{p-q}$ і $\frac{f(-1)}{p+q}$ мають бути цілими.

Означення. Два рівняння називаються *рівносильними*, якщо вони мають однакові множини коренів. Якщо обидва рівняння не мають коренів, то вони теж вважаються рівносильними.

Рівносильні перетворення рівнянь – це такі перетворення, які переводять дане рівняння в рівносильне йому рівняння. Тобто, після такого перетворення множина коренів рівняння не змінюється.

Основні рівносильні перетворення рівнянь:

1) Перенесення доданка з однієї частини рівняння в іншу.

2) Додавання або віднімання одного й того ж числа або виразу, що має зміст для всіх значень змінних, від обох частин рівняння.

Це перетворення є узагальненням попереднього. Важливо, щоб вираз, який додається/віднімається, був визначений на всій області допустимих значень (ОДЗ) рівняння.

3) Множення або ділення обох частин рівняння на одне й те ж число, відмінне від нуля, або на вираз, що зберігає знак і не дорівнює нулю на всій ОДЗ рівняння.

4) Піднесення обох частин рівняння до непарного степеня або до парного степеня за умови, що обидві частини рівняння невід'ємні.

Піднесення до непарного степеня зберігає знак, тому корені не змінюються.

5) Логарифмування обох частин рівняння за умови, що обидві частини додатні та основа логарифма більша за нуль і не дорівнює одиниці.

Нерівносильні перетворення – це такі перетворення, які можуть змінити множину коренів рівняння: додати сторонні корені, втратити корені або змінити ОДЗ.

Ось найпоширеніші нерівносильні перетворення та їх наслідки:

1) Ділення обох частин рівняння на вираз зі змінною, який може дорівнювати нулю.

Внаслідок цього перетворення може відбутися втрата коренів рівняння. Наприклад, якщо рівняння $x(x+2) = x(2x-3)$ поділити на x, то ми втратимо корінь $x = 0$. Для рішення рівняння потрібно перенести всі доданки в одну частину $x(x+2) - x(2x-3) = 0$ та винести спільний множник за дужки $x((x+2) - (2x-3)) = 0$. Рівняння має корені $x = 0$ і $x = 5$.

2) Піднесення обох частин рівняння до парного степеня без урахування знаків.

Піднесення до парного степеня може призвести до появи сторонніх коренів. Наприклад, розглянемо рівняння:

$$\sqrt{x+2} = x,$$

піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Рівняння має два корені: $x = -1$ і $x = 2$. Перевіркою встановлюємо, що $x = -1$ не є коренем рівняння $\sqrt{x+2} = x$. Внаслідок нерівносильного перетворення з'явився сторонній корінь $x = -1$.

При піднесенні до парного степеня необхідно обов'язково перевіряти знайдені корені підстановкою у вихідне рівняння або враховувати ОДЗ та знаки частин рівняння.

У даному рівнянні $x + 2 \geq 0$, але внаслідок $\sqrt{x+2} \geq 0$ також $x \geq 0$.

3) Застосування логарифмічної функції, коли аргумент може бути недодатним.

При цьому перетворенні може відбутися звуження ОДЗ рівняння та втрата коренів рівняння.

Наприклад, розглянемо рівняння:

$$x^2 = 9.$$

ОДЗ цього рівняння не має обмежень. Рішення цього рівняння $x = \mp 3$.

Якщо ми прологарифмуємо обидві частини цього рівняння:

$$\log_3 x^2 = \log_3 9$$

$$2\log_3 x = 2$$

$$\log_3 x = 1$$

$$x = 3.$$

В результаті неравносильних перетворень ми втратили корінь $x = -3$. Помилка відбулась при переході від $\log_3 x^2$ до $2\log_3 x$, де ми наклали на x додаткову умову $x > 0$, що звузило ОДЗ рівняння та призвело до втрати кореня. Потрібно було виконувати перетворення так: $\log_3 x^2 = 2\log_3 |x|$, тоді ми мали б рівняння $|x| = 3$ або $x = \mp 3$.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Знайти раціональні корені рівняння.

$$4x^3 - 10x^2 + 8x - 2 = 0.$$

Знайдемо можливі раціональні корені рівняння.

Спочатку випишемо дільники коефіцієнтів a_0 і a_n, які відповідають значенням p і q відповідно:

$a_0 = -2$: p: $\pm1, \pm2$.

$a_n = a_3 = 4$: q: $\pm1, \pm2, \pm4$.

Випишемо можливі значення раціональних коренів.

$\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$

По черзі підставляємо кожне із значень у схему Горнера.

	4	-10	8	-2
1	4	-6	2	0

Тобто x=1 – корінь рівняння.

Розкладаємо на множники ліву частину рівняння, використовуючи коефіцієнти частки:

$(x-1)(4x^2-6x+2)=0.$

Корені у другому множнику ми можемо спробувати знайти за допомогою дискримінанта.

$$4x^2-6x+2=0$$

Спочатку скоротимо рівняння:

$$2x^2-3x+1=0$$

$$D=9-8=1$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm1}{4};\quad x_1=1;\quad x_2=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: x $\in \left\{1;\ \frac{1}{2}\right\}$

Приклад. Знайти раціональні корені рівняння

$$3x^5+x^4-15x^3-5x^2+12x+4=0.$$

Випишемо дільники коефіцієнтів a_0 і a_n, які відповідають значенням p і q відповідно:

$a_0 = 4$: p: $\pm1, \pm2, \pm4$.

$a_n = a_5 = 3$: q: $\pm1, \pm3$.

Випишемо можливі значення раціональних коренів $\frac{p}{q}$:

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$.

Заповнимо схему Горнера згідно наших даних:

	3	1	-15	-5	12	4
1	3	4	-11	-16	-4	0

Перевіряємо отриманий корінь на кратність

1	3	7	-4	-20	-24≠0
-1	3	1	-12	-4	0

Знову перевіряємо отриманий корінь на кратність

-1	3	-2	-10	6≠0
2	3	7	2	0

Оскільки ми вже знайшли 3 кореня, то ми можемо привести наше рівняння до виду:

$$(x-1)(x+1)(x-2)(3x^2+7x+2)=0$$

$$3x^2+7x+2=0$$

$$x_1=-2; \quad x_2=-\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $x \in \left\{-2;\ -\frac{1}{3};\ -1; 1; 2\right\}$

Приклад. Розв’язати рівняння:

$$2x^3-5x^2+6x-2=0.$$

Виписуємо значення дільників q: $\pm 1, \pm 2$ і p: $\pm 1, \pm 2$. Тоді можливі раціональні корені рівняння прийматимуть значення:

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$.

	2	-5	6	-2
1	2	-3	3	1≠0
-1	2	-7	13	-15≠0

2	2	-1	4	-6≠0
-2	2	-9	24	-50≠0
$\frac{1}{2}$	2	-4	4	0

Розкладаємо ліву частину рівняння на множники.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+4)=0.$$

$$2x^2-4x+4=0$$

$$D=16-32=-16.$$

$$D=-16=16i^2.$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 4i}{4};\quad x_1=1+i;\quad x_2=1-i.$$

Відповідь: x $\in\left\{\frac{1}{2}; 1+i;\ 1-i\right\}$.

Приклад. Довести, що число $1+\sqrt[3]{2}$ ірраціональне.

Для доведення скористаємось методом доведення від супротивного: нехай $1+\sqrt[3]{2}\in\mathbb{Q}$ (раціональне число).

Припустимо, що $1+\sqrt[3]{2}=r\ \in\mathbb{Q}$.

$$r-1=\sqrt[3]{2}.$$

Піднесемо обидві частини рівності до третього степеню:

$$(r-1)^3=(\sqrt[3]{2})^3.$$

За формулою $(a-b)^3=\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$:

$$r^3-3r^2+3r-1=2,$$

$$r^3-3r^2+3r-3=0.$$

За побудовою число r є коренем рівняння

$$x^3-3x^2+3x-3=0.$$

Можливі раціональні корені рівняння: $\pm1,\pm3$.

Підставимо вказані значення у схему Горнера і визначимо, чи має це рівняння раціональні корені:

	1	-3	3	-3	
1	1	-2	1	-2	$-2\neq 0$
-1	1	-4	7	-10	-10≠0
3	1	0	3	6	6≠0
-3	1	-6	21	-66	-66≠0

Рівняння не має раціональних коренів. Це означає, що наше припущення не вірне, і число $1+\sqrt[3]{2}$ ірраціональне, що і треба було довести.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3+9x^2+23x+15=0$.

2) $5x^4+9x^3-2x^2-4x-8=0$.

Завдання. Розкладіть многочлен на множники над полем дійсних чисел.

1) $f(x)=2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2$.

2) $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-12x+4$.

Завдання. Доведіть, що дане число ірраціональне.

1) $2-\sqrt[3]{3}$.

2) $\sqrt{6}+\sqrt{10}$.

Завдання. Поясніть, чи можна при розв'язанні раціональних нерівностей методом інтервалів переходити від нерівності $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ до нерівності $P(x)Q(x)\geq 0$ з урахуванням ОДЗ? Чи є ці нерівності рівносильними? Обґрунтуйте свою відповідь.

Завдання. Проаналізуйте помилку, припущену учнем при рішенні рівняння:

$\frac{x^2-9}{x-3}=0$, $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=0, x+3=0, x=-3$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10

«Змістові лінії математичного аналізу у сучасному ШКМ. Розвиток поняття функції у ШКМ. Область визначення функції, множина значень функції»

Теоретичний матеріал

Поняття функції – одне з основних понять в сучасному курсі математики. Його розвиток у шкільному курсі математики не є одномоментним введенням складного визначення, а радше поступовим, багатоетапним процесом, що відображає історичний шлях становлення цього поняття.

Початки розуміння залежності з'являються ще в початковій школі, в якій формується інтуїтивне уявлення про те, що зміна однієї величини веде до зміни іншої. Таблиці, схеми, прості задачі на «було-стало» стають першими віхами на цьому шляху.

У базовій школі (5-9 класи) поняття функції починає набувати більш формальних обрисів. З'являються формули для обчислення периметра, площі, об'єму. Координатна площина дозволяє візуалізувати залежності, а вивчення прямої пропорційності є першим кроком до розуміння графічного представлення функціональних зв'язків. У 7-му класі відбувається введення поняття функції. Учні дізнаються про різні способи її задання: аналітичний (формулою), табличний, графічний. Вивчаються основні властивості функцій: область визначення та множину значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості. В 7-9 класах вивчаються властивості та графіки функцій $y = kx + b, y = \frac{k}{x}, y = x^2, y = \sqrt{x}, y = ax^2 + bx + c,$ побудова графіків функцій за допомоги перетворень.

В профільній школі (10-11 класи) до вже відомих властивостей додаються парність/непарність, періодичність, монотонність, неперервність. Розширюється спектр досліджуємих функцій: вивчаються степеневі, тригонометричні, обернені тригонометричні, показникові, логарифмічні функції та їх графіки. Вивчається похідна функції та застосовується для дослідження функцій, що дає інструмент для аналізу поведінки функцій, знаходження екстремумів функцій, найбільших та найменших значень на заданих відрізках, побудови складних графіків. Введення понять неперервності, оберненої та складеної функцій формує більш повне та глибоке уявлення про цей потужний математичний інструмент.

Таким чином, розвиток поняття функції в шкільному курсі математики є багатогранним і послідовним процесом. Він перетворює інтуїтивне розуміння залежностей на формальне, абстрактне поняття, що дозволяє учням моделювати та досліджувати реальні процеси, розвивати логічне мислення.

До основних елементарних функцій відносять степеневі функції, показникові функції, логарифмічні функції, тригонометричні функцій, обернені тригонометричні функцій. Елементарні функції – це клас функцій, які можна отримати з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій додавання, віднімання, множення, ділення та операції композиції функцій.

Основними властивостями класу елементарних функцій є властивості неперервності, диференційованості, замкненості відносно арифметичних операцій та композиції.

Існують неелементарні функції, які не можуть бути виражені таким чином, як елементарні.

Ідея функціональної залежності, тобто зв’язку між величинами, де зміна однієї спричиняє зміну іншої, виникла задовго до появи самого терміна «функція». У XVII столітті завдяки працям Рене Декарта та П’єра Ферма. Їхнє запровадження координатної площини дозволило перевести геометричні криві в алгебраїчні рівняння. Це був перший крок до аналітичного представлення залежностей. Криві почали розглядати як множини точок, координати яких пов'язані певним правилом.

Термін «функція» вперше з’явився у працях Ґотфріда Вільгельма Лейбніца у 1673 році. Він використовував його для позначення різних величин, що характеризують криву. Однак, його визначення було ще досить розпливчастим і не охоплювало всіх сучасних аспектів.

Наступний важливий етап пов'язаний з ім’ям Леонарда Ейлера у XVIII столітті. У 1748 році у своїй праці «Вступ до аналізу нескінченно малих» він сформулював поняття функції як аналітичного виразу, тобто формули, що пов’язує змінні. Ейлер активно досліджував різні типи функцій – тригонометричні, логарифмічні, показникові, заклавши основи для подальшого розвитку математичного аналізу. Проте, ейлерове визначення було ще надто вузьким, оскільки обмежувало функції лише тими, що можуть бути виражені однією формулою.

На початку XIX століття, під впливом потреб фізики та розв’язання задач, зокрема, про коливання струни, виникла потреба в ширшому розумінні функції. Жан-Батіст Жозеф Фур’є показав, що довільну функцію можна представити у вигляді ряду тригонометричних функцій. Остаточне, сучасне визначення функції як відповідності між елементами двох множин, де кожному елементу першої множини (області визначення) ставиться у відповідність рівно один елемент другої множини (області значень), сформулював у 1837 році німецький математик Йоганн Петер Ґустав Лежен Діріхле. Це визначення є найбільш загальним і використовується донині, дозволяючи розглядати функції, які не обов’язково задаються єдиною аналітичною формулою, а можуть бути описані, наприклад, таблицею або графіком. Таким чином, поняття функції пройшло довгий шлях від інтуїтивного уявлення про залежності до суворого формального визначення, що стало центральним у всій математиці.

Нехай X та Y – дві не порожні числові множини, а x та y – відповідно їх елементи.

Означення. Якщо кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано *функцію* f зі значеннями з множини Y і записують $y = f(x)$.

Множина X називається *областю визначення* функції (domain of function) і позначається як $D(f)$. *Множиною значень* функції є множина всіх значень $y \in Y$, які приймає функція $f(x)$ для кожного елемента x з її області визначення $D(f)$. *Множина значень* функції позначається як $E(f\ )$. Очевидно, що $E(f\ ) \subseteq Y$.

Функцію можна задати аналітично, за допомогою таблиці та графічно. При аналітичному способі функція задається за допомогою формул, при побудові яких використовується запас раніше вивчених спеціальних функцій та набір арифметичних операцій. В цьому випадку область визначення може бути явно не вказана, але її розуміють як множину всіх значень $x \in R$, при яких ця формула має зміст.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Знайти область визначення функції:

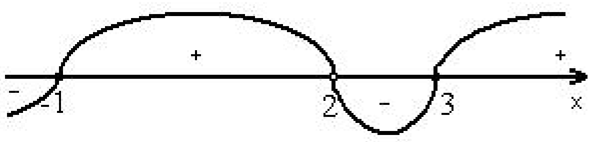
1) $y = \sqrt{\frac{3+2x-x^2}{x-2}}$.

$$D(y):\ \frac{3 + 2x - x^2}{x - 2} \geq 0$$

Розв'яжемо нерівність методом інтервалів:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{(x + 1)(x - 3)}{x - 2} \leq 0$$



$x \in (-\infty; -1] \cup (2; 3]$

2) $y = \arcsin(3 - 2x)$.

$D(y): -1 \leq 3 - 2x \leq 1$

Розв'яжемо подвійну нерівність:

$-1 \leq 3-2x \leq 1|-3$

$-4 \leq -2x \leq -2|:2$

$-2 \leq -x \leq -1|\cdot(-1)$

$1 \leq x \leq 2$

$x \in [1;2]$

3) $y = \frac{\sqrt[4]{x+5}-\sqrt[3]{5-2x}}{\log_2(1-x)}$

$D(y): \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x > 0 \\ \log_2(1-x) \neq 0 \end{cases}$

Розв’яжемо систему:

$\begin{cases} x \geq -5 \\ x < 1 \\ 1-x \neq 2^0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -5 \\ x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$x \in [-5;0) \cup (0;1)$

4) $y = \ln(|2x-4|-x)$.

$D(y)$: $|2x-4|-x > 0$

Розв’яжемо нерівність, що містить знак модуля:

$|2x-4| > x$

1 випадок: $2x-4 \geq 0, x \geq 2$. $|2x-4| = 2x-4$.

Маємо систему:

$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x-4 > x \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 4 \end{cases}$

$x \in (4;+\infty)$

2 випадок: $2x-4 < 0, x < 2$. $|2x-4| = -2x+4$.

Маємо систему:

$\begin{cases} x < 2 \\ -2x+4 > x \end{cases}$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x < \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$x \in (-\infty; \frac{4}{3})$

Область визначення функції – це об’єднання розв'язків з обох випадків.

$x \in (-\infty; \frac{4}{3}) \cup (4; +\infty)$

Приклад. Знайти множину значень функції:

1) $y = \sqrt{x+9} - 2$

$E(y)$: $\sqrt{x+9} \geq 0$

$\sqrt{x+9} - 2 \geq -2$

$y \in [-2; +\infty)$

2) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$D(y)$: $x \geq 0$.

$E(y)$: Перепишемо функцію у вигляді:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$$

Оцінимо значення дробу:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} > 0.$$

Так як $1 + \sqrt{x} \geq 1$, то $\frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$.

$$0 < \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1.$$

Тоді

$$0 \leq 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}} < 1.$$

$y \in [0;1)$

3) $y = 3^{3-\sin x}$

$E(y)$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$2 \le 3 - \sin x \le 4$

$3^2 \le 3^{3-\sin x} \le 3^4$

$y \in [9; 81]$.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання. Знайти область визначення функції:

1) $y = \arcsin\sqrt{x}$.

2) $y = \sqrt{\frac{x-x^2}{x}}$.

3) $y = \log_{x+3}\frac{2x+1}{3x-2}$.

4) $y = \sqrt{|x+2|-5} + \frac{1}{|x|-1}$.

5) $y = \frac{x}{1-\cos x}$.

Завдання. Знайти множину значень функції:

1) $y = 1 - 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$.

2) $y = 3 - \sqrt{x-2}$.

3) $y = \frac{x+3}{x-1}$.

4) $y = 3\sin x - 7\cos x$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11

«Композиція функцій. Обернена функція, графік оберненої функції»

Теоретичний матеріал

На множині всіх функцій вводять операцію, яку називають композицією або множенням функцій.

Означення. Нехай задано функцію $y = f(x)$ і функцію $g = F(y)$, при чому $E(f) \subseteq D(F)$. Функція $h = F\big(f(x)\big), x \in D(f)$ називається *композицією* функцій або *складеною функцією* і позначається $h = F \circ f$.

$$(F \circ f)(x) = F\big(f(x)\big).$$

Функція $g = F(y)$ називається зовнішньою функцією, функція $y = f(x)$ – внутрішньою функцією.

Оскільки композицію ще називають множенням функцій, то функції, задіяні при композиції, іноді називають множниками.

Властивості операцій композиції:

1. Операція композиції некомутативна.

В загальному випадку $F \circ f \neq f \circ F$.

2. Операція композиції асоціативна.

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Складені функції, або композиції функцій, є важливою темою в шкільному курсі математики, яка дозволяє учням краще розуміти взаємозв'язки між різними математичними поняттями та моделювати складніші реальні процеси. Їхнє застосування не обмежується лише алгеброю, а пронизує інші розділи математики.

Де зустрічаються складені функції в шкільному курсі математики? При перетворенні графіків функцій. Заміна змінних при розв’язанні рівнянь та нерівностей є типовим прикладом використання складених функцій. Знаходження похідних складних функцій – невід’ємна частина диференціального числення. В курсі геометрії композиція рухів, таких як послідовні паралельні перенесення, повороти, симетрії, також є прикладом складених функцій. Наприклад, поворот фігури, а потім її паралельне перенесення – це композиція двох геометричних перетворень-функцій.

Обернені функції є частиною шкільного курсу алгебри та початків аналізу. Поняття оберненої функції є фундаментальною для подальшого вивчення математичного аналізу, диференціальних рівнянь, лінійної алгебри та інших дисциплін. Але не кожна функція має обернену функцію. Для того, щоб функція мала обернену, вона повинна бути взаємно-однозначною**.** Це означає, що різним значенням x з $D(f)$ відповідають різні значення y з $E(f)$.

Означення. Функцію, яка визначена на $E(f)$ і яка кожному $y \in E(f)$ ставіть у відповідність таке $x \in D(f)$, що $f(x) = y$, називають оберненою для функції f і позначають як f^{-1}.

Згідно означенню $D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f)$.

Теорема. Функція $y = f(x)$ має обернену функцію, якщо вона монотонна на області визначення.

Графік оберненої функції f^{-1} симетричний графіку функції f відносно прямої $y = x$.

Практичні завдання для аудиторної роботи

Приклад. Знайти композиції функцій $f \circ g$ і $g \circ f$:

1) $f(x) = 5x - 3, g(x) = x^2$.

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 5x^2 - 3$.

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(5x - 3) = (5x - 3)^2$.

2) $f(x) = \frac{1}{2x-1}, g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2 \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{\frac{1}{2x-1} - 1}{\frac{1}{2x-1} + 1} = \frac{2-2x}{2x}$$

3) $f(x) = 1 - 4x - x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$.

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt[3]{x}\big) = 1 - 4\sqrt[3]{x} - \big(\sqrt[3]{x}\big)^3 = 1 - -4\sqrt[3]{x} - x.$

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(1 - 4x - x^3) = \sqrt[3]{1 - 4x - x^3}.$

Приклад. Розкласти функцію на композицію двох простіших функцій. Визначити зовнішню та внутрішню функцію.

1) $h(x) = \sqrt{2x + 5}$

$h(x) = (f \circ g)(x)$, де зовнішня функція $f(x) = \sqrt{x}$, внутрішня функція $g(x) = 2x + 5$.

2) $h(x) = \frac{1}{x^3 - 4}$

$h(x) = (f \circ g)(x)$, де зовнішня функція $f(x) = \frac{1}{x}$, внутрішня функція $g(x) = x^3 - 4$.

3) $h(x) = sin^4 x$

$h(x) = (f \circ g)(x)$, де зовнішня функція $f(x) = x^4$, внутрішня функція $g(x) = \sin x$.

Приклад. Серед наведених функцій укажіть ті, що мають обернені. Для зворотних функцій записати вид обернених функцій.

1) $y = 2x + 6$ – функція монотонно зростає на області визначення $D(y) = R$, тому функція має обернену.

$y = 2x + 6$

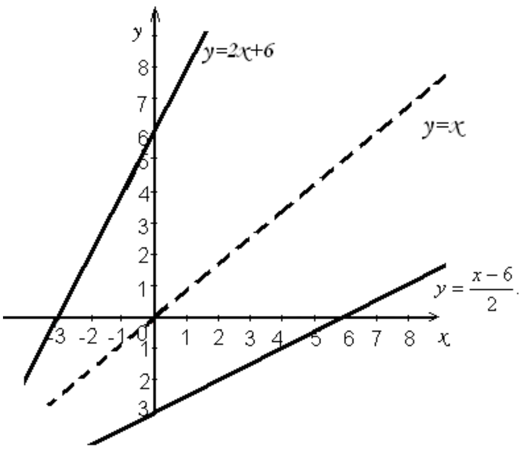
Поміняємо місцями y та x:

$x = 2y + 6$

$2y = x - 6$

$y = 0{,}5x - 3$ – такий вид має обернена функція для функції $y = 2x + 6$.

Побудуємо графіки цих функцій в одній системі координат. Графіки симетричні відносно прямої $y = x$. Якщо графіки взаємно-обернених функцій перетинаються , то їх спільні точки лежать на цій прямій.



2) $y = x^2 - 2x + 3$ – функція не є монотонною на області визначення $D(y) = R$, тому функція не має обернену.

3) $y = \sqrt{x-4}$ – функція монотонно зростає на області визначення $D(y) = [-4;\ +\infty)$, тому функція має обернену.

$y = \sqrt{x-4}$

Поміняємо місцями y та x:

$x = \sqrt{y-4}$

$y - 4 = x^2$

$y = x^2 + 4$ – такий вид має обернена функція для функції $y = \sqrt{x-4}$ при $x \in [-4;\ +\infty)$.

4) $y = \sin x$ – функція не є монотонною на області визначення $D(y) = R$, тому функція не має обернену.

Практичні завдання для самостійної роботи

Завдання. Знайти композиції функцій $f \circ g$ і $g \circ f$:

1) $f(x) = x^2 - 3, g(x) = \cos x.$

2) $f(x) = \frac{x}{3x+2}, g(x) = 1 - 7x.$

3) $f(x) = 5x - 1, g(x) = 2 + 7x.$

4) $f(x) = x^2 - x, g(x) = 3x - 1.$

Завдання. Розкласти функцію на композицію двох простіших функцій. Визначити зовнішню та внутрішню функцію.

1) $h(x) = \sqrt{\cos x}$

2) $h(x) = \cos\sqrt{x}$

3) $h(x) = (4x^2 - x + 3)^7$

4) $h(x) = \ln\frac{1}{x}$

5) $h(x) = \frac{1}{\ln x}$

Завдання. Серед наведених функцій укажіть ті, що мають обернені. Для зворотних функцій записати вид обернених функцій, їх області визначення, множину значень, побудувати графіки.

1) $h(x) = \sqrt{1 - 3x}$

2) $h(x) = \log_2(x + 1)$

3) $h(x) = x^2 - 1$

4) $h(x) = x^3 - 1$

5) $h(x) = \frac{1}{x+2}, x > -2$

6) $h(x) = \cos 2x$

Критерії оцінювання

Критерії оцінювання за різними видами роботи

Вид роботи	бали	Критерії
Практичні завдання	0 балів	Здобувач відтворює незначну частину навчального матеріалу, має поверхові уявлення про предмет вивчення, неаргументовано висловлює думку. Використовує необхідні інформаційно-методичні матеріали, виконує практичне завдання за умови сторонньої допомоги.
	1 бал	Знання здобувача є достатньо повними, він самостійно застосовує відповідний навчальний матеріал, виконуючи практичні завдання; аналізує, робить висновки. Відповідь повна, логічна, обґрунтована, але припускається неточностей. Здобувач самостійно використовує необхідні інформаційно-методичні матеріали виконуючи практичні завдання. Виконане завдання у цілому відповідає вимогам, хоча має незначні огріхи.
	2 бали	Здобувач володіє міцними знаннями, оперує ними при виконанні практичних завдань. Самостійно використовує необхідні інформаційно-методичні матеріали виконуючи практичне завдання. Не припускається помилок при його виконанні. Здобувач виступає експертом практичного завдання, що виконали однокурсники.
Самостійна робота	0 балів	Здобувач розпізнає деякі об'єкти вивчення та визначає їх на побутовому рівні, може описувати деякі об'єкти вивчення; має фрагментарні уявлення з предмета вивчення; виконує елементарні прийоми практичних завдань.
	1 бал	Здобувач знає окремі факти, що стосуються навчального матеріалу; виявляє здатність елементарно висловлювати думку; самостійно

		та за допомогою викладача може виконувати частину практичних завдань; знає послідовність виконання завдання; практичні завдання містять багато суттєвих відхилень від установлених вимог, при їх виконанні потребує систематичної допомоги викладача.
	2 бали	Здобувач самостійно і логічно відтворює фактичний і теоретичний матеріал та наводить приклади; володіє навчальним матеріалом і використовує набуті знання, уміння у стандартних ситуаціях; самостійно виконує практичні завдання відповідно до методичних рекомендацій; практичні завдання мають окремі помилки; користується необхідними навчально-методичними матеріалами.
	3 бали	Здобувач володіє глибокими знаннями, демонструє відповідні компетентності, використовує їх у нестандартних ситуаціях, самостійно працює з інформацію у відповідності до поставлених завдань; систематизує та узагальнює навчальний матеріал; самостійно користується додатковими джерелами інформації; без похибок виконує та аналізує практичні завдання.
Контрольна (письмова) робота	0-1	Здобувач не менше ніж на 50% контрольних завдань надав правильну відповідь
	2-4	Здобувач на 51% - 70% контрольних завдань надав правильну відповідь
	5-7	Здобувач на 71% - 90% контрольних завдань надав правильну відповідь
	8-10	Здобувач на 91% - 100% контрольних завдань надав правильну відповідь
Індивідуальне навчальне-дослідне завдання	0 балів	Завдання не виконано; доповідь має компілятивний характер; доповідь за змістом та формою не відповідає обраній

(доповідь)		темі або вимогам, присутні численні помилки у рішеннях або доведеннях, рішення або доведення відсутні. Презентація відсутня.
	1-3 бали	Зміст доповіді відповідає заявленій темі, проте тема розкрита частково. Наведені дані і факти обґрунтовують чи ілюструють сформульовані тези частково, рішення або доведення наведені фрагментарно, композиційна структура доповіді та презентації не витримана. Достовірність інформації у доповіді має зауваження щодо вірності деяких наведених рішень або доведень. Здобувач під час доповіді почуває себе скуто, невпевнено і напружено. Ефективність промови невисока через те, що здобувач не розуміє більшості викладеного матеріалу, відсутній контакт з аудиторією. Мультимедійна презентація значною мірою не відповідає вимогам: відсутній титульний слайд, список використаних джерел, відсутнє логічне завершення презентації у вигляді висновків, змістовного узагальнення. Створено так званий «реферат з малюнками», тобто використано слайди з текстовою інформацією, переписаною з підручників, посібників, інтернету, замість формулювання тез чи ключових, опорних слів та фраз. Порушення вимог щодо дизайну презентації: відсутність стильової єдності в оформленні всіх слайдів презентації; невідповідність кольору фону та тексту; невдалий вибір кольорової гами, використання шрифтів, що утруднюють сприйняття тексту; наявність граматичних помилок.

	4-6 балів	Зміст доповіді відповідає заявленій темі, проте тема розкрита не повно / наявні фрагменти, які не або відповідають темі, або не обґрунтовані. Достовірність інформації у доповіді має зауваження щодо однієї з вимог (точності, обґрунтованості, наявності посилань на джерела первинної інформації). Під час виступу здобувач почувається достатньо впевнено, демонструє сформованість умінь і навичок правильного мовлення, володіє навичками доцільної побудови промови, проте не завжди аргументує висунуті тези, припускається помилок. Не дотримано всіх вимог до створення мультимедійної презентації: спостерігається або інформаційна надмірність тексту презентації, чи/та перевантаженість ілюстративним матеріалом, або недостатність інформації, але у некритичній кількості. Ілюстрації та графічні елементи доповнюють текст, але їх може бути недостатньо/можуть бути відсутні; є недоліки дизайну презентації.
	7-9 балів	Здобувач демонструє розуміння проблеми, розкриває її на достатньому теоретичному рівні, присутня авторська модальність, оцінність, проте інтерпретація теми недостатньо глибока і самостійна. Здобувач загалом володіє навичками створення академічного тексту, аргументованого доведення, проте тези й приклади не завжди переконливі, здобувач переважно використовує традиційні форми доведення. Виклад зрозумілий і чіткий; наявні незначні порушення логіки чи послідовності викладу; використовуються прийоми порівняння, зіставлення й

		узагальнення. Не дотримано всіх вимог до створення мультимедійної презентації: спостерігається або інформаційна надмірність тексту презентації, чи/та перевантаженість ілюстративним матеріалом, або недостатність інформації, але у некритичній кількості. Ілюстрації та графічні елементи доповнюють текст, є невеликі зауваження щодо дизайну та оформлення презентації.
	10 балів	Зміст доповіді відповідає заявленій темі. Здобувач глибоко, повно й обґрунтовано розглядає предмет дослідження, посилається на джерела первинної інформації, подає різноманітний матеріал стосовно обраної теми. Наведені дані й факти адекватно обґрунтовують чи ілюструють тези доповіді. Текст характеризується цілісністю та композиційною грамотністю. Використано достатній обсяг високоякісних інформаційних джерел. Здобувач демонструє уміння будувати розгорнутий монолог з фахової проблематики, логічно, правильно, точно, етично й емоційно висловлювати думку відповідно до змісту, умов комунікації й адресата. Доповідь викликала велике зацікавлення й жваве обговорення у студентському середовищі, наявні позитивні коментарі. Мультимедійна презентація виконана з дотриманням усіх вимог: наявні усі структурні елементи; інформацію ретельно структуровано, представлено лаконічно, максимально інформативно, дотримано принципів науковості, послідовності у відборі текстового матеріалу; гармонійний дизайн; дотримано правил використання

		шрифтів, кольорового поєднання, стильової єдності оформлення; ілюстрації відповідають змісту презентації; дотримано норм літературної мови. Презентація вповні ілюструє й унаочнює доповідь.

Критерії оцінювання підсумкового контролю (екзамен)

Навчальна дисципліна «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» за навчальним планом передбачає підсумковий контроль у формі усного екзамену, на який відводиться 20 балів. Здобувач може складати екзамен, якщо кількість він отримав впродовж вивчення дисципліни не менш, ніж 40 балів. Накопичені здобувачем бали під час вивчення навчальної дисципліни не анулюються, а сумуються. Оцінка за екзамен не може бути меншою за кількість накопичених ним балів.

Бали	Критерії
0 балів	Здобувач не може дати відповіді на запитання.
1-5 балів	Здобувач володіє матеріалом на рівні окремих фрагментів, що становлять незначну частину навчального матеріалу.
6-10 балів	Здобувач вміє узагальнювати, систематизувати інформацію під керівництвом викладача, самостійно застосовувати її на практиці, контролювати власну діяльність, виправляти помилки.
11-15 балів	Здобувач вільно володіє вивченим обсягом матеріалу, застосовує його на практиці, вільно розв’язує вправи і задачі, самостійно виправляє допущені помилки, кількість яких незначна.
16-20 балів	Здобувач має міцні знання, впевнено відповідає на запитання, вміє застосовувати нестандартні підходи до розв’язання задач, вміє самостійно виконувати поставленні завдання і давати аргументовано правильну відповідь.

Критерії оцінювання за всіма видами контролю

Сума балів	Критерії оцінки
Відмінно (90 – 100 A)	Здобувач демонструє міцні теоретичні знання навчального матеріалу в обсязі, що відповідає програмі навчальної дисципліни; опанував основну та рекомендовану літератури; успішно виконує передбачені програмою практичні завдання; реалізує теоретичні положення навчальної дисципліни

	виконуючи практичні завдання у розділах елементарної алгебри та початків аналізу. При виконанні практичних завдань проявляє вміння самостійно вирішувати поставлені завдання, активно включається в обговорення, відстоює власну точку зору в питаннях та рішеннях, що розглядаються. Оцінка нижче 100 балів обґрунтовується недостатнім розкриттям теоретичних питань навчальної дисципліни, або тим, що студент проявляє невпевненість в тлумаченні теоретичних положень чи складних практичних завдань.
Добре (82-89 В)	Здобувач демонструє знання, володіння матеріалом в обсязі, що відповідає програмі навчальної дисципліни, вміє виконувати практичні завдання; знайомий з основною та рекомендованою літературою. Вміє застосовувати теоретичні положення при вирішенні практичних задач елементарної алгебри та початків аналізу, але припускається несуттєвих помилок. При виконанні практичних завдань, здобувач самостійно виправляє допущені помилки, кількість яких є незначною.
Добре (74-81 С)	Здобувач на володіє навчальним матеріалом у достатньому обсязі, знає основні теоретичні положення, що відповідають програмі навчальної дисципліни, виконує практичні завдання, передбачені програмою, але припускається помилок які усуває за підтримки з боку викладача або однокурсників. Пояснює основні положення навчального матеріалу, правильно вирішує типові практичні завдання. Помилки у відповідях не є системними, впевнено працює за алгоритмом.
Задовільно (64-73 D)	Здобувач розуміє основні положення навчальної дисципліни, котрі є визначальними і орієнтується у напрямі розв'язання практичних завдань. Здобувач розуміє практичні завдання, має пропозиції щодо напрямку їх розв'язання. Самостійно вирішує завдання за зразком, допускає значну кількість неточностей, помилок, котрі усуває під керівництвом викладача, підтримки з боку однокурсників. Розуміє основні поняття та положення алгебри та початків аналізу.
Задовільно (60-63 Е)	Здобувач поверхнево опанував навчальний зміст, передбачений програмою навчальної дисципліни. Знання щодо основних положень алгебри та початків аналізу несистемні, фрагментарні. Виконання практичних завдань, формалізоване: є відповідність алгоритму, виконує практичні завдання за підтримки з боку

	викладача зі значними труднощами; відсутнє глибоке розуміння навчального матеріалу дисципліни.
Незадовільно (35-59 FX)	Здобувач має фрагментарні знання, опанувавши менше половини обсягу навчального змісту, передбаченого програмою навчальної дисципліни. Відсутнє цілісне усвідомлення навчального матеріалу. Здобувач працює пасивно, практичні завдання виконує переважно з помилками, виправляє помилки лише при виконанні нескладних практичних завдань. Здобувач допускається до повторного складання екзамену.
Незадовільно (0-34 F)	Здобувач не виконує вимоги програми навчальної дисципліни: не сформовані знання уміння та навички. Здобувач не допускається до екзамену та проходить повторне вивчення дисципліни.

Рекомендовані джерела інформації

Основна література

1. Дрогомирецька Х. Т., Каленюк П. І., Клапчук М. І., Понеділок Г. В.. Математичний аналіз функцій дійсної змінної. Львів : Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2016. 592 с.
2. Пивоварчик В. М., Яковлева О. М., Болдарєва О. М. Навчальний посібник. «Дискретна математика. Частина 1.» Одеса: ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2022. 145 с. URL : http://dspace.pdpu.edu.ua/jspui/handle/123456789/14760
3. Соколенко Л. О. Наукові основи шкільного курсу математики: Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.
4. Яковлєва О. М., Дудко А. І. Методичні рекомендації «Теорія множин» (з практикумом) до проведення практичних занять, організації самостійної роботи для здобувачів освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Одеса : Університет Ушинського, 2024. 49 с. URL : http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/19939

Допоміжна

1. Мерзляк А. Г. Алгебра (поглиблений рівень) : підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2021.
2. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 512 с.
3. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 304 с.
4. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 240 с.
5. Навчальні програми для 10-11 класів (Профільний рівень, Поглиблений рівень) URL : https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

6. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналіза. 10 класс. Харків : Вид-во «Гимназия», 2018. 416 с.
7. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань : у 2 ч., ч. 1: Різнорівневі завдання / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. Харків : Вид-во «Ранок», 2017. 496 с.
8. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань : у 2 ч., ч. 2: Теоретичні відомості. Тематичні та підсумкові тести / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. Харків : Вид-во «Ранок», 2017.176 с.
9. Поясок Т. Б. Інтерактивний навчальний посібник «Сучасні технології освітнього процесу»: навчальний посібник / Т. Б. Поясок, О. І. Беспарточна, О. В. Костенко. – Кременчук: ПП Щербатих О. В., 2019. – 224 с. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://mtep.co.ua/user-files/stop__nteraktivniy_n_p.pdf
10. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. 500 с.
11. Чарін В. С. Лінійна алгебра : навч. посіб. Київ : Техніка, 2004. 472 с.
12. Яковлєва О.М., Гаєвець Я.С., Каплун В.М. Розвиток числової лінії в курсі математики закладів загальної середньої освіти. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 1(23). С. 164-170.

Інформаційні ресурси

1. Міністерство освіти і науки України: офіційний сайт. URL : http://www.mon.gov.ua
URL : https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi освітні програми
2. Перелік навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих МОН України для використання в 5-11 класах закладів загальної середньої освіти з навчанням українською мовою (2024-2025 навч.рік)
URL : https://docs.google.com/spreadsheets/d/16NyRYEKgeQ4T5BE68La-s2gn0q2MPyIWSWx-Vdw-zmA/edit#gid=883367929
3. Одеська національна наукова бібліотека : офіційний сайт. URL : http://odnb.odessa.ua/.
4. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт. URL : https://library.pdpu.edu.ua/