

РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ У ОЛІМПІАДНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Марія ОНР

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
opr.mv@pdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0009-0001-4437-6152>

Сергій ДРАГАНЮК ✉

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
drahanyuk.sv@pdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Знайомство з теорією рівнянь у цілих числах або діофантових рівнянь не передбачено базовим контентом курсів математики закладів загальної середньої освіти. Проте такі рівняння часто зустрічаються у завданнях математичних олімпіад для школярів різних рівнів. Мета роботи полягає у проведенні аналізу типів задач з теми «Рівняння в цілих числах» у сучасних змаганнях з математики для учнів та основних методів розв'язання подібних задач.

Матеріали і методи. При проведенні дослідження було використано як теоретичні методи: опрацювання та здійснення аналізу визначених інформаційних джерел, проведення теоретичних міркувань дедуктивного та індуктивного характеру; так і практичні: розв'язування різного виду завдань і вправ з визначеної тематики, розробка детальних пояснень до отриманих розв'язків.

Результати. У роботі з'ясовано роль і місце діофантових рівнянь у контенті завдань на змаганнях з математики для школярів починаючи з рівня III етапу Всеукраїнської олімпіади. При цьому виокремлено такі типи задач, як задачі на розв'язання лінійних діофантових рівнянь з різною кількістю змінних, задачі, пов'язані з рівнянням Пелля, завдання на встановлення певних властивостей розв'язків заданого діофантового рівняння, задачі на розв'язання систем діофантових рівнянь, задачі, що вимагають пошуку послідовностей цілих чисел. Серед найбільш поширених методів, що застосовуються у шкільній олімпіадній математиці для розв'язання подібних задач, визначено такі методи, як канонічний розклад натуральних чисел, розкладання однієї чи обох частин рівняння на множники, метод математичної індукції, метод оцінок та інші. Наведено зразки розв'язків відповідних задач.

Висновки. Включення знайомства з основами теорії діофантових рівнянь до змістового наповнення курсів математики закладів загальної середньої освіти безумовно варто визнати корисним для всебічного розвитку школярів, насамперед для формування та розвитку навичок їх логічного мислення. Представлений у роботі аналіз типів відповідних завдань і методів їх розв'язання може стати у нагоді діючим вчителям-практикам при організації роботи математичних гуртків та проведенні факультативних занять за темами, які пов'язані з рівняннями у цілих числах. Подальшої розробки вимагає створення детальних планів-конспектів подібних занять.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: рівняння в цілих числах; курси математики закладів загальної середньої освіти; завдання математичних олімпіад для школярів; типи шкільних олімпіадних задач на розв'язання діофантових рівнянь; методи розв'язання діофантових рівнянь у шкільній олімпіадній математиці; розвиток логічного мислення школярів.

Для цитування:	Опр М., Драганюк С. Рівняння в цілих числах у олімпіадній математиці. <i>Фізико-математична освіта</i> , 2024. Том 39. № 3. С. 68-74. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-09
	Опр, М., & Драганюк, С. (2024). Рівняння в цілих числах у олімпіадній математиці. <i>Фізико-математична освіта</i> , 39(3), 68-74. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-09
For citation:	Opr, M., & Dragahiyk, S. (2024). Equations in integers in olimpic mathematics. <i>Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 68-74. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-09
	Opr, M., & Dragahiyk, S. (2024). Rivniannia v tsilykh chyslakh u olimpiadnii matematytsi [Equations in integers in olimpic mathematics]. <i>Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 68-74. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-09

EQUATIONS IN INTEGERS IN OLIMPIC MATHEMATICS

Mariia OPR

State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky», Ukraine

opr.mv@pdpu.edu.ua

<https://orcid.org/0009-0001-4437-6152>

Sergiy DRAGAHYK ✉

State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky», Ukraine

drahanyuk.sv@pdpu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

ABSTRACT

Formulation of the problem. The base content of math courses of institutions of general secondary education does not intend acquaintance with the theory of equations in integers or equations of Diophantus. Simultaneously we often meet such equations among the problems of student's math competitions of different level. The work is devoted to carrying out analysis of types of problems on the theme "Equations in integers" at the up-to-date math competitions of students of institutions of general secondary education and basis methods of solving such problems.

Materials and methods. In the process of carried out investigation such theoretical methods as studying and analyzing the determined sources of information, providing reasoning of deductive and inductive character together with such practical methods as solving different problems and tasks of the determined theme, working out the detail explanations to the received solutions are used.

Results. The role and the place of Diophantine equations in the content of problems of schoolchildren's math competitions beginning from the level of the III stage of the All-Ukrainian Math Olympiad are elucidated. Such types of problems as the tasks on solving linear Diophantine equations with different numbers of variables, some tasks connected with an equation of Pell, the tasks on establishing some properties of solutions of the given Diophantine equation, tasks on solving systems of Diophantine equations, tasks on finding some sequences of integer numbers are marked out. Among the most spread methods that are used in school Olympic mathematics for solving the problems such methods as canonical decomposition of natural numbers, decomposition of the one or the both parts of the equation onto multipliers, the method of mathematical induction and the method of estimation are distinguished. Examples of solutions to the corresponding problems are given.

Conclusions. Inclusion acquaintance with the beginnings of the theory of Diophantine equations to the content of math courses of institutions of general secondary education is undoubtedly useful for the all-round development of students, first of all from the position of forming and developing skills in their logical thinking. The represented analysis of the types and methods of solution of the corresponding problems can be useful to working teachers for organizing the work of math circles and conducting the elective courses according to the themes that are connected with equations in integers. The creation of detail synopses of such courses needs further working out.

KEYWORDS: equations in integers; math courses of institutions of general secondary education; tasks for Olympic mathematics for schoolchildren; types of school Olympic problems on solving Diophantine equations; methods of solving Diophantine equations in school Olympic mathematics; development of logical thinking of schoolchildren.

ВСТУП

Постановка проблеми та аналіз актуальних досліджень. Поняття рівняння є одним з основних понять курсу математики закладів загальної середньої освіти. Вміння розв'язувати рівняння (цілі алгебраїчні, раціональні, ірраціональні, тригонометричні, показникові, логарифмічні та змішані) є однією з базових складових математичної культури школяра. Апарат рівнянь широко використовується у різних галузях математики, у різних суміжних дисциплінах, зокрема, у фізиці та хімії. Знайомство з теорією рівнянь у цілих числах або діофантових рівнянь не передбачено базовим контентом курсів математики закладів загальної середньої освіти. Проте такі рівняння часто зустрічаються у завданнях математичних олімпіад різних рівнів (як для школярів, так і для студентів) і не залишають байдужими до себе тих, хто по-справжньому цікавиться математикою. Розгляд питань, пов'язаних з теорією діофантових рівнянь, на засіданнях математичних гуртків або під час факультативних занять дозволяє вчителю повторити з учнями теорію подільності та основні числові системи, підвищити їхню загальну математичну культуру та вміння розв'язувати нестандартні задачі, посилити загальний інтерес учнів до математики і занять нею, сприяє вихованню спроможності до альтернативного мислення, конструктивізму та винахідливості, формує вміння гармонійно поєднувати алгоритмічні методи і штучні прийоми розв'язування задач. Не зважаючи на те, що існує чимало робіт, як наукового, так і методичного характеру, присвячених тематиці діофантових рівнянь (Schmidt, 1991; Smart, 1998; Ядренко, 2004; Кравчук, 2019), роль та місце діофантових рівнянь у шкільній математиці вимагає подальшого усвідомлення та обговорення.

Мета роботи полягає у проведенні аналізу типів задач з теми «Рівняння в цілих числах» у сучасних змаганнях з математики для учнів закладів загальної середньої освіти та основних методів розв'язання подібних задач. Такий аналіз може бути корисним для діючих вчителів-практиків з математики, особливо, для вчителів-початківців, може визначити структуру та зміст відповідного курсу за вибором для здобувачів вищої освіти - майбутніх вчителів-практиків з математики закладів загальної середньої освіти.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Діофант Олександрійський був грецьким математиком, який жив і працював у третьому столітті нашої ери, автором серії книг під назвою «Арифметика», суттєву кількість яких присвячено розв'язуванню алгебраїчних рівнянь

(Stillwell, 2004). Діофант шукав розв'язки алгебраїчних задач у натуральних числах. Він першим ввів буквені символи для невідомих. Найпростіші діофантові рівняння розв'язували ще шумеро-вавілонські математики, піфагорійці та Евклід (Van der Waerden, 1983). Діофант розробив першу теорію таких рівнянь. У наступному, цю теорію розвивали такі видатні математики як Ф. Вієт, П. Ферма, А. Пуанкаре, А. Вейль, Л. Ейлер, Ж. Лагранж, К. Гаус, А. Лежандр, К. Якобі, П.Л. Чебишев, Г.Ф. Вороний та ін. (Бевз, 2006; Stillwell, 2004). З неї пізніше сформувалася така окрема галузь математики як діофантовий аналіз або діофантова геометрія (Mordell, 1969; Stiwell, 2004).

На даний час, у загальній постановці питання, діофантові рівняння – це алгебраїчні рівняння або системи алгебраїчних рівнянь з раціональними коефіцієнтами, розв'язки яких шукають у цілих або раціональних числах. Зазвичай розглядають такі діофантові рівняння, у яких число невідомих є більшим за число рівнянь. В силу цього діофантові рівняння також є відомими як невизначені рівняння.

Загальна теорія діофантових рівнянь є далекою до завершеності. Лише для окремих класів діофантових рівнянь натеper побудовано цілісну теорію. Зокрема, для алгебраїчних рівнянь з довільною кількістю змінних. Деяких типів рівнянь другого степеню з двома невідомими та небагатьох інших (Mordell, 1969; Schmidt, 1991; Smart, 1998). Багато інших типів діофантових рівнянь і натеper є відкритими проблемами. Десята проблема Гільберта – одне з 23 завдань, які Давид Гільберт запропонував 8 серпня 1900 року на II Міжнародному конгресі математиків, полягає у знаходженні універсального методу визначення розв'язності довільного алгебраїчного діофантового рівняння. Доведення алгоритмічної нерозв'язності цього завдання було завершено лише у 1970 році Юрієм Матіясевичем (Stillwell, 2004). Отриманий результат з одного боку трохи знизив інтерес до діофантових рівнянь, а з іншого – визначив нові класи задач, які потребують дослідження та побудови нових теорій.

У сучасній математиці поняття діофантового рівняння застосовують також до алгебраїчних рівнянь, розв'язки яких шукають у цілих алгебраїчних числах деякого алгебраїчного розширення поля Q раціональних чисел або поля p -адичних чисел.

МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

При проведенні дослідження було використано як теоретичні методи: опрацювання та здійснення необхідного аналізу визначених інформаційних джерел, проведення теоретичних міркувань дедуктивного та індуктивного характеру; так і практичні: розв'язування різного виду завдань і вправ з визначеної тематики, розробка детальних пояснень до отриманих розв'язків відповідно до представленого для учнів закладів загальної середньої освіти теоретичного контенту.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У олімпіадних змаганнях школярів з математики різних рівнів складності зустрічаються діофантові рівняння різних видів. Достатньо часто зустрічаються лінійні діофантові рівняння з різною кількістю змінних, але, найчастіше, з двома чи з трьома змінними. Для лінійних діофантових рівнянь побудовано чітку теорію, яку має сенс розглядати у повному обсязі у межах занять математичних гуртків чи відповідних факультативів. Деякі факти цієї теорії можуть бути використаними для створення низки нових та цікавих олімпіадних задач різних рівнів складності. При цьому відносно новою є ідея пошуку саме представлень натуральних чисел, хоча протягом останніх років у олімпіадній математиці цю ідею іноді почали застосовувати (див., наприклад, (Ядренко, 2004)).

Однією з найскладніших тем шкільної олімпіадної математики, присвячених діофантовим рівнянням, є тема, пов'язана з рівняннями Пелля. Рівняння Пелля, які також називають рівняннями Пелля-Ферма, – це будь-які діофантові рівняння виду $x^2 - D \cdot y^2 = 1$, де D – це натуральне число. (Van der Waerden, 1983). Далеко не завжди загальній теорії рівнянь Пелля приділяється необхідна увага на заняттях математичних гуртків. В силу цього, поява таких рівнянь на математичних змаганнях для переважної більшості учасників цих змагань стає суттєвою проблемою. Зауважимо також, що рівняння Пелля є цікавими не лише самі собою, а й можуть використовуватися для пошуку розв'язків рівнянь інших видів.

У загальному випадку, на математичних змаганнях школярів діофантові рівняння найчастіше зустрічаються на математичних олімпіадах, починаючи з рівня Всеукраїнської олімпіади з математики для школярів (Анікушин та ін., 2013; Анікушин, Ківвата та ін., 2014; Кравчук, 2019). Класичною при цьому є наступна задача, запропонована для учнів 9 класу на LXXIII Київській міській олімпіаді юних математиків.

Задача 1. Знайти усі трійки (x, y, p) натуральних чисел, у яких число p є простим, що задовольняють

$$\text{рівність } y \cdot (x^2 + p) - x \cdot (y^2 + p) = p.$$

Відповідь: $(3, 2, 3)$ та $(p+1, 1, p)$, де p – довільне просте число.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину заданої рівності на множники: $y \cdot (x^2 + p) - x \cdot (y^2 + p) = (x \cdot y - p) \cdot (x - y)$.

Отримаємо рівність $(x \cdot y - p) \cdot (x - y) = p$. Зрозуміло, що вона може бути правильною виключно у кількох наступних випадках.

1. $x \cdot y - p = 1$, $x - y = p$. Тоді $x = y + p$, підстановка отриманого виразу до першої рівності приводить до

квадратного рівняння $y^2 + y \cdot p - p - 1 = 0$ відносно змінної y . Число 1 є коренем цього рівняння. Другий корінь – $(-p-1)$

– при цьому не є натуральним числом. Отже, залишається лише випадок $y=1$. Тоді $x=p+1$, трійка чисел $(p+1, 1, p)$ задовольняє умови задачі для довільного простого числа p .

2. $x \cdot y - p = -1$, $x - y = -p$. Тоді $y = x + p$, маємо квадратне рівняння відносно змінної x : $x^2 + x \cdot p - p + 1 = 0$. В

силу того, що потрібними є лише натуральні розв'язки, дискримінант $D = p^2 + 4 \cdot p - 4$ отриманого рівняння повинен бути квадратом цілого числа. Очевидно, що взагалі, для будь-яких дійсних значень змінної p , правильною є нерівність $p^2 + 4 \cdot p - 4 < (p+2)^2$. Отже, дискримінант D не може бути квадратом цілого числа для тих простих значень змінної

p , для яких справджується нерівність $(p+1)^2 < p^2 + 4 \cdot p - 4$. Ця нерівність є рівносильною нерівності $2 \cdot p > 5$, або, з урахуванням того, що число p повинно бути простим, до нерівності $p \geq 3$. У підсумку, для змінної p достатньо лише окремо перевірити значення 2, для всіх інших її простих значень дискримінант D не може бути квадратом цілого числа і, в силу цього шуканих натуральних значень змінної x не існує. У випадку $p=2$ маємо, що $D=8$, тобто, дискримінант D так само не є квадратом цілого числа, шуканих натуральних значень змінної x не існує.

3. $x \cdot y - p = p$, $x - y = 1$. У цьому випадку маємо: $x = y + 1$, $x \cdot y = 2 \cdot p$. З першої рівності випливає, що $x > y$. Тоді друга рівність може бути правильною лише у двох випадках: $y=1$, $x=2 \cdot p$ або $y=2$, $x=p$. З урахуванням того, що $x = y + 1$, у першому випадку маємо $y=1$, $x=2$, $p=1$ – суперечність, у другому – $y=2$, $x=p=3$ – розв'язок.

4. $x \cdot y - p = -p$, $x - y = -1$. Зрозуміло, що перша рівність одразу приводить до суперечності.

Корисним інструментом для пошуку розв'язків рівнянь у цілих числах буває використання канонічного розкладу натурального числа. Канонічний розклад натурального числа може успішно застосовуватися для розв'язання навіть найпростіших діофантових рівнянь. Це ілюструє наступна задача для учнів 10 класу LXXII Київської міської олімпіади юних математиків.

Задача 2. Відомо, що три попарно різних натуральних числа a , b , c мають добуток 80. Визначити, якому найменшому простому числу може дорівнювати сума цих чисел.

Відповідь: 19.

Розв'язання. Зрозуміло, що сума трьох попарно різних натуральних чисел є більшою за 2. Отже, просте число, яким може бути їхня сума, є непарним. В силу того, що усі три числа не можуть бути непарними бо мають добутком число 80, то можливим є лише той варіант, коли два числа є парними і одне – непарним. Варіанти, при яких усі три числа є парними або два з них є непарними, а одне – парним, не підходять, бо у таких випадках сума цих чисел є парним числом. $80 = 2^4 \cdot 5$. Отже, число 80 має лише два непарних дільника. Це числа 1 і 5. Розглянемо усі можливі при цьому випадки.

1. $c=1$, $a=2$, $b=40$. Тоді $a+b+c=43$. Це просте число.

2. $c=1$, $a=4$, $b=20$. Тоді $a+b+c=25$ – не є простим числом.

3. $c=1$, $a=8$, $b=10$. У даному випадку $a+b+c=19$. Це просте число, що є меншим за число 43.

4. $c=5$, $a=2$, $b=8$. У даному випадку число $a+b+c=15$ не є простим.

У завданнях математичних олімпіад не завжди вимагають знаходити усі розв'язки заданого рівняння у цілих числах. Іноді треба встановити лише певну властивість розв'язків. Прикладом завдання подібного типу є задача, яку свого часу було запропоновано учням 9 класу на заключному етапі відбору команди Києва до участі у IV етапі Всеукраїнської математичної олімпіади.

Задача 3. Для простого числа p натуральні числа u і v , $u \neq v$, є такими, що задовольняють рівність

$$p^2 = \frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2). \text{ Довести, що число } 2 \cdot p - u - v \text{ є квадратом або подвоєним квадратом цілого числа.}$$

Розв'язання. Елементарні підрахунки дозволяють зробити висновок про те, що, за умови даної задачі $(p^2 = \frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2))$, має місце рівність $(2 \cdot p - u - v) \cdot (2 \cdot p + u + v) = (u - v)^2$, звідки, між іншим, випливає $(u \neq v)$, що

$2 \cdot p - u - v > 0$. Число p^2 є натуральним, отже, число $u^2 + v^2$ є парним. Це означає, що числа u і v мають однакову парність. Але це означає, що парним є кожний з множників $2 \cdot p - u - v$ та $2 \cdot p + u + v$, натуральними числами є кожне з чисел $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p - u - v)$, $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p + u + v)$, $\frac{1}{2} \cdot (u - v)$. Одночасно, очевидно, має місце рівність

$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p - u - v) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p + u + v) = \left(\frac{u - v}{2}\right)^2$. Із даної рівності, на підставі існування для кожного натурального числа однозначно визначеного канонічного розкладу, випливає існування таких натуральних чисел a , b і q , що

$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p - u - v) = q \cdot a^2$, $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p + u + v) = q \cdot b^2$, число q у своєму канонічному розкладі не містить повних квадратів натуральних чисел. Тоді $\frac{u+v}{2} = p - q \cdot a^2$, $\frac{u-v}{2} = q \cdot b^2 - p$, $p - q \cdot a^2 = q \cdot b^2 - p$, $2 \cdot p = q \cdot a^2 + q \cdot b^2$, число q є дільником числа $2 \cdot p$. За умови задачі, число p є простим. Із представлення квадрата цього числа у вигляді половини суми

квадратів певних натуральних чисел u і v впливає, що $p > 2$. Отже, дільниками числа $2 \cdot p$ є лише числа $1, 2, p, 2 \cdot p$, число q може дорівнювати виключно одному з них. Якщо $q = p$ або $q = 2 \cdot p$, то натуральне число q ділиться на просте число p . В силу того, що $\frac{u+v}{2} = p - q \cdot a^2$, тоді і натуральне число $\frac{u+v}{2}$ ділиться на число p , звідки випливає, що $\frac{u+v}{2} \geq p$. З іншого боку, із умови задачі, унаслідок безпосередніх підрахунків маємо, що $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = p$ і, в силу цього, $p > \frac{u+v}{2}$. Отримано суперечність. Якщо $q = 1$, то $2 \cdot p - u - v = 2 \cdot a^2$, якщо $q = 2$, то $2 \cdot p - u - v = (2 \cdot a)^2$.

Зрозуміло, що представлена задача 3, як за своєю умовою, так і за способом свого розв'язання не носить природного характеру. Вона передбачає наявність у відповідних учнів навичок використання спеціальних штучних прийомів міркувань. Можна мати різні погляди з приводу того, чи варто, чи не варто включати задачі подібного типу до складу олімпіадних. Але на даний час ми маємо беззаперечний факт їхньої присутності, який зайвий раз підтверджує необхідність спеціальної додаткової підготовки учнів, спрямованої на створення необхідних передумов отримання ними дипломів на олімпіадах з математики для школярів різних рівнів.

У підсумку, можна зробити висновок про те, що на олімпіадних змаганнях рівня III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для школярів зустрічаються достатньо різні задачі як на розв'язання діофантових рівнянь, так і на доведення певних властивостей розв'язків таких рівнянь.

На змаганнях IV етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для школярів рівняння у цілих числах також зустрічаються традиційно часто. Тут відповідні задачі стають більш складними, збільшується різноманітність методів їхнього розв'язання. Як і раніше, зустрічаються не лише задачі на розв'язання діофантових рівнянь, а й задачі, близькі за тематикою. Наступну задачу, запропоновану учням 9 класу на I Всеукраїнській олімпіаді з математики, розглянемо як приклад.

Задача 4. Визначити, яке найменше значення може приймати математичний вираз $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2$, у якому числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ є цілими, попарно різними.

Відповідь: $4 \cdot n - 6$.

Розв'язання. За допомогою методу математичної індукції доведемо, що для довільного натурального числа n та довільних попарно різних цілих чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ вірною є нерівність

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4 \cdot n - 6.$$

Справедливість твердження бази індукції є очевидною. Дійсно, нерівність $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \geq 2$ є правильною в силу того, що, за умови задачі, цілі числа x_1 і x_2 є різними.

Припустимо, твердження є істинним для натурального числа k , тобто

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{k-1} - x_k)^2 + (x_k - x_1)^2 \geq 4 \cdot k - 6.$$

Нехай цілі числа $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ є попарно різними. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що число x_{k+1} найбільше з них. Легко переконатися у тому, що $(x_k - x_{k+1})^2 + (x_{k+1} - x_k)^2 - (x_k - x_1)^2 = 2 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (x_{k+1} - x_1)$. В силу того, що числа x_1, x_k та x_{k+1} є попарно різними і число x_{k+1} є найбільшим з них, правильною є нерівність $2 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (x_{k+1} - x_1) \geq 4$. Отже, $(x_k - x_{k+1})^2 + (x_{k+1} - x_k)^2 - (x_k - x_1)^2 \geq 4$. Додаючи цю нерівність до припущення індукції, отримуємо потрібне твердження для числа $k+1$. У підсумку, згідно принципу математичної індукції, доведено, що воно є істинним для довільного натурального числа n .

Для завершення розв'язання задачі залишається навести приклади таких чисел, для яких у доведеній нестрогій нерівності буде мати місце рівність. Легко переконатися у тому, що для непарного числа n , $n = 2 \cdot k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, можна покласти $x_j = 2 \cdot j - 2$ при $j \leq k$ та $x_j = -2 \cdot j + 4 \cdot k - 1$ при $j \geq k+1$. Для парного числа n , $n = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, можна припустити, що $x_j = 2 \cdot j - 2$, якщо $j \leq k$ та $x_j = -2 \cdot j + 4 \cdot k + 1$, якщо $j \geq k+1$.

На змаганнях рівня IV етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики суттєвим чином розширюється апарат, що застосовується для розв'язання діофантових рівнянь. Так, доволі часто використовується метод оцінок.

На даному етапі змагань біля третини завдань з визначеної теми вимагають розв'язання вже систем діофантових рівнянь. Однією з класичних задач такого виду є наступна задача, запропонована для учнів 10 класу на LVIII Всеукраїнській олімпіаді юних математиків.

Задача 5. Розв'язати у натуральних числах x, y, p, n, k систему рівнянь
$$\begin{cases} 5 \cdot x + y = p^k \\ 5 \cdot y + x = p^{k+n} \end{cases}.$$

Відповідь: будь-яке натуральне число k , що задовольняє нерівність $k \geq 3$, $x = 2^{k-3}$, $y = 3 \cdot 2^{k-3}$, $p = 2$, $n = 1$.

Зустрічаються також і вельми «екзотичні» завдання на розв'язування рівнянь у цілих числах. У якості прикладу можна навести задачу, запропоновану учням 10 класу на LIX Всеукраїнській олімпіаді юних математиків.

Задача 6. Знайти усі натуральні числа a і b , для яких число $2^{a!} + 2^{b!}$ є кубом натурального числа. (При цьому учням нагадують, що для натурального числа n за означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$).

Відповідь: $a = 2$, $b = 2$.

На відміну від олімпіад, інший вид змагань з математики для школярів – математичні бої – містять задачі дещо інших типів. Тут найчастіше підбирають завдання, що вимагають більше пояснень, передбачають існування різних випадків, припускають узагальнення. Тут вітається можливість дискусій. Тема діофантових рівнянь є широко представленою у цьому розділі олімпіадної математики. У завданнях для математичних боїв різноманітні рівняння у цілих числах можуть бути присутніми вже для учнів 8 класу. Прикладами таких задач можуть бути наступні.

Задача 7. Довести, що число 2019 є найменшим натуральним числом, яке одночасно задовольняє дві наступні умови: 1) воно є сумою четвертих степенів п'яти попарно різних натуральних чисел; 2) воно є сумою шести послідовних натуральних чисел.

Задача 8. Знайти усі пари $(m; n)$ натуральних чисел m, n , для яких кожне з чисел $3^m + 1$ і $3^n + 1$ є кратним до добутку $m \cdot n$.

Для учнів старших класів зустрічаються навіть задачі, що вимагають пошуку послідовностей цілих чисел. Взагалі, тут переважають достатньо складні задачі, прикладом яких може бути наступна.

Задача 9. Через $\varphi(n)$ позначено кількість натуральних чисел, які не перевищують натурального числа n і є взаємно простими з ним. Довести, що існує таке натуральне число m , що рівняння $\varphi(n) = m$ має принаймні 2015 розв'язків.

Зрозуміло, що деякі ідеї, що застосовуються при розв'язанні наведених вище задач, можуть бути використані у науковій роботі школярів, зокрема, при підготовці робіт для участі у конкурсах МАН.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Натуральні та цілі числа є первинними, у певному сенсі основними числовими системами, що входять до контенту шкільної математичної освіти, системами, властивості яких у межах середньої освіти у достатньо повному обсязі опановують протягом усього періоду навчання. В силу цього, умови задач, які сформульовано за допомогою цілих чисел, розв'язання яких передбачає знаходження певних цілих чисел, часто представляються учням цілком зрозумілими, відповідні задачі, на перший погляд здаються достатньо простими. З іншого боку, переважну більшість подібних задач аж ніяк не можна вважати тривіальними. Пошук розв'язків подібних задач часто відкриває майже необмежене джерело для творчості.

Задачі, пов'язані з розв'язанням та дослідженням діофантових рівнянь, серед вказаних вище задач займають почесне місце. Включення знайомства з основами теорії діофантових рівнянь до змістового наповнення курсів математики закладів загальної середньої освіти, безумовно, варто визнати корисним для всебічного розвитку школярів, насамперед для формування та розвитку навичок їх логічного мислення. На даний час переважна більшість подібного матеріалу, віднесена до поглибленого рівня навчання, міститься серед задач олімпіадної математики.

У роботі з'ясовано роль і місце діофантових рівнянь у контенті завдань на змаганнях з математики для школярів починаючи з рівня III етапу Всеукраїнської олімпіади. При цьому виокремлено такі типи олімпіадних задач, як задачі на розв'язання лінійних діофантових рівнянь з різною кількістю змінних, задачі, пов'язані з рівнянням Пелля, завдання на встановлення певних властивостей розв'язків заданого діофантового рівняння, задачі на розв'язання систем діофантових рівнянь, задачі, що вимагають пошуку послідовностей цілих чисел. Серед найбільш поширених методів, що застосовуються у шкільній олімпіадній математиці для розв'язання подібних задач, визначено такі методи, як представлення натуральних чисел у вигляді добутку натуральних степенів різних простих чисел, розкладання однієї чи обох частин рівняння на множники, метод математичної індукції, метод оцінок та інші. Наведено зразки розв'язків відповідних задач. Мається на увазі, що представлений матеріал буде корисним для вчителів-практиків при організації роботи математичних гуртків та проведенні факультативних занять за темами, які пов'язані з рівняннями у цілих числах. Подальшої розробки вимагає створення детальних планів-конспектів подібних занять. Представлений матеріал також може визначити структуру та зміст відповідного курсу за вибором для здобувачів вищої освіти – майбутніх вчителів-практиків з математики закладів загальної середньої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анікушин, А. В. та ін. (2013). *Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2011/2012 н. р.* (Б. В. Рубльов, Ред.) Гімназія.
2. Анікушин, А. В. та ін. (2014). *Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2012/2018 н. р.* (Б. В. Рубльов, Ред.) Гімназія.
3. Бевз, В. Г. (2006). *Історія математики.* Основа.
4. Кравчук, В. Р. (2019). *Задачі математичних олімпіад.* Підручники і посібники.

5. Ядренко М.Й. (2004). Піфагорові трикутники і Велика теорема Ферма. У *свімі математики*, 11(2), 1-9. <http://195.20.96.242:5028/rvportal/DocDescription?docid=RvROBU.BibRecord.35254>.
6. Van der Waerden, B. L. (1983). *Diophantine Equations*. In: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61779-95>
7. Mordell, L. J. (1969). *Diophantine equations*. *Pure and Applied Mathematics*, 30. Academic Press.
8. Schmidt, Wolfgang M. (1991). *Diophantine approximations and Diophantine equations*. *Lecture Notes in Mathematics*. 1467. Berlin: Springer-Verlag.
9. Smart, Nigel P. (1998). *The algorithmic resolution of Diophantine equations*. *London Mathematical Society Student Texts*. 41. Cambridge University Press.
10. Stillwell, J. (2004). *Mathematics and its History (Second ed.)*. Springer Science + Business Media Inc.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Anikushyn, A. V. ta in. (2013). *Matematychni olimpiadni zmahannia shkolariv Ukrainy. 2011/2012 n. r.* [Mathematical Olympiad competitions of schoolchildren of Ukraine. 2011/2012 e. y.]. (B. V. Rublov, Red.) Himnaziia.
2. Anikushyn, A. V. ta in. (2014). *Matematychni olimpiadni zmahannia shkolariv Ukrainy. 2012/2018 n. r.* [Mathematical Olympiad competitions of schoolchildren of Ukraine. 2012/2018 e. y.]. (B. V. Rublov, Red.) Himnaziia.
3. Bezv, V. H. (2006). *Istoriia matematyky [History of mathematics.]*. Osnova.
4. Kravchuk, V. R. (2019). *Zadachi matematychnykh olimpiad [Problems of mathematical Olympiads.]*. Pidruchnyky i posibnyky.
5. Iadrenko M.I. (2004). *Pifahorovi trykutnyky i Velyka teorema Ferma [Pythagorean triangles and Fermat's Great Theorem.]*. U *sviti matematyky — In the world of mathematics*, 11(2), 1-9. <http://195.20.96.242:5028/rvportal/DocDescription?docid=RvROBU.BibRecord.35254>.
6. Van der Waerden, B.L. (1983). *Diophantine Equations*. In: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61779-95>
7. Mordell, L. J. (1969). *Diophantine equations*. *Pure and Applied Mathematics*. Vol. 30. Academic Press.
8. Schmidt, Wolfgang M. (1991). *Diophantine approximations and Diophantine equations*. *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 1467. Berlin: Springer-Verlag.
9. Smart, Nigel P. (1998). *The algorithmic resolution of Diophantine equations*. *London Mathematical Society Student Texts*. Vol. 41. Cambridge University Press.
10. Stillwell, J. (2004). *Mathematics and its History (Second ed.)*. Springer Science + Business Media Inc.

Матеріал надійшов до редакції 20.02.2024р.



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.