

Олена СИНЮКОВА, Ольга ЧЕПОК

***Зображення просторових фігур на
площині при навчанні евклідової
геометрії***

Навчальний посібник

Частина I

Одеса - 2025

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол № 14 від «24» квітня 2025 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Євтухов В. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Страхов Є. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Синюкова О. М., Чепок О. О. Зображення просторових фігур на площині при навчанні евклідової геометрії: навчальний посібник. Одеса: Університет Ушинського, 2025, 509 с.

У першій частині навчального посібника розглянуто загальні положення евклідової геометрії щодо теорії зображень просторових фігур на площині та різні методи побудови таких зображень, висвітлено найпростіші властивості паралельного проєктування як основного методу побудови зображень просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії, всебічно досліджені питання зображення плоских фігур за означеним методом.

Матеріал розраховано на студентів фізико-математичних спеціальностей закладів вищої освіти, у першу чергу педагогічних, учителів математики та учнів старших класів закладів загальної середньої освіти.

ЗМІСТ

Передмова.....	6
Розділ I. Загальні положення.	11
§1. Поняття про зображення фігури у евклідовій геометрії.....	11
Питання і завдання для самоконтролю до §1.....	19
§2. Про різні методи зображень фігур на площині у евклідовій геометрії.....	24
2.1. Метод Монжа.....	24
2.2. Метод центрального проєктування.....	27
2.3. Метод лінійної перспективи.....	29
2.4. Метод Федорова.....	32
2.5. Основні вимоги до зображень просторових фігур на площині при навчанні евклідової геометрії.....	34
Питання і завдання для самоконтролю до §2.....	38
§3. Метод паралельного проєктування зображення на площині фігур евклідової геометрії та його основні характеристики	42
3.1. Основні означення.....	42
3.2. Зображення найпростіших фігур евклідової геометрії за методом паралельного проєктування	51
Питання і завдання для самоконтролю до §3.....	90
Практичні завдання для самостійного розв’язання до розділу I.....	100
Тестові завдання для самоконтролю до розділу I.	109
Розділ II. Зображення плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування	124
§4. Лінійні та плоскі геометричні фігури. Трикутник як найпростіша нелінійна плоска геометрична фігура.....	124
4.1. Зображення лінійних геометричних фігур за методом паралельного проєктування.....	124
4.2. Зображення трикутників за методом паралельного	

проєктування	130
Питання і завдання для самоконтролю до §4.....	140
§5. Основна теорема теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування	146
Питання і завдання для самоконтролю до §5.....	169
§6. Зображення основних відрізків, прямих і точок, пов'язаних з трикутником, при невиродженому для даного трикутника паралельному проєктуванні.....	173
Питання і завдання для самоконтролю до §6.....	210
§7. Зображення плоских n -кутників, $n \in N, n > 3$, при невирод- женому для даних фігур паралельному проєктуванні.....	215
Питання і завдання для самоконтролю до §7.....	224
§8. Зображення кола, круга та їх основних елементів при неви- родженому для даних фігур паралельному проєктуванні.....	227
8.1. Коло та круг.....	227
8.2. Еліпс.....	235
8.3. Вписані у еліпс та описані навколо еліпса многокутники...	242
8.4. Еліпс як зображення кола при паралельному проєктуванні.....	246
Питання і завдання для самоконтролю до §8.....	268
§9. Зображення вписаних многокутників при невиродженому для даних фігур паралельному проєктуванні.....	273
Питання і завдання для самоконтролю до §9.....	314
§10. Зображення описаних многокутників при невиродженому для даних фігур паралельному проєктуванні	317
Питання і завдання для самоконтролю до §10.....	389
Практичні завдання для самостійного розв'язання до розділу II.....	392
Тестові завдання для самоконтролю до розділу II.....	428
Відповіді, розв'язки або вказівки до розв'язання практичних	

завдань до розділу І.....	441
Відповіді до тестових завдань для самоконтролю до розділу І.....	452
Відповіді, розв'язки або вказівки до розв'язання практичних завдань до розділу ІІ.....	454
Відповіді до тестових завдань для самоконтролю до розділу ІІ.....	497
Предметний показчик.....	499
Іменний показчик.....	504
Інформаційні джерела.....	505

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Зображення просторових фігур на площині при навчанні евклідової геометрії» розроблено відповідно до програми навчальної дисципліни «Теорія зображень фігур у евклідовій геометрії», що, входить до складу обов'язкових освітніх компонент освітньої програми підготовки фахівців за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти за спеціальністю Середня освіта (Математика) згідно ОПП «Середня освіта (Математика. Інформатика)» та ОПП «Середня освіта (Математика. Англійська мова)» у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

Сьогодні важко уявити собі викладача евклідової стереометрії, який не мав би уяви про методи зображень просторових фігур на площині. Сучасні інформаційні технології, звичайно, дозволяють у різних ракурсах «бачити» будь-які просторові об'єкти на екрані монітора. Натомість це далеко не завжди може суттєво допомогти у розв'язанні певної конкретної стереометричної задачі. У жодному разі не заперечуючи загальну корисність застосування таких технологій, дозволимо собі стверджувати, що, навіть за наявності відповідних технічних можливостей, це далеко не завжди є доцільним. Розв'язання значної кількості стереометричних задач стає майже прозорим після виконання на дошці або в учнівському зошиті нескладного рисунку. Зрозуміло, що мова може йти лише про правильний рисунок відповідно до обраного методу зображень.

Людство розробило різні методи зображень просторових фігур на площині залежно від різних практичних потреб. Екран монітора також можна розглядати як модель частини евклідової площини. Отже, для створення на ньому певних зображень, знайомство з відповідними методами зображень є цілком необхідним.

Для побудови зображень геометричних фігур на площині найпростішим з точки зору математики і найбільш придатним для використання під час навчання евклідової геометрії виявився метод паралельного проєктування. Оволодіння основними положеннями цього методу передбачено Державним стандартом і створеними на його основі сучасними програмами з геометрії для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти ([3; 4; 18; 19; 20]), відповідний навчальний контент входить до складу сучасних підручників з геометрії ([7; 16; 17; 18], наприклад).

У підсумку, варто визнати, що знайомство з різними методами зображень просторових фігур на площині, опанування саме методу паралельного проєктування є вкрай необхідним як для майбутнього учителя математики закладу середньої освіти, так і для викладача математики закладу фахової передвищої або вищої освіти. Метою даного навчального посібника є забезпечення подібного знайомства.

Запропонована частина посібника складається з двох розділів. У першому розділі розглянуто загальні поняття про зображення геометричних фігур на площині у евклідовій геометрії, наведено приклади найбільш поширених методів зображень, як з математичного, так і з методичного поглядів обґрунтовано особливу доцільність застосування для зображень геометричних фігур при викладанні евклідової геометрії саме методу паралельного проєктування, наведено основні характеристики цього методу, обґрунтовано його найпростіші властивості.

Другий розділ роботи присвячено питанням зображення за методом паралельного проєктування плоских геометричних фігур. Тут послідовно розглянуто закономірності зображення трикутників та пов'язаних з ними основних лінійних елементів, інших плоских много-

кутників, кола, круга та їх основних частин, вписаних та описаних багатокутників.

Одночасно, у першій частині посібника висвітлено теорію повноти і неповноти зображень фігур у евклідовій геометрії, введено поняття про позиційну, афінну, евклідову та метричну повноту або неповноту зображення, про позиційну, афінну, евклідову та метричну задачі теорії зображень, для зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування, обґрунтовано критерії різних видів повноти, наведено теорію коефіцієнтів евклідової та метричної неповноти.

Матеріал розділів поділено на параграфи. Кожний параграф завершується переліком питань і завдань для самоконтролю за його змістом. Наприкінці кожного розділу наведено умови практичних завдань для самостійного розв'язання і умови завдань у тестовій формі як теоретичного, так і практичного характеру, для самоконтролю за змістом усього розділу. Відповіді, розв'язки або вказівки до розв'язків даних практичних завдань разом із відповідями до завдань у тестовій формі розміщено наприкінці посібника. Там також наведено іменний і предметний покажчики та перелік використаних інформаційних джерел.

Викладання більшої частини матеріалу спирається на ті положення евклідової геометрії, які стали відомими читачам під час опанування курсів геометрії на рівні загальної середньої освіти. При цьому, у випадках, коли автори вважали це за доцільне, для усунення необхідності звернень до довідкових джерел і виключення можливих непорозумінь, наведено відповідні означення і сформульовано деякі теореми стандартних курсів евклідової геометрії закладів загальної середньої освіти. Водночас, для усвідомлення певних включених до посібника положень необхідним є знайомство з матеріалом

стандартного курсу лінійної алгебри для закладів вищої освіти та з матеріалом такого курсу аналітичної геометрії для закладів вищої освіти, який містить теорії геометричних перетворень евклідової площини і евклідового простору, зокрема, теорію рухів, теорію перетворень подібності та теорію афінних перетворень. У випадках, коли це є можливим і доцільним, наведено паралельні міркування (і «на мові елементарної геометрії», і «на мові вищої математики»).

Посібник безпосередньо розраховано на студентів фізико-математичних спеціальностей закладів вищої освіти, у першу чергу педагогічних. Його спрямовано на самостійне опанування майбутніми викладачами математики представленого навчального матеріалу. Посібник містить теоретичні відомості і задачі, які, у своїй переважній більшості, входять або можуть входити до підручників з геометрії для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти. На його основі можуть бути розроблені відповідні факультативні курси для учнів. Певні задачі, вміщені у посібнику, можна розглядати як задачі олімпіадного характеру для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти. Отже, посібник може бути корисним не лише для студентів, а й для учителів-практиків з математики, для учнів старших класів відповідних закладів освіти.

Теорія зображень на площині фігур евклідової геометрії за методом паралельного проєктування розроблялася протягом минулого століття головним чином з метою застосування саме у курсах геометрії закладів середньої освіти ([27; 35]). Численні, видані на той час у вигляді книжок, навчальні посібники та інші методичні розробки для учителів у своїй переважній більшості дотепер не збереглися. З певними із них наразі можна ознайомитися лише за електронними версіями. Одночасно, натепер, за такими книжками студенту чи

учителю досить важко створити сучасне цілісне уявлення про сутність питання. Автори спробували допомогти їм у цьому.

У Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» вищевказаний навчальний курс викладався протягом десятиліть. Автори вважають за необхідне висловити свою вдячність усім своїм колишнім студентам, плідна робота яких протягом відповідних практичних занять сприяла формуванню вміщеної у посібнику системи задач та визначенню їх раціональних розв'язків, зокрема, колишній студентці фізико-математичного факультету О. Л. Михайловій, дипломна робота якої стала безпосереднім поштовхом для створення такого посібника, хоча й через значну кількість років після свого захисту.

Автори.

РОЗДІЛ І

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

§1. Поняття про зображення фігури у евклідовій геометрії

З найдавніших часів людина почала зображати предмети оточуючого середовища на інших предметах цього середовища. Цей факт підтверджується різноманітними археологічними знахідками



Рис.1.Наскельні рельєфи в Танумі (Швеція)

[47]

кращення комунікації або спосіб навчання підростаючого покоління.

Проте, якими б не були причини, що змусили людей почати відтворювати предмети довкілля та живі істоти у зображеннях, ця тенденція поглиблювалася з плином часу. Зображення наносили на стіни, посуд, зброю, одяг та інші поверхні, які тільки можна було пристосувати для цього (див. наприклад, рис. 2).

(див. рис. 1, наприклад).

Вчені не є одностайними в тому, який зміст носили зображення на початку існування людства. Багато хто вважає, що вони мали суто релігійний характер, інші вбачають у подібних зображеннях спосіб по-



Рис. 2. Весілля Фетіди.

470 –460 до н. е., Лувр. Париж

[48]



Рис. 3. Піфагор Самоський
[49]

Бажаність використання зображень у навчально-виховному процесі була усвідомлена людством ще у далекій давнині. До нас дійшли численні стародавні картини та гравюри, які свідчать про використання з навчальною метою моделей та рисунків (див., наприклад, рис. 3).

Загальновідомим є той факт, що людина, а особливо – дитина, значно краще розуміє матеріал, коли має наочний примірник. Але далеко не завжди у процесі

навчання можна продемонструвати реальний предмет чи його модель. У цьому часто заважають або розміри цього предмету, або його ціна, або унікальність. До того ж, подібне не завжди варто вважати за потрібне, бо у процесі навчання ми, зазвичай, розглядаємо не усі, а лише певні характеристики об'єктів, лише ті характеристики, які є важливими саме для даного етапу навчання.

Отже, важливим було знайти більш економічний спосіб підвищення наочності навчального процесу. У той же час, вже існував досвід представлення предметів оточуючого середовища та живих істот у



Рис. 4. Декоративний розпис на склі [50]

вигляді рисунків. Подібні зображення і виявилися саме тим інструментом, який став вкрай доцільним елементом процесу навчання.

Незважаючи на те, що для відтворення зображень можна використовувати поверхні будь-якої форми (див., наприклад, рис. 4), найпростішими, і саме тому найзручнішими, для цього виявилися плоскі поверхні.

У підсумку, необхідною складовою викладання евклідової геометрії стала теорія зображення просторових фігур на евклідовій площині.

Для того, щоб точно описати цей процес, конкретизуємо зміст наступних основних понять.

У математиці під **евклідовою геометрією** розуміють конкретну аксіоматичну теорію. У першому наближенні таку теорію розробив давньогрецький учений Евклід (рис. 5) близько 300 років до нашої ери [38]. Зараз можна стверджувати, що це



Рис. 5. Евклід [51]

аксіоматична теорія аксіоматики Д. Гільберта (рис. 6) евклідової геометрії [39] або іншої аксіоматики, яка є еквівалентною до аксіоматики Д. Гільберта [40]. **Евклідов простір** – це множина точок відповідно до даної аксіоматичної теорії.

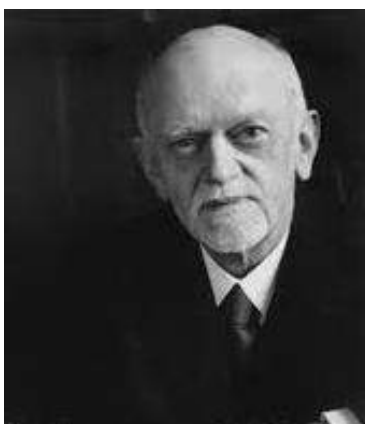


Рис. 6. Д. Гільберт [52]

Багатотисячолітній досвід людства переконливо свідчить про те, що евклідов простір найкращим чином моделює просторові форми безпосередньо оточуючого людину середовища. Саме тому теорія евклідового простору була першою (і, до початку дев'ятнадцятого століття,

єдиною) геометричною моделлю довкілля, створеною людством.

Дитина важко сприймає абстрактні математичні теорії. У повному обсязі це, мабуть, і не є доцільним у межах загальної середньої освіти. Отже, сучасний курс евклідової геометрії для закладів загальної середньої освіти не може не мати двоїстого характеру, поєднуючи в собі так звану фізичну геометрію – науку про властивості просторових форм безпосередньо оточуючого людину середовища – і теоретичну геометрію – науку, представлену у вигляді певної відповідної аксіоматичної теорії.

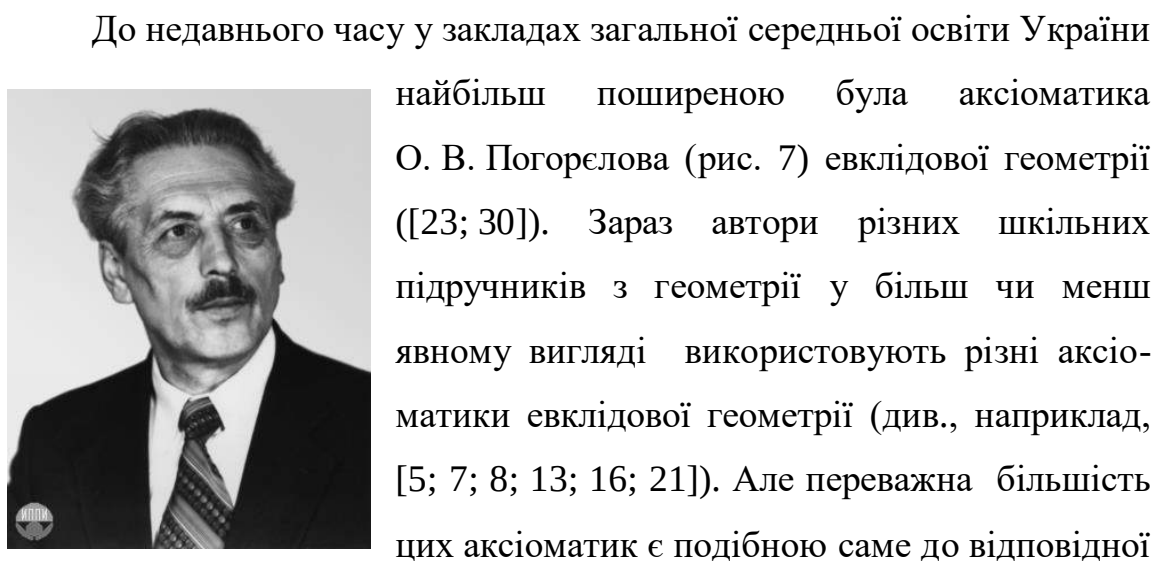


Рис. 7. О. В. Погорелов [53]

найбільш поширеною була аксіоматика О. В. Погорелова (рис. 7) евклідової геометрії ([23; 30]). Зараз автори різних шкільних підручників з геометрії у більш чи менш явному вигляді використовують різні аксіоматики евклідової геометрії (див., наприклад, [5; 7; 8; 13; 16; 21]). Але переважна більшість цих аксіоматик є подібною саме до відповідної аксіоматики О. В. Погорелова.

Під **геометричною фігурою F** евклідового простору будемо розуміти довільну непорожню підмножину точок цього простору. Основу поняття про зображення геометричної фігури на площині складає поняття про проєкцію геометричної фігури на площину. Площину, на яку відбувається проєктування фігури F , називають **площиною проєкцій**.

Процес проєктування фігури F – це процес побудови проєкцій усіх її точок. **Процес проєктування точки M** – це встановлення відповідності між точкою M та деякою підмножиною T точок площини проєкцій. При цьому підмножину T називають **проєкцією**

точки M . **Проекція фігури F** – це сукупність Φ проєкцій усіх її точок. Фігуру F для проєкції Φ називають **оригіналом**. Конкретний спосіб реалізації процесу знаходження проєкцій фігур називають **методом проєктування**. Кожний метод проєктування характеризується своїми **апаратом** та **законом відображення**. Апарат методу проєктування – це ті геометричні фігури, які визначають **процес проєктування**, а **закон відображення** – це спосіб знаходження для точки M її проєкції T , тобто спосіб реалізації для точки M процесу проєктування.

Використання того чи іншого методу проєктування залежить від **мети проєктування**. Можна стверджувати, що існує безліч різних методів проєктування. Це пояснюється тим, що існує безліч способів задання як апарату проєктування, так і закону відображення. Теоретично розроблені, головним чином, саме ті методи, які виявилися корисними для практичних застосувань.

Зображенням фігури F евклідового простору називають будь-яку фігуру F' , подібну до проєкції Φ цієї фігури. Площину, на якій побудовано зображення фігури F , називають **картинною площиною** або **площиною зображень**.

Зрозуміло, що кожна геометрична фігура є подібною до себе, отже, проєкція фігури є і її зображенням. Але не тільки.

Найчастіше, зо-



Рис. 8. Зображення та об'єкт мають різний розмір [54]

зображення F' вважають підмножиною площини проєкцій, площина проєкцій тоді, одночасно, є й картинною площиною. Натомість, іноді зручно розглядати зображення як підмножину певної іншої площини, можна вести мову про однакові (рівні між собою) зображення однієї й тієї ж фігури на різних площинах.

Потреба у розділенні понять «проєкція фігури» і «зображення фігури» виникла в зв'язку з тим, що проєкції часто мають розміри, близькі до розмірів оригіналів. А у більшості випадків для зображень це є зайвим. Часто зображення доцільно робити або меншими, або більшими за проєкції. Головним чином це положення є суттєвим з позиції реалізації для того чи іншого методу зображень практичних застосувань. Так, зрозуміло, що, для проведення досліджень, проєкція клітини людського тіла у більшості випадків має бути збільшена у велику кількість разів. У той же час, зображення слона не завжди повинне відповідати його реальним розмірам (рис. 8).

Згідно того чи іншого методу проєктування геометричних фігур, говорять про той чи інший **метод зображення** геометричних фігур. **Процес зображення фігури F** розглядають як процес знаходження зображень усіх точок даної фігури, **процес зображення точки M** – це, знову-таки, процес встановлення відповідності між точкою M і певною підмножиною M' точок картинної площини, підмножина M' при цьому називається **зображенням точки M** . Зображення F' фігури F , зрозуміло, представляє собою сукупність зображень усіх точок даної фігури, фігуру F для **зображення F'** називають **оригіналом**.

Між фігурами евклідового простору виділяють чотири групи основних відношень: проєктивні, афінні, відношення подібності та метричні [24; 25; 26; 28].

Проективні відношення – це відношення, які зберігаються при довільних проективних відображеннях із евклідового простору у себе. У першу чергу, проективні відношення включають у себе відношення приналежності, які «на мові теорії множин» означають «бути підмножиною».

Афінні відношення – це відношення, які зберігаються при довільних афінних перетвореннях евклідового простору. Афінними є усі проективні відношення, а також, наприклад, паралельність прямих, відношення довжин відрізків, що належать одній прямій або паралельним прямим.

Відношення подібності – це відношення, які зберігаються при усіх перетвореннях подібності евклідового простору. До них, зокрема, відносяться усі афінні відношення, величини кутів, відношення довжин довільних відрізків.

Метричні відношення – це відношення, які зберігаються при усіх рухах евклідового простору. У першу чергу, це усі відношення подібності та довжини відрізків.

Позиційною задачею теорії зображень геометричних фігур евклідового простору називають задачу встановлення за зображеннями геометричних фігур проективних відношень між їх елементами, або між елементами геометричних фігур, які визначаються через зображені фігури за допомогою проективних відношень. Аналогічним чином вводять поняття про **афінну задачу, евклідову задачу (задачу подібності), метричну задачу теорії зображень геометричних фігур**.

Зображення фігури евклідового простору називають **повним** або **позиційно повним**, якщо за цим зображенням можна однозначно встановити усі проективні відношення між будь-якими елементами даної фігури та між фігурами, які визначаються на підставі даної за допомогою проективних відношень. Аналогічним чином вводять

поняття про **афінно повні, подібно повні, метрично повні** зображення. Подібно повні зображення називають також **евклідово повними** ([26; 31]).

Зрозуміло, що кожне афінно повне зображення є і позиційно повним, кожне евклідово повне зображення є і афінно повним, кожне метрично повне зображення є і евклідово повним, кожне позиційно неповне зображення не є і афінно повним, кожне афінно неповне зображення не є і евклідово повним, кожне евклідово неповне зображення не є і метрично повним. Зрозуміло також, що, якщо, згідно певного проєктування (будь-якого проєктування за будь-яким методом), проєкція Φ фігури F є її позиційно (афінно, евклідово) повним зображенням, то кожне зображення F' фігури F згідно цього проєктування для фігури F є позиційно (відповідно, афінно чи евклідово) повним (фігура F' є подібною до фігури Φ).

Для позиційно повного зображення кожна позиційна задача теорії зображень має єдиний розв'язок. До позиційно повних зображень не можна довільним чином додавати зображення геометричних фігур, які за допомогою проєктивних відношень однозначно визначаються через фігури, зображені раніше. Для афінно повного зображення кожна афінна задача теорії зображень має єдиний розв'язок. До афінно повних зображень не можна довільним чином додавати зображення геометричних фігур, які за допомогою афінних відношень однозначно визначаються через фігури, зображені раніше. Аналогічні твердження є справедливими для евклідово повних і для метрично повних зображень.

Позиційно повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до проєктивних перетворень евклідового простору. Афінно повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до афінних перетворень евклідового простору. Евклідово повні зображен-

ня дозволяють відновити оригінал з точністю до перетворень подібності евклідового простору. Метрично повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до рухів евклідового простору.

Теоретична розробка кожного методу зображень фігур евклідового простору передбачає і визначення способів оцінки характеру повноти чи неповноти отриманого зображення, знаходження критеріїв різних видів повноти.

Питання і завдання для самоконтролю до §1

1.1. Чим підтверджується той факт, що з найдавніших часів у людини виникла потреба у зображенні одних предметів оточуючого середовища на інших предметах цього середовища?

1.2. Які міркування існують з приводу мети подібних зображень?

1.3. Які обставини часто заважають продемонструвати у процесі навчання реальний предмет чи його модель?

1.4. Чому демонстрування реального предмету чи його моделі у процесі навчання не завжди можна вважати доцільним?

1.5. Що розуміють під евклідовою геометрією у теорії зображень геометричних фігур?

1.6. Який учений започаткував формування евклідової геометрії у вигляді аксіоматичної теорії?

1.7. Що у евклідовій геометрії називають евклідовим простором?

1.8. Чому саме теорія евклідового простору була першою геометричною моделлю навколишнього середовища, створеною людством?

1.9. Як треба розуміти твердження про те, що курс геометрії у закладах загальної середньої освіти носить двоїстий характер?

1.10. Чим пояснюється той факт, що курс геометрії у закладах загальної середньої освіти носить двоїстий характер?

1.11. Яка аксіоматика евклідового простору була найбільш поширеною у закладах загальної середньої освіти України до недавнього часу?

1.12. Наведіть прийняте зараз у навчальних курсах евклідової геометрії означення геометричної фігури.

1.13. Яке поняття у евклідовій геометрії складає передумову для поняття про зображення геометричної фігури на площині?

1.14. Як називають площину на яку відбувається проєктування геометричної фігури?

1.15. У чому полягає процес проєктування геометричної фігури?

1.16. Що розуміють під процесом проєктування точки? Наведіть означення проєкції точки згідно визначеного методу проєктування.

1.17. Наведіть означення проєкції геометричної фігури згідно визначеного методу проєктування..

1.18. Наведіть означення оригінала для проєкції геометричної фігури згідно визначеного методу проєктування..

1.19. Що у евклідовій геометрії розуміють під методом проєктування?

1.20. Яким чином у евклідовій геометрії характеризують кожний метод проєктування?

1.21. Що мають на увазі під апаратом того чи іншого методу проєктування?

1.22. Що розуміють під законом відображення для того чи іншого методу проєктування?

1.23. Скільки, теоретично, у евклідовій геометрії існує різних методів проєктування геометричних фігур на площину? Чим цей факт можна пояснити?

1.24. Від чого залежить обрання того чи іншого методу проєктування?

1.25. Що у теорії зображень геометричних фігур називають зображенням геометричної фігури на площині?

1.26. Наведіть означення картинної площини у теорії зображень геометричних фігур.

1.27. У чому у теорії зображень фігур евклідової геометрії полягає різниця між поняттями «проєкція фігури» і «зображення фігури»?

1.28. У зв'язку з чим у евклідовій геометрії виникла потреба у розділенні понять «проєкція фігури» і «зображення фігури»?

1.29. Як у теорії зображень фігур евклідової геометрії вводять поняття про метод зображень?

1.30. Що у теорії зображень фігур евклідової геометрії розуміють під процесом зображення точки?

1.31. Що у теорії зображень фігур евклідової геометрії розуміють під процесом зображення геометричної фігури?

1.32. За яких умов у теорії зображень фігур евклідової геометрії певну фігуру називають оригіналом зображення?

1.33. Які відображення із евклідового простору у себе називають проєктивними? Наведіть відповідні приклади. Чому не розглядають проєктивні перетворення евклідового простору?

1.34. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають проєктивними? Наведіть відповідні приклади.

1.35. Які перетворення евклідового простору називають афінними? Наведіть відповідні приклади.

1.36. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають афінними? Наведіть відповідні приклади.

1.37. Які перетворення евклідового простору називають перетвореннями подібності? Наведіть відповідні приклади.

1.38. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають евклідовими або відношеннями подібності? Наведіть відповідні приклади.

1.39. Наведіть означення руху евклідового простору.

1.40. Наведіть приклади рухів евклідової площини та евклідового простору.

1.41. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають метричними? Наведіть відповідні приклади.

1.42. Яку задачу називають позиційною задачею теорії зображень фігур евклідової геометрії?

1.43. Яку задачу називають афінною задачею теорії зображень фігур евклідової геометрії?

1.44. Яку задачу називають евклідовою задачею теорії зображень фігур евклідової геометрії?

1.45. Яку задачу називають метричною задачею теорії зображень фігур евклідової геометрії?

1.46. Наведіть означення позиційно повного зображення геометричної фігури евклідового простору. У якій мірі позиційно повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.47. Наведіть означення афінно повного зображення геометричної фігури евклідового простору. У якій мірі афінно повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.48. Наведіть означення евклідово повного зображення геометричної фігури евклідового простору. У якій мірі евклідово повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.49. Наведіть означення метрично повного зображення геометричної фігури евклідового простору. У якій мірі метрично повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.50. Чи передбачає теоретична розробка у межах евклідової геометрії кожного методу зображень визначення способів оцінки характеру повноти отриманого зображення?

§2. Про різні методи зображень фігур на площині у евклідовій геометрії

Наведемо кілька прикладів найбільш поширених методів зображень просторових фігур на площині. Кожний з цих методів охарактеризуємо з точки зору його апарату та закону знаходження зображення довільної точки. Історично, усі методи, про які буде подалі йти мова, у евклідовій геометрії сформувалися як математичні абстракції відповідних практичних дій людей по зображенню на плоских поверхнях об'єктів оточуючого середовища. Існування кожного з цих методів обумовлено певними практичними задачами, певними професійними потребами людей. Саме тому, більшість зі створених теоретичних розробок безпосередньо знаходить своє застосування у практичній діяльності відповідних фахівців. Сфери подібних застосувань того чи іншого метода також будуть вказані.

2.1. Метод Монжа

Метод названо на ім'я Гаспара Монжа (1746-1818) – французького математика, геометра та державного діяча (рис. 9), який цей метод розробив та описав.

Апарат метода Монжа складається з трьох попарно перпендикулярних площин α , β і γ . Площину α називають **вертикальною площиною**, площину β – **горизонтальною площиною**, площину γ – **профільною площиною** (рис. 10). Згідно



Рис. 9. Гаспар Монж [55]

метода Монжа, для побудови проєкції довільної точки M на картинній площині з цієї точки проводять перпендикуляри до кожної з площин

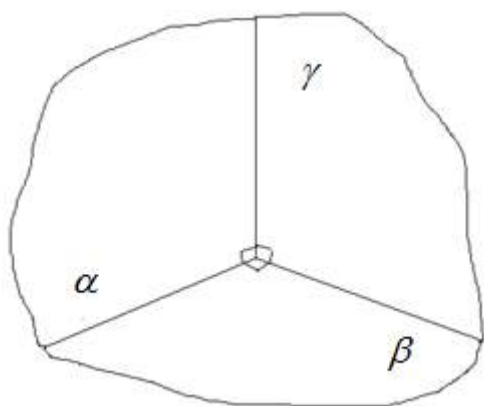


Рис. 10

апарату: $MM_1 \perp \alpha$, $MM_2 \perp \beta$, $MM_3 \perp \gamma$ (рис. 11). Потім виконують «розріз» за лінією перетину площин γ і β та «розгортають» утворену фігуру на картинну площину (рис. 12). Сукупність точок

$\{M_1, M_2, M_3\}$ картинної площини

називають **проекцією точки M** на картинну площину за **методом Монжа** [29; 31].

Метод Монжа дозволяє за проекцією відновити оригінал з точністю до його положення у просторі (див. наприклад, рис. 13). Отже, усі зображення, отримані за методом Монжа, є евклідово (подібно) повними.

У практичній діяльності метод Монжа у першу чергу використовують інженери та лікарі.

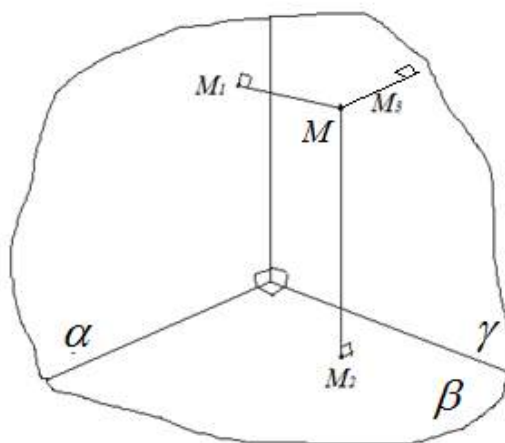


Рис. 11

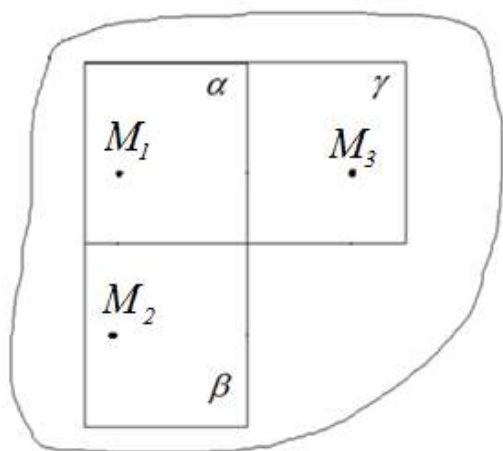


Рис. 12

Зображення, отримані за методом Монжа, для людей без спеціальних навичок не є наочними. Наприклад, технічно не підготована людина, не завжди спроможна уявити, який об'єкт зображено на виконаному за допомогою метода Монжа рисунку (див., наприклад, рис. 13). Студенти технічних вузів

опановують метод Монжа у курсах нарисної геометрії та креслення. Студенти медичних університетів та лікарі вимагають спеціальної підготовки, для того, щоб навчитися розуміти рентгенівські знімки та знімки УЗІ.

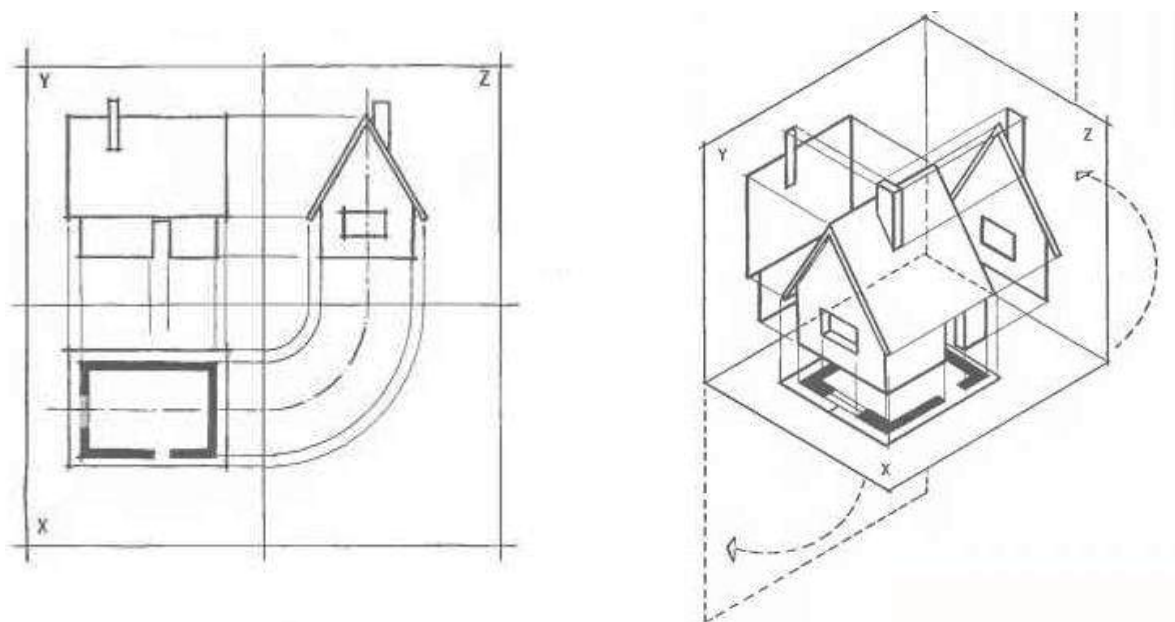


Рис. 13

2.2. Метод центрального проєктування

Апарат метода центрального проєктування складається з точки A , яку називають **точкою зору**, і картинної площини α , яка не містить точку A ($A \notin \alpha$) (рис. 14).

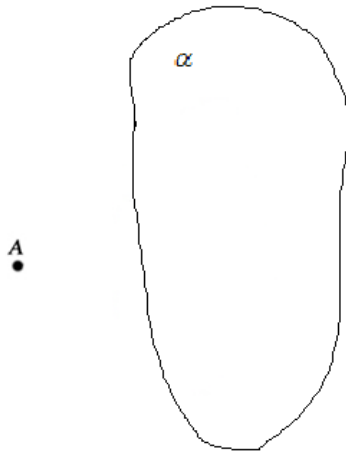


Рис. 14

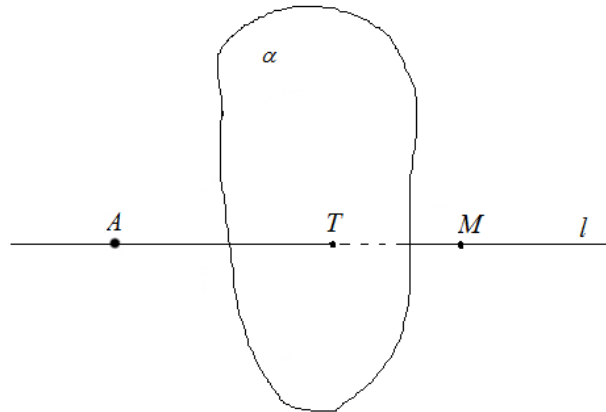


Рис. 15

Згідно метода **центрального проєктування** для визначення **проєкції точки M** , яка не співпадає з точкою A , через точки A і M проводять пряму l . Точка T , у якій ця пряма перетинає картинну площину, називають **проєкцією точки M на площину α із точки A** (рис. 15) ([16; 21; 29; 31]).



Рис. 16

Метод центрального проєктування у першу чергу використовується художниками-натуралістами та у фототехніці. (Саме тому цей метод також називають **фотографічним** або **оптичним**.) (рис. 16).



Рис. 17. Наочність зображення змінюється при зміні точки зору [56]

який знаходиться у тій точці зору, де перебував автор під час виконання відповідного проєктування (рис. 17.).

За методом центрального проєктування неможливо зобразити точки, які належать площині, що проходить через точку зору паралельно до картинної площини (рис. 18).

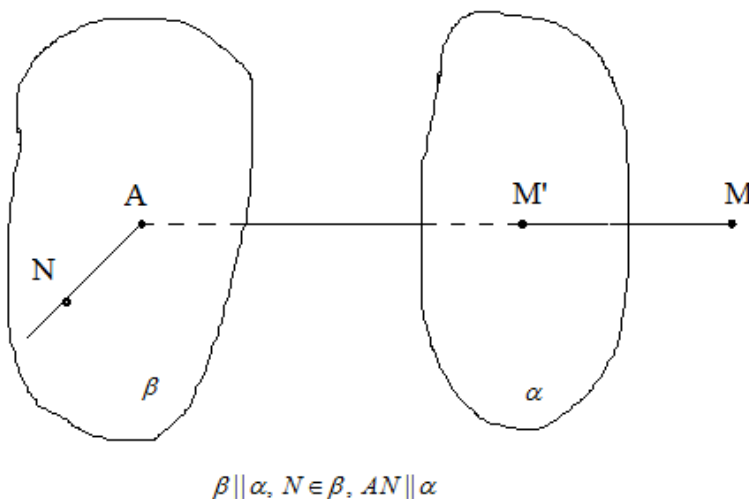


Рис. 18

кою. Створення зображення просторового об'єкту за методом центрального проєктування без використання технічних засобів потребує значної кількості часу, спеціальних умінь та навичок.

Зображення, отримані за методом центрального проєктування, є наочними для людини тому, що саме такі зображення у значній мірі відповідають сприйняттю оточуючого середовища органами зору людини. У той же час, отримане за цим методом зображення насправді є наочним лише для спостерігача,

Зображення, отримані за методом центрального проєктування, не дозволяють відновити оригінал з точністю до його положення у просторі: усі точки прямої AM зображуються однією точкою.

2.3. Метод лінійної перспективи



Рис. 19. Автопортрет
Леонардо да Вінчі [57]

Метод лінійної перспективи був розроблений відомим італійський художником, скульптором, архітектором та ученим епохи Ренесансу Леонардо да Вінчі (1452-1519) (рис. 19).

Апарат цього метода складають дві взаємно перпендикулярні площини α і β та точка A , яка не належить до жодної з них. Площину α називають **картинною площиною**, площину β - **площиною другого рядних (додаткових) проєкцій**, точку A -

точкою зору. Пряму h перетину площин α та β називають **основою картини**. До апарата також включений з точки A перпендикуляр AB до картинної площини α , і пряму h' , що проходить через точку B паралельно до основи

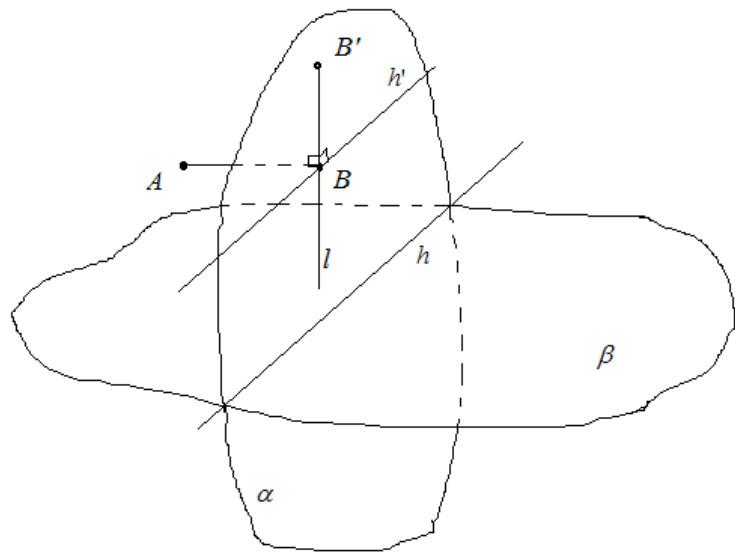


Рис. 20

картини. Пряму h' називають **лінією горизонту** (рис. 20). Через точку B у площині α перпендикулярно до лінії горизонту проводять пряму l ($l \perp h'$). У тій півплощині відносно прямої h' що не містить пряму h , на прямій l відкладають відрізок BB' , який дорівнює перпенди-

куляру AB ($BB' = AB$). Точку B' називають **головною точкою картини** (рис. 20).

У підсумку, картинна площина приймає такий вигляд, як на рисунку 21 [31].

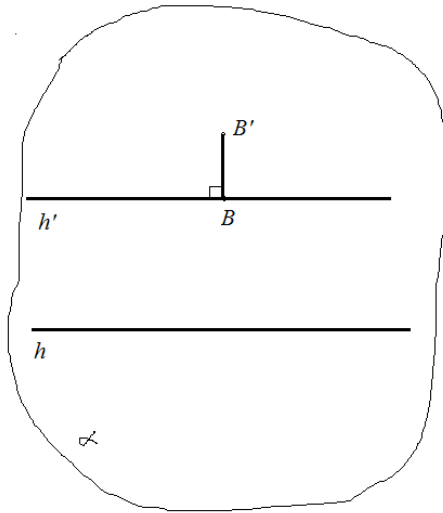


Рис. 21

Для визначення на картинній площині α **проекції** певної точки M за методом лінійної перспективи виконують наступні дії: 1) ортогонально проєктують точку M на площину другорядних проєкцій β — проводять $M_1 \perp \beta$ (рис. 22); 2) із точки зору A проєктують на картинну площину α точки M та M_1 , відповідно, отримують проєкції M' та M'_1 (рис. 22). При цьому, очевидно, що $BB' \parallel M'M'_1 \parallel MM_1$. **Проекцією точки M** називають підмножину $\{M', M'_1\}$ точок картинної площини α (рис. 23).

Метод лінійної перспективи надає можливість за проєкцією фігури відновити оригінал з точністю до його положення у просторі. Отже, усі зображення, отримані за методом лінійної перспективи, є евклідово повними.

Проте, так само, як і метод центрального проєктування,

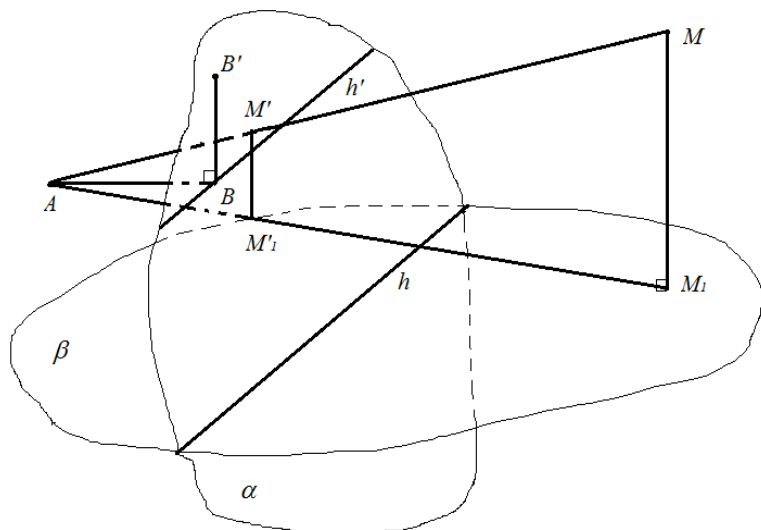


Рис. 22

цей метод є наочним лише для спостерігача, який знаходиться у точці зору, цей метод не дозволяє побудувати проєкцію точки, що належить площині, яка проходить через точку зору паралельно до картинної площини.

На практиці метод лінійної перспективи (і його узагальнення — метод подвійного проєктування) використовують архітектори. Він є достатньо складним технічно, побудова зображень за цим методом вимагає значної кількості часу.

Художники-натуралісти, у випадках зображення предмету та його відбиття від плоскої поверхні, також, як правило, використовують метод лінійної перспективи (див., наприклад, рис. 24).

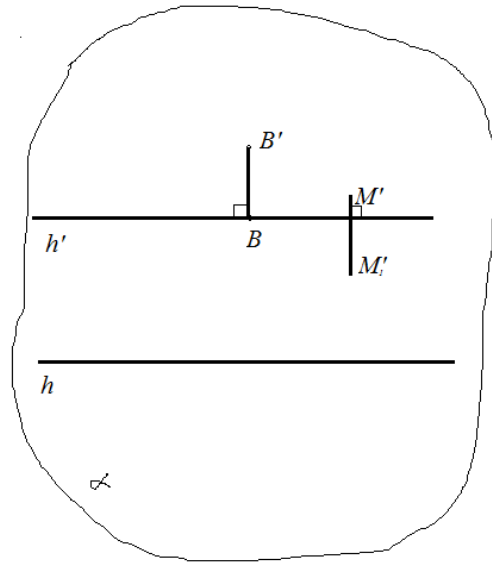


Рис. 23

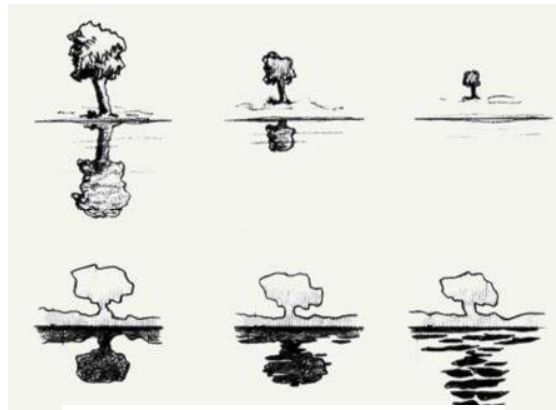


Рис. 24. У випадку зображення предметів та їх відбиття найчастіше використовується метод лінійної перспективи [59]

2.4. Метод Федорова

Метод названо на ім'я відомого кристалографа, мінералолога та математика Є. С. Федорова (1853-1919) (рис. 25).

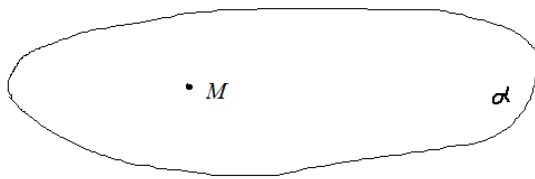


Рис. 25. Є.С. Федоров [58]

Апарат метода Федорова складається лише з однієї картинної площини α .

Площина α поділяє простір на два півпростора, один з яких приймають за додатній, а інший – за від'ємний. Можливими є три варіанта розташування точки M відносно даного апарату, і, відповідно, три варіанта **проекцій** цієї **точки** на картинну площину.

1. Точка M належить площині α . Тоді проекцією точки M вважають її саму (рис. 26).



2. Точка M належить додатньому півпростору. У такому

Рис. 26

випадку точку M ортогонально проєктують на площину α у певну точку M_1 , розглядають коло з центром у точці M_1 , радіус якого дорівнює

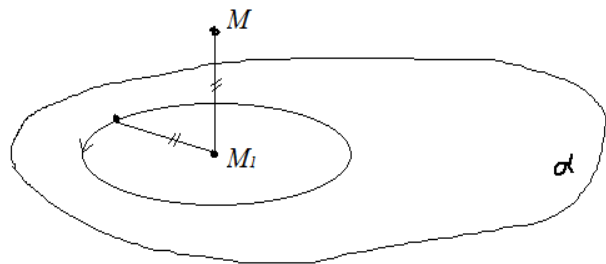


Рис. 27

відрізку MM_1 . На колі обирають додатню орієнтацію. Таке орієнтоване коло приймають за проекцією точки M (рис. 27).

3. Точка M належить від'ємному півпростору. У цьому разі проводять такі саме міркування, як і у попередньому випадку, але на

колі обирають від'ємну орієнтацію і вже таке орієнтоване коло приймають за проєкцію точки M (рис. 28).

Даний метод не є наочним, але отримані за його допомогою проєкції дозволяють відновити оригінал з точністю до його положення

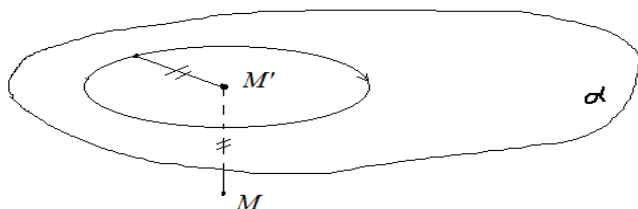


Рис. 28

у просторі. Це означає, що отримані за цим методом зображення є евклідово повними.

Метод Федорова було розроблено для потреб кристалографії. Там цей метод, у першу чергу, і використовують [31].

2.5. Основні вимоги до зображень просторових фігур на площині при навчанні евклідової геометрії

Усі описані вище методи евклідової геометрії зображень просторових фігур на площині є вельми цікавими. Як було вже зазначено, у математиці вони сформувалися унаслідок математичного моделювання конкретних практичних дій людей, як такі, що у найбільшій мірі задовольняють потреби цих дій. Отже, коли мова йде про задачу побудови зображень просторових фігур на площині при навчанні евклідової геометрії, до того ж, у першу чергу, під час аудиторних занять, бажано спочатку визначити мету подібних зображень і пов'язані з нею **основні вимоги** як до самих зображень, так і до процесу їх побудови.

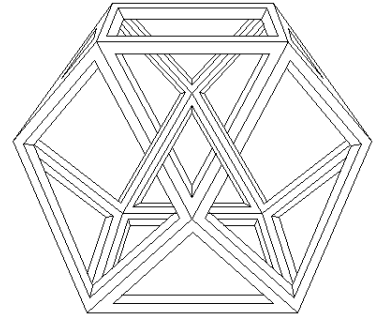


Рис. 29 [59]

У першу чергу, зображення повинні бути **правильними**

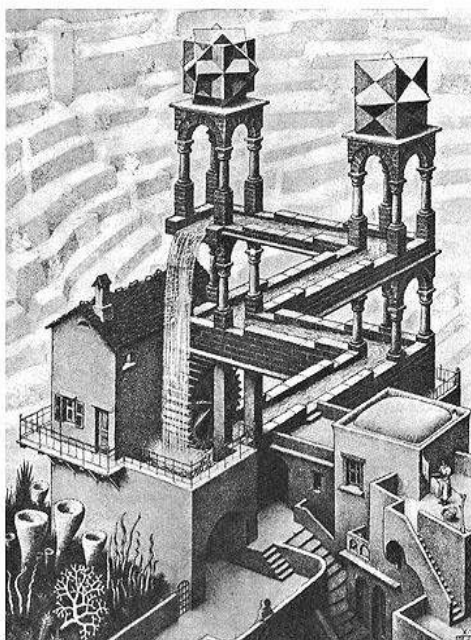


Рис. 30. «Вгору та Вниз» [59]

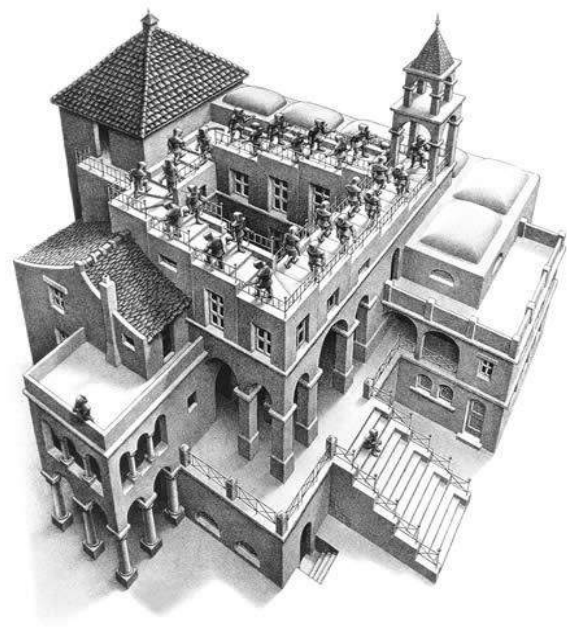


Рис. 31. «Водоспад» [59]

[7; 31; 32; 34; 35]. Тут мається на увазі те, що у евклідовій геометрії для подібних зображень, побудованих відповідно до обраного методу

зображень, повинні існувати оригінали. Як вже було підкреслено раніше, увесь досвід людства свідчить про те, що саме евклідова геометрія найкращим чином моделює просторові форми безпосередньо оточуючого людину середовища. Отже, бажано, щоб у якості оригіналів виступали такі абстрактні математичні фігури, які можна вважати моделями певних об'єктів того реального фізичного простору, що нас безпосередньо оточує. У той же час зрозуміло, що цілком можливо зобразити на площині фігури, яких не існує у геометрії тривимірного евклідового простору, прототипів яких у реальному фізичному просторі немає. У живописі, наприклад, сформувався цілий напрям зображення неможливих фігур, який називається «імпосибіліонізм» (від англійського слова impossibility).

Інтерес до «неможливих» фігур був присутній у людства доволі давно. Так, наприклад, ще Леонардо да Вінчі робив деякі подібні

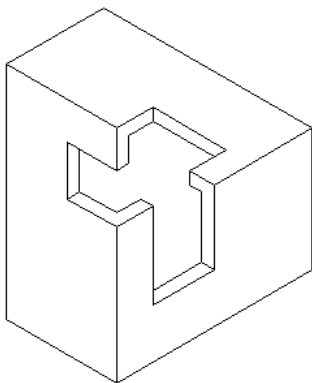


Рис. 32 [59]

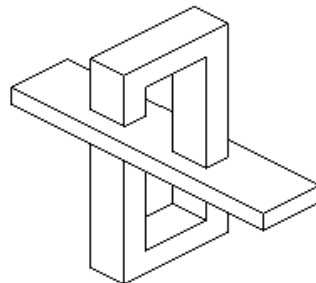


Рис. 33 [59]

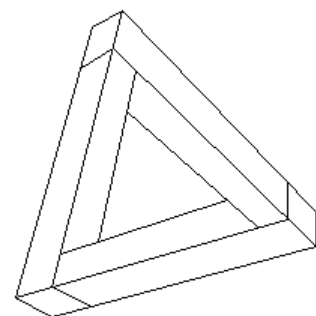


Рис. 34. «Трикутник
Пенроуза» [59]

«побудови» (рис.29, наприклад). Найвідомішим із представників імпосибіліонізму вважають художника-графіка Мауріца Корнеліса Ешера (1898-1972) (рис. 30, 31). Ще одним представником імпосибіліонізму є художник Оскар Рутерсвард (1915-2002) (рис. 32, 33). Цікаво, що відомий «трикутник Пенроуза» (рис. 34) був зображений Рутерсвардом ще у 1934 році, але у офіційному друці цей трикутник вперше з'явився у 1958 році, у статті англійського математика Роджера

Пенроуза, на ім'я якого і був у результаті названий [7; 21; 31]. Серед сучасних представників імпресіонізму відомими є Сергіо Бурато (рис. 35, наприклад), Моніка Буш (рис. 36, наприклад), Джос де Мей (наприклад, рис. 37).

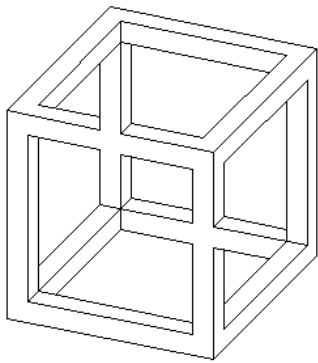


Рис. 35 [59]

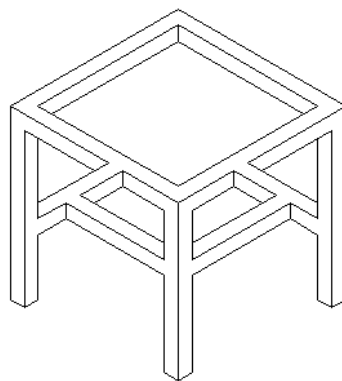


Рис. 36 [59]

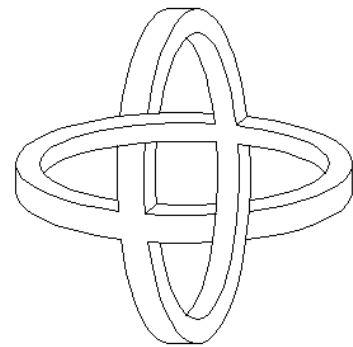


Рис. 37 [59]

Вищенаведені зображення є більше ніж цікавими для розгляду, проте, оригіналів для них у тривимірному евклідовому просторі існувати не може. Отже, такі зображення не задовольняють вимогу правильності.

Вимога правильності є необхідною і цілком природною вимогою для зображень просторових фігур евклідової геометрії при застосуванні будь-яких методів. Натомість, найбільш актуальною вона стає тоді, коли розглядання зображення передуює розглядання оригіналу. Зрозуміло також, що лише для правильних зображень можна проводити оцінку того чи іншого характеру повноти.

Зображення також мають бути **наочними** [7; 27; 31; 34; 35]. Наочним вважають таке зображення, яке справляє на глядача те ж саме враження, що і оригінал. Як відомо, найбільш наочним для людини методом зображень просторових фігур є метод центрального проєктування. Але цей метод не є розрахованим на велику аудиторію,

де кожний глядач має свою точку зору. При викладанні евклідової геометрії метод центрального проєктування, традиційно, використовують не часто, головним чином – для рисунків у підручниках.

Третьою вимогою є вимога **простоти** зображення ([27; 31; 34; 35]). Зображення вважають тим більш простим, чим менше часу витрачено на його реалізацію і на обґрунтування її правильності ([31; 34; 35]). При навчанні евклідовій геометрії фактор часу є більш ніж важливим. На уроці у школі або протягом лекції у коледжі чи в університеті неможливо виконувати зображення певної геометричної фігури та обґрунтовувати його правильність впродовж декількох годин, днів, тижнів чи, навіть, років, як це є можливим, наприклад, для художників або архітекторів.

Ще однією вимогою є вимога **інформативності** зображення [7; 27; 31]. Зображення вважають тим більш інформативним, чим більше властивостей зображеної фігури можна за цим зображенням усвідомити. Найбільш інформативними, зрозуміло, є зображення, за якими можна відновити оригінал з точністю до його положення у просторі. Проте, подібний ступінь інформативності при викладанні евклідової геометрії, зазвичай, є зайвим. Достатньо мати можливість визначати лише певні, найбільш важливі для розв'язання конкретної задачі, геометричні властивості зображених фігур.

Виявилося, що, у комплексі, зазначені вище основні вимоги до зображень на площині геометричних фігур при навчанні евклідової геометрії найкращим чином задовольняє **метод паралельного проєктування** [7; 21; 31].

Знайомству з основними положеннями методу паралельного проєктування зображення на площині фігур евклідової геометрії і будуть присвячені наступні розділи даного навчального посібника.

Питання і завдання для самоконтролю до §2

2.1. Вкажіть відомі Вам методи зображень просторових фігур на площині.

2.2. Що Вам відомо про Гаспара Монжа?

2.3. Охарактеризуйте апарат метода Монжа зображення просторових фігур на площині?

2.4. Що називають проєкцією точки за методом Монжа? Як будують таку проєкцію?

2.5. Чи дозволяє фіксований апарат метода Монжа визначити проєкцію довільної точки евклідового простору? Відповідь обґрунтуйте.

2.6. Чи дозволяє проєкція геометричної фігури, побудована за методом Монжа, однозначно відновити оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

2.7. Що можна стверджувати про характер повноти зображення, отриманого за методом Монжа? Відповідь обґрунтуйте.

2.8. Фахівці яких професій використовують метод Монжа у своїй практичній діяльності? З якою метою і за яких обставин?

2.9. За яких умов зображення геометричної фігури називають наочними?

2.10. Який метод забезпечує найбільшу наочність отриманих зображень? Чим це можна пояснити?

2.11. Охарактеризуйте апарат метода центрального проєктування зображення просторових фігур на площині.

2.12. Що називають проєкцією точки за методом центрального проєктування? Як будують таку проєкцію?

2.13. Чи дозволяє фіксований апарат метода центрального проєктування побудувати проєкцію довільної точки простору? Відповідь обґрунтуйте.

2.14. Чи можна при фіксованому апараті центрального проєктування за проєкцією точки однозначно відновити оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

2.15. Фахівці яких професій використовують метод центрального проєктування у своїй практичній діяльності?

2.16. Який учений розробив метод лінійної перспективи зображення просторових фігур на площині?

2.17. Охарактеризуйте апарат метода лінійної перспективи зображення просторових фігур на площині.

2.18. Що називають проєкцією точки за методом лінійної перспективи? Як знаходять таку проєкцію?

2.19. Чи дозволяє фіксований апарат метода лінійної перспективи визначити проєкцію довільної точки евклідового простору? Відповідь обґрунтуйте.

2.20. Чи можна при фіксованому апараті метода лінійної перспективи за проєкцією точки однозначно відновити оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

2.21. Що можна стверджувати про мір повноти зображення, отриманого за методом лінійної перспективи? Відповідь обґрунтуйте.

2.22. Фахівці яких професій використовують метод лінійної перспективи у своїй практичній діяльності?

2.23. Що Вам відомо про Є. С. Федорова?

2.24. Охарактеризуйте апарат метода Федорова побудови зображень просторових фігур на площині.

2.25. Що називають проєкцією точки за методом Федорова? Як будують таку проєкцію?

2.26. Чи дозволяє фіксований апарат метода Федорова побудувати проєкцію довільної точки простору? Відповідь обґрунтуйте.

2.27. Чи дозволяє проєкція геометричної фігури за методом Федорова однозначно відновити оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

2.28. Що можна стверджувати про ступінь повноти зображення, отриманого за методом Федорова? Відповідь обґрунтуйте.

2.29. Чи можна стверджувати, що метод Федорова зображення просторових фігур на площині є наочним?

2.30. Фахівці яких професій використовують метод Федорова у своїй практичній діяльності?

2.31. Які основні вимоги до зображень геометричних фігур на площині висувають при викладанні евклідової геометрії?

2.32. У якому випадку зображення геометричної фігури на площині називають правильним?

2.33. Який напрямок живопису називається «імпосибіліонізмом»?

2.34. Які роботи представників імпосибіліонізма є Вам відомими?

2.35. Що розуміють під простотою зображення геометричної фігури на площині?

2.36. Що розуміють під інформативністю зображення геометричної фігури на площині?

2.37. Які зображення геометричних фігур на площині є найбільш інформативними?

2.38. Який метод зображення геометричних фігур на площині найкращим чином, у комплексі, задовольняє усі чотири основні вимоги до зображень на площині геометричних фігур при навчанні евклідової геометрії?

§3. Метод паралельного проєктування зображення на площині фігур евклідової геометрії та його основні характеристики

3.1. Основні означення

Апарат методу паралельного проєктування утворюють картинна площина α і пряма l , яка не належить площині α і не є паралельною до неї. Про пряму l говорять, що вона задає **напрямок паралельного проєктування** (рис. 38).



Рис. 38

Якщо пряма l є перпендикулярною до площини α ($l \perp \alpha$) то проєктування називають **ортогональним** (рис. 39) [7; 16; 21; 31].

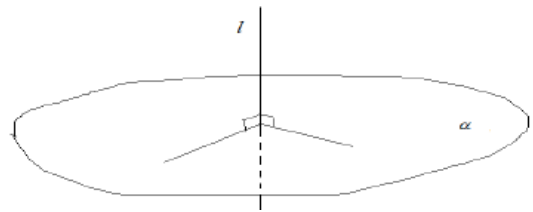


Рис. 39

Нехай точка M евклідового простору не належить прямій l . Для визначення проєкції точки M на

площину α у напрямку прямої l через точку M , паралельно до пря-

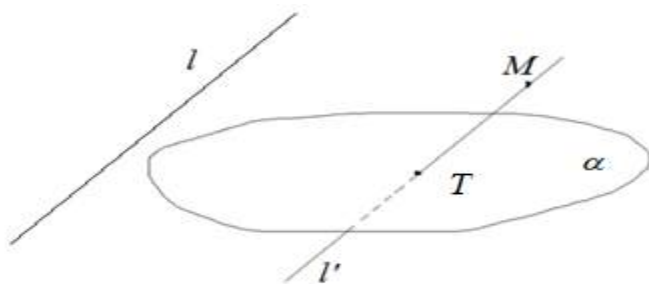


Рис. 40

мої l , проводять пряму l' , яка перетинає площину α у певній точці T (рис. 40). Точку T і називають **проєкцією точки M на площину α у напрямку прямої l** . Зрозуміло, що, у

випадку, коли точка M належить площині α , точка T співпадає з точкою M . Якщо точка M належить прямій l , то роль прямої l' виконує сама пряма l . У випадку ортогонального проєктування

напрямок проєктування не вказують, говорять просто про **проєкцію** T точки M на площину α .

Згідно методу паралельного проєктування, як і у випадку будь-якого іншого методу проєктування, проєкцією фігури F називають сукупність Φ проєкцій усіх точок даної фігури. Зображенням фігури F при цьому називають кожну фігуру F' , подібну до фігури Φ .

Отже, при зображенні на площині фігур за методом паралельного проєктування, як і при застосуванні інших методів зображень, закон зображення f представляє собою композицію безпосередньо паралельного проєктування h на картинну площину α і перетворення подібності φ евклідового простору: $f = \varphi \circ h$. Тотожне перетворення евклідового простору є тривіальним прикладом його перетворення подібності. Це означає, що при зображенні геометричних фігур за методом паралельного проєктування, як і у випадку інших методів зображень, проєкція кожної фігури є і зображенням цієї фігури.

Теорема 3.1. *Якщо зображенням фігури F евклідового простору при паралельному проєктуванні h на площину α у напрямку прямої l є певна фігура F' , фігура $\tilde{F}$ евклідового простору є подібною до фігури F , то існує таке паралельне проєктування $\tilde{h}$ фігури $\tilde{F}$ на певну площину $\tilde{\alpha}$ у напрямку певної прямої $\tilde{l}$, при якому зображенням фігури $\tilde{F}$ також буде фігура F' , згідно законів зображень проєктувань h і $\tilde{h}$ зображення відповідних точок фігур F і $\tilde{F}$ будуть співпадати.*

Доведення. $\square$ Нехай образом фігури F при паралельному проєктуванні h на площину α у напрямку прямої l є фігура Φ . За умови теореми, фігура $\tilde{F}$ є подібною до фігури F . Отже, існує таке перетворення подібності g евклідового простору, що $g(\tilde{F}) = \Phi$. Із

теорії перетворень подібності евклідового простору відомо, що перетворення g^{-1} , обернене до перетворення g , також є перетворенням подібності, $g^{-1}(F)=\tilde{F}$. Відомо також, що при перетвореннях подібності евклідового простору образом кожної прямої є пряма, образом кожної площини – площина, зберігається характер взаємного

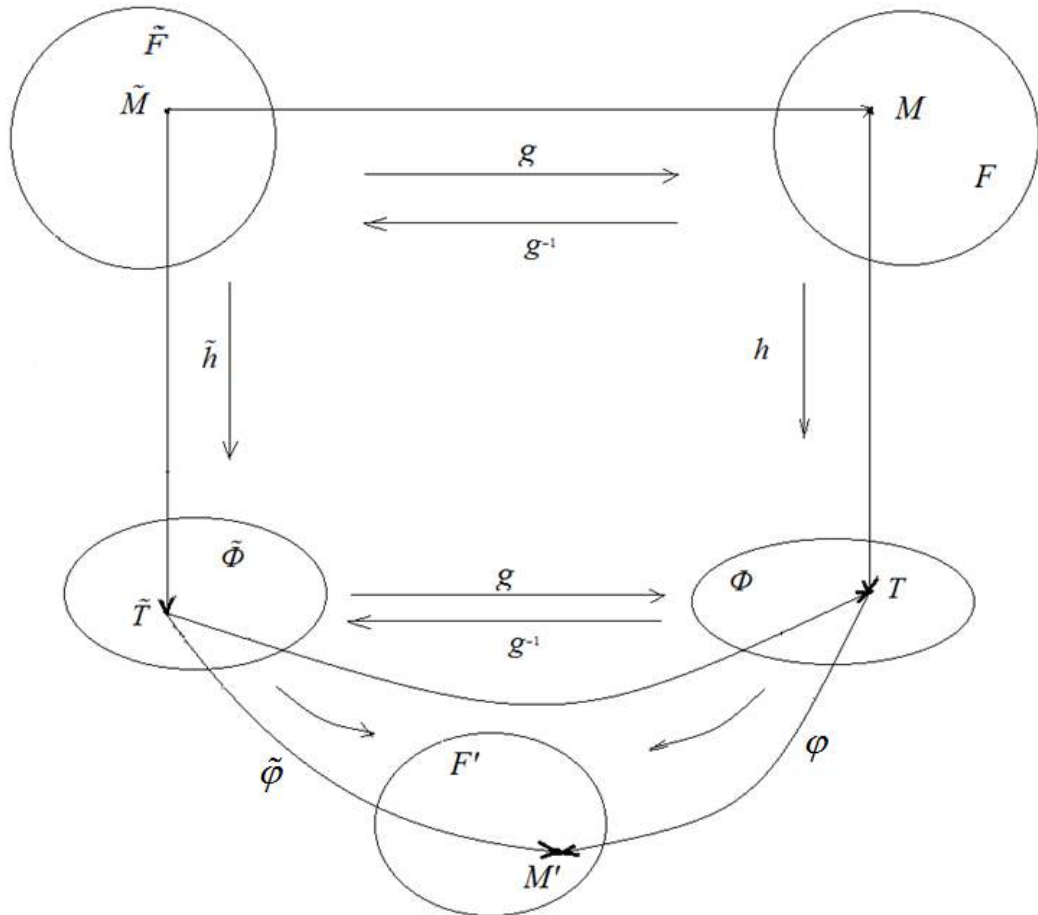


Рис. 41

розташування точки і прямої, точки і площини, двох прямих, прямої і площини. Отже, $g^{-1}(\alpha)=\tilde{\alpha}$, де $\tilde{\alpha}$ – певна площина, $g^{-1}(l)=\tilde{l}$, де $\tilde{l}$ – певна пряма, з того, що пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині, випливає, що пряма $\tilde{l}$ не є паралельною до площини $\tilde{\alpha}$ і не належить цій площині, тобто, площина $\tilde{\alpha}$ і пряма $\tilde{l}$ утворюють апарат певного паралельного проєктування $\tilde{h}$.

Нехай фігура $\tilde{\Phi}$ є паралельною проєкцією фігури $\tilde{F}$ на площину $\tilde{\alpha}$ у напрямку прямої $\tilde{l}$: $\tilde{\Phi} = \tilde{h}(\tilde{F})$. Покажемо, що $\tilde{\Phi} = g^{-1}(\Phi)$.

Розглянемо довільну точку T фігури Φ . $T \in \alpha$. При паралельному проєктуванні h у точки T існує оригінал – така точка M фігури F , що пряма MT є паралельною до прямої l або співпадає з прямою l , або точка M співпадає з точкою T . Нехай $g^{-1}(M) = \tilde{M}$, $g^{-1}(T) = \tilde{T}$. $\tilde{M} \in \tilde{F}$, $\tilde{T} \in \tilde{\alpha}$. Пряма $\tilde{M}\tilde{T}$ є паралельною до прямої $\tilde{l}$, якщо $MT \parallel l$. Пряма $\tilde{M}\tilde{T}$ співпадає з прямою $\tilde{l}$, якщо $MT \equiv l$. $\tilde{M} \equiv \tilde{T}$, якщо $M \equiv T$. У всіх можливих випадках $\tilde{T} = \tilde{h}(\tilde{M})$, $\tilde{T} \in \tilde{\Phi}$. Отже, $g^{-1}(\Phi) \subseteq \tilde{\Phi}$.

Правильними є й наступні міркування навпаки. Розглянемо довільну точку $\tilde{N}$ фігури $\tilde{\Phi}$. При паралельному проєктуванні $\tilde{h}$ у неї існує прообраз $\tilde{K} \in \tilde{F}$. Пряма $\tilde{K}\tilde{N}$ є паралельною до прямої $\tilde{l}$, або співпадає з прямою $\tilde{l}$, або точка $\tilde{K}$ співпадає з точкою $\tilde{N}$. Нехай $g(\tilde{K}) = K$, $g(\tilde{N}) = N$. $K \in F$, $N \in \alpha$. $KN \parallel l$, якщо $\tilde{K}\tilde{N} \parallel \tilde{l}$, $KN \equiv l$, якщо $\tilde{K}\tilde{N} \equiv \tilde{l}$. $K \equiv N$, якщо $\tilde{K} \equiv \tilde{N}$. У всіх можливих випадках $N = h(K)$, $N \in \Phi$. Але тоді, $g^{-1}(N) \in g^{-1}(\Phi)$, тобто, $\tilde{N} \in g^{-1}(\Phi)$, бо саме $\tilde{N} \in g^{-1}(N)$. Отже, правильним також є включення $\tilde{\Phi} \subseteq g^{-1}(\Phi)$ і тому, насправді, $\tilde{\Phi} = g^{-1}(\Phi)$. Ця рівність означає, що фігури Φ і $\tilde{\Phi}$ подібними, $\tilde{h} = g^{-1}|_{\Phi} \circ h \circ g|_{\tilde{F}}$, $h = g|_{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{h} \circ g^{-1}|_F$. За умови теореми, фігура F' є подібною до фігури Φ . Але тоді фігура F' є подібною і до фігури $\tilde{\Phi}$, фігура F' є зображенням і фігури $\tilde{F}$ при паралельному проєктуванні $\tilde{h}$ на площину $\tilde{\alpha}$ у напрямку прямої $\tilde{l}$. Перетворення подібності евклідового простору, яке переводить

фігуру Φ у фігуру F' позначимо через φ . Закон зображення f фігури F у вигляді фігури F' за допомогою паралельного проєктування h тоді матиме вигляд $f = \varphi|_{\Phi} \circ h$. Перетворення подібності $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$ буде переводити фігуру $\tilde{\Phi}$ у фігуру F' . Для закону зображення f фігури $\tilde{F}$ за допомогою паралельного проєктування $\tilde{h}$ правильним є те, що

$$\begin{aligned}\tilde{f} = \tilde{\varphi}|_{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{h} &= (\varphi|_{\Phi} \circ g|_{\tilde{\Phi}}) \circ \tilde{h} = (\varphi|_{\Phi} \circ g|_{\tilde{\Phi}}) \circ (g^{-1}|_{\Phi} \circ h \circ g) = \\ &= (\varphi|_{\Phi} \circ h) \circ g|_{\tilde{F}} = f \circ g|_{\tilde{F}}.\end{aligned}$$

Це означає, що для довільної точки $\tilde{M}$, $\tilde{M} \in \tilde{F}$, і для відповідної до неї згідно перетворення подібності g точки M , $M = g(\tilde{M})$, $M \in F$, справджується рівність

$$\tilde{f}(\tilde{M}) = (f \circ g|_{\tilde{F}})(\tilde{M}) = f(g(\tilde{M})) = f(M).$$

Теорему доведено. Відношення між відповідними множинами і відображеннями схематично продемонстровано на рисунку 41. ■

Наслідок 1. *Якщо зображенням фігури F евклідового простору при ортогональному проєктуванні h на площину α є певна фігура F' , фігура $\tilde{F}$ евклідового простору є подібною до фігури F , то існує таке ортогональне проєктування $\tilde{h}$ фігури $\tilde{F}$ на певну площину $\tilde{\alpha}$, при якому зображенням фігури $\tilde{F}$ також буде фігура F' , згідно законів зображень проєктувань h і $\tilde{h}$ зображення відповідних точок фігур F і $\tilde{F}$ будуть співпадати.*

Доведення. □ При доведенні теореми 3.1 апарат паралельного проєктування $\tilde{h}$ (пряму $\tilde{l}$ і площину $\tilde{\alpha}$) для фігури $\tilde{F}$, подібної до фігури F , за апаратом паралельного проєктування h для фігури F (прямою l і площиною α) було визначено за допомогою перетворення

подібності g евклідового простору: $\tilde{l} = g^{-1}(l)$, $\tilde{\alpha} = g^{-1}(\alpha)$, де g^{-1} - перетворення подібності евклідового простору, обернене до перетворення подібності g , $g^{-1}(F) = \tilde{F}$.

Перетворення подібності евклідового простору зберігає величини кутів між прямими і площинами. Отже, якщо $l \perp \alpha$, то $\tilde{l} \perp \tilde{\alpha}$. ■

Наслідок 2. *Якщо за умови поставленої задачі відомо, що задана фігура F' є зображенням заданої фігури F за методом паралельного проєктування, умови задачі передбачають визначення згідно застосованого закону зображення подальших зображень і це вимагає явного використання оригінала, то замість фігури F можна розглядати довільну фігуру $\tilde{F}$, подібну до фігури F .*

Доведення є очевидним.

Наслідок 3. *Якщо за умови поставленої задачі для зображення, отриманого за методом паралельного проєктування, оригінал визначено з точністю до перетворення подібності, то для розв'язання задачі на побудову подальших зображень згідно застосованого закону зображення за оригінал можна прийняти будь-яку фігуру із відповідної сукупності подібних між собою фігур.*

Доведення є очевидним.

Нехай фігура Φ площини α є паралельною проєкцією на площину α у напрямку прямої l певної фігури F , фігура F' є зображенням фігури F при даному паралельному проєктуванні. Межові точки фігур Φ і F' називають, відповідно, **обрисом проєкції фігури F** та **обрисом зображення фігури F** (рис. 42).

При паралельному проєктуванні розрізняють так звані **видні** і **невидні** точки геометричних фігур. Картинна площина α поділяє простір на два півпростори. Розглянемо, спочатку, той випадок, коли усі точки фігури F належать одному з цих півпросторів або самій пло-

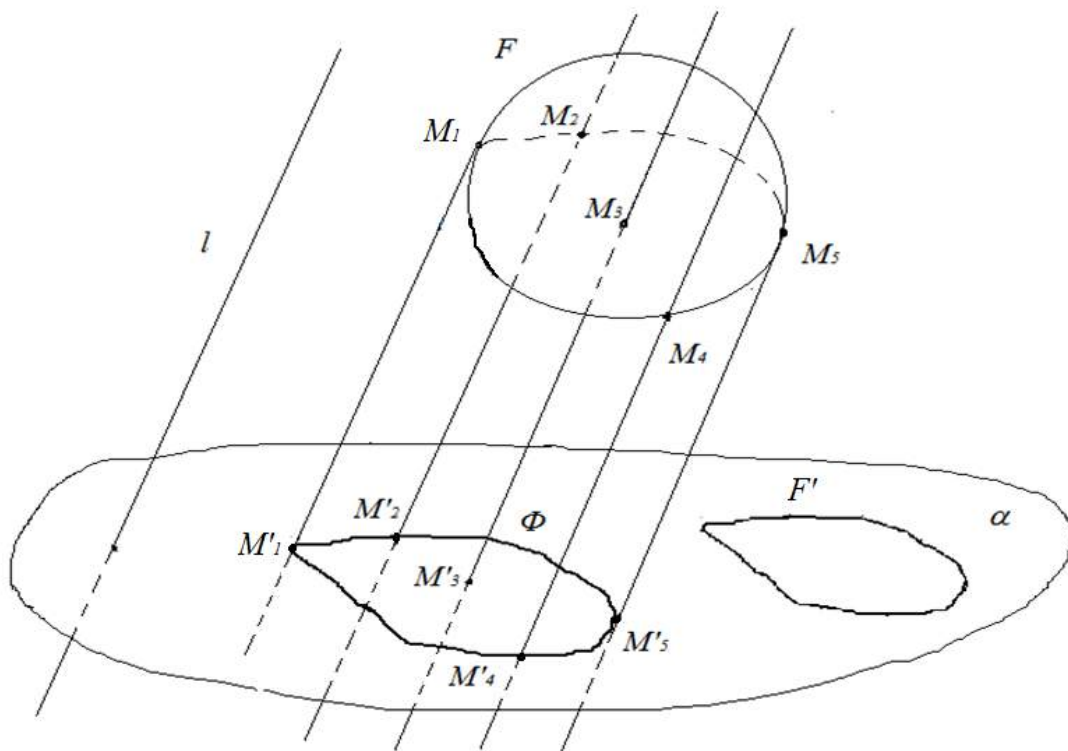


Рис. 42

щині α . Нехай проєктування здійснюється у напрямку прямої l , фігура F при цьому проєктується у фігуру Φ площини α (рис. 43). Якщо точки M, N, P фігури F належать одній прямій, яка є паралельною

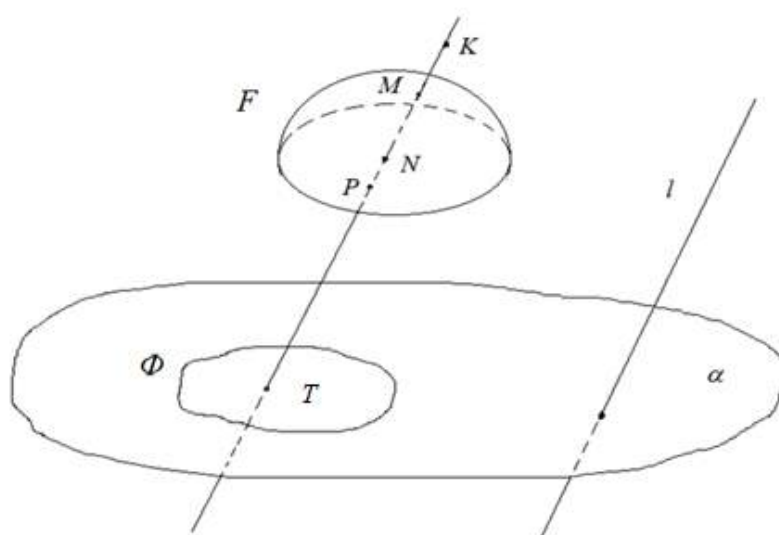


Рис. 43

до прямої l , то усі вони проєктуються у одну точку T фігури Φ . Точку M називають **видною** точкою фігури F при даному паралельному проєктуванні, якщо фігура F не містить такої точки K що точка

M лежить між точками K і T ($K-M-T$). Якщо ж, навпаки, така

точка K існує, то точку M називають **невидною**. Так, на рисунку 43 точка M фігури F є видимою, точка P – невидною (бо існує така точка M , $M \in F$ (або така точка N , $N \in F$), що $M - P - T$ ($N - P - T$)).

Якщо точки фігури F розташовані по обидві сторони від картинної площини α , то для точок, що знаходяться по певну сторону від площини α і на самій площині α , застосовують наведені вище означення, усі точки фігури F , які знаходяться по іншу сторону від площини α , вважають невидними.

При використанні паралельного проєктування під час навчання

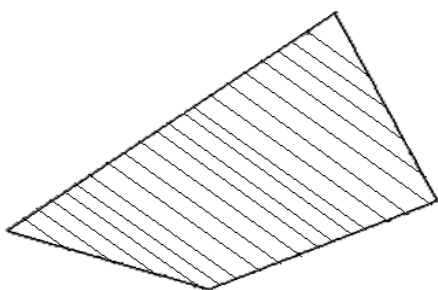


Рис. 44

евклідової геометрії проєкції (і зображення) окремих видних і невидних точок фігур за позначеннями, як правило, не розрізняють. Але часто, для більшої наочності, одночасно з проєкцією (зображенням) фігури відтворюють проєкції (зображення)

певних ліній, що належать даній фігурі. Лінії, які складаються з невидних точок, найчастіше, зображають пунктиром. Іноді, для цього використовують інші кольори.

Наприклад, треба побудувати зображення при паралельному проєктуванні тетраедра-оболонки (Як відомо, тетраедр-оболонка – це

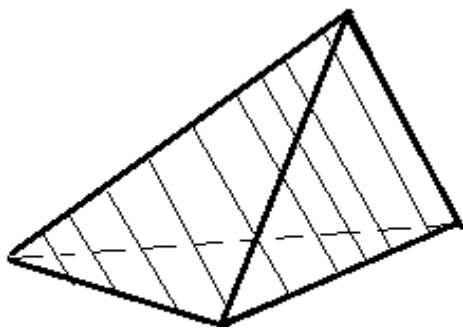


Рис. 45

геометрична фігура, утворена плоским трикутником, точкою, яка не належить площині цього трикутника, і усіма відрізками, що сполучають цю точку з точками на сторонах даного плоского трикутника). Доведено ([32], наприклад),

що обрисом зображення тетраедра-оболонки може бути довільний

опуклий плоский чотирикутник (рис. 44). Але за подібним рисунком взагалі незрозуміло, просторову, чи плоску фігуру на ньому зображено. Тому, при побудові зображень тетраедра-оболонки вважають за необхідне будувати і зображення усіх його ребер. Якщо обрисом зображення тетраедра-оболонки є чотирикутник, то при цьому одне з ребер тетраедра є невидним. На рисунку 45 таке ребро зображено пунктиром.

3.2. Зображення найпростіших фігур евклідової геометрії за методом паралельного проєктування

У другій частині даного параграфу обґрунтуємо закономірності зображень за методом паралельного проєктування точок, прямих, променів, відрізків, площин та півплощин, а також деяких комбінацій цих геометричних фігур.

Будемо формулювати і доводити справедливості більшості з наступних тверджень лише для паралельних проєкцій відповідних геометричних фігур. Справедливості аналогічних тверджень для інших зображень даних фігур за методом паралельного проєктування безпосередньо випливає з відомих властивостей перетворень подібності евклідової площини.

Теорема 3.2. *При будь-якому паралельному проєктуванні проєкцією кожної точки є однозначно визначена точка картинної площини.*

Доведення. $\square$ Нехай паралельне проєктування задано картинною площиною α і прямою l . Пряма l не належить площині α і

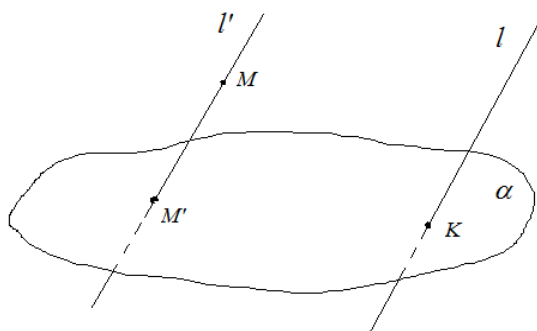


Рис. 46

не є паралельною до неї. Отже, пряма l перетинає площину α у певній точці K . Розглянемо довільну точку M евклідового простору. Згідно відомої теореми курсів геометрії закладів загальної середньої освіти через точку M проходить єдина пряма l' , пара-

лельна до прямої l , або точка M належить прямій l . У курсах геометрії закладів загальної середньої освіти доведено також, що, якщо пряма перетинає площину у певній точці, то пряма, паралельна до цієї

прямої, відносно даної площини має таке саме розташування. Отже, існує єдина точка M' , у якій пряма l' перетинає площину α (Якщо точка M належить прямій l , то точка M' співпадає з точкою K).

За означенням, саме точка M' (рис. 46) є проєкцією точки M на площину α у напрямку прямої l . Отже, така проєкція є визначеною однозначно. Теорему доведено. ■

Наслідок. *Довільна точка картинної площини може бути зображенням довільної точки евклідового простору при будь-якому паралельному проєктуванні.*

Доведення. □ Згідно теореми 3.2, при будь-якому паралельному проєктуванні на будь-яку площину β проєкцією кожної точки евклідового простору є певна точка площини проєкцій. Існує перетворення подібності евклідового простору, яке переводить площину β у картинну площину α і при цьому переводить довільну задану точку площини β у довільну задану точку N' площини α . У якості такого перетворення можна обрати відповідний рух (кожний рух евклідового простору є його перетворенням подібності). ■

Теорема 3.3. *Проекцією прямої при паралельному проєктуванні є або точка, або пряма. Проекцією прямої є точка тоді та тільки тоді, коли ця пряма є паралельною до прямої, що задає напрямок даного паралельного проєктування, або коли обидві прямі співпадають. У випадку, коли проєкцією прямої є пряма, закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між прямою-оригіналом і прямою-проєкцією.*

Доведення. □ Нехай паралельне проєктування задано картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині, пряма l перетинає площину α у певній точці K).

Розглянемо пряму t , яка є паралельною до прямої l . Зрозуміло, що пряма t , як і пряма l , перетинає площину α у певній точці. Нехай це буде точка M' . Усі точки прямої t при даному проєктуванні проєктуються саме у точку M' (рис. 47). Якщо пряма t співпадає з прямою l , то роль точки M' виконує точка K .

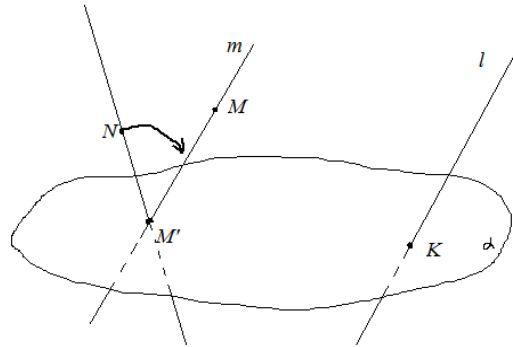


Рис. 47

Припустимо тепер, що при даному паралельному проєктуванні пряма t проєктується у певну точку M' картинної площини. Це означає, що усі точки прямої t проєктуються у точку M' .

Розглянемо точки M і N , які

належать прямій t , не співпадають між собою і з точкою M' . Згідно закону паралельного проєктування, і пряма MM' , і пряма NM' є паралельними до прямої l . Але через точку M' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l . Отже, прямі MM' і NM' співпадають між собою, кожна з них є

прямою MN , $MN \parallel l$. Але че-

рез точки M і N проходить

єдина пряма, такою прямою є

пряма t . Отже, саме пряма t

є паралельною до прямої l

(рис. 47). Зрозуміло, що, якщо

точка M' співпадає з точкою K , то пряма t просто співпадає з прямою l .

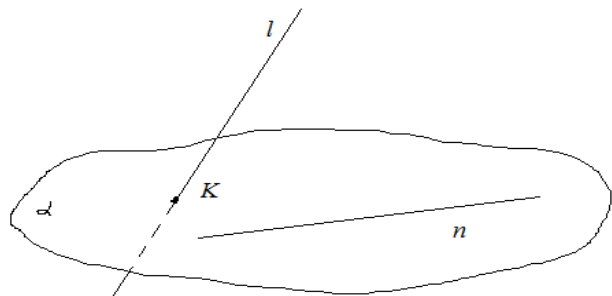


Рис. 48

Розглянемо пряму n , яка не є паралельною до прямої l . Така пряма може 1) лежати у площині α : $n \subset \alpha$; 2) бути паралельною до

площини α : $n \parallel \alpha$; 3) перетинати площину α у певній точці: існує така точка N евклідового простору, що $n \cap \alpha = N$.

Якщо $n \subset \alpha$ (рис. 48), то при даному паралельному проєктуванні кожна точка прямої n проєктується сама у себе. Це означає, що пряма n при даному проєктуванні тотожно проєктується на себе. Тотожна відповідність є взаємно однозначною відповідністю.

Нехай $n \parallel \alpha$ (рис. 49). Оберемо на прямій n довільну точку M . Проведемо через цю точку пряму m , $m \parallel l$. Нехай $m \cap \alpha = M'$. (якщо

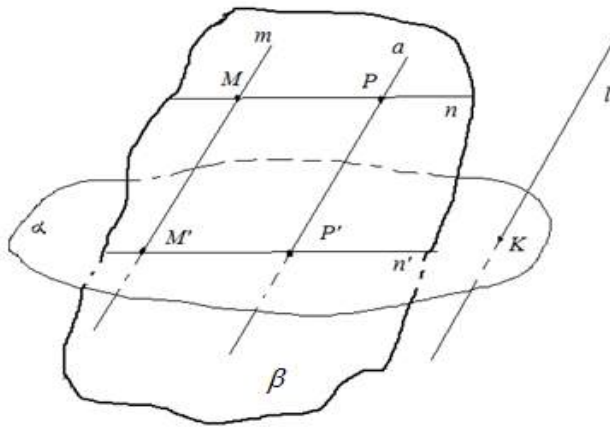


Рис. 49

$M \in l$, то пряма m співпадає з прямою l , точка M' співпадає з точкою K). Прямі m і n перетинаються у точці M (співпадати вони не можуть, бо пряма l не є паралельною до площини α). Існує єдина площина β , яка ці прямі містить.

Площина β перетинає площину α

за певною прямою n' , яка проходить через точку M' . Зрозуміло, що $n' \parallel n$, бо інакше пряма n перетинала би пряму n' і, одночасно, перетинала би площину α , що суперечило би умові $n \parallel \alpha$. Покажемо, що при даному паралельному проєктуванні пряма n' є проєкцією прямої n .

За відомою теоремою евклідової геометрії, усі прямі, що проходять через точки прямої n паралельно до прямої l , так звані проєктуючі прямі, належать одній площині. І цією площиною є площина β , бо саме площина β містить одну з таких прямих – пряму m . $\beta \cap \alpha = n'$. Отже, проєкції усіх точок прямої n належать прямій

n' . Розглянемо на прямій n' довільну точку P' , яка не співпадає з точкою M' . Проведемо через точку P' пряму a , $a \parallel l$. Пряма a належить площині β , бо усі прямі, що проходять через точки прямої n' паралельно до прямої l , належать одній площині, пряма t є однією з таких прямих, площина β є єдиною площиною, що одночасно містить прямі n' і t . Прямі a і t є паралельними між собою прямими площини β . Пряма t перетинає пряму n у точці M . Отже, пряма a перетинає пряму n у певній точці P . Але тоді точка P' є проєкцією точки P на площину α у напрямку прямої l , $P \in n$.

У підсумку, ми довели, що при даному паралельному проєктуванні проєкцією прямої n є пряма n' , яка є паралельною до прямої n . Тим самим ми обґрунтували, що при даному паралельному проєктуванні відбувається сюр'єктивне відображення прямої n на пряму n' . Нехай точки M і P є різними точками прямої n , які проєктуються, відповідно, у точки M' і P' прямої n' . Точка M' не співпадає з

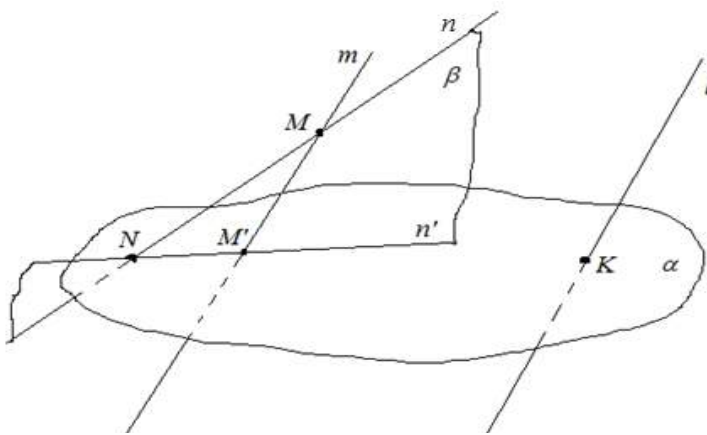


Рис. 50

точкою P' бо пряма MP – це пряма n , вона не є паралельною до прямої l . Отже, розглянуте паралельне проєктування реалізує й ін'єктивне відображення прямої n на пряму

n' , це взаємно однозначне відображення прямої n на пряму n' , що й треба було обґрунтувати.

Нехай тепер пряма n перетинає картинну площину α у певній точці N , пряма n не є паралельною до прямої l (рис. 50). Оберемо на

прямій n довільну точку M , відмінну від точки N . Точка M не належить площині α . Проведемо через точку M пряму t , $t \parallel l$. Нехай $t \cap \alpha = M'$ (якщо $M \in l$, то $t \equiv l$, $M' \equiv K$). Площина β , яка містить прямі t і n , перетинає площину α по прямій NM' . Позначимо цю пряму через n' (рис. 50).

Так само, як і при розгляданні попереднього випадку, легко довести, що при даному паралельному проєктуванні проєкцією прямої n є пряма n' , дане паралельне проєктування встановлює між прямими n і n' взаємно однозначну відповідність. ■

Паралельне проєктування, при якому проєкцією **прямої** є точка, для даної прямої вважають **виродженим**. Паралельне проєктування, при якому проєкцією **прямої** є пряма, для даної прямої вважають **невиродженим**.

Теорема 3.4. *При невірродженому для прямої паралельному проєктуванні зберігається порядок точок, які належать цій прямій.*

Доведення. □ Нехай паралельне проєктування задано картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і

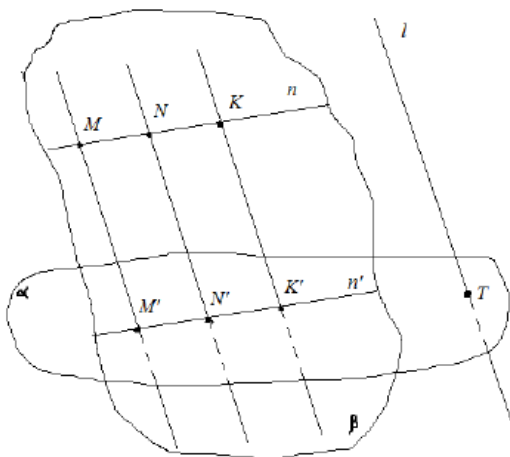


Рис. 51 (а)

не належить цій площині), проєкцією прямої n при даному проєктуванні є пряма n' ($n' \subset \alpha$). Треба довести, що, якщо попарно різні точки M, N, K прямої n проєктуються, відповідно, у точки M', N', K' прямої n' (зрозуміло, також попарно різні), точка N лежить між точками M і K ($M - N - K$), то

точка N' лежить між точками M' і K' ($M' - N' - K'$).

Якщо пряма n належить площині α ($n \subset \alpha$), то $n' \equiv n$, для до-

вільних точок M, N, K прямої l , $M' \equiv M$, $N' \equiv N$, $K' \equiv K$, тверд-

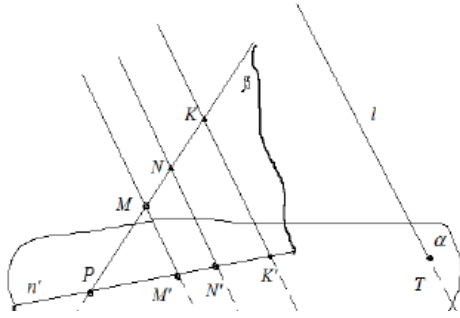


Рис. 51 (б)

ження теореми 3.4., очевидно, є правильним.

Нехай пряма n є паралельною до площини α (рис. 51 (а)) або пряма n перетинає площину α у певній точці P (рис. 51 (б)). Якщо площина β проходить через пряму

n паралельно до прямої l , то, як було показано при доведенні теореми 3.3, $n' = \alpha \cap \beta$. Прямі MM', NN', KK' ($MM' \parallel NN' \parallel KK'$), лежать у площині β . За теоремою Фалеса, паралельні прямі, що належать одній площині, відтинають на двох прямих цієї площини пропорційні відрізки. Тому $\frac{M'N'}{MN} = \frac{N'K'}{NK} = \frac{M'K'}{MK} = t$, де t – певне

дійсне число. Тоді $M'N' = t \cdot MN$; $N'K' = t \cdot NK$; $M'K' = t \cdot MK$. Якщо

точка N на прямій n лежить між точками M і K ($M - N - K$), то $MK = MN + NK$. (Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розділяється своєю довільною точкою). Але тоді

$$M'K' = t \cdot MK = t \cdot (MN + NK) = t \cdot MN + t \cdot NK = M'N' + N'K'. \quad (1)$$

Серед трьох різних точок M', N', K' прямої n' одна і тільки одна лежить між двома іншими. Якщо припустити, що точка M' лежить між точками N' і K' , то буде правильною рівність $N'M' + M'K' = N'K'$ та, з урахуванням (1), рівності

$$2M'N' + N'K' = N'K'; \quad 2M'N' = 0; \quad M'N' = 0,$$

що означає суперечність. Аналогічним чином до суперечності приводить й припущення того, що точка K' лежить між точками M' і N' .

Отже, саме точка N' лежить між точками M' і K' , що й треба було обґрунтувати. ■

Наслідок. *Якщо для прямої-оригінала паралельне проєктування є невивороченим, то таке проєктування є відображенням подібності прямої-оригінала на її проєкцію.*

Доведення є очевидним.

Визначить самостійно, у яких випадках паралельне проєктування прямої є її рухом (ізометричним відображенням прямої-оригінала на її проєкцію).

Теорема 3.5. *Проекцією відрізка при паралельному проєктуванні є або точка, або відрізок. Проекцією відрізка є точка тоді та тільки тоді, коли пряма, що цей відрізок містить, є паралельною до прямої, що задає напрямок даного проєктування, або з цією прямою співпадає. У випадку, коли проекцією відрізка є відрізок, кінці відрізка-оригінала проєктуються у кінці відрізка-проекції, внутрішні точки відрізка-оригінала проєктуються у внутрішні точки відрізка-проекції, закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між відрізком-оригіналом і відрізком-проекцією.*

Доведення. □ Нехай паралельне проєктування задано картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині), пряма l перетинає площину α у певній точці K .

Розглянемо спочатку такий відрізок AB евклідового простору, що пряма AB є паралельною до прямої l (рис. 52, випадок (а)). Нехай $AB \cap \alpha = A'$. Як було доведено у теоремі 3.3, при даному паралельному проєктуванні усі точки прямої AB , у тому числі і точки відрізка AB , проєктуються у точку A' . Нехай, навпаки, відомо, що паралельною проекцією відрізка AB є точка A' . Зокрема, це означає, що проекцією точки A є точка A' , проекцією точки B є та ж сама

точка A' . Згідно закону проєктування, тоді кожна з прямих AA' і BA' є паралельною до прямої l : $AA' \parallel l$, $BA' \parallel l$. Але у евклідовій геометрії через точку A' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l . Отже, прямі AA' і BA' співпадають, точки A і B лежать на прямій, яка проходить через точку A' паралельно до прямої l . (Якщо $A \equiv A'$ або $B \equiv A'$, подібний висновок є очевидним.) Це пряма AB , $AB \parallel l$.

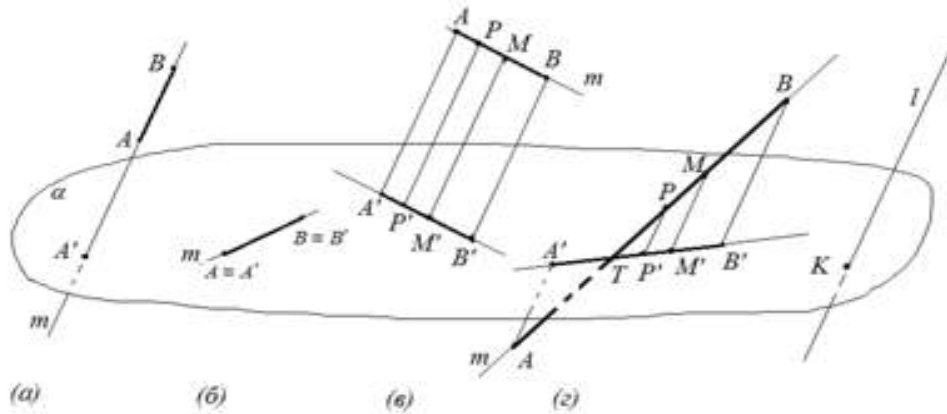
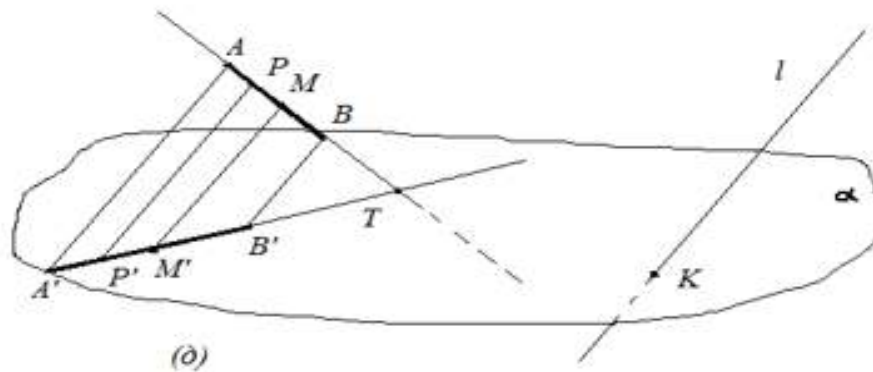


Рис. 52



Якщо пряма AB співпадає з прямою l (відрізок AB належить прямій l), правильними є аналогічні міркування, роль точки A' виконує точка K .

У випадку, коли відрізок AB належить картинній площині α (рис. 52, випадок (б)), цей відрізок співпадає зі своєю проєкцією, кожна точка відрізка AB проєктується сама у себе, відповідний висновок теореми 3.5, очевидно, так само є правильним.

Розглянемо тепер той випадок, коли пряма AB , що містить відрізок AB , не є паралельною до прямої l і не належить картинній площині α (рис. 52, випадки (в), (г), (д)). Зрозуміло, що у випадках (в), (г), (д) (як, між іншим, і у випадку (б)) правильність сформульованого умовою даної теореми твердження випливає із справедливості наслідка з теореми 3.4 і властивостей відображень подібності геометричних фігур. Але наведемо й безпосередні обґрунтування.

Нехай точка A проєктується у точку A' , точка B – у точку B' ($A', B' \in \alpha$, $AA' \parallel l$, $BB' \parallel l$), або, можливо, $A \equiv A'$ чи $B \equiv B'$). Тоді, за теоремою 3.3, пряма AB проєктується у пряму $A'B'$ ($A'B' \subset \alpha$), згідно теореми 3.4, внутрішня точка M відрізка AB ($A-M-B$) проєктується у внутрішню точку M' відрізка $A'B'$ ($A'-M'-B'$). Отже, відрізок AB проєктується у відрізок $A'B'$. Оскільки при цьому проєктуванні уся пряма AB взаємно однозначно відображається на пряму $A'B'$, для відрізка AB таке проєктування є ін'єктивним відображенням. Розглянемо довільну внутрішню точку P' відрізка $A'B'$ ($A'-P'-B'$). На прямій AB існує єдина точка P , яка проєктується у точку P' . Точка P не співпадає ані з точкою A , ані з точкою B , бо у даному випадку проєктування прямої є взаємно однозначним відображенням цієї прямої на її проєкцію, а точка P' не співпадає ані з точкою A' , ані з точкою B' . Тоді правильним є один з трьох можливих випадків: або $P-A-B$, або $A-P-B$, або $A-B-P$. Але, згідно теореми 3.4, припущення правильності першої чи третьої з даних умов означає, що, відповідно, правильним є або твердження $P'-A'-B'$, або твердження $A'-B'-P'$. А це виключає можливість правильності твердження $A'-P'-B'$, яке згідно вибору точки P' має місце, і тому тягне за собою суперечність. Отже,

насправді, правильним є твердження $A-P-B$, точка P , оригінал точки P' при даному паралельному проєктуванні, є внутрішньою точкою відрізка AB , дане паралельне проєктування є не лише ін'єктивним, а й сюр'єктивним, тобто, взаємно однозначним відображенням відрізка AB на відрізок $A'B'$, що й треба було обґрунтувати. ■

Паралельне проєктування, при якому проєкцією **відрізка** є точка, для даного відрізка вважають **виродженням**. Паралельне проєктування, при якому проєкцією **відрізка** є відрізок, для даного відрізка вважають **невиродженням**. Зрозуміло, що паралельне проєктування для відрізка є виродженням тоді та тільки тоді, коли воно є виродженням для прямої, що містить цей відрізок.

Теорема 3.6. *Проекцією променя при паралельному проєктуванні є або точка, або промінь. Проекцією променя є точка тоді та тільки тоді, коли пряма, що цей промінь містить, є паралельною до прямої, яка задає напрямок паралельного проєктування, або з цією прямою співпадає. У випадку, коли проекцією променя є промінь, початок променя-оригінала проєктується у початок променя-проекції, внутрішні точки променя-оригінала проєктуються у внутрішні точки променя-проекції, закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між променем-оригіналом і променем-проекцією.*

Доведення. □ Нехай паралельне проєктування задано картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині), пряма l перетинає площину α у певній точці K .

Розглянемо такий промінь AB , що пряма AB є паралельною до прямої l (рис. 53, випадок (а)). Нехай $AB \cap \alpha = A'$. Як було доведено у теоремі 3.3, при даному паралельному проєктуванні усі точки прямої AB , у тому числі й точки променя AB , проєктуються у точку A' .

Отже, у даному випадку, проєкцією променя AB , є точка A' . Нехай, навпаки, відомо, що паралельною проєкцією променя AB є точка A' , точка A' не співпадає з точкою K . Це означає, що проєкцією точки A

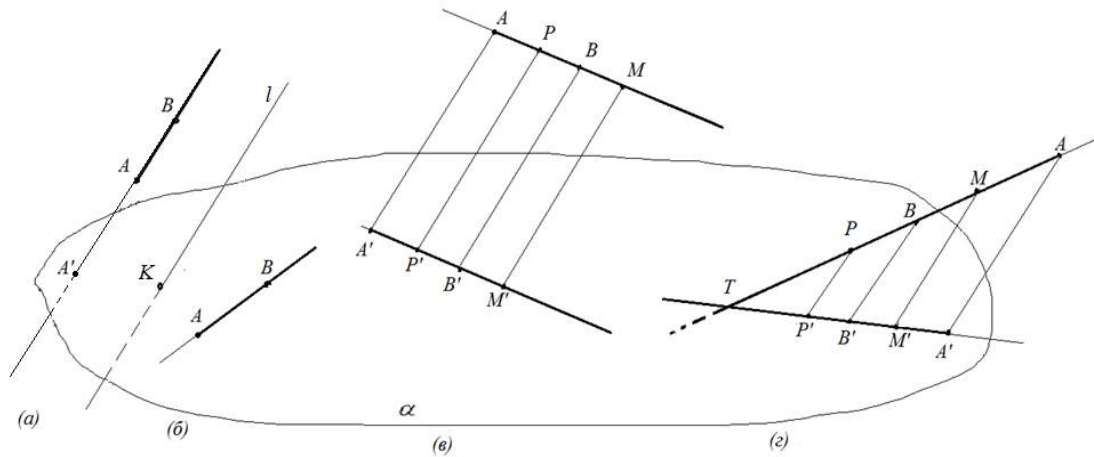
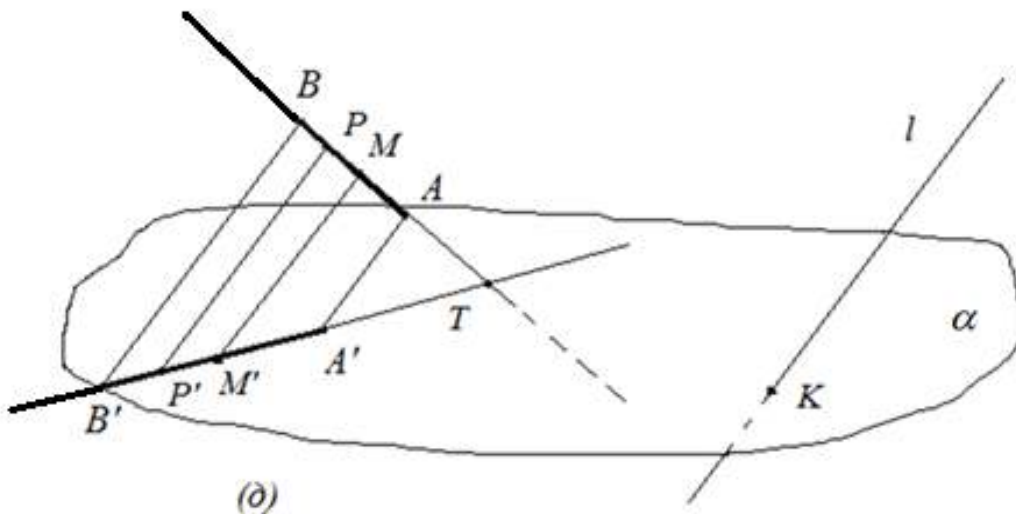


Рис. 53



є точка A' , проєкцією довільної внутрішньої точки B променя AB є та ж сама точка A' . Згідно закону паралельного проєктування, тоді пряма AA' є паралельною до прямої l ($AA' \parallel l$), і пряма BA' є паралельною до прямої l ($BA' \parallel l$). Але у евклідовій геометрії через точку A' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l . Отже, прямі AA' і BA' співпадають, точки A і B лежать на одній прямій, що

проходить через точку A' паралельно до прямої l , це пряма AB . За означенням променя AB , він є підмножиною прямої AB .

Якщо промінь AB є підмножиною прямої l , усі міркування є аналогічними, роль точки A' виконує точка K .

У випадку, коли промінь AB належить картинній площині α (рис. 53, випадок (б)), він співпадає зі своєю проєкцією, кожна точка променя AB проєктується сама у себе, відповідний висновок теореми 3.6, очевидно, є правильним.

Розглянемо тепер випадок, коли пряма AB , що містить промінь AB , не є паралельною до прямої l , не співпадає з прямою l і не належить картинній площині α (рис. 53, випадки (в), (г), (д)). Зрозуміло, що у випадках (в), (г), (д) (як, між іншим, і у випадку (б)) правильність сформульованого умовою даної теореми твердження впливає із справедливості наслідка з теореми 3.4 і властивостей відображень подібності геометричних фігур. Але наведемо й безпосередні обґрунтування.

Нехай точка A проєктується у точку A' , певна точка B променя AB — у точку B' ($A', B' \in \alpha$, $AA' \parallel l$, $BB' \parallel l$, або, можливо, $A' \equiv A$ чи $B' \equiv B$, $AA' \equiv l$ чи $BB' \equiv l$). Тоді, за теоремою 3.3, пряма AB проєктується у пряму $A'B'$ ($A'B' \subset \alpha$). Нехай точка M прямої AB , яка проєктується у точку M' прямої $A'B'$, є внутрішньою точкою променя AB . Якщо точка M співпадає з точкою B , то точка M' співпадає з точкою B' і, зрозуміло, належить променю $A'B'$. Якщо точка M не співпадає з точкою B , то правильним є одне з тверджень: $A-M-B$ (точка M лежить між точками A і B), або $A-B-M$ (точка B лежить між точками A і M). Згідно теореми 3.4, тоді, відповідно, або $A'-M'-B'$, або $A'-B'-M'$, і точка M' належить променю $A'B'$. Отже, промінь AB проєктується у промінь $A'B'$.

Оскільки, при цьому проєктуванні уся пряма AB взаємно однозначно відображається на пряму $A'B'$, для променя AB таке проєктування є ін'єктивним відображенням. Розглянемо довільну внутрішню точку P' променя $A'B'$. На прямій AB існує єдина точка P , проєкцією якої є точка P' . Якщо $P' \equiv B'$, то $P \equiv B$, точка P належить променю AB . Якщо точка P' не співпадає з точкою B' , то точка P не співпадає з точкою B , точка P не співпадає з точкою A , бо точка P' не співпадає з точкою A' , і правильним є одне з трьох можливих тверджень: або $P-A-B$, або $A-P-B$, або $A-B-P$. Але, згідно теореми 3.4, припущення правильності першої умови означає, що правильним є твердження $P'-A'-B'$. Це означає, що точка P' не лежить на промені $A'B'$, що суперечить її вибору. Отже, насправді, правильно, що, або $A-P-B$, або $A-B-P$, точка P є внутрішньою точкою променя AB , дане паралельне проєктування є не лише ін'єктивним, а й сюр'єктивним, тобто, взаємно однозначним відображенням променя AB на промінь $A'B'$, що й треба було обґрунтувати. ■

Паралельне проєктування, при якому проєкцією **променя** є точка, для даного променя вважають **виродженим**. Паралельне проєктування, при якому проєкцією **променя** є промінь, для даного променя вважають **невиродженим**. Зрозуміло, що паралельне проєктування для променя є виродженим тоді та тільки тоді, коли воно є виродженим для прямої, що цей промінь містить.

Теорема 3.7. *Проєкцією площини при паралельному проєктуванні є або пряма, або площина. Проєкцією площини є пряма тоді та тільки тоді, коли ця площина є паралельною до прямої, що задає напрямок паралельного проєктування, або цю пряму містить. Пряма-проєкція є прямою перетину площини-*

оригінала з картинною площиною. У випадку, коли проєкцією площини є площина, закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між площиною-оригіналом і картинною площиною.

Доведення. $\square$ Розглянемо паралельне проєктування, задане картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині), пряма l перетинає площину α у певній точці K (рис. 54).

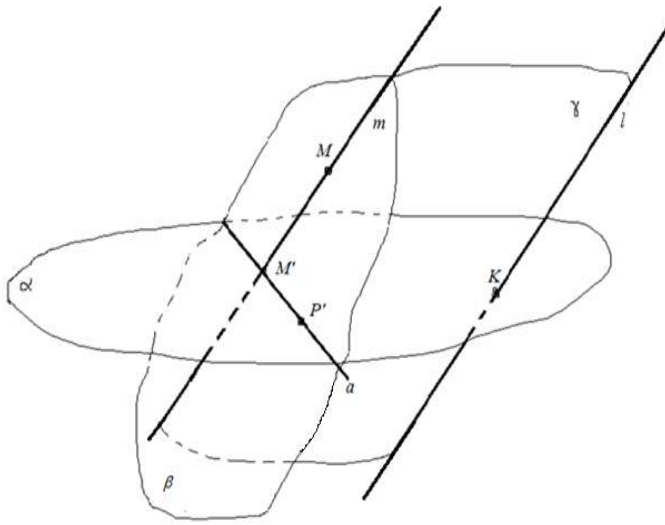


Рис. 54

Розглянемо площину β , яка є паралельною до прямої l , або містить цю пряму. Зрозуміло, що така площина β не може співпадати з картинною площиною α або бути паралельною до неї, бо пряма l не є паралельною до площини α і не нале-

жить цій площині. Отже, площина β перетинає площину α за певною прямою a : $a = \alpha \cap \beta$, прямі l і a не є паралельними (у супротивному випадку, згідно ознаки паралельності прямої до площини, виявилось би, що $l \parallel \alpha$).

Оскільки пряма a лежить у площині α , кожна точка площини β , що знаходиться на прямій a , проєктується сама у себе. Розглянемо точку M площини β , яка не належить прямій a . Якщо $M \in l$, то це той випадок, коли площина β містить пряму l (інакше, $l \parallel \beta$, пряма l і площина β не мають спільних точок), $l \cap \alpha = K$, $K \in a$, проєкцією точки M є точка K прямої a . Якщо точка M не належить прямій l ,

через точку M проходить паралельна до прямої l пряма m (рис. 54), існує єдина площина γ , що містить прямі m і l . Точка $M \in \gamma \cap \beta$. Отже, або площина γ співпадає з площиною β , і тоді $m \subset \beta$, або площина γ перетинає площину β за певною прямою q ($q = \gamma \cap \beta$), $M \in q$. У останньому випадку пряма l є паралельною до площини β . Але тоді $l \parallel q$ (дві прямі лежать у одній площині γ і не мають спільних точок). У евклідовій геометрії через точку M проходить єдина пряма, паралельна до прямої l . Це означає, що прямі q і m співпадають, пряма m лежить у площині β . Оскільки пряма l не є паралельною до прямої a , то пряма m також не є паралельною до прямої a , існує точка M' , $M' = m \cap a$, саме точка M' є проєкцією точки M на площину α у напрямку прямої l . У підсумку, якщо $l \parallel \beta$, або $l \subset \beta$, кожна точка площини β проєктується у точку, що лежить на прямій a , $a = \alpha \cap \beta$. Це означає, що площина β , як геометрична фігура, проєктується у пряму a .

Розглянемо тепер довільну точку P' , $P' \in a$. $P' \in \alpha \cap \beta$. Отже, це точка площини β , яка при даному паралельному проєктуванні проєктується сама у себе, кожна точка прямої a є проєкцією певної точки площини β (насправді, безлічі точок площини β).

Отже, у даному випадку пряма a , $a = \alpha \cap \beta$, є проєкцією площини β .

Нехай тепер площина β не є паралельною до прямої l і не містить цю пряму.

Якщо площина β співпадає з площиною α , то кожна точка площини β проєктується сама у себе, проєкцією площини β є уся

площина α , закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між площинами β і α .

У супротивному випадку або $\beta \parallel \alpha$ (рис. 55 (а)), або площина β перетинає площину α за певною прямою a ($a = \alpha \cap \beta$), але пряма l не є паралельною до площини β і не належить цій площині (рис. 55 (б)).

Розглянемо, спочатку, випадок, коли $\beta \parallel \alpha$ (рис. 55 (а)). Зрозуміло, що проєкція кожної точки площини β , як і проєкція, взагалі, кожної точки евклідового простору, є однозначно визначеною і належить

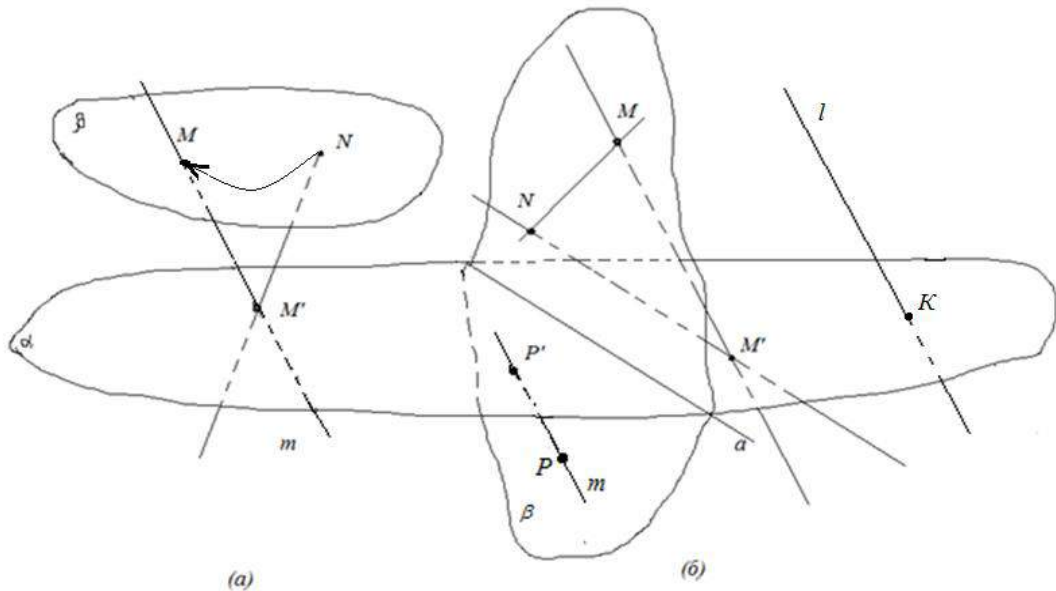


Рис. 55

площині α . Нехай точка $M' \in \alpha$. Через точку M' проходить єдина пряма $m \parallel l$ (або $M' \in l$). У евклідовій геометрії, якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу. Отже, існує точка M , $M = m \cap \beta$. Зрозуміло, що проєкцією точки M , $M \in \beta$, при даному паралельному проєктуванні є саме точка M' , дане паралельне проєктування є сюр'єктивним відображенням площини β на площину α . Припустимо, що різні точки M і N площини β проєктуються у ту ж саму точку M' площини α . Тоді обидві прямі

MM' і NM' є паралельними до прямої l (або одна з них співпадає з прямою l). Але через точку M' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l (або такою прямою є сама пряма l). Це означає, що точки M , N , M' лежать на одній прямій, ця пряма перетинає площину β у єдиній точці, точка N співпадає з точкою M . Отримали суперечність з припущенням, яке означає ін'єктивність даного відображення. Отже, при паралельному проєктуванні на площину α площини β , яка є паралельною до площини α , закон проєктування встановлює між площинами β і α взаємно однозначну відповідність.

Нехай тепер площина β перетинає площину α за певною прямою a ($a = \alpha \cap \beta$), пряма l не є паралельною до площини β і не належить цій площині (рис. 55 (б)). За теоремою 3.2, проєкція кожної точки площини β , як і, взагалі, проєкція кожної точки простору, на площину α у напрямку прямої l визначається однозначно, паралельне проєктування є відображенням площини β у картинну площину α . Припустимо, при даному проєктуванні різні точки M і N площини β проєктуються у одну точку M' площини α . Оскільки через точку M' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l , $MN \parallel l$ або $MN \equiv l$. Але тоді пряма l є паралельною до площини β або належить площині β . Обидві можливості означають суперечність. Отже, припущення є неправильним, якщо точки M і N площини β не співпадають, то їх проєкції на площину α не співпадають також, відображення проєктування площини β у площину α є ін'єктивним.

Ми розглядаємо той випадок, коли пряма l не є паралельною до площини β і не належить цій площині. Отже, пряма l перетинає площину β у певній точці T . Оберемо на площині α довільну точку P' . Або $P' \in l$, ($P' \equiv K$), або існує пряма m , яка проходить через

точку P' паралельно до прямої l . У першому випадку точка P' є проєкцією точки T . У другому випадку пряма m перетинає площину β у певній точці P , точка P' є проєкцією саме точки P . Все це обґрунтовує сюр'єктивність даного відображення. Отже, і у даному випадку паралельне проєктування здійснює взаємно однозначне відображення площини β на картинну площину α .

У підсумку, ми довели, що 1) якщо площина β є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, або містить цю пряму, то проєкцією площини β є пряма a , $a = \alpha \cap \beta$; 2) у супротивному випадку (пряма l не є паралельною до площини β і не належить цій площині) площина β взаємно однозначно проєктується на картинну площину α . Оскільки завжди має місце один із двох можливих, несумісних між собою, вищевказаних випадків взаємного розташування прямої l і площини β , а висновки із тверджень (1) і (2) також є несумісними між собою, за відповідною теоремою математичної логіки правильними є й обернені твердження: 1) якщо проєкцією площини β є пряма, то площина β є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, або містить пряму l ; 2) якщо точки площини β проєктуються у точки площини α , не усі з яких належать одній прямій, то площина β не є паралельною до прямої l і не містить цю пряму.

Тепер теорему повністю доведено. ■

Наслідок. *Якщо площина-оригінал є паралельною до картинної площини або співпадає з нею, то відповідне паралельне проєктування для площини-оригіналу є паралельним перенесенням, при цьому проєктуванні паралельна проєкція кожної фігури площини-оригінала дорівнює своєму оригіналу.*

Доведення. □ Відрізки паралельних прямих, розташовані між па-

паралельними площинами, є рівними між собою. Отже, якщо площина-оригінал β є паралельною до картинної площини α (рис. 55, випадок (а)), або співпадає з нею, точка M' площини α є проєкцією точки M площини β , то відповідне паралельне проєктування площини β на площину α є паралельним перенесенням площини β на вектор $\overrightarrow{MM'}$. Паралельне перенесення площини β є рухом цієї площини, рухом кожної геометричної фігури, розташованої на площині β . У результаті будь-якого руху кожна фігура переходить у рівну до себе фігуру. Отже, у даному випадку паралельна проєкція кожної фігури площини β дорівнює своєму оригіналу. ■

Проектування, при якому проєкцією **площини** є пряма, для даної площини вважають **виродженням**. Проектування, при якому проєкцією **площини** є картинна площина, для площини-оригінала вважають **невиродженням**.

Теорема 3.8. *Проекцією півплощини при паралельному проєктуванні є або промінь, або пряма, або півплощина. Проекцією півплощини є промінь тоді та тільки тоді, коли межа цієї півплощини є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, або співпадає з прямою l . Проекцією півплощини є пряма тоді та тільки тоді, коли площина, що цю півплощину містить, є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, або цю пряму містить, але межа даної півплощини не є паралельною до прямої l і не співпадає з прямою l . У випадку, коли проекцією півплощини є півплощина, проекцією межі півплощини-оригінала є межа півплощини-проєкції, закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між межею півплощини-оригінала і межею півплощини-проєкції, взагалі між півплощиною-оригіналом і півплощиною-проєкцією.*

Доведення. $\square$ Нехай паралельне проєктування задане картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині), пряма l перетинає площину α у певній точці K (рис. 56).

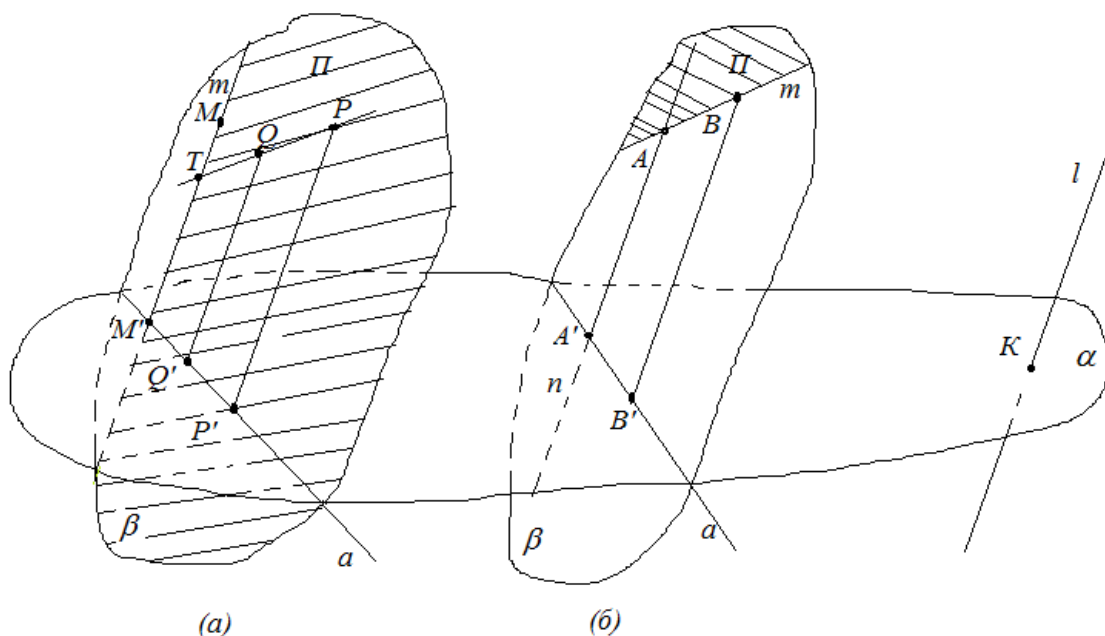


Рис. 56

Нехай півплощина Π , межею якої є пряма m , утворює підмножину площини β . Спочатку розглянемо той випадок, коли $m \parallel l$ (рис. 56 (a)) або $m \equiv l$. Зрозуміло, що тоді $l \parallel \beta$ або $l \subset \beta$ площина β не є паралельною до площини α , площина β перетинає картинну площину α за певною прямою a , згідно теореми 3.7, пряма a є проєкцією площини β на картинну площину α у напрямку прямої l . Оскільки $m \parallel l$ або $m \equiv l$, $m \subset \beta$, за теоремою 3.3, проєкцією прямої m є певна точка M' , $M' \in a$ (якщо $m \equiv l$, то $M' \equiv K$). Проєкції усіх внутрішніх точок півплощини Π , зрозуміло, також належать прямій a , бо $\Pi \subset \beta$. Нехай внутрішня точка P півплощини Π проєктується у певну точку P' , $P' \in a$ (При цьому, очевидно, що точка P' не співпадає з точкою M' , бо точка P' не належить прямій m).

Покажемо, що тоді усі внутрішні точки півплощини Π проєктуються у внутрішні точки променя $M'P'$. Розглянемо довільну внутрішню точку Q півплощини Π , відмінну від точки P . Точки Q і P лежать у площині β по одну сторону відносно прямої m , відрізок QP не перетинає пряму m . Якщо пряма QP є паралельною до прямої m , то вона є паралельною і до прямої l , або співпадає з нею, усі точки прямої QP проєктуються у точку P' . Якщо пряма QP не є паралельною до прямої m , то вона перетинає пряму m у певній точці T (рис. 56, (а)). Оскільки точки T , Q і P є різними точками однієї прямої, одна та тільки одна з них лежить між двома іншими. Одночасно, випадок $Q-T-P$ є неможливим, бо відрізок QP не перетинає пряму m . Отже, або точка Q є внутрішньою точкою відрізка TP ($T-Q-P$), або точка P є внутрішньою точкою відрізка TQ ($T-P-Q$). Проекцією прямої TP , згідно теореми 3.3, є пряма $M'P'$. Точка Q проєктується у певну точку Q' прямої $M'P'$. За теоремою 3.4, при такому паралельному проєктуванні зберігається порядок точок прямої TP . Отже, має місце або $M'-Q'-P'$, або $M'-P'-Q'$. У обох випадках точка Q' лежить на промені $M'P'$. У підсумку, ми довели, що у розглянутому випадку усі точки півплощини Π проєктуються на промінь $M'P'$ прямої a . Зрозуміло також, що кожна точка променя $M'P'$ є проєкцією певної точки (навіть безлічі точок) півплощини Π , бо усі точки променя $M'P'$ одночасно належать картинній площині α і півплощині Π площини β . Отже, у розглянутому випадку проєкцією півплощини Π є промінь $M'P'$.

Дослідимо тепер випадок, коли $l \parallel \beta$, або $l \subset \beta$, але пряма m не є паралельною до прямої l (рис. 56 (б)). У цьому випадку також площина β не є паралельною до площини α , площина β перетинає картинну

площину α за певною прямою a , за теоремою 3.7, пряма a є проєкцією площини β на картинну площину α у напрямку прямої l . Оскільки пряма t не є паралельною до прямої l , то, за теоремою 3.3, проєкцією прямої t є пряма. Але $t \subset \beta$, проєкцією площини β є пряма a . Звідси випливає, що проєкцією прямої t є саме пряма a . Зрозуміло, що усі точки півплощини Π проєктуються у точки прямої a , бо $\Pi \subset \beta$. Розглянемо довільну точку $A' \in a$. Проведемо через неї пряму n , $n \parallel l$. Зрозуміло (було обґрунтовано при доведенні теореми 3.7), що $n \subset \beta$, бо $l \parallel \beta$ або $l \subset \beta$, коли $l \subset \beta$, можливим є випадок, що $n \equiv l$. Оскільки пряма t не є паралельною до прямої l , прямі n і t лежать у площині β і не є паралельними, ці прямі перетинаються у певній точці A . Точка A поділяє пряму n на два взаємно доповняльних променя, точки одного з цих променів належать півплощині Π . Точка A' є проєкцією на картинну площину α у напрямку прямої l усіх точок прямої n , у тому числі точок обох взаємно доповняльних променів, і тому, безлічі точок півплощини Π . Отже, у даному випадку проєкцією півплощини Π є пряма a , пряма a є і проєкцією межі t цієї півплощини.

Нехай тепер площина β , що містить півплощину Π , не є паралельною до прямої l і не містить дану пряму (рис. 57 (а),(б),(в)). За теоремою 3.7, у цьому випадку проєкцією площини β є картинна площина α , закон проєктування встановлює між площинами β і α взаємно однозначну відповідність. Пряма t , $t \subset \beta$, що є межею півплощини Π , проєктується у певну пряму t' , $t' \subset \alpha$ (пряма l не є паралельною до прямої t , пряма l не співпадає з прямою t). Згідно теореми 3.3, закон проєктування встановлює між прямими t та t' взаємно однозначну відповідність. Розглянемо довільну внутрішню

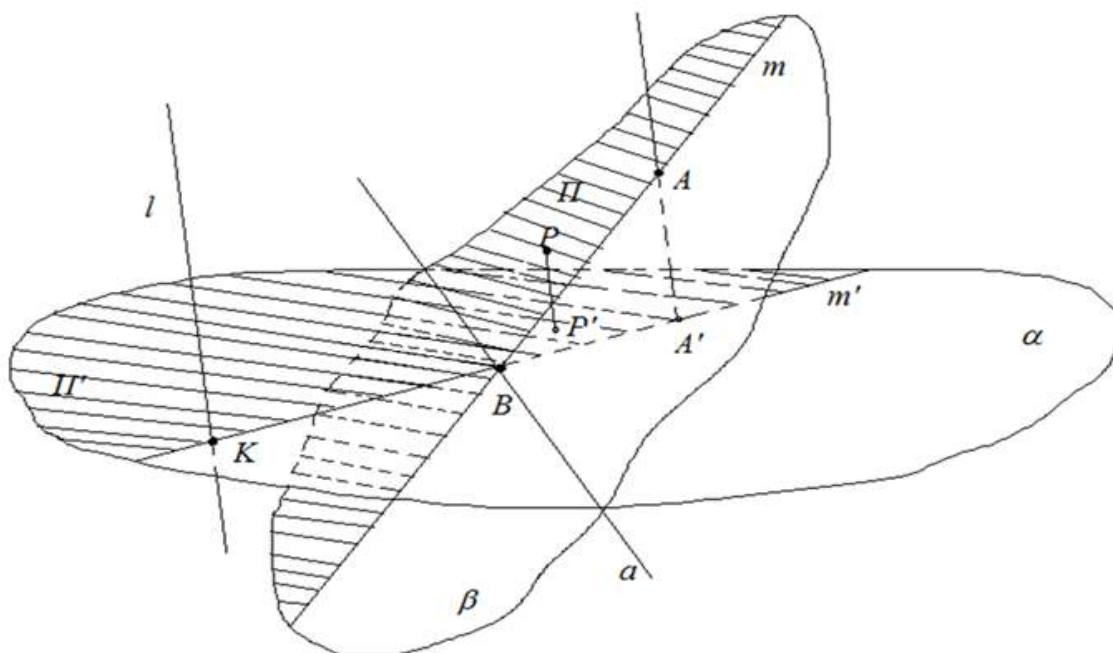


Рис. 57(а); $\beta \cap \alpha = a$, $m \cap a = B$

точку P півплощини Π (точка P не належить прямій m). Нехай проєкцією точки P є точка P' площини α . Точка P' не належить прямій m' тому, що у точки прямої m' проєктуються лише ті точки площини β , які належать прямій m . Отже, точка P' є внутрішньою

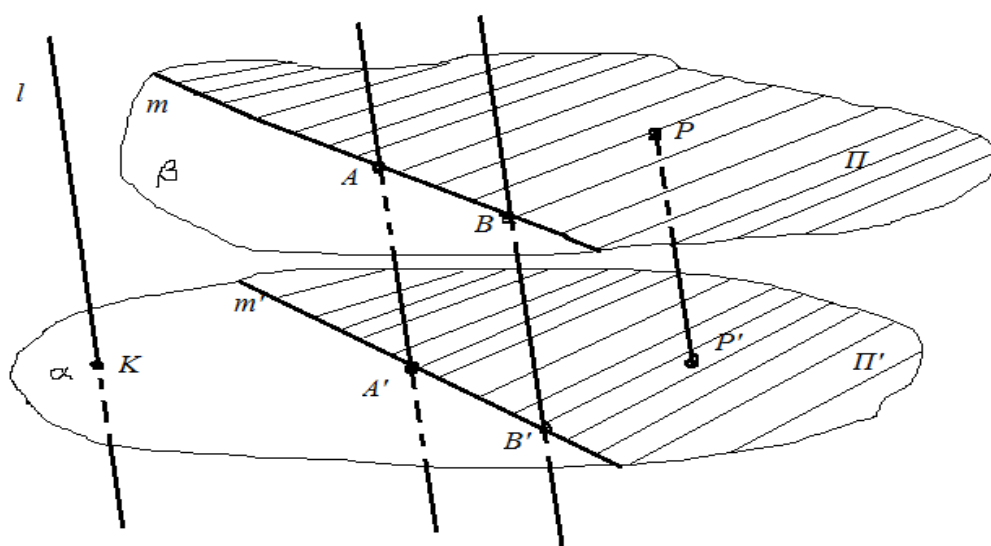


Рис. 57(б); $\beta \cap \alpha = a$, $m \parallel a$

точкою однієї з двох півплощин, визначених на площині α прямою m' . Позначимо таку півплощину через Π' . Обґрунтуємо, що проєкцією півплощини Π є саме півплощина Π' . Нехай точка Q є внутрішньою точкою півплощини Π , точка Q не співпадає з точкою P (рис. 57 (б), наприклад). Відрізок з кінцями у цих точках не перетинає пряму m . Якщо точка Q проєкується у точку Q' , то відрізок $P'Q'$ не перетинає пряму m' (відрізок PQ проєкується у відрізок $P'Q'$, пряма m' містить проєкції лише тих точок площини β , які належать прямій m). Це означає, що точки Q' і P' на площині α , лежать по один бік відносно прямої m' , тобто, точка Q' є внутрішньою точкою півплощини Π' . У підсумку, кожна точка півплощини Π

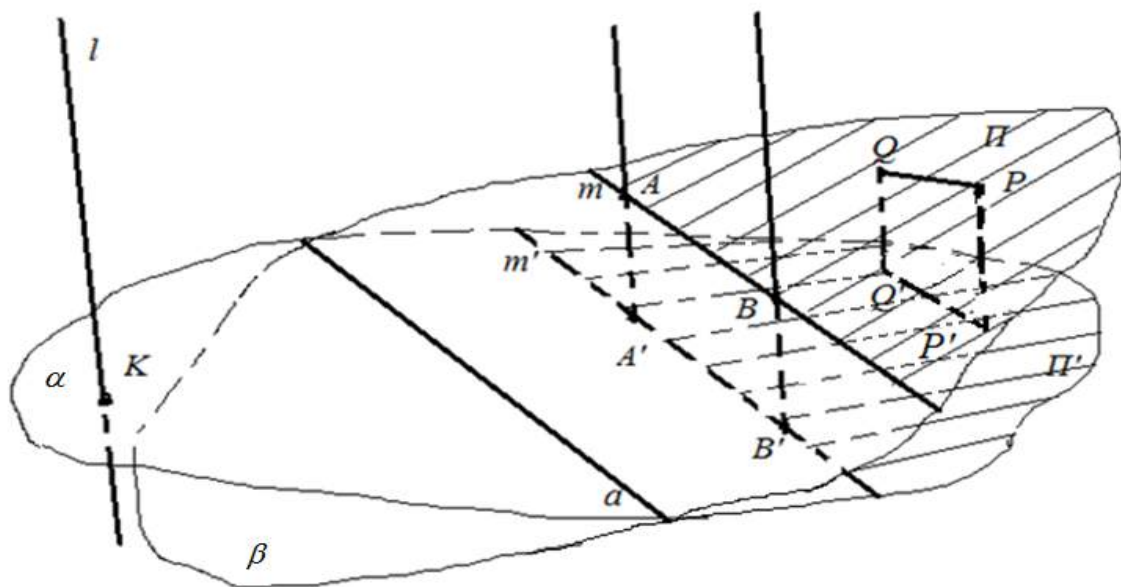


Рис. 57 (в); $\beta \parallel \alpha$

проєкується у точку півплощини Π' . Різні точки півплощини Π проєктуються у різні точки півплощини Π' , тому що, взагалі, площина β взаємно однозначно проєкується на площину α . З іншого боку, кожна внутрішня точка T' півплощини Π' при даному проєктуванні має єдиний прообраз T на площині β . При цьому точка T не

належить прямій m , відрізок TP не перетинає пряму m , бо інакше відрізок $T'P'$ перетинав би пряму m' і точка T' не належала би півплощині Π' . Отже, точки T і P на площині β лежать по один бік відносно прямої m , $T \in \Pi$, при проєктуванні між півплощинами Π і Π' встановлюється взаємно однозначна відповідність.

У підсумку, ми довели, що, 1) якщо межа півплощини Π є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, або з цією прямою співпадає, то проєкцією півплощини Π є промінь; 2) якщо площина, що містить півплощину Π , є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, або цю пряму містить, але межа даної півплощини не є паралельною до прямої l і не співпадає з прямою l , то проєкцією півплощини Π є пряма; 3) якщо площина, що містить півплощину Π , не є паралельною до прямої l і не містить цю пряму, то проєкцією півплощини Π є півплощина. Оскільки один із вказаних у твердженнях (1)-(3) випадків взаємного розташування півплощини Π і прямої l завжди має місце, самі випадки є попарно несумісними, висновки із тверджень (1)-(3) також є попарно несумісними, за відомою теоремою математичної логіки, правильними є й обернені твердження. Це дозволяє зробити той висновок, що теорему доведено. ■

Проєктування, при якому проєкцією півплощини Π є пряма або промінь, для даної півплощини вважають **виродженим**. Проєктування, при якому проєкцією півплощини Π є півплощина, для півплощини-оригінала вважають **невиродженим**.

Теорема 3.9. *Проєкцією пари паралельних прямих при паралельному проєктуванні є або пара точок, або пряма, або пара паралельних прямих. Проєкцією пари паралельних прямих є пара точок тоді та тільки тоді, коли ці прямі є паралельними до прямої l , що задає напрямок паралельного проєктування, або одна з цих*

прямих з прямою l співпадає. Проекцією пари паралельних прямих є одна пряма тоді та тільки тоді, коли задані прямі не є паралельними до прямої l , але паралельною до прямої l є площина, яка ці прямі містить, або пряма l належить цій площині. У випадку, коли проекцією пари паралельних прямих є пара паралельних прямих, встановлюється взаємно однозначна відповідність між прямими-проекціями і прямими-оригіналами.

Доведення. $\square$ Нехай паралельне проєктування задане картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині), пряма l перетинає площину α у певній точці K .

Розглянемо такі прямі a_1 і a_2 , що $a_1 \parallel a_2 \parallel l$. За теоремою 3.3, для кожної з прямих a_1 і a_2 проєктування є виродженням, кожна з них

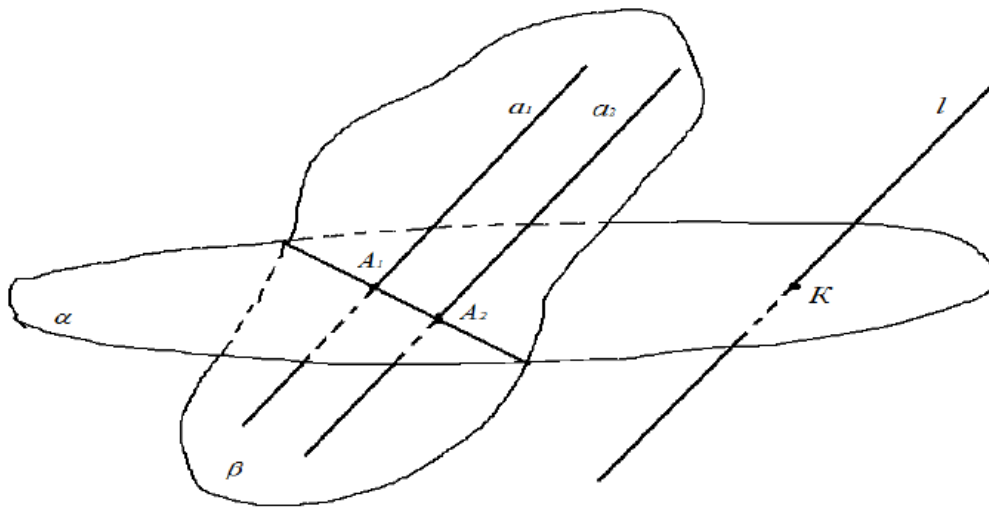


Рис. 58

проєктується у точку свого перетину з картинною площиною α : $a_1 \cap \alpha = A_1$, пряма a_1 проєктується у точку A_1 , $a_2 \cap \alpha = A_2$, пряма a_2 проєктується у точку A_2 (рис. 58), точка A_2 не співпадає з точкою A_1 тому, що ці точки належать різним паралельним прямим. Отже, у даному випадку проекцією пари прямих a_1 і a_2 є пара точок A_1 і A_2 .

Нехай β – площина, що містить паралельні прямі a_1 і a_2 . Нехай тепер $l \parallel \beta$ або $l \subset \beta$, але пряма l не є паралельною до прямої a_1 . Площина β перетинає площину α за певною прямою a (рис. 59). За теоремою 3.7, пряма a є проєкцією площини β на площину α у

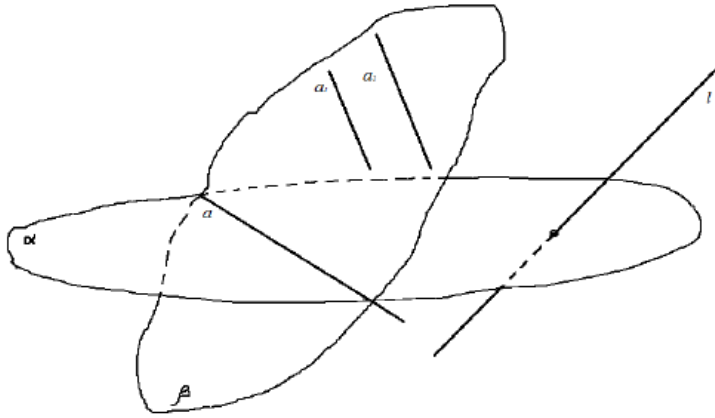


Рис. 59

напрямку прямої l , усі точки площини β , у тому числі й точки прямих a_1 і a_2 , проєктуються на пряму a . З іншого боку, за теоремою 3.3, проєктування для прямих a_1 і a_2 є невиворудженем, кожна з них проєктується у пряму, і саме у пряму a . Отже, пряма a у даному випадку є спільною проєкцією пари паралельних прямих a_1 і a_2 .

Нехай тепер площина β , що містить паралельні прямі a_1 і a_2 , не є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, і не містить пряму l (наприклад, рис. 60). Тоді пряма l не є паралельною ані до прямої a_1 , ані до прямої a_2 , за теоремою 3.3, проєктування для кожної з прямих a_1 і a_2 є невиворудженем, кожна з них проєктується у певну пряму: пряма a_1 – у пряму a'_1 , пряма a_2 – у пряму a'_2 , закон проєктування встановлює взаємно однозначні відповідності між прямими a_1 і a'_1 та між прямими a_2 і a'_2 . Припустимо, прямі a'_1 і a'_2 мають спільну точку M' . Тоді, саме

завдяки наявності цих взаємно однозначних відповідностей, на прямій a_1 для точки M' існує оригінал M_1 , і, одночасно, на прямій a_2 для точки M' існує оригінал M_2 . Зрозуміло, що $M_1 \in \beta$, $M_2 \in \beta$, точка M_1 не співпадає з точкою M_2 бо $a_1 \parallel a_2$. Але, за теоремою 3.7 (у да-

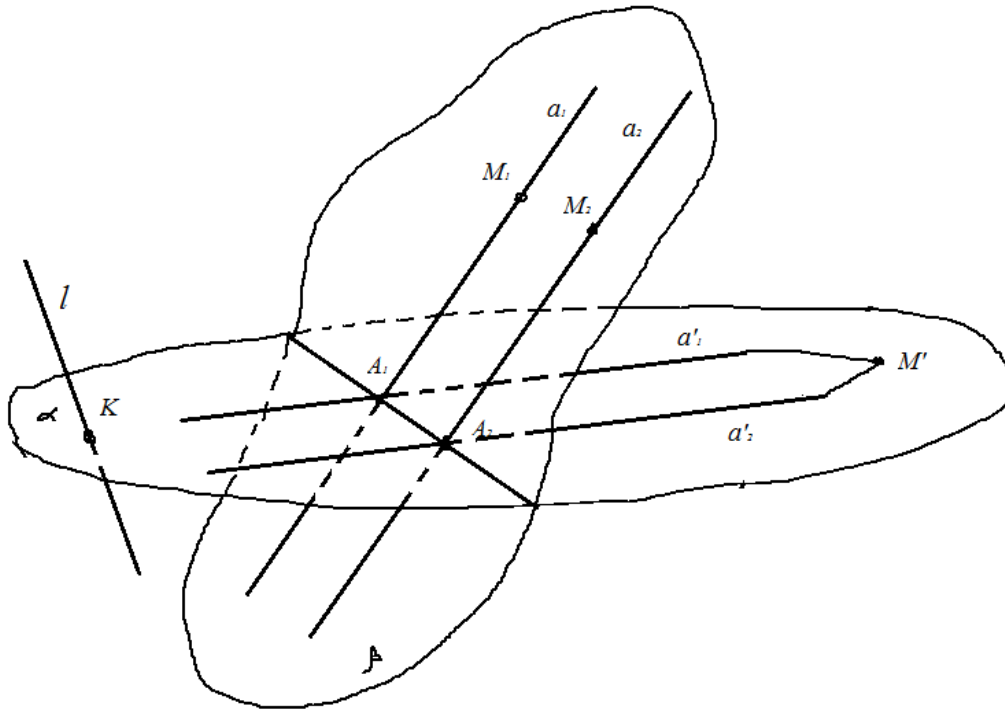


Рис. 60

ному випадку пряма l не є паралельною до площини β), закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між площиною β і картинною площиною α , у точки M' не може бути двох прообразів. Отримана суперечність свідчить про те, що зроблене припущення є неправильним, прямі a'_1 і a'_2 картинної площини α спільних точок не мають, $a'_1 \parallel a'_2$.

У підсумку, доведено, що 1) якщо дві паралельні прямі є паралельними до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, або одна з них з прямою l співпадає, то проєкцією цих паралельних прямих є дві точки; 2) якщо дві паралельні прямі не є паралельними до

прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування, але площина, що ці прямі містить, є паралельною до прямої l , або містить пряму l , то проєкцією даних паралельних прямих є одна пряма; 3) якщо площина, що містить дані паралельні прямі, не є паралельною до прямої l і не містить пряму l , то проєкцією даних паралельних прямих є пара паралельних прямих. Оскільки можливими, і, одночасно, попарно несумісними, є лише такі три випадки взаємного розміщення пари паралельних прямих і прямої l , які вказані у твердженнях (1) - (3), висновки із тверджень (1) - (3) також є попарно несумісними, за відомою теоремою математичної логіки правильними є й обернені твердження. Теорему доведено.

Проектування, при якому проєкцією **пари паралельних прямих** є пара точок або одна пряма, для даної пари паралельних прямих вважають **виродженим**. Проектування, при якому проєкцією **пари паралельних прямих** є пара паралельних прямих, для даної пари паралельних прямих вважають **невиродженим**.

Зрозуміло, що при кожному зі вказаних вище випадків виродженого проєктування найпростіших, відмінних від точки, геометричних фігур, отримані зображення є позиційно неповними. Одночасно, існування взаємно однозначної відповідності між оригіналом і його зображенням при кожному зі вказаних вище випадків невірдженого проєктування найпростіших геометричних фігур забезпечує вже позиційну повноту отриманих зображень.

Теорема 3.10. *При паралельному проєктуванні зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, у випадках, коли проєкціями прямих-оригіналів не є точки.*

Доведення. $\square$ Нехай паралельне проєктування задано картинною площиною α і прямою l (пряма l не є паралельною до площини α і

не належить цій площині), пряма l перетинає площину α у певній точці K .

Нехай, при даному проєктуванні пряма n проєктується у пряму n' , $n' \subset \alpha$. Зрозуміло, що прямі n і n' належать одній площині β , яка проходить через пряму n паралельно до прямої l ($n' = \beta \cap \alpha$, випадок, коли пряма n перетинає площину α у певній точці P

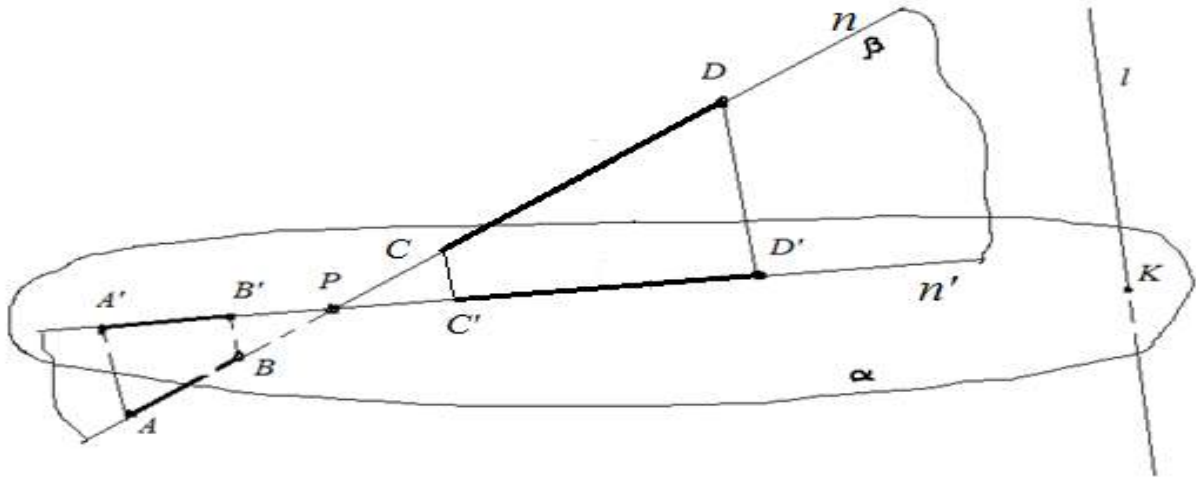


Рис. 61

зображено на рис. 61). Нехай відрізки AB і CD належать прямій n , точка A проєктується у точку A' , точка B – у точку B' , точка C – у точку C' , точка D – у точку D' . $A', B', C', D' \in n'$, $AA' \parallel l$, $BB' \parallel l$, $CC' \parallel l$, $DD' \parallel l$. Згідно теореми 3.5, відрізок AB проєктується у відрізок $A'B'$, відрізок CD – у відрізок $C'D'$, відрізки $A'B'$ і $C'D'$ належать прямій n' . За узагальненою теоремою Фалеса, паралельні прямі, що перетинають дві прямі (n і n'), відтинають на цих прямих пропорційні відрізки. Тобто, $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$, що й треба було довести. Для

розглянутого випадку справедливості твердження теореми 3.10 також безпосередньо впливає зі справедливості наслідку з теореми 3.4.

Нехай тепер відрізок AB лежить на прямій a_1 , відрізок CD – на

прямій a_2 , $a_1 \parallel a_2$, прямі a_1 і a_2 проєктуються у одну пряму a картинної площини α . Згідно теореми 3.9, це відбувається тоді та тільки тоді, коли площина β , що містить паралельні прямі a_1 і a_2 , є паралельною до прямої l , але пряма a_1 не є паралельною до прямої l . $a = \beta \cap \alpha$. На рис. 62 зображено випадок, коли пряма a_1 не є паралельною до прямої a і не співпадає з прямою a . Нехай точка A проєктується у точку

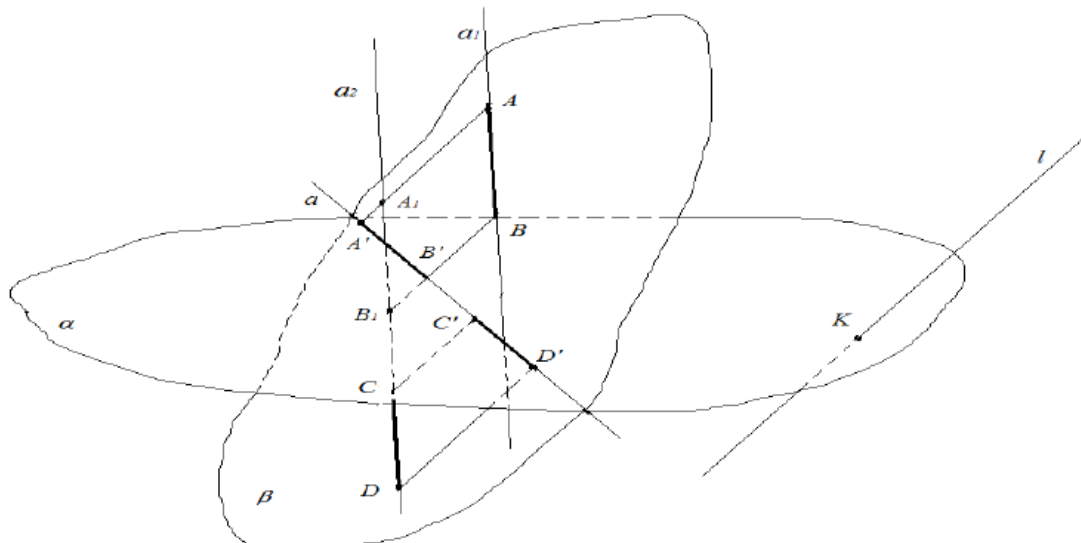


Рис. 62

A' прямої a , точка B – у точку B' , точка C – у точку C' , точка D – у точку D' , $AA' \parallel l$, $BB' \parallel l$, $CC' \parallel l$, $DD' \parallel l$. Згідно теореми 3.5, при цьому відрізок AB проєктується у відрізок $A'B'$, відрізок CD – у відрізок $C'D'$. $AA' \parallel BB'$, $a_1 \parallel a_2$ – усі чотири прямі лежать у площині β , $A \in a_1$, $B \in a_1$. Звідси випливає, що прямі AA' і BB' перетинають пряму a_2 , відповідно, у певних точках A_1 і B_1 , чотирикутник A_1ABB_1 є паралелограмом, $AB = A_1B_1$. Але тоді, при даному паралельному проєктуванні точка A_1 , як і точка A , проєктується у точку A' , точка B_1 , як і точка B , проєктується у точку B' , відрізок A_1B_1 проєктується у

відрізок $A'B'$. Відрізки A_1B_1 і CD належать прямій a_2 і проєктуються у відрізки $A'B'$, і $C'D'$ прямої a . За доведеним раніше, $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{A_1B_1}{CD}$.

Але $AB = A_1B_1$, і тому $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$, що й треба було довести.

Тепер розглянемо той випадок, коли відрізок AB лежить на прямій a_1 , відрізок CD – на прямій a_2 , $a_1 \parallel a_2$, але площина β , що містить паралельні прямі a_1 і a_2 , не є паралельною до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування. Згідно теореми 3.9, у цьому випадку прямі a_1 і a_2 проєктуються, відповідно, у прямі a'_1 і a'_2 , $a'_1 \parallel a'_2$. Нехай при цьому точка A проєктується у точку A' , точка B – у точку B' , точка C – у точку C' , точка D – у точку D' (Зрозуміло, що $A' \in a'_1$, $B' \in a'_1$, $C' \in a'_2$, $D' \in a'_2$, відрізок AB проєктується у відрізок $A'B'$, відрізок CD – у відрізок $C'D'$). У площині β через точки A і B проведемо паралельні прямі b_1 і b_2 , ($b_1 \parallel b_2, A \in b_1, B \in b_2$). Ці прямі перетнуть пряму a_2 , відповідно, у точках A_1 і B_1 , чотирикутник ABB_1A_1 буде паралелограмом, отже, $AB = A_1B_1$. Нехай точка A_1 проєктується у точку A'_1 , точка B_1 – у точку B'_1 . Зрозуміло, що $A'_1 \in a'_2$, $B'_1 \in a'_2$, пряма b_1 проєктується у пряму $A'A'_1$, пряма b_2 – у пряму $B'B'_1$, $A'A'_1 \parallel B'B'_1$ тому, що $b_1 \parallel b_2$ і площина β , яка містить паралельні прямі b_1 і b_2 , не є паралельною до прямої l , що задає напрямок паралельного проєктування. Відрізок A_1B_1 проєктується у відрізок $A'_1B'_1$, чотирикутник $A'B'B'_1A'_1$ є паралелограмом, $A'B' = A'_1B'_1$.

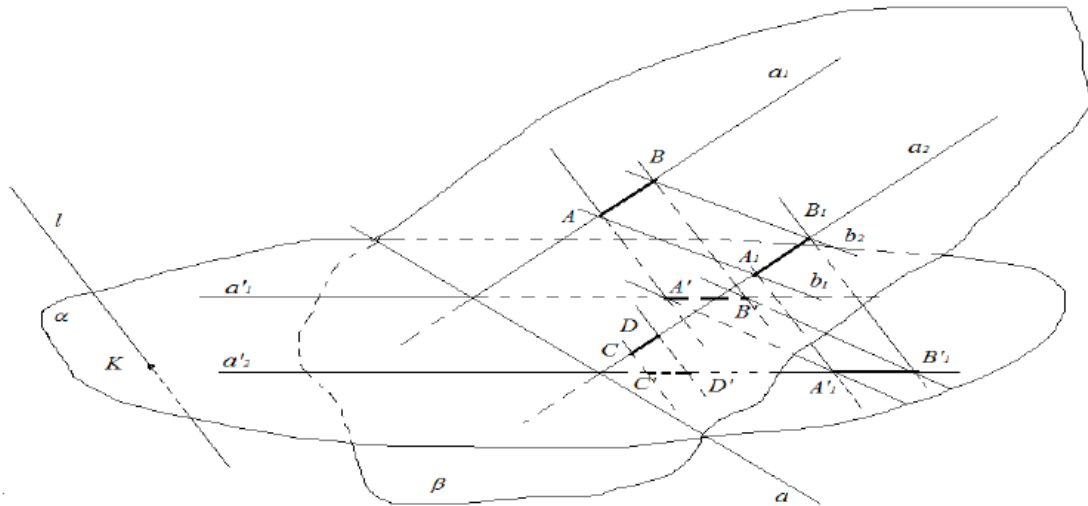


Рис. 63

Відрізки A_1B_1 і CD належать прямій a_2 і проєктуються, відповідно, у відрізки $A'_1B'_1$ і $C'D'$ прямої a'_2 . За доведеним раніше, $\frac{A'_1B'_1}{C'D'} = \frac{A_1B_1}{CD}$.

Але $A'_1B'_1 = A'B'$, $A_1B_1 = AB$. Тому $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$, що й треба було

довести. Рис. 63 ілюструє проведені міркування у випадку, коли площина β перетинає площину α . ■

Гомотетія є окремим випадком перетворення подібності евклідового простору (див., наприклад, [26; 29]). Найчастіше, гомотетію задають точкою, яку називають центром гомотетії і, як правило, позначають буквою O , і відмінним від нуля числом k , $k \neq 0$, яке називають коефіцієнтом гомотетії. «На мові векторів» при гомотетії h з центром у точці O і коефіцієнтом k кожна точка M евклідового простору переходить у таку точку M_1 цього простору, що $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, $M_1 = h(M)$. Із останньої рівності миттєво випливає, що при будь-якій гомотетії h точки O , M і M_1 лежать на одній

прямій, якщо $k > 0$, то точки M і M_1 належать одному променю з початком у точці O , якщо $k < 0$, то ці точки належать взаємно доповняльним променям з початком у точці O (рис. 64 (а) і 64 (б)). Якщо точка O належить певній площині β , то звуження гомотетії h на множину точок площини β утворює гомотетію h_1 площини β .

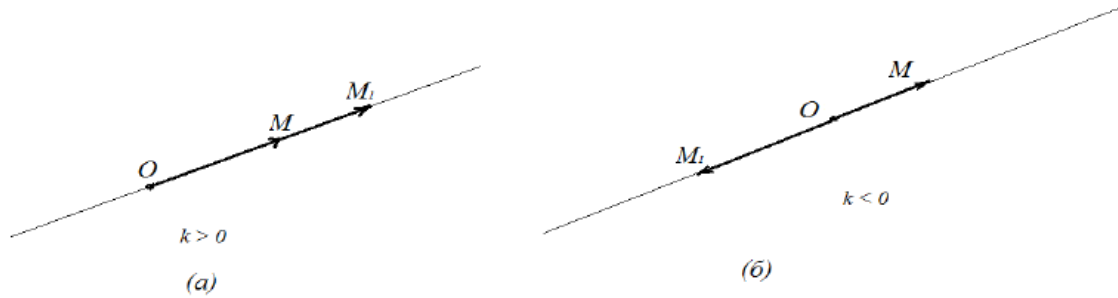


Рис. 64

Гомотетію h можна задати й геометрично, за допомогою центра і двох точок M і M_1 , $M_1 = h(M)$, жодна з яких не співпадає з точкою O . Точки O , M і M_1 повинні лежати на одній прямій. Якщо точка M_1 співпадає з точкою M , то вважають, що гомотетія h має коефіцієнт, який дорівнює одиниці, і є тотожнім перетворенням евклідового простору. Якщо точки M і M_1 є різними, на прямій MM_1 розташовані по одну сторону від точки O , за коефіцієнт k гомотетії h приймають додатнє число $k = \frac{OM_1}{OM}$. Так, на рис. 65 (а) $k > 1$, на рис. 65 (б)

$0 < k < 1$. Якщо точки M і M_1 на прямій MM_1 розташовані по різні сторони від точки O , за коефіцієнт k гомотетії h приймають від'ємне число $k = -\frac{OM_1}{OM}$ (рис. 65 (в)). Зрозуміло, що обидва способи задання

гомотетії h є цілком рівносильними.

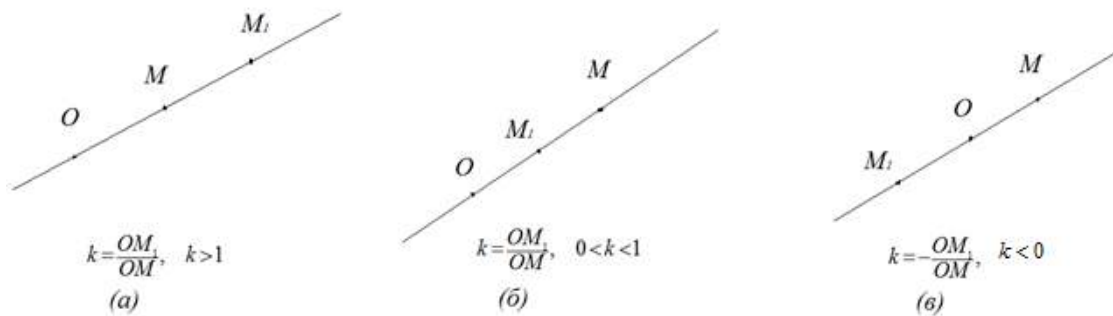


Рис. 65

У випадку, коли гомотетію h задано геометрично, за допомогою центра O і пари відповідних точок M і M_1 ($h(M)=M_1$), для

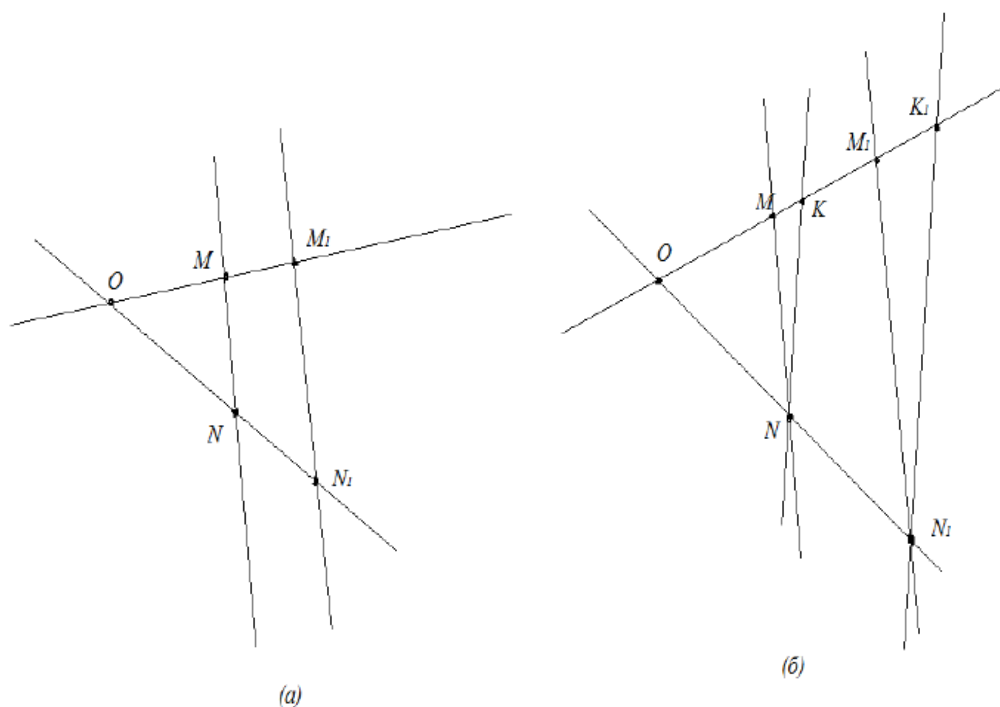


Рис. 66

довільної точки N простору її образ $h(N)$ при даній гомотетії геометрично можна визначити наступним чином. Якщо точка N не належить прямій MM_1 , проводять прямі ON , MN і M_1N_1 , $M_1N_1 \parallel MN$ (рис. 66 (a), наприклад). Точка $N_1 = ON \cap M_1N_1$. За теоремою Фалеса, $\frac{ON_1}{ON} = \frac{OM_1}{OM}$ і тому $h(N) = N_1$. Якщо точка K лежить на прямій MM_1 , то спочатку будують образ $N_1 = h(N)$

довільної точки N , яка не належить прямій MM_1 , а вже потім, за допомогою точок N і N_1 , точку $K_1 = h(K)$ ($K \notin NN_1$) (рис. 66 (б), наприклад).

Теорема 3.11. *При паралельному проєктуванні проєкцією гомотетичних фігур є гомотетичні фігури з тим же самим значенням коефіцієнта гомотетії.*

Доведення. $\square$ Нехай для геометричних фігур F і F_1 евклідового простору існує така гомотетія g з центром у точці O і коефіцієнтом k , що $g(F) = F_1$.

Розглянемо паралельне проєктування h на картинну площину α у напрямку прямої l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині). Нехай $h(O) = O'$, $h(F) = F'$, $h(F_1) = F'_1$. На площині α розглянемо гомотетію g' з центром у точці O' і коефіцієнтом k . Якщо точка $M' \in F'$, то існує принаймні одна точка M фігури F , для якої $h(M) = M'$. $g(M) = M_1$, $M_1 \in F_1$, $h(M_1) = M'_1$, $M'_1 \in F'_1$. Покажемо, що $M'_1 = g'(M')$ (див. схему на рис. 67).

Якщо точка M співпадає з точкою O , то $M' \equiv O'$, $M_1 \equiv O$, $h(M_1) = h(O) = O'$, $g'(M') = g'(O') = O' = M'_1$. Нехай точка M не співпадає з точкою O . Тоді існує пряма OM . Якщо, $OM \parallel l$, то $M' = h(M) = h(O) = O'$, $M_1 = g(M) \in OM$; $M'_1 = h(M_1) = h(O) = O'$; $g'(M') = g'(O') = O' = M'_1$. Розглянемо тепер випадок, коли пряма OM не є паралельною до прямої l . Коли $k > 0$, $g(M) = M_1$, $M_1 \in F_1$, точка M_1 належить променю OM , $OM_1 = k \cdot OM$. З іншого боку $h(O) = O'$, $h(M) = M'$, точка M' не співпадає з точкою O' , промінь OM проєктується у промінь $O'M'$, проєктування для променя OM є

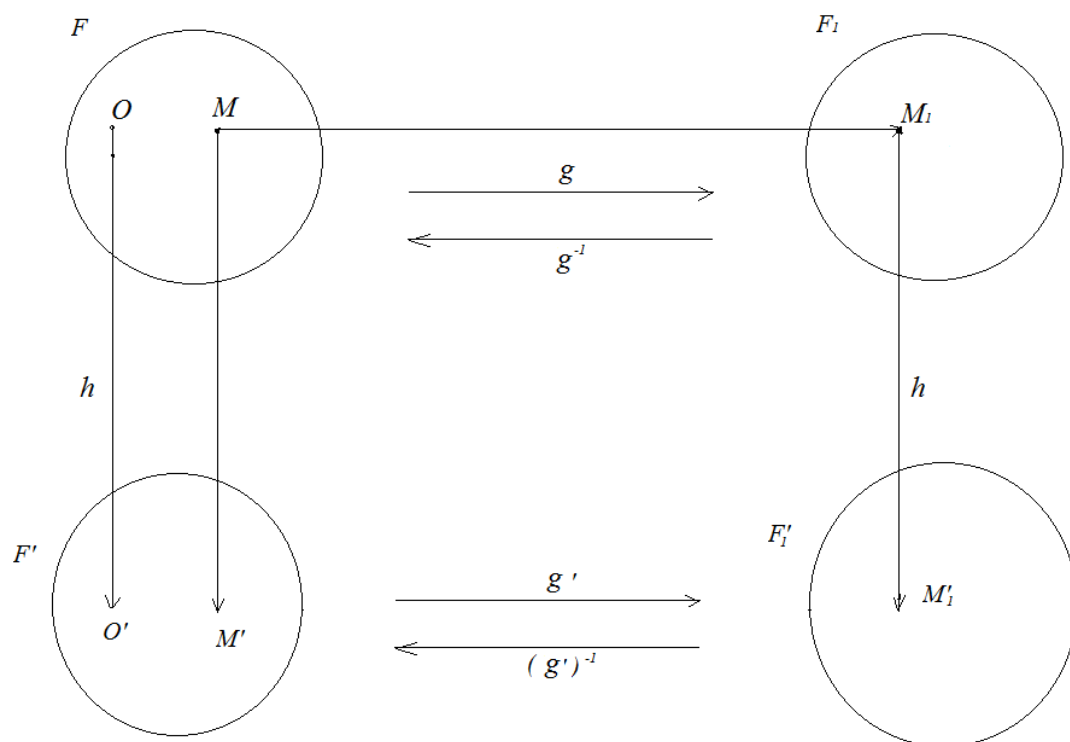


Рис. 67

невиродженим. $h(M_1) = M'_1$, $M'_1 \in F'_1$. Оскільки при невірному паралельному проєктуванні проєкцією променя є промінь, точка M'_1 належить променю $O'M'$. Згідно теореми 3.10, зберігається відношення довжин відрізків, які належать одній прямій. Тому $\frac{O'M'_1}{O'M'} = \frac{OM_1}{OM} = k$, $O'M'_1 = k \cdot O'M'$, $g'(M') = M'_1$.

У випадку $k < 0$ міркування є аналогічними. Треба тільки розглядати промінь, доповняльний до променя OM .

У підсумку, обґрунтовано, що $g'(F') \subset F$. З іншого боку, гомотетія g^{-1} має той самий центр O і коефіцієнт $q = \frac{1}{k}$, $g^{-1}(F_1) = F$.

Тому, за допомогою аналогічних міркувань, легко отримати, що гомотетія g^{-1} індукує на картинній площині α гомотетію з центром у

точці O' і коефіцієнтом $q = \frac{1}{k}$, тобто, гомотетію $(g')^{-1}$, обернену до гомотетії g' , і $(g')^{-1}(F'_1) \subset F'$. Але це означає, що для кожної точки $P'_1 \in F'_1$ існує точка $P' = (g')^{-1}(P'_1)$, для якої $g'(P') = P'_1$, гомотетія g' відображає фігуру F' на фігуру F'_1 , що й треба було обґрунтувати.

Справедливість теорем 3.2, 3.3, 3.4 і 3.10 свідчить про те, що паралельне проєктування евклідового простору на картинну площину у напрямку прямої є **лінійним відображенням евклідового простору на площину** [28]. Невироджене паралельне проєктування площини на площину є **бієктивним лінійним відображенням площини на площину**, тобто, **афінним відображенням площини на площину**. Невироджене паралельне проєктування прямої на площину є **бієктивним лінійним відображенням прямої на пряму**, яка при даному проєктуванні є образом прямої-оригіналу, згідно наслідку з теореми 3.4 – відображенням подібності прямої на пряму. Отже, усі властивості лінійних відображень евклідового простору та його відповідних підмножин є властивостями і паралельного проєктування.

У даному параграфі доведення теорем 3.3 – 3.11 проведені методами елементарної геометрії. Застосування методу координат та методів векторної алгебри дозволило би скоротити відповідні міркування, принаймні, завдяки зменшенню кількості тих випадків, які підлягають розгляданню. При цьому варто зауважити, що при застосуванні методу координат у евклідовому просторі, як правило, доцільно обирати афінну систему координат $Oxyz$ так, щоб координатна площина Oxy співпадала з картинною площиною, а вісь Oz була би паралельною до прямої, яка задає напрямок проєктування. Виключне застосування у даному параграфі методів елементарної геометрії пояснюється бажанням того, щоб відповідні доведення були у

повній мірі доступними уже для учнів десятих класів закладів загальної середньої освіти.

Питання і завдання для самоконтролю до §3

3.1. Охарактеризуйте апарат метода паралельного проєктування зображення на площині фігур евклідової геометрії.

3.2. Яка геометрична фігура, за означенням, задає напрямок проєктування згідно метода паралельного проєктування?

3.3. У випадку якого апарата паралельне проєктування називають ортогональним?

3.4. Що називають паралельною проєкцією точки M на площину α у напрямку прямої l ? Як знаходять таку проєкцію?

3.5. Що називають паралельною проєкцією геометричної фігури F на площину α у напрямку прямої l ? Як знаходять таку проєкцію?

3.6. Що називають зображенням геометричної фігури згідно метода паралельного проєктування?

3.7. Наведіть означення обрису проєкції геометричної фігури та обрису зображення геометричної фігури.

3.8. Наведіть означення та приклади видних і невидних точок геометричних фігур при паралельному проєктуванні.

3.9. Чи розрізняють між собою при паралельному проєктуванні проєкції (і зображення) видних і невидних точок геометричних фігур?

3.10. Як при паралельному проєктуванні розрізняють між собою проєкції (і зображення) тих ліній геометричних фігур, які складаються виключно з невидних, або виключно з видних точок?

3.11. Чому справедливність кожної із закономірностей зображень найпростіших геометричних фігур на площині за методом паралельного проєктування достатньо обґрунтувати лише для паралельної проєкції відповідної геометричної фігури?

3.12. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями прямої при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється та чи інша проєкція?

3.13. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями прямої при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється те чи інше зображення?

3.14. Яке паралельне проєктування для прямої вважають виродженим, а яке – невиродженим?

3.15. Що можна стверджувати про збереження порядку точок, які належать одній прямій, при невиродженому для даної прямої паралельному проєктуванні?

3.16. Що можна стверджувати про збереження порядку точок, які належать одній прямій, при зображенні даної прямої за допомогою невиродженого для неї паралельного проєктування?

3.17. Яке відображення прямої на пряму називають відображенням подібності?

3.18. Чи є невироджене паралельне проєктування прямої на картинну площину відображенням подібності прямої-оригінала на її образ? Відповідь обґрунтуйте.

3.19. Чи є зображення прямої при невиродженому для неї паралельному проєктування відображенням подібності прямої-оригінала на її зображення ? Відповідь обґрунтуйте.

3.20. Чи може довільна пряма картинної площини вважатися зображенням довільної прямої евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.21. Чи може довільна пряма картинної площини вважатися зображенням довільної прямої евклідового простору при довільному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.22. Чи може довільна пряма картинної площини вважатися зображенням довільної прямої евклідового простору при довільному, невиродженому для останньої, паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.23. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями відрізка при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється та чи інша проєкція?

3.24. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями відрізка за методом паралельного проєктування? За яких умов утворюється те чи інше зображення?

3.25. Яке паралельне проєктування для відрізка вважають виродженим, а яке – невиродженим?

3.26. Що можна стверджувати про проєкції кінців відрізка та внутрішніх точок відрізка при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.27. Що можна стверджувати про зображення кінців відрізка та внутрішніх точок відрізка при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.28. Чи може довільний відрізок картинної площини вважатися зображенням довільного відрізка евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.29. Чи може довільний відрізок картинної площини вважатися зображенням довільного відрізка евклідового простору при довільному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.30. Чи може довільний відрізок картинної площини вважатися зображенням довільного відрізка евклідового простору при довільному, невиродженому для останнього, паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.31. Відомо, що довжина відрізка AB дорівнює довжині його проєкції. Що можна стверджувати про розташування відрізка AB відносно апарата даного паралельного проєктування? Відповідь обґрунтуйте.

3.32. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями променя при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється та чи інша проєкція?

3.33. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями променя при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється те чи інше зображення?

3.34. Яке паралельне проєктування для променя вважають виродженим, а яке – невиродженим?

3.35. Що можна стверджувати про проєкції початка променя та внутрішніх точок променя при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.36. Що можна стверджувати про зображення початка променя та внутрішніх точок променя при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.37. Чи може довільний промінь картинної площини вважатися зображенням довільного променя евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.38. Чи може довільний промінь картинної площини вважатися зображенням довільного променя евклідового простору при довільному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.39. Чи може довільний промінь картинної площини вважатися зображенням довільного променя евклідового простору при довільному, невиродженому для останнього, паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.40. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями площини при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється та чи інша проєкція?

3.41. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями площини при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється те чи інше зображення?

3.42. Яке паралельне проєктування для площини вважають виродженим, а яке – невиродженим?

3.43. Чи може довільна площина евклідового простору вважатися зображенням довільної площини цього простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.44. Чи може довільна площина евклідового простору вважатися зображенням довільної площини цього простору при довільному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.45. Чи може довільна площина евклідового простору вважатися зображенням довільної площини цього простору при довільному, не виродженому для останньої, паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.46. Яке відображення однієї геометричної фігури на іншу називають ізометричним відображенням або рухом?

3.47. У яких випадках не вироджене паралельне проєктування площини на картинну площину є ізометричним відображенням площини-оригінала на її образ? Відповідь обґрунтуйте.

3.48. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями півплощини при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється та чи інша проєкція?

3.49. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями півплощини за методом паралельного проєктування? За яких умов утворюється те чи інше зображення?

3.50. Яке паралельне проєктування для півплощини вважають виродженим, а яке – не виродженим?

3.51. Що можна стверджувати про проєкції точок межі півплощини та внутрішніх точок півплощини за методом паралельного проєктування при різних варіантах розташування цієї півплощини відносно апарата даного проєктування? Відповідь обґрунтуйте.

3.52. Що можна стверджувати про зображення точок межі півпло-

щини та внутрішніх точок півплощини при зображенні півплощини за методом паралельного проєктування при різних варіантах розташування цієї півплощини відносно апарата даного проєктування? Відповідь обґрунтуйте.

3.53. Чи може довільна півплощина картинної площини вважатися зображенням довільної півплощини евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.54. Чи може довільна півплощина картинної площини вважатися зображенням довільної півплощини евклідового простору при довільному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.55. Чи може довільна півплощина картинної площини вважатися зображенням довільної півплощини евклідового простору при довільному, невиродженому для останньої, паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

3.56. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями пари паралельних прямих при паралельному проєктуванні? За яких умов утворюється та чи інша проєкція? Відповідь обґрунтуйте.

3.57. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями пари паралельних прямих за методом паралельного проєктування? За яких умов утворюється кожне можливе зображення? Відповідь обґрунтуйте.

3.58. Яке паралельне проєктування для пари паралельних прямих вважають виродженим, а яке — невиродженим?

3.59. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями пари паралельних площин за методом паралельного проєктування? За яких умов утворюється та чи інша проєкція? Відповідь обґрунтуйте.

3.60. Яке паралельне проєктування для пари паралельних площин варто вважати виродженим, а яке – невиродженим?

3.61. Що відомо про відношення довжин проєкцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, при паралельному проєктуванні?

3.62. Що відомо про відношення довжин зображень відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, при паралельному проєктуванні?

3.63. Яке перетворення евклідового простору називають гомотетією?

3.64. Чи є гомотетія евклідового простору перетворенням подібності евклідового простору? Відповідь обґрунтуйте.

3.65. Яке перетворення евклідової площини називають гомотетією?

3.66. Як пов'язані між собою гомотетія евклідового простору і гомотетія площини евклідового простору?

3.67. Як гомотетію евклідового простору можна задати геометрично? Відповідь обґрунтуйте.

3.68. У якому випадку дві геометричні фігури евклідового простору називають гомотетичними?

3.69. Що можна стверджувати про проєкції за методом паралельного проєктування гомотетичних між собою фігур евклідового простору?

3.70. Що можна стверджувати про зображення за методом паралельного проєктування гомотетичних між собою фігур евклідового простору?

3.71. Яке відображення евклідового простору називають лінійним? Яке перетворення евклідового простору називається афінним?

3.72. Наведіть означення афінного відображення однієї площини евклідового простору на іншу.

3.73. Як у евклідовому просторі афінні відображення площин пов'язані з афінними перетвореннями усього простору? Відповідь обґрунтуйте.

3.74. Чи є невироджене паралельне проєктування площини β на площину α афінним відображенням площини β на площину α ? Відповідь обґрунтуйте.

Практичні завдання для самостійного розв'язання до розділу I

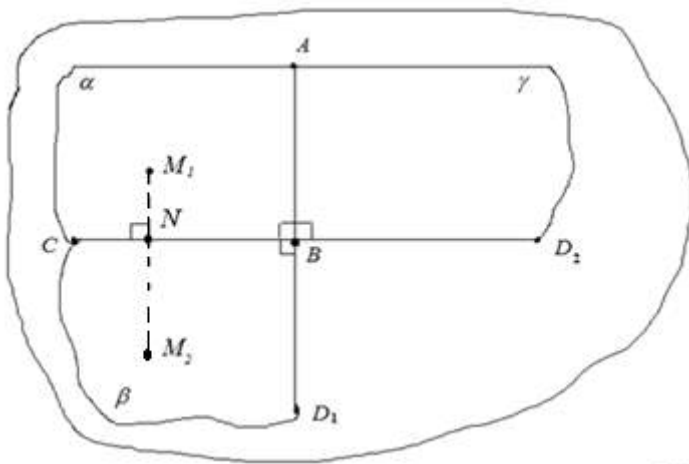


Рис. 68

кальну площину α і на горизонтальну площину β (рис. 68). Спираючись на рис. 69, 1) доведіть, що на картинній площині (рис. 68) пряма M_1M_2 є паралельною до прямої AB перетину вертикальної

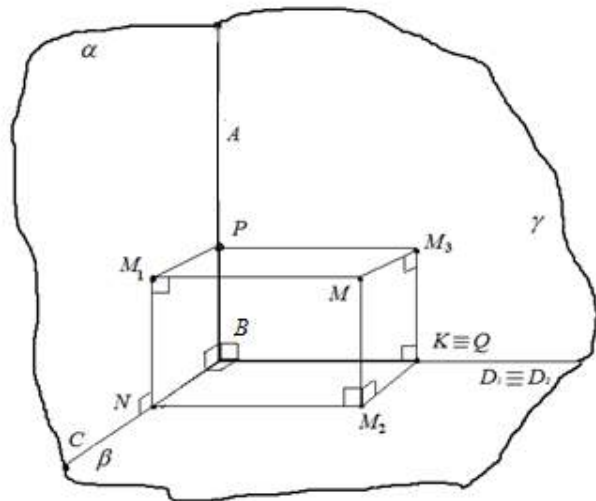


Рис. 69

площини α і профільної площини γ ; 2) обґрунтуйте правильність виконаної на рис. 70 побудови ортогональної проєкції M_3 точки M на профільну площину γ : проведено $M_1P \perp AB$, $M_2Q \perp AB$; на

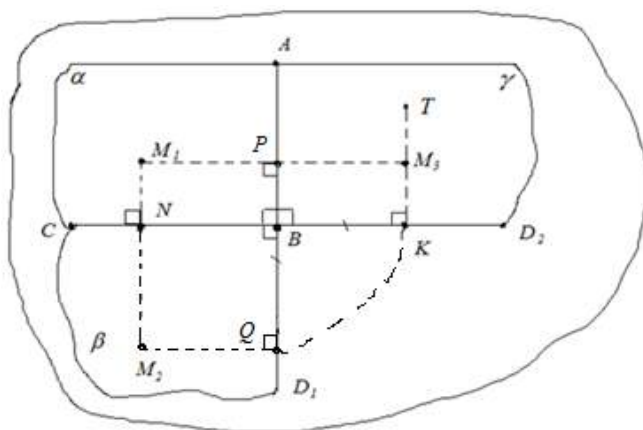
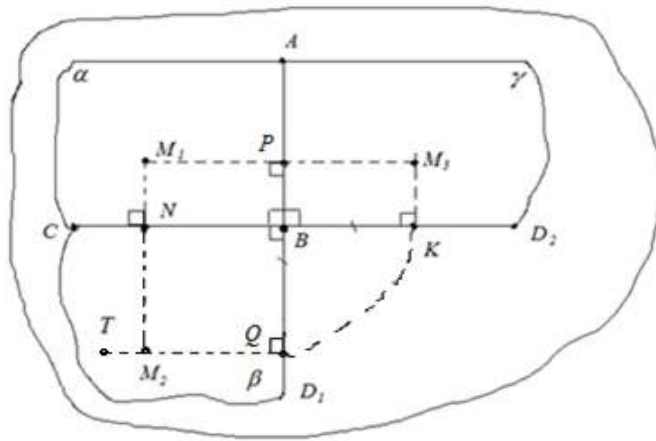


Рис. 70

2. На картинній площині, згідно методу Монжа, побудовано ортогональні проєкції M_1 і M_3 певної точки M евклідового простору, відповідно, на вертикальну площину α і на профільну площину γ (рис. 71).

площини α і горизонтальної площини β ; 2) обґрунтуйте правильність виконаної на рис. 72 побудови ортогональної проєкції M_2 точки M на горизонтальну площину β : проведено $M_1N \perp BC$, $M_3K \perp BD_2$; на промені



BD_1 відкладено відрізок BQ , $BQ=BK$, перпендикулярно до прямої BD_1 проведено пряму QT ; точку M_2 знайдено як точку перетину

прямих M_1N і QT .

3. На картинній площині, згідно методу Монжа, побудовано ортогональні проєкції M_2 і M_3 певної точки M евклідового простору,

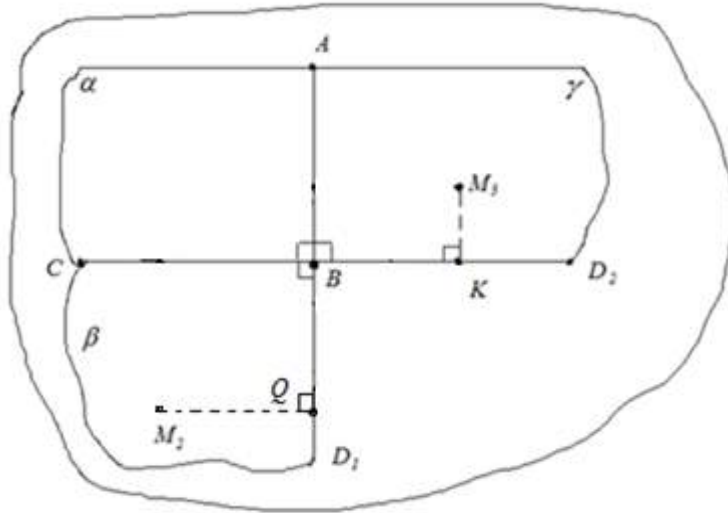


Рис. 73

і горизонтальної площини β . Проведемо $M_2Q \perp AB$, $M_3K \perp BC$.

1. Доведіть, що $BQ=BK$. 2. Обґрунтуйте правильність виконаної на

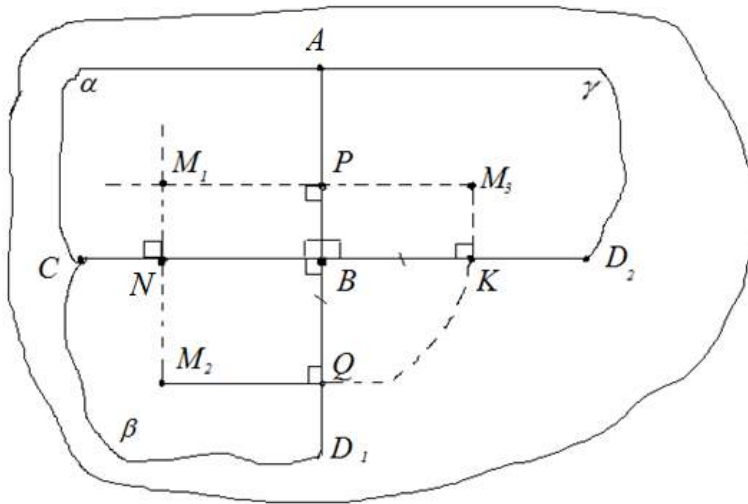


Рис. 74

відповідно, на горизонтальну площину β і на профільну площину γ (рис. 73). Позначимо через AB пряму перетину вертикальної площини α і профільної площини γ , через BC – пряму перетину вертикальної площини α

рис. 74 побудови ортогональної проєкції M_1 точки M на вертикальну площину α : проведено $M_2N \perp BC$, $M_3P \perp AB$; точку M_1 знайдено як точку перетину прямих M_2N і M_3P .

4. Обґрунтуйте, що за побудованою згідно методу Монжа проєк-

цією $\{M_1, M_2, M_3\}$ точки M евклідового простору (рис. 74) можна однозначно відновити оригінал.

5. Центральне проєктування задано за допомогою точки зору A і картинної площини α ($A \notin \alpha$). Точки M і N та точка зору A розташовані по різні сторони відносно картинної площини α , пряма MN є паралельною до площини α , точка M' є проєкцією точки M на площину α із точки A , точка N' – аналогічною проєкцією точки N

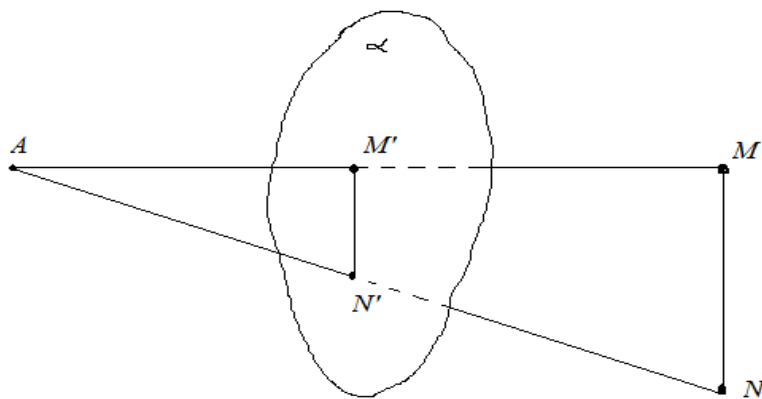


Рис. 75

(рис. 75). Доведіть, що 1) пряма $M'N'$ є паралельною до прямої MN ; 2) відрізок $M'N'$ є меншим за відрізок MN .

6. Нехай пара точок $\{M', M'_1\}$ картинної площини α утворює проєкцію певної точки M евклідового простору згідно методу лінійної перспективи. Обґрунтуйте, що пряма $M'M'_1$ є перпендикулярною до основи картини. (Зрозуміло, що картинна площина α , разом з точками M' і M'_1 , містить основу картини h , лінію горизонту h' і головну точку B' картини, $B' \notin h'$, $M'_1 \notin h'$).

7. Обґрунтуйте, що за побудованою згідно методу лінійної перспективи проєкцією $\{M', M'_1\}$ точки M евклідового простору можна відновити оригінал з точністю до симетрії відносно картинної площини α . (Зрозуміло, що картинна площина α , разом з точками, які утворюють проєкцію точки M , містить основу картини h , лінію

горизонту h' і головну точку B' картини, $B' \notin h'$, $M'_1 \notin h'$).

8. Обґрунтуйте, що за побудованою за методом Федорова проєкцією точки M можна однозначно відновити її оригінал.

9. Опишіть вид побудованих згідно методу Федорова проєкцій
1) прямої, паралельної до картинної площини; 2) прямої, яка перетинає картинну площину; 3) кола, площина якого є паралельною до картинної площини.

10. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини паралельною проєкцією довільної заданої точки M евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

11. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини проєкцією довільної заданої точки, яка не належить картинній площині, при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

12. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини зображенням довільної заданої точки евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

13. Визначте та обґрунтуйте, які геометричні фігури картинної площини і за яких обставин можуть бути паралельними проєкціями пари точок.

14. Визначте та обґрунтуйте, які геометричні фігури картинної площини і за яких обставин можуть бути паралельними проєкціями трьох різних точок, що 1) належать одній прямій; 2) не належать одній прямій.

15. Чи можна вважати довільну точку M' картинної площини паралельною проєкцією довільної заданої прямої при певному

паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

16. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини зображенням довільної заданої прямої при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

17. Апарат паралельного проєктування фіксовано. Вкажіть множину тих та тільки тих точок евклідового простору, які при даному паралельному проєктуванні проєктуються у певну точку M' картинної площини. Відповідь обґрунтуйте.

18. Картинну площину фіксовано. Напрямок паралельного проєктування є невідомим. Про які прямі евклідового простору наперед відомо, що при даному паралельному проєктуванні їх паралельні проєкції на дану площину не є виродженими? Відповідь обґрунтуйте.

19. Апарат паралельного проєктування фіксовано. Знайдіть необхідні та достатні умови того, що задана пряма a' картинної площини є паралельною проєкцією заданої прямої a евклідового простору при даному паралельному проєктуванні. Відповідь обґрунтуйте.

20. Картинну площину фіксовано. Чи можна вважати довільну задану пряму a' цієї площини зображенням довільної заданої прямої a евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

21. Пряма a' є паралельною проєкцією прямої a на площину α у напрямку прямої l . Вкажіть усі можливі апарати паралельного проєктування, при яких пряма a буде паралельною проєкцією прямої a' .

22. Задано пряму a , точку A , $A \in \alpha$, і пряму a' . Відомо, що пряма a' є зображенням прямої a при певному паралельному проєктуванні. Вкажіть можливі положення зображення A' точки A

згідно застосованого закону зображення.

23. Апарат паралельного проєктування фіксовано. Знайдіть необхідні та достатні умови того, що при даному паралельному проєктуванні заданий промінь h' картинної площини є паралельною проєкцією заданого променя h евклідового простору. Відповідь обґрунтуйте.

24. Картинну площину фіксовано. Чи можна вважати довільний заданий промінь h' цієї площини зображенням довільного заданого променя h евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

25. Картинну площину фіксовано. Чи можна вважати довільну фіксовану точку цієї площини зображенням довільного заданого променя евклідового простору при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

26. Вкажіть необхідні та достатні умови того, що при паралельному проєктуванні проєкцією двох різних променів є один промінь. Відповідь обґрунтуйте.

27. Задано пряму a , промінь h , що належить цій прямій, і пряму a' . Відомо, що пряма a' є зображенням прямої a за методом паралельного проєктування. Вкажіть можливі згідно застосованого закону зображення варіанти зображення променя h .

28. Обрано довільні відрізки AB і $A'B'$. Чи можна стверджувати, що відрізок $A'B'$ є проєкцією відрізка AB при певному паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

29. Картинну площину фіксовано. Чи є справедливим твердження про те, що будь-який відрізок $A'B'$ цієї площини може бути зображенням будь-якого відрізка AB евклідового простору при певному паралельному проєктуванні на дану площину? Відповідь обґрунтуйте.

30. Задано пряму a , точки $A, B, A \in a, B \in a$, точка A не співпадає з точкою B , пряму a' і точку $A', A' \in a'$. Відомо, що пряма a' і точка A' є зображеннями при певному паралельному проєктуванні, відповідно, прямої a і точки A . Вкажіть можливі згідно застосованого закону зображення варіанти зображення B' точки B .

31. Апарат паралельного проєктування фіксовано. Відомо, що відрізок $A'B'$ картинної площини є проєкцією відрізка AB евклідового простору при даному паралельному проєктуванні. Що можна стверджувати про співвідношення між довжинами відрізків AB і $A'B'$? Відповідь обґрунтуйте.

32. Картинну площину α і відрізок $A'B'$ на ній фіксовано. Відомо, що оригіналом для відрізка $A'B'$ при паралельному проєктуванні на площину α є певний відрізок AB . Що можна стверджувати про можливу довжину відрізка AB і його розташування у евклідовому просторі? Відповідь обґрунтуйте.

33. Відомо, що при певному паралельному проєктуванні паралельні прямі a і b проєктуються, відповідно, у паралельні прямі a' і b' картинної площини. Як при такому проєктуванні може змінитися відстань між прямими a і b ? Відповідь обґрунтуйте.

34. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проєкціями на картинну площину двох прямих, що перетинаються? У кожному з можливих випадків вкажіть відповідні особливості розташування даних прямих відносно апарату проєктування. Відповідь обґрунтуйте.

35. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проєкціями на картинну площину двох мимобіжних прямих? У кожному з можливих випадків вкажіть відповідні особливості розташування даних прямих відносно апарату проєктування. Відповідь обґрунтуйте.

36. Прямі a і b є мимобіжними. Чи можна обрати картинну площину α так, щоб при будь-якому виборі прямої, що задає напрямок проєктування, проєкції a' і b' цих прямих перетиналися би у одній точці? Відповідь обґрунтуйте.

37. Обґрунтуйте, що при зображенні за методом паралельного проєктування прямої у вигляді прямої відповідний закон зображення для прямої-оригіналу є відображенням подібності.

38. Обґрунтуйте, що зображення за методом паралельного проєктування прямої у вигляді прямої у загальному випадку не є метрично повним.

39. Відомо, що задана пряма a' картинної площини є зображенням заданої прямої a за методом паралельного проєктування. Задані точки A , B , M є точками прямої a , точка M лежить між точками A і B . Задані точки A' і B' прямої a' згідно застосованого закону зображення є зображеннями, відповідно, точок A і B . Вкажіть, як, за допомогою циркуля і лінійки, можна побудувати точку M' , яка, згідно даного закону зображення, є зображенням точки M . Відповідь обґрунтуйте.

40. Відомо, що задана пряма a' картинної площини є зображенням заданої прямої a за методом паралельного проєктування. Точки A , B , M є заданими точками прямої a , точка B лежить між точками A і M . Задані точки A' і B' прямої a' згідно застосованого закону зображення є зображеннями, відповідно, точок A і B . Вкажіть, як, за допомогою циркуля і лінійки, можна побудувати точку M' , яка, згідно даного закону зображення, є зображенням точки M . Відповідь обґрунтуйте.

Тестові завдання для самоконтролю до розділу I

1. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, **усі** твердження якої є **правильними**.

I. Вчені не є одностайними у тому, який зміст носили зображення одних предметів оточуючого середовища на інших предметах цього середовища на початку існування людства.

II. Усі вчені вважають, що на початку існування людства зображення предметів оточуючого середовища на інших предметах цього середовища носили суто релігійний характер.

III. Бажаність використання зображень у навчально-виховному процесі була усвідомлена людством ще у далекій давнині.

IV. Використання зображень у навчально-виховному процесі є одним із освітніх трендів XXI століття.

A	B	B	Г
I і IV	II і IV	I і III	III і IV

2. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, **усі** твердження якої **не є правильними**.

I. Евклідова геометрія – це аксіоматична теорія, автором першого відомого варіанту розробки якої є давньогрецький вчений Евклід.

II. Евклідову геометрію, як аксіоматичну теорію, у повному обсязі розробив давньогрецький вчений Евклід.

III. До недавнього часу в закладах середньої освіти України найбільш поширеною була аксіоматика О. В. Погорєлова евклідової геометрії.

IV. До недавнього часу в закладах середньої освіти України найбільш поширеною була аксіоматика Г. П. Бевза евклідової геометрії.

А	Б	В	Г
I і III	II і IV	I і IV	II і III

3. Геометричну фігуру у евклідовій геометрії, зазвичай, означають, як...

А	Б	В	Г
довільну підмножину точок евклідового простору.	довільну замкнену підмножину точок евклідового простору.	довільну обмежену підмножину точок евклідового простору.	довільний многокутник.

4. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, **усі** твердження якої є **правильними**.

I. У шкільному курсі геометрії знайомляться виключно з певними, «геометричними», властивостями оточуючого людину середовища.

II. Шкільний курс геометрії носить двоїстий характер.

III. Шкільний курс геометрії представляє собою досконалу аксіоматичну теорію.

IV. У межах шкільного курсу геометрії у учнів формують уявлення про аксіоматичну теорію.

А	Б	В	Г
II і IV	I і IV	III і IV	I і II

5. Укажіть, яке з наведених тверджень **не є правильним**.

I. Процес побудови зображення геометричної фігури – це процес побудови зображень усіх її точок.

II. Геометричну фігуру F для її зображення F' називають оригіналом.

III. Кожний метод зображення геометричних фігур характеризується своїми апаратом і законом відображення.

IV. За будь-якого методу зображень зображенням точки є точка.

А	Б	В	Г
IV	II	I	III

6. Для кожного початку речення доберіть **правильне** закінчення.

I. Використання того чи іншого методу зображень...

А. ... не обумовлено нічим

II. Слова «зображення фігури» і «проекція фігури»...

Б. ... залежить від мети зображення.

III. Зображення фігури...

В. ... мають різний зміст.

IV. Проекція фігури...

Г. ...мають однаковий зміст.

Д. ... ніколи не співпадає з її проекцією

Е. ... є подібним до її проекції.

Ж. ... завжди є і її зображенням.

З.... не може бути її зображенням.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
I								
II								
III								
IV								

7. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, **усі** твердження якої є **правильними**.

I. За кожним евклідово повним зображенням можна однозначно визначити відстань між будь-якими двома точками зображеної фігури.

II. За кожним метрично повним зображенням можна однозначно визначити відстань між будь-якими двома точками зображеної фігури.

III. За кожним евклідово повним зображенням можна однозначно визначити величину будь-якого зображеного кута.

IV. За кожним позиційно повним зображенням можна однозначно визначити відношення довжин довільних зображених відрізків.

А	Б	В	Г
I і III	I і IV	II і IV	II і III

8. Укажіть, яке з наведених тверджень **не є правильним**

I. За афінно повним зображенням можна однозначно визначити характер взаємного розташування двох прямих, для кожної з яких зображено по дві різні точки.

II. За позиційно повним зображенням можна однозначно визначити характер взаємного розташування прямої і площини у випадку, коли на прямій зображено дві різні точки, а на площині – три точки, що не належать одній прямій.

III. Метрично повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до його руху як твердого тіла у просторі.

IV. Існують метрично повні зображення, які не є афінно повними.

А	Б	В	Г
I	IV	III	II

9. Установіть відповідність між апаратом проєктування і відповідним методом проєктування.

I. Площина і точка, що не належить цій площині

А. Метод Монжа.

II. Площина і пряма, що не належить цій площині і не є паралельною до неї.

Б. Паралельне проєктування.

III. Пара перпендикулярних площин і точка, що не належить жодній з них.

В. Метод Федорова.

IV. Три попарно перпендикулярні площини

Г. Метод лінійної перспективи.

Д. Центральне проєктування

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

10. Установіть відповідність між зображенням на картинній площині точки, що не належить цій площині, і використаним при цьому методом побудови зображення.

I. Точка

А. Метод Федорова.

II. Пара точок

Б. Паралельне проєктування.

III. Орієнтоване коло

В. Метод Монжа

IV. Три точки

Г. Метод лінійної перспективи.

	А	Б	В	Г
I				
II				
III				
IV				

11. Серед вказаних трійок наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої є **правильними**.

I. При побудові зображень за методом Монжа використовують ортогональне проєктування.

II. При застосуванні центрального проєктування для певних точок евклідового простору будують ортогональні проєкції.

III. При побудові зображень за методом лінійної перспективи не використовують ортогональне проєктування.

IV. При побудові зображень за методом Федорова використовують ортогональне проєктування.

А	Б	В	Г
I, II і IV	II, III, IV	I, III, IV	I, II і III

12. Укажіть, яке з наведених тверджень не є правильним.

I. Зображення, отримані за методом Монжа, є подібно повними.

II. Зображення, отримані за методом центрального проєктування, є подібно повними.

III. Зображення, отримані за методом лінійної перспективи, є подібно повними.

IV. Зображення, отримані за методом Федорова, є подібно повними.

A	Б	В	Г
I	II	III	IV

13. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої є правильними.

I. При фіксованому апараті проєктування згідно методу Монжа за цим методом можна побудувати проєкцію довільної точки простору.

II. При фіксованому апараті центрального проєктування за цим методом можна побудувати проєкцію довільної точки простору.

III. При фіксованому апараті лінійної перспективи за цим методом можна побудувати проєкцію довільної точки простору.

IV. При фіксованому апараті проєктування згідно методу Федорова за цим методом можна побудувати проєкцію довільної точки простору.

A	Б	В	Г
III і IV	II і III	I і II	I і IV

14. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої **не є правильними**.

I. У апараті методу лінійної перспективи основа картини – це пряма перетину картинної площини і площини другорядних проєкцій.

II. У апараті методу лінійної перспективи лінія горизонту – це пряма перетину картинної площини і площини другорядних проєкцій.

III. У апараті методу лінійної перспективи лінія горизонту є паралельною до основи картини.

IV. У апараті методу лінійної перспективи головна точка картини належить лінії горизонту.

А	Б	В	Г
I і II	III і IV	II і IV	I і III

15. Серед вказаних трійок наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої **є правильними**.

I. Більшість методів побудови зображень просторових фігур на площині у евклідовій геометрії сформувалося як математичні абстракції відповідних практичних дій людей по зображенню на плоских поверхнях об'єктів оточуючого середовища.

II. Метод Федорова зображень просторових фігур на площині сформувався у зв'язку з потребами кристалографії.

III. Метод Федорова у своїй практичній діяльності використовують лікарі-рентгенологи.

IV. Метод центрального проєктування часто використовують художники-натуралісти.

А	Б	В	Г
I, II, IV	II, III, IV	I, III, IV	I, II, III

16. Для кожного початку речення доберіть **правильне** закінчення.

- I. Зображення просторової фігури евклідової геометрії називають правильним, якщо...
А. ... у евклідовій геометрії для цього зображення існує оригінал.
- II. Напрям живопису, присвячений зображенню «неможливих» фігур, має назву...
Б. ... імпресіонізм.
- III. Зображення просторової фігури називається наочним, якщо ...
В. ... імпресіонізм.
- IV. Зображення просторової фігури вважається тим більш простим, чим...
Г. ... швидше можна побудувати це зображення і обґрунтувати його правильність.
- V. Зображення просторової фігури вважається тим більш інформативним, чим...
Д. ... більше властивостей зображеної фігури можна за цим зображенням встановити.
Е. ... воно справляє на глядача те ж саме враження, що і оригінал.

	А	Б	В	Г	Д	Е
I						
II						
III						
IV						
V						

17. У сукупності, вимоги правильності, простоти, наочності і інформативності зображення найкращим чином задовольняє метод ...

А	Б	В	Г
центрального проєктування	паралельного проєктування	лінійної перспективи	Монжа

18. Апарат методу паралельного проєктування утворюють ...

А	Б	В	Г
певна площина і пряма, що не є паралельною до цієї площини	довільна площина і довільна пряма	певна площина і пряма, що не належить цій площині	певна площина і пряма, що не належить цій площині і не є паралельною до неї.

19. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої є **правильними**.

I. Проекцією прямої при паралельному проєктуванні може бути не лише пряма.

II. Проекцією прямої при паралельному проєктуванні завжди є пряма.

III. Проекцією прямої при паралельному проєктуванні завжди є точка.

IV. Проекцією прямої при паралельному проєктуванні може бути точка.

А	Б	В	Г
I і IV	I і II	III і IV	I і III

20. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої **не є правильними**.

I. Паралельне проєктування, при якому проєкцією прямої є точка, для даної прямої вважається виродженням.

II. Паралельне проєктування, при якому проєкцією прямої є пряма, для даної прямої вважається невиродженням.

III. При кожному паралельному проєктуванні прямої зберігається порядок точок, що їй належать.

IV. При невиродженому для даної прямої паралельному проєктуванні може змінюватися порядок точок, що належать цій прямій.

А	Б	В	Г
I і III	I і II	III і IV	II і IV

21. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої **є правильними**.

I. Паралельною проєкцією відрізка може бути точка.

II. При невиродженому для даного відрізка паралельному проєктуванні встановлюється взаємно однозначна відповідність між відрізком-проєкцією і відрізком-оригіналом.

III. Паралельною проєкцією відрізка може бути пряма.

IV. Паралельною проєкцією відрізка може бути промінь.

А	Б	В	Г
I і III	I і II	II і IV	III і IV

22. Яка з наступних геометричних фігур **може бути** паралельною проєкцією променя при паралельному проєктуванні?

А	Б	В	Г
Точка	Відрізок	Пряма	Пара точок

23. Серед вказаних трійок наведених тверджень укажіть ту, **усі** твердження якої **не є правильними**.

I. Будь-яка пряма картинної площини може бути проєкцією будь-якої прямої евклідового простору при певному паралельному проєктуванні.

II. Будь-яка пряма картинної площини може бути зображенням будь-якої прямої евклідового простору при певному паралельному проєктуванні.

III. Будь-яка точка картинної площини може бути зображенням будь-якої прямої евклідового простору при певному паралельному проєктуванні.

IV. Будь-яка точка картинної площини може бути проєкцією будь-якої прямої евклідового простору при певному паралельному проєктуванні.

А	Б	В	Г
I, II, III	II, III, IV	I, III, IV	I, II, IV

24. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, **усі** твердження якої є **правильними**?

I. Проекцією площини при паралельному проєктуванні може бути лише площина.

II. Проекцією площини при паралельному проєктуванні може бути пряма.

III. Проекцією площини при паралельному проєктуванні може бути площина.

IV. Проекцією площини при паралельному проєктуванні може бути промінь.

А	Б	В	Г
II і IV	II і III	I і II	III і IV

25. При невиродженому для даної півплощини паралельному проєктуванні її проєкцією є ...

А	Б	В	Г
промінь	відрізок	пряма	півплощина

26. Проекцією пари паралельних прямих при паралельному проєктуванні **не може бути** ...

А	Б	В	Г
пара точок	одна точка	одна пряма	пара прямих

27. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої **не є правильними**.

I. Паралельною проєкцією пари прямих може бути лише пара прямих.

II. Паралельною проєкцією пари прямих не може бути пряма і точка, що цій прямій не належить.

III. Паралельною проєкцією пари прямих може бути пряма і точка, що цій прямій належить.

IV. Паралельною проєкцією пари прямих, що не є паралельними, може бути одна пряма.

А	Б	В	Г
I і II	I і III	II і IV	III і IV

28. Установіть відповідність між геометричними фігурами і їх проєкціями при невиродженому для вказаних фігур паралельному проєктуванні.

I. Пряма

А. Відрізок

II. Відрізок

Б. Точка

III. Промінь

В. Пряма

IV. Площина

Г. Площина

Д. Промінь

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

29. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої є **правильними**.

I. При паралельному проєктуванні відрізків завжди зберігається відношення їх довжин.

II. При паралельному проєктуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків, які належать одній прямій.

III. При невиродженому для прямої паралельному проєктуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків, які цій прямій належать.

IV. При паралельному проєктуванні відрізків, які належать одній прямій, можуть зберігатися їх довжини.

А	Б	В	Г
I і III	II і IV	III і IV	I і IV

30. Серед вказаних пар наведених тверджень укажіть ту, усі твердження якої **не є правильними**.

I. При паралельному проєктуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків, які належать мимобіжним прямим.

II. При паралельному проєктуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків, які належать паралельним прямим.

III. При паралельному проєктуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать паралельним прямим, у випадку, коли проєкцією цих прямих є одна пряма.

IV. При паралельному проєктуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать паралельним прямим, у випадку, коли проєкцією цих прямих є паралельні прямі.

А	Б	В	Г
I і III	II і IV	I і IV	I і II

РОЗДІЛ II

ЗОБРАЖЕННЯ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ЗА МЕТОДОМ ПАРАЛЕЛЬНОГО ПРОЄКТУВАННЯ

§4. Лінійні та плоскі геометричні фігури.

Трикутник як найпростіша нелінійна плоска геометрична фігура

4.1. Зображення лінійних геометричних фігур за методом паралельного проєктування

Фігуру F евклідової геометрії називають **лінійною**, якщо існує пряма, якій належать усі точки даної фігури. Для відмінної від точки **лінійної геометричної фігури F** паралельне проєктування вважають **виродженим** у випадку, коли воно є виродженим для прямої, що цю фігуру містить. Цей факт, як відомо, має місце тоді та тільки тоді, коли пряма, якій належить відмінна від точки лінійна фігура F , є паралельною до прямої, що задає напрямок паралельного проєктування або з цією прямою співпадає, і, в силу цього, проєктується у точку. Проекцією лінійної фігури F у даному випадку, зрозуміло, є ця точка, отримане зображення не є позиційно повним. Тоді ж, коли пряма, що містить лінійну фігуру F , проєктується у пряму, проєктування для фігури F вважають **невиродженим**.

Найпростішою, відмінною від точки, лінійною геометричною фігурою є фігура, що складається з двох різних точок. Така фігура однозначно визначає відрізок з кінцями у даних точках, і навпаки. Саме відрізок традиційно вважають найпростішою, відмінною від точки, лінійною геометричною фігурою евклідової геометрії. Згідно

теореми 3.5, при невиродженому для відрізка паралельному проєктуванні його проєкцією є відрізок, кінці відрізка-проєкції є проєкціями кінців відрізка-оригінала. Оскільки будь-які два відрізка є подібними між собою, довільний відрізок $A'B'$ картинної площини можна вважати зображенням довільного відрізка AB евклідового простору так, що точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , при довільному, невиродженому для відрізка AB , паралельному проєктуванні.

Має місце наступна.

Теорема 4.1. *Якщо відомо, що при певному паралельному проєктуванні заданий відрізок $A'B'$ картинної площини є зображенням заданого відрізка AB евклідового простору так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , то для кожної точки M прямої AB точка M' , яка згідно даного закону зображення є зображенням точки M , на прямій $A'B'$ є визначеною однозначно, цю точку можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. $\square$ Той факт, що зображення M' кожної точки M прямої AB належить прямій $A'B'$ і є визначеним однозначно, випливає з теореми 3.3. Спосіб побудови точки M' на прямій $A'B'$ за допомогою циркуля і лінійки обґрунтовано при розв'язанні задач 39, 40 розділа I. $\blacksquare$

Наслідок 1. *Якщо відомо, що при певному паралельному проєктуванні заданий відрізок $A'B'$ картинної площини є зображенням заданого відрізка AB евклідового простору так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , то для кожної точки M' прямої $A'B'$ на прямій AB оригінал цієї точки згідно даного закону зображення є визначеним однозначно, його можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення проводиться безпосередньо за аналогією до доведення теореми 4.1.

Наслідок 2. *Лінійна геометрична фігура F' картинної площини може бути зображенням відмінної від точки лінійної геометричної фігури F евклідового простору при певному, не виродженому для фігури F , паралельному проєктуванні тоді та тільки тоді, коли фігура F' є подібною до фігури F . Відповідний закон зображення прямої, що містить фігуру F , є відображенням подібності цієї прямої на пряму картинної площини, що містить фігуру F' .*

Доведення. $\square$ Нехай відмінна від точки лінійна геометрична фігура F є підмножиною прямої m . Нехай паралельне проєктування h для фігури F є не виродженим (пряма m не є паралельною до прямої l , що задає напрямок проєктування h , і не співпадає з прямою l), як результат відповідного закону зображення f , зображенням фігури F є певна фігура F' , $F' = f(F)$, прямої m – певна пряма m' , $m' = f(m)$, картинної площини α , $F' \subset m'$. У відповідності до наслідка з теореми 3.4, відображення $f : m \rightarrow m'$, як композиція двох відображень подібності, є відображенням подібності, фігура F' є подібною до фігури F .

Нехай, навпаки, відомо, що відмінна від точки лінійна геометрична фігура F є подібною до геометричної фігури F' : існує таке відображення подібності f евклідового простору, що $F' = f(F)$. Якщо точки A і B належать фігурі F і є різними, то фігура F є підмножиною прямої AB . Нехай $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. Зрозуміло, що точка A' не співпадає з точкою B' . Точки A' і B' належать фігурі F' , отже, лінійна фігура F' є підмножиною прямої $A'B'$. Згідно задачі 20 розділа I, існує паралельне проєктування h на довільну площину α , що містить пряму $A'B'$, при якому зображенням прямої AB , як

результат відповідного закону зображення f_1 , є пряма $A'B'$:
 $f_1(AB) = A'B'$. Нехай $f_1(F) = F_1$, $F_1 \subset A'B'$, фігура F_1 є зображенням фігури F при паралельному проєктуванні h , вона є подібною до проєкції Φ фігури F при проєктуванні h . Згідно висновка першої частини даної теореми, фігура F_1 є подібною до фігури F . Фігура F є подібною до фігури F' . Отже, і фігура F_1 є подібною до фігури F' : існує таке відображення подібності φ евклідового простора, що $\varphi(F_1) = F'$. Але тоді фігура F' є подібною до фігури Φ . Згідно загального означення зображення фігури, фігура F' є зображенням фігури F при паралельному проєктуванні h .

Наслідок 2 доведено. ■

Наслідок 3. *Якщо лінійна геометрична фігура F' є зображенням відмінної від точки лінійної геометричної фігури F при певному, не виродженому для фігури F , паралельному проєктуванні, то фігуру F' можна вважати зображенням фігури F при довільному, не виродженому для фігури F , паралельному проєктуванні.*

Справедливість даного наслідка безпосередньо випливає із справедливості наслідка 2.

Наслідок 4. *Якщо фігура F' , що є підмножиною прямої m' , є зображенням фігури F , що є підмножиною прямої m , при певному, не виродженому для прямої m , паралельному проєктуванні на площину, що містить пряму m' , то існує не вироджене для прямої m' паралельне проєктування на довільну площину, що містить пряму m , при якому зображенням фігури F' є фігура F .*

Справедливість наслідка 4 випливає із справедливості наслідка 2 з теореми 4.1 і того факту, що, якщо фігура F' є подібною до фігури F , то фігура F є подібною до фігури F' ([28], наприклад).

Наслідок 5. *Будь-яке зображення лінійної геометричної фігури при невиродженому для даної фігури паралельному проєктуванні є евклідово повним.*

Доведення. $\square$ Як відомо, зображення F' геометричної фігури F називається евклідово повним, якщо за цим зображенням можна однозначно визначити усі властивості подібності даної фігури. Властивостями подібності фігури F називаються ті її властивості, які зберігаються при усіх перетвореннях подібності евклідового простору, у якому розташовано фігуру F . Такі перетворення індукують відображення подібності прямої, що містить лінійну фігуру F , і самої фігури F . Усі подібні між собою фігури мають однакові властивості подібності.

Наслідок 2 з теореми 4.1 стверджує, що при невиродженому для лінійної геометричної фігури F паралельному проєктуванні зображення є подібним до оригінала. (У наслідку 2 з теореми 4.1 справедливність сформульованого твердження доведено для довільної, відмінної від точки, лінійної фігури F . Але зрозуміло, що для точки кожне паралельне проєктування є сенс вважати невиродженим, зображенням точки при паралельному проєктуванні завжди є точка, будь-які дві точки є подібними між собою). Отже, оригінал F і його зображення F' мають однакові властивості подібності, усі властивості подібності оригінала F можна однозначно встановити за властивостями подібності його зображення F' , зображення F' є евклідово повним. $\blacksquare$

Пряма є лінійною геометричною фігурою. Отже, будь-яке невироджене зображення прямої при паралельному проєктуванні є евклідово повним.

За евклідово повним зображенням оригінал можна відновити з точністю до перетворення подібності. Отже, евклідово повне зображення стає метрично повним, якщо відомим є відповідний коефі-

цієнт подібності. Звідси випливає, що справедливими є

Наслідок 6. *Якщо відомо, що заданий відрізок $A'B'$ картинної площини є зображенням заданого відрізка AB за допомогою певного паралельного проєктування, то, згідно даного закону зображення, зображення прямої AB у вигляді прямої $A'B'$ є метрично повним.*

Наслідок 7. *Якщо відомо, що пряма m' картинної площини є зображенням прямої m за допомогою певного паралельного проєктування, а відображення подібності прямої m на пряму m' , яке при цьому виникає, має коефіцієнт подібності k , то зображення m' прямої m при даному проєктуванні є метрично повним.*

Зрозуміло, що у випадку метричної повноти зображення прямої m у вигляді певної прямої картинної площини, метрично повним буде і зображення кожної геометричної фігури, яка належить прямій m .

Із наслідка 7 випливає, що для того, щоб зробити зображення за методом паралельного проєктування прямої m у вигляді прямої m' не тільки евклідово, а й метрично повним, достатньо задати одне число, яке вказує на відповідний коефіцієнт подібності. (Зрозуміло, що ця умова є і необхідною умовою метричної повноти даного зображення). Аналогічне твердження, очевидно, є справедливим і для зображення за методом паралельного проєктування будь-якої іншої, відмінної від точки, лінійної геометричної фігури. Тому вважають, що, якщо вищевказану умову не виконано, **невироджене зображення відмінної від точки лінійної геометричної фігури евклідового простору має коефіцієнт метричної неповноти, що дорівнює одиниці.**

4.2. Зображення трикутників

за методом паралельного проєктування

Геометричну фігуру F називають **плоскою**, якщо існує площина, якій належать усі точки цієї фігури. Зрозуміло, що усі лінійні геометричні фігури є плоскими, усі точки таких фігур належать безлічі

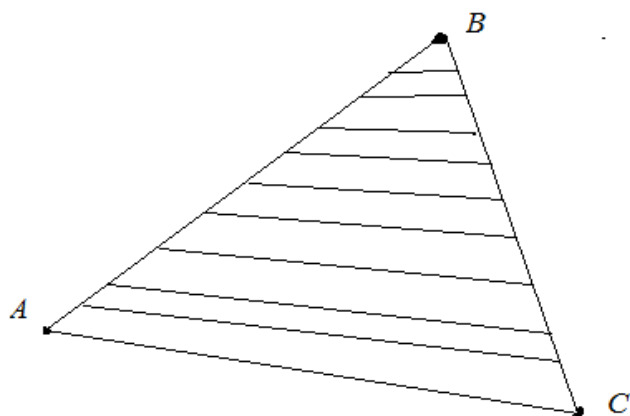


Рис. 76

площин, кожній площині жмутка площин, що проходять через відповідну пряму.

Безпосередньо цікавими представляються такі плоскі геометричні фігури, які містять принаймні три точки, що не належать одній прямій. Сукупність

точок кожної з подібних фігур міститься лише у одній площині. Будемо називати такі фігури **нелінійними плоскими**. Для **нелінійної плоскої геометричної фігури** паралельне проєктування вважають **виродженим** у випадку, коли воно є виродженим для площини, що цю фігуру містить. При виродженому паралельному проєктуванні нелінійної плоскої геометричної фігури F площина, що цю фігуру містить, проєктується у пряму, фігура F — у підмножину F' цієї прямої, тобто, у лінійну фігуру, для фігури F отримане зображення не є позиційно повним. У випадку, коли для площини, що містить нелінійну плоску фігуру F , паралельне проєктування є невиродженим, ця площина взаємно однозначно проєктується на картинну площину, проєктування для фігури F вважають **невиродженим**.

Найпростішою нелінійною плоскою геометричною фігурою є фігура, яка складається з трьох точок, що не належать одній прямій.

Така фігура однозначно визначає трикутник. Саме трикутник традиційно вважають найпростішою нелінійною плоскою фігурою евклідової геометрії. Тому, коли розглядають зображення нелінійних плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проєктування, у першу чергу розглядають можливі варіанти зображень трикутника.

При цьому треба мати на увазі, що різні аксіоматичні теорії евклідової геометрії використовують різні означення трикутника. Отже, те, що ми будемо мати на увазі, потребує уточнення.

Більшість сучасних курсів евклідової геометрії для закладів загальної середньої освіти містить два різних поняття про трикутник. Першому поняттю відповідає наступне означення. Трикутником називають геометричну фігуру, утворену трьома точками, що не належать одній прямій, і трьома відрізками з кінцями у цих точках. Точки називають вершинами трикутника, відрізки – його сторонами. Це означення так званого трикутника-каркаса. На рис. 76 трикутник-каркас ABC утворено точками A , B і C та відрізками AB , AC і BC . Трикутник-каркас однозначно визначає площину, яка його містить. Так, трикутник ABC на рис. 76 однозначно визначає площину (ABC) . Внутрішньою областю трикутника-каркаса ABC називають множину тих та тільки тих точок площини (ABC) , які, одночасно, належать 1) тій півплощині з межею AB , що містить точку C , 2) тій півплощині з межею BC , що містить точку A , 3) тій півплощині з межею AC , що містить точку B . На рис. 76 внутрішню область трикутника ABC заштриховано. Плоским трикутником називають трикутник-каркас разом з його внутрішньою областю. Це означення відповідає другому поняттю про трикутник. Зрозуміло, що трикутник-каркас ABC однозначно визначає плоский трикутник ABC і навпаки.

При побудові зображень трикутника-каркаса або плоского трикутника за методом паралельного проєктування обов'язковим

вважають побудову зображень як усіх вершин даного трикутника, так і усіх його сторін. Має місце наступна

Теорема 4.2. *Проекцією трикутника-каркаса при паралельному проєктуванні може бути 1) відрізок; 2) відрізок з виділеною точкою; 3) трикутник-каркас. Проекцією трикутника-каркаса є відрізок тоді та тільки тоді, коли проєктування для даного трикутника є виродженням, а пряма, що задає напрямок проєктування, є паралельною або містить одну із сторін даного трикутника. Проекцією трикутника-каркаса є відрізок з виділеною точкою тоді та тільки тоді, коли проєктування для даного трикутника є виродженням, але пряма, що задає напрямок проєктування, не є паралельною до жодної зі сторін даного трикутника і не містить жодну із цих сторін. Проекцією трикутника-каркаса є трикутник-каркас тоді та тільки тоді, коли проєктування для даного трикутника є невиродженням.*

Доведення. $\square$ Розглянемо довільний трикутник-каркас ABC . Нехай, для визначеності, напрямок проєктування задається прямою AB або прямою, паралельною до прямої AB . Проєктування для відрізка AB у даному випадку є виродженням, точки A і B проєктуються у певну одну точку A' . У той же час, у даному випадку для відрізків AC і BC проєктування є невиродженням (сторони трикутника не є паралельними між собою), вони проєктуються у відрізки, точніше, у один відрізок $A'C'$, якщо точка C' є проєкцію точки C . Отже, у даному випадку проекцією трикутника-каркаса ABC є відрізок $A'C'$ (рис. 77 (a)).

Нехай тепер напрямок проєктування задається прямою l , $l \parallel (ABC)$ або $l \subset (ABC)$, але пряма l не співпадає ані з прямою AB , ані з прямою AC , ані з прямою BC . Для площини (ABC) проєктування є виродженням, вона проєктується у певну пряму, точки

A , B і C проєктуються, відповідно, у точки A' , B' , C' , які належать цій прямій. Але для кожного з відрізків AB , AC і BC проєктування є не виродженим, вони проєктуються у відрізки, отже, точки A' , B' , C' є різними. Із трьох різних точок прямої одна та тільки одна лежить між двома іншими. Нехай, для визначеності, точка B' лежить між точками A' і C' . Тоді проєкцією трикутника-каркаса ABC є відрізок $A'C'$ разом з виділеною точкою B' (рис. 77 (б)).

Нехай тепер напрямок проєктування задається прямою l , яка не

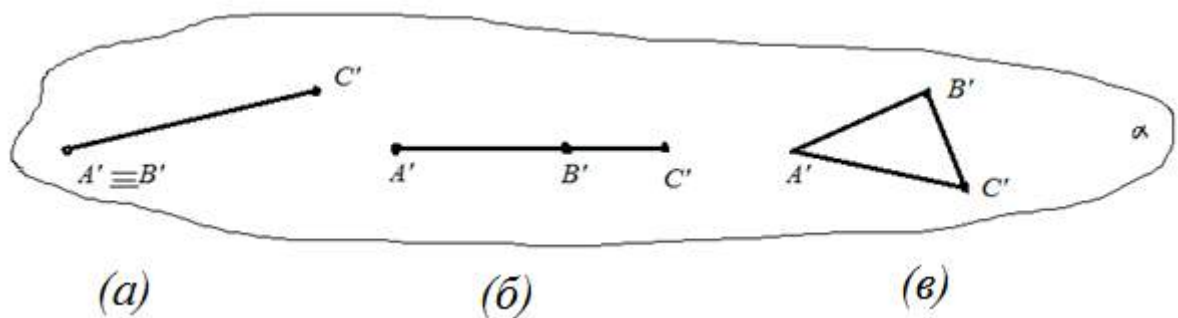


Рис. 77

належить площині (ABC) і до даної площини не є паралельною. У цьому випадку проєктування для площини (ABC) є не виродженим, проєкцією площини (ABC) є картинна площина, закон проєктування встановлює взаємно однозначну відповідність між площиною (ABC) і картинною площиною. Це означає, що точки A , B і C проєктуються, відповідно, у попарно різні точки A' , B' , C' картинної площини. Проєктування одночасно є не виродженим для кожної з прямих AB , AC і BC . Кожна з них, відповідно, проєктується у пряму $A'B'$, $A'C'$ і $B'C'$. Якщо припустити, що точки A' , B' , C' лежать на одній прямій, то ми отримали би, що при даному проєктуванні точка C' , наприклад, мала би два прообрази. Одним прообразом була би точка C , яка не лежить на прямій AB (існує трикутник ABC), інший прообраз належав би прямій AB . Це суперечило би факту наявності визначеної законом проєктування взаємно однозначної відповідності

між площиною (ABC) і картинною площиною. Отже точки A' , B' , C' не лежать на одній прямій, існує трикутник-каркас $A'B'C'$, який є проєкцією трикутника-каркаса ABC , бо відрізок $A'B'$ є проєкцією відрізка AB , відрізок $B'C'$ — проєкцією відрізка BC , відрізок $A'C'$ — проєкцією відрізка AC (рис. 77 (в)).

У підсумку, розглянуто три можливі, попарно несумісні, випадка взаємного розташування прямої l , що задає напрямок паралельного проєктування, і трикутника-каркаса ABC . Для кожного трикутника-каркаса ABC і кожної прямої l один з цих випадків має місце. Отримані висновки також є попарно несумісними. За відомою теоремою з курсу математичної логіки, тоді правильними є і твердження, обернені до обґрунтованих. Теорему 4.2 доведено. ■

Наслідок 1. *При невиродженому для трикутника-каркаса паралельному проєктуванні вершини трикутника-оригінала проєктуються у вершини трикутника-проєкції, сторони трикутника-оригінала проєктуються у відповідні сторони трикутника-проєкції.*

Доведення є очевидним.

Отже, якщо відомо, що трикутник-каркас $A'C'B'$ є проєкцією трикутника-каркаса ABC при певному паралельному проєктуванні так, що при цьому точка A' є проєкцією точки A , точка B' — проєкцією точки B , то, безумовно, точка C' є проєкцією точки C .

Наслідок 2. *Проєкцією плоского трикутника при паралельному проєктуванні може бути 1) відрізок; 2) відрізок з виділеною точкою; 3) плоский трикутник. Проєкцією плоского трикутника є відрізок тоді та тільки тоді, коли пряма, що задає напрямок проєктування, є паралельною, або містить одну із сторін даного трикутника. Проєкцією плоского трикутника є відрізок з виділеною точкою тоді та тільки тоді, коли проєктування для даного трикутника є виродженням, але пряма, що задає напрямок проєктування, не є*

паралельною до жодної зі сторін даного трикутника і не містить жодну із цих сторін. Проекцією плоского трикутника є плоский трикутник тоді та тільки тоді, коли проєктування для даного трикутника є невиродженням.

Доведення наслідка 2 у більшості тверджень є аналогічним до доведення теореми 4.2 і спирається на той факт, що при невиродженому для півплощини паралельному проєктуванні проєкцією півплощини є півплощина.

Наслідок 3. *При невиродженому для плоского трикутника паралельному проєктуванні вершини трикутника-оригінала проєктуються у вершини трикутника-проєкції, сторони трикутника-оригінала проєктуються у відповідні сторони трикутника-проєкції.*

Доведення є очевидним.

Отже, у даному випадку також, якщо відомо, що плоский трикутник $A'B'C'$ є проєкцією плоского трикутника ABC при певному паралельному проєктуванні так, що при цьому точка A' є проєкцією точки A , точка B' — проєкцією точки B , то, безумовно, точка C' є проєкцією точки C .

Наслідок 4. *Плоский трикутник $A'B'C'$ є проєкцією плоского трикутника ABC при певному паралельному проєктуванні тоді та тільки тоді, коли при даному паралельному проєктуванні трикутник-каркас $A'B'C'$ є проєкцією трикутника-каркаса ABC .*

Доведення спирається на ті факти, що при невиродженому для відповідних геометричних фігур паралельному проєктуванні проєкцією прямої є пряма, проєкцією відрізка — відрізок, при цьому кінці відрізка проєктуються у кінці відрізка-проєкції, проєкцією півплощини є півплощина, при цьому проєкцією межі півплощини є межа півплощини-проєкції.

Точки A , B і C , які не належать одній прямій, однозначно визна-

чають також нерозгорнутий кут-каркас ABC . Кутом-каркасом ABC називають геометричну фігуру, утворену точкою B і променями BA і BC . Точку B називають вершиною даного кута, промені BA і BC — його сторонами. Градусна міра кута-каркаса може приймати значення від 0° до 180° включно. Кут-каркас називають розгорнутим, якщо промені, що його утворюють, є взаємно доповняльними. Саме градусна міра розгорнутого кута складає 180° .

Кожний нерозгорнутий кут-каркас ABC однозначно визначає площину γ , якій він належить, розділяє цю площину на дві підмножини — свою внутрішню і свою зовнішню області.

Внутрішню область нерозгорнутого кута-каркаса ABC утворюють ті точки площини γ , які одночасно знаходяться по ту сторону відносно прямої BC , що і внутрішні точки променя BA , і по ту сторону відносно прямої BA , що і внутрішні точки променя BC . Внутрішня область нерозгорнутого кута-каркаса є опуклою геометричною фігурою.

Зовнішню область кута-каркаса ABC утворюють усі точки площини γ , які не є його точками і не є точками його внутрішньої області. Зовнішня область нерозгорнутого кута-каркаса є неопуклою геометричною фігурою.

Розгорнутий кут-каркас, фактично, представляє собою пряму з виділеною точкою. Він належить безлічі площин. Кожну таку площину цей кут розділяє на дві півплощини. Внутрішню область будь-якої з таких півплощин можна вважати його внутрішньою, або його зовнішньою областю. Внутрішня область кожної півплощини, зрозуміло, є опуклою геометричною фігурою. Отже, як і внутрішня, так і зовнішня області розгорнутого кута-каркаса є опуклими геометричними фігурами.

Кут-каркас ABC , разом зі своєю внутрішньою областю, назива-

ють плоским кутом ABC , точку B називають вершиною плоского кута ABC , промені BA і BC — його сторонами. Кут-каркас ABC разом зі своєю зовнішньою областю також називають плоским кутом ABC , при цьому точку B називають вершиною такого плоского кута ABC , промені BA і BC — сторонами. Отже, кожний нерозгорнутий кут-каркас ABC визначає два плоских кута ABC , один з яких є опуклою геометричною фігурою, а інший — неопуклою. Розгорнутий кут-каркас ABC на площині, якій він належить, також визначає два плоских кута ABC , які називають розгорнутими плоскими кутами ABC . У просторі він визначає безліч розгорнутих плоских кутів ABC . Усі такі плоскі кути, зрозуміло, є опуклими геометричними фігурами. Градусна міра опуклого плоского кута ABC може приймати значення від 0° до 180° включно. Градусна міра неопуклого плоского кута ABC може приймати значення від 180° до 360° .

З теореми 4.2 очевидним чином випливає, що справедливими є й наступні наслідки.

Наслідок 5. *Проекцією нерозгорнутого кута-каркаса ABC при паралельному проєктуванні може бути 1) промінь; 2) розгорнутий кут-каркас; 3) нерозгорнутий кут-каркас. Перші два випадка мають місце тоді та тільки тоді, коли паралельне проєктування для кута-каркаса ABC є виродженням.*

Наслідок 6. *Проекцією нерозгорнутого плоского кута ABC при паралельному проєктуванні може бути 1) промінь; 2) розгорнутий кут-каркас; 3) нерозгорнутий плоский кут. Перші два випадка мають місце тоді та тільки тоді, коли паралельне проєктування для плоского кута ABC є виродженням. У випадку невиродженого для плоского кута ABC паралельного проєктування, проекцією опуклого плоского кута є опуклий плоский кут, проекцією неопуклого — неопуклий.*

Зрозуміло, що у всіх випадках, коли проєкцією кута є кут, проєкцією вершини кута-оригінала є вершина кута-проєкції, проєкцією сторони кута-оригінала є сторона кута-проєкції.

Наслідок 7. *Твердження теореми 4.2 та її наслідків залишаються справедливими, якщо у них слово «проєкція» замінити словом «зображення».*

Справедливість наслідка 7 випливає з означення поняття «зображення геометричної фігури» і властивостей перетворень подібності евклідового простора.

Принципово важливою є наступна

Теорема 4.3. *Довільний трикутник-каркас $A'B'C'$ картинної площини можна вважати зображенням за методом паралельного проєктування довільного трикутника-каркаса ABC евклідового простора так, що при цьому так, точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B .*

Доведення. $\square$ Розглянемо довільний трикутник-каркас ABC ,

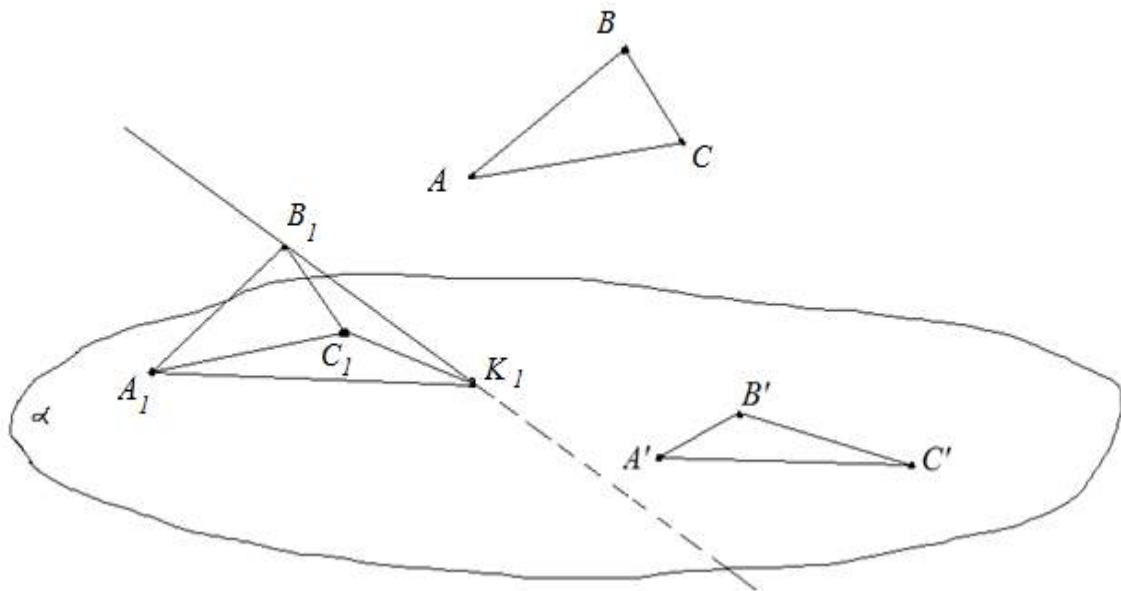


Рис. 78

картинну площину α і довільний трикутник-каркас $A'B'C'$ площини α (рис. 78). Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ дорівнює трикутнику ABC так, що $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, точки A_1 і C_1 належать площині

α , $B_1 \notin \alpha$. (Таких трикутників $A_1B_1C_1$ у евклідовому просторі існує безліч.) Нехай φ – перетворення подібності площини α , за допомогою якого трикутник $A'B'C'$ відображається у трикутник $A_1K_1C_1$ так, що $\varphi(A')=A_1$, $\varphi(C')=C_1$, $\varphi(B')=K_1$. Зрозуміло, що при цьому точка $K_1 \in \alpha$, трикутник $A_1K_1C_1$ є подібним до трикутника $A'B'C'$. (Перетворення подібності φ визначається з точністю до симетрії відносно прямої A_1C_1 , існування перетворення подібності φ є очевидним фактом евклідової планіметрії). При паралельному проєктуванні на площину α у напрямку прямої B_1K_1 проєкцією трикутника-каркаса $A_1B_1C_1$ є трикутник-каркас $A_1K_1C_1$. Відповідно до наведених означень, при цьому паралельному проєктуванні трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника $A_1B_1C_1$ так, що точка A' є зображенням точки A_1 , точка B' – зображенням точки B_1 . Трикутник ABC дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$. Отже, трикутник ABC є подібним до трикутника $A_1B_1C_1$. Згідно теореми 3.1, існує апарат паралельного проєктування, відповідно до якого трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Теорему 4.3 доведено. ■

Наслідок 1. *Довільний плоский трикутник $A'B'C'$ картинної площини можна вважати зображенням за методом паралельного проєктування довільного плоского трикутника ABC евклідового простору так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B .*

Доведення даного наслідка співпадає з доведенням теореми 4.3, якщо замість трикутників-каркасів ABC і $A'B'C'$ розглядати відповідні плоскі трикутники. Справедливість даного наслідка також безпо-

середньо впливає зі справедливості теореми 4.3 і наслідка 5 з теореми 4.2.

Наслідок 2. *Довільний нерозгорнутий кут-каркас $A'B'C'$ картинної площини можна вважати зображенням за методом паралельного проєктування довільного нерозгорнутого кута-каркаса ABC евклідового простору так, що при цьому промінь $B'A'$ є зображенням променя BA .*

Доведення є очевидним. Достатньо розглянути паралельне проєктування і відповідний закон зображення, згідно якого зображенням трикутника-каркаса ABC є трикутник-каркас $A'B'C'$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B .

Наслідок 3. *Довільний опуклий нерозгорнутий плоский кут $A'B'C'$ картинної площини можна вважати зображенням за методом паралельного проєктування довільного опуклого нерозгорнутого плоского кута ABC евклідового простору так, що при цьому промінь $B'A'$ є зображенням променя BA .*

Доведення є очевидним.

Наслідок 4. *Довільний неопуклий плоский кут $A'B'C'$ картинної площини можна вважати зображенням за методом паралельного проєктування довільного неопуклого плоского кута ABC евклідового простору так, що при цьому промінь $B'A'$ є зображенням променя BA .*

Доведення є очевидним.

Питання і завдання для самоконтролю до §4

4.1. Які фігури евклідової геометрії називають лінійними?

4.2. У якому випадку для відмінної від точки лінійної геометричної фігури паралельне проєктування вважають виродженням? Який вигляд

при виродженому паралельному проєктуванні мають проєкція і зображення лінійної геометричної фігури?

4.3. У якому випадку для лінійної геометричної фігури паралельне проєктування вважають невиродженим?

4.4. Що можна стверджувати про геометричну фігуру, якщо відомо, що при певному паралельному проєктуванні її проєкцією є точка? Відповідь обґрунтуйте.

4.5. Яку геометричну фігуру традиційно вважають найпростішою, відмінною від точки, лінійною геометричною фігурою?

4.6. Відомо, що відрізок $A'B'$ є зображенням відрізка AB при певному паралельному проєктуванні. Чи є визначеним зображення прямої AB згідно даного закону зображення? Відповідь обґрунтуйте.

4.7. Сформулюйте необхідні та достатні умови того, що одна, відмінна від точки, лінійна геометрична фігура може бути зображенням за методом паралельного проєктування іншої, відмінної від точки, лінійної геометричної фігури.

4.8. Який характер повноти має зображення відмінної від точки лінійної геометричної фігури при невиродженому для даної фігури паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

4.9. Задано відрізки AB і $A'B'$. Відомо, що відрізок $A'B'$ є зображенням відрізка AB при певному паралельному проєктуванні. Згідно даного закону зображення певна задана геометрична фігура F' , яка належить прямій $A'B'$, є зображенням певної геометричної фігури F , розташованої на прямій AB . Що при даному законі зображення можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F ? Відповідь обґрунтуйте.

4.10. Скількох значень скалярних параметрів достатньо для того, щоб невироджене зображення за методом паралельного проєктування відмінної від точки лінійної геометричної фігури було метрично повним? Відповідь обґрунтуйте.

4.11. Як визначають коефіцієнт метричної неповноти для невироджених зображень за методом паралельного проєктування відмінних від точки лінійних геометричних фігур?

4.12. Які фігури евклідової геометрії називають плоскими?

4.13. Які фігури евклідової геометрії називають нелінійними плоскими?

4.14. У якому випадку для нелінійної плоскої геометричної фігури паралельне проєктування вважають виродженням?

4.15. У якому випадку для нелінійної плоскої геометричної фігури паралельне проєктування вважають невиродженням?

4.16. Що можна стверджувати про геометричну фігуру, якщо відомо, що при певному паралельному проєктуванні її проєкцією є відрізок? Відповідь обґрунтуйте.

4.17. Яку фігуру традиційно вважають найпростішою нелінійною плоскою фігурою евклідової геометрії?

4.18. Наведіть означення трикутника-каркаса.

4.19. Наведіть означення плоского трикутника.

4.20. Які плоскі геометричні фігури можуть бути проєкціями трикутника-каркаса при паралельному проєктуванні? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.21. Які плоскі геометричні фігури можуть бути проєкціями плоского трикутника при паралельному проєктуванні? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.22. Наведіть означення кута-каркаса. Які значення може приймати градусна міра кута-каркаса?

4.23. Наведіть означення внутрішньої області кута-каркаса.

4.24. Наведіть означення зовнішньої області кута-каркаса.

4.25. Наведіть означення плоского кута. Які значення може приймати градусна міра плоского кута?

4.26. Наведіть означення опуклої плоскої геометричної фігури. Які з плоских кутів є опуклими геометричними фігурами, а які — неопуклими?

4.27. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями нерозгорнутого кута-каркаса при паралельному проєктуванні? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.28. Які геометричні фігури можуть бути проєкціями нерозгорнутого плоского кута при паралельному проєктуванні? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.29. Чи є можливим при паралельному проєктуванні випадок, коли проєкцією плоского кута ABC є розгорнутий кут, а проєкції сторін кута ABC співпадають? Відповідь обґрунтуйте.

4.30. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями трикутника-каркаса згідно метода паралельного проєктування? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.31. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями плоского трикутника згідно метода паралельного проєктування? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.32. Відомо, що трикутник-каркас $A'B'C'$ є зображенням трикутника-каркаса ABC при певному паралельному проєктуванні. Що можна стверджувати про залежності між сторонами та кутами трикутників ABC і $A'B'C'$? Відповідь обґрунтуйте.

4.33. Відомо, що трикутник-каркас $A'B'C'$ є зображенням трикутника-каркаса ABC при такому паралельному проєктуванні, коли площина (ABC) є паралельною до картинної площини. Що можна стверджувати про залежності між сторонами та кутами трикутників ABC і $A'B'C'$? Відповідь обґрунтуйте.

4.34. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями згідно метода паралельного проєктування нерозгорнутого кута-каркаса? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.35. Відомо, що кут-каркас $A'B'C'$ є зображенням кута-каркаса ABC при такому паралельному проєктуванні, коли площина (ABC) є паралельною до картинної площини. Що можна стверджувати про залежність між градусними мірами кутів ABC і $A'B'C'$? Відповідь обґрунтуйте.

4.36. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями за методом паралельного проєктування опуклого нерозгорнутого плоского кута? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.37. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями згідно метода паралельного проєктування неопуклого плоского кута? За яких обставин? Відповідь обґрунтуйте.

4.38. Відомо, що плоский кут $A'B'C'$ є зображенням плоского кута ABC при такому паралельному проєктуванні, коли площина (ABC) є паралельною до картинної площини. Що можна стверджувати про залежність між градусними мірами кутів ABC і $A'B'C'$? Відповідь обґрунтуйте.

§5. Основна теорема теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування

Справедливою є наступна основна теорема теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування.

Теорема 5.1. *Якщо відомо, що при певному паралельному проєктуванні заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ площини α є зображенням заданого трикутника-каркаса ABC площини β так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , то згідно застосованого закону зображень площина α є зображенням площини β , для кожної точки M площини β її зображення M' на площині α є визначеним однозначно, його можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. $\square$ Розглянемо заданий трикутник ABC площини β і заданий трикутник $A'B'C'$ площини α . За допомогою певного паралельного проєктування h трикутник ABC зображено трикутником $A'B'C'$. Отже, це проєктування є невиродженим для площини β трикутника ABC , згідно даного закону зображення площина α трикутника $A'B'C'$ є зображенням площини β . Трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC як результат відображення f , що є

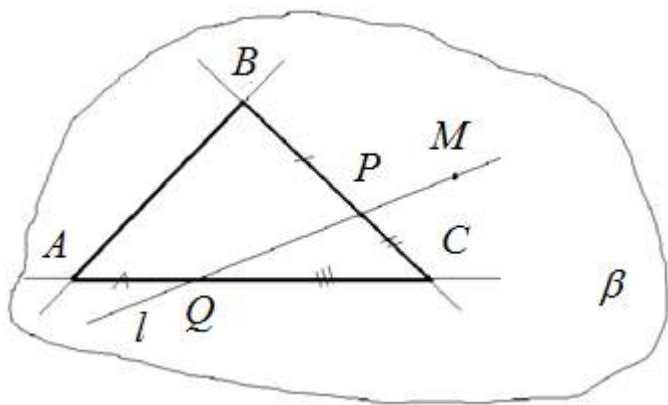


Рис. 79 (а)

композицією паралельного проєктування h і певного відображення

подібності φ , площина α є зображенням площини β при паралельному проєктуванні h як результат відображення f : $\alpha = f(\beta)$.

За наслідком 1 з теореми 4.2, при цьому зображеннями відрізків AB , AC і BC є, відповідно, відрізки $A'B'$, $A'C'$ і $B'C'$: $A'B' = f(AB)$, $A'C' = f(AC)$, $B'C' = f(BC)$. Отже, якщо точка M площини β належить будь-якій з прямих, що містять сторони трикутника ABC , згідно теореми 4.1 її зображення $M' = f(M)$ на площині α є визначеним однозначно, його можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Прямі AB , AC і BC розбивають множину точок площини β , які цим прямим не належать, на сім підмножин. Нехай точка M лежить у одній з таких підмножин.

Наприклад, дослідимо випадок, зображений на рис. 79 (а). На площині β через точку M проходить безліч прямих. Розглянемо таку пряму l із них, яка перетинає пряму BC у певній точці P , пряму AC у певній точці Q , точка P не співпа-

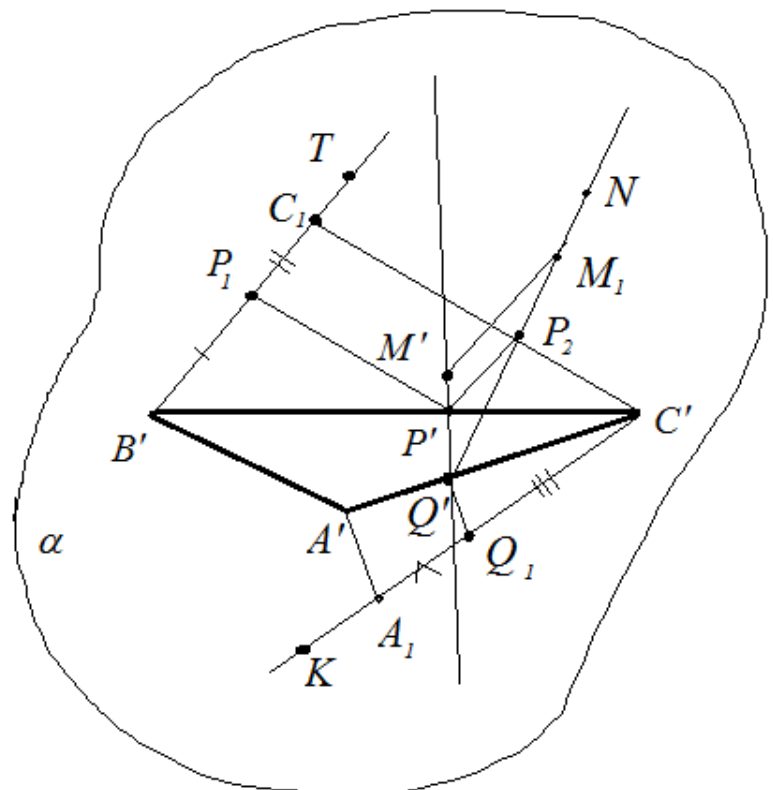


Рис. 79 (б)

дає з точкою Q (пряма l не є паралельною до прямої BC , пряма l не є паралельною до прямої AC , пряма l не співпадає з прямою MC). Точка P лежить на прямій BC . Отже, її зображення P' (як результат відображення f) належить прямій $B'C'$ і може бути побудованим на картинній площині α однозначно, за допомогою циркуля і лінійки. У випадку, зображеному на рис. 79 (а), точка P лежить між точками B і C . На площині α (рис. 79 (б)) проведемо довільний промінь $B'T$, який не належить прямій $B'C'$. Послідовно відкладемо на даному промені відрізки $B'P_1$, $B'P_1 = BP$ і P_1C_1 , $P_1C_1 = PC$. Через точку P_1 проведемо пряму, паралельну прямій C_1C' , до перетину з прямою $B'C'$ у точці P' . Згідно теореми 4.1, точка P' є зображенням точки P при паралельному проєктуванні h як результат відображення f : $P' = f(P)$. Для знаходження зображення Q' точки Q , $Q' = f(Q)$, виконаємо аналогічні побудови. На рис. 79 (а) точка Q лежить між точками A і C . Отже, на картинній площині α проведемо довільний промінь $C'K'$, який не належить прямій $A'C'$. На даному промені послідовно відкладемо відрізки $C'Q_1$, $C'Q_1 = CQ$ і Q_1A_1 , $Q_1A_1 = QA$. Через точку Q_1 проведемо пряму, паралельну прямій A_1A' , до перетину з прямою $C'A'$ у точці Q' . Згідно теореми 4.1, точка Q' є шуканим зображенням точки Q : $Q' = f(Q)$. Точки P' і Q' не співпадають, бо є внутрішніми точками різних сторін трикутника $A'B'C'$. Згідно теореми 3.3, при даному законі зображення саме пряма $P'Q'$ є зображенням прямої PQ , $P'Q' = f(PQ)$.

Точка M лежить на прямій PQ . Побудуємо на площині α довільний промінь $Q'N$, який не належить прямій $P'Q'$. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $Q'P_2$, $Q'P_2 = QP$ і P_2M_1 , $P_2M_1 = PM$.

Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну прямій P_2P' , до перетину з прямою $P'Q'$ у точці M' . Згідно даного закону зображення точка M' є зображенням точки $M : M' = f(M)$. На площині α точку M' можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

У підсумку, умовами даної теореми зображення $M' = f(M)$ кожної точки M площини β на картинній площині α є визначеним однозначно, його можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Теорему доведено. ■

Наслідок 1. *Якщо відомо, що при певному паралельному проєктуванні, заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ площини α є зображенням заданого трикутника-каркаса ABC площини β так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , то згідно застосованого закону зображень для довільної точки M' площини α її оригінал M на площині β є визначеним однозначно, його можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення можна провести безпосередньо за аналогією до доведення теореми 5.1. У той же час, висновок наслідка 1 випливає зі справедливості теореми 5.1 і наслідка 2 з теореми 4.3.

Наслідок 2. *Геометрична фігура F' картинної площини може бути зображенням плоскої геометричної фігури F за допомогою певного, невиродженому для фігури F , паралельного проєктування тоді та тільки тоді, коли фігури F і F' є афінно еквівалентними. Звуження відповідного закону зображення на площину, що містить фігуру F , є афінним відображенням цієї площини на картинну площину.*

Доведення. □ Як відомо ([1; 28], наприклад), відображення f площини β на площину α називається афінним, якщо воно є взаємно

однозначним, кожному прямій площини β відображає на певну пряму площини α і при цьому зберігає просте відношення $(M_1, M_2; M_3)$ будь-яких трьох точок даної прямої.

Остання вимога у означенні афінного відображення площини є зайвою [31]. Але відповідне доведення вважають достатньо складним. Саме тому, дану вимогу найчастіше включають до означення афінного відображення площини.

Геометрична фігура F' площини α є афінно еквівалентною до геометричної фігури F площини β , якщо існує таке афінне відображення f площини β на площину α , при якому $F' = f(F)$. Афінне відображення площини на площину є оборотним відображенням. Обернене відображення f^{-1} також є афінним. Отже, якщо фігура F' є афінно еквівалентна до фігури F , то фігура F є афінно еквівалентною до фігури F' , говорять просто про афінно еквівалентні фігури F і F' ([1; 24; 28], наприклад).

У §3 розділа I доведено, що невироджене паралельне проєктування площини β на картинну площину є взаємно однозначним відображенням площини β на цю площину, є невиродженим проєктуванням для кожної прямої площини β , взаємно однозначно відображає кожен пряму площини β на відповідну пряму картинної площини.

Як відомо ([12; 35, наприклад]), дійсне число λ називається простим відношенням $(M_1, M_2; M_3)$ трьох попарно різних точок M_1, M_2, M_3 однієї прямої, якщо $\overrightarrow{M_1 M_3} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_3 M_2}$.

Звідси випливає, що $|\overrightarrow{M_1 M_3}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{M_3 M_2}|$, $|\lambda| = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_3}|}{|\overrightarrow{M_3 M_2}|}$.

При невиродженому паралельному проєктуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать одній прямій. Звідси випливає, що зберігається і число $|\lambda|$. Знак числа λ вказує на однакову чи протилежну спрямованість променів M_1M_3 і M_3M_2 . При невиродженому для прямої паралельному проєктуванні зберігається порядок точок, що належать цій прямій. Це означає, що зберігається і знак числа λ , отже, саме число λ . У підсумку, невироджене паралельне проєктування площини на площину є афінним відображенням однієї площини на іншу.

У випадку, коли площина оригінала і площина проєкцій є паралельними або співпадають, паралельне проєктування є паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{PP'}$ площини оригінала на площину проєкцій. Тут точка P — це точка перетину прямої l , яка задає напрямок даного паралельного проєктування, з площиною β , а точка P' — точка перетину прямої l з площиною проєкцій. У випадку, коли площина оригінала і площина проєкцій не є паралельними і не співпадають, ці площини перетинаються за певною прямою a , дане проєктування має пряму a нерухомих точок, і тому є так званим перспективно-афінним відображенням однієї площини на іншу ([1; 28]).

Перетворення подібності евклідового простору, як відомо, є афінним перетворенням цього простору. Звуження афінного перетворення евклідового простору на будь-яку підмножину даного простору є афінним відображенням цієї підмножини, композиція двох афінних відображень, у разі її визначеності, є афінним відображенням.

Все це означає, що у випадку, коли фігура F' є зображенням плоскої фігури F при невиродженому для площини фігури F паралельному проєктуванні, фігури F і F' є афінно еквівалентними, відповідний закон зображення є афінним відображенням площини

фігури-оригінала на площину фігури-зображення.

Нехай плоскі фігури F і F' є афінно еквівалентними: фігура F належить площині β , фігура F' – площині α , існує таке афінне відображення f площини β на площину α , при якому $F' = f(F)$.

Припустимо, по-перше, що фігура F є лінійною, тобто кожна точка фігури F належить певній прямій m . Оберемо довільні точки A і B прямої m , які не співпадають між собою. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $A', B' \in \alpha$. Точки A' і B' не співпадають тому, що афінне відображення є відображенням взаємно однозначним. Отже, існує пряма $A'B'$. Пряма m – це пряма AB , $f(m) = A'B'$. Оскільки $F \subset AB$, $F' \subset A'B'$. У розділі I обґрунтовано, що будь-які дві точки A' і B' картинної площини можуть вважатися зображеннями будь-яких двох точок простору при певному паралельному проєктуванні. Отже, існує таке відображення f_1 , яке є композицією паралельного проєктування площини β на площину α і перетворення подібності площини α , що $f_1(A) = A'$, $f_1(B) = B'$. Відображення f_1 , за властивостями паралельного проєктування, відображає пряму AB на пряму $A'B'$, $f_1(F) \subset A'B'$. Згідно наслідка 2 з теореми 4.1, відображення f_1 , як і відображення f , є відображенням подібності, тобто, афінним відображенням прямої AB на пряму $A'B'$. У той же час $f_1(A) = f(A)$, $f_1(B) = f(B)$. Із теорії афінних відображень прямих відомо, що у такому випадку відображення f_1 і f співпадають на кожній точці прямої AB . Але $F \subset AB$. Отже, для кожної точки M фігури F правильною є рівність $f_1(M) = f(M)$. Тому, якщо $f(F) = F'$, то

$f_1(F)=F'$, фігура F' є зображенням фігури F при паралельному проєктуванні, що входить до відображення f_1 .

Нехай тепер фігура F є нелінійною плоскою. $F \subset \beta$. Розглянемо довільний трикутник-каркас ABC площини β . $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$, $A', B', C' \in \alpha$. За відомими властивостями афінних відображень, точки A', B', C' не належать одній прямій, існує трикутник-каркас $A'B'C'$. Згідно теореми 4.3, існує паралельне проєктування, при якому трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC . Це невироджене паралельне проєктування для площини β трикутника ABC . Відповідний закон зображення f_1 є композицією даного паралельного проєктування площини β на площину α і звуження на площину α певного перетворення подібності евклідового простору, $A' = f_1(A)$, $B' = f_1(B)$, $C' = f_1(C)$. Під час проведення доведень у першій частині даного наслідка було обґрунтовано, що відображення f_1 , як і відображення f , є афінним відображенням площини β на площину α . $f_1(A)=f(A)$, $f_1(B)=f(B)$, $f_1(C)=f(C)$. Із теорії афінних відображень площин відомо, що існує єдине афінне відображення площини β на площину α , яке фіксовані три точки, що не належать одній прямій, переводить у фіксовані три точки, що також не належать одній прямій. Отже, $f_1 \equiv f$, $f_1(F)=f(F)$, $f_1(F)=F'$, фігура F' є зображенням фігури F при паралельному проєктуванні, що входить до відображення f_1 . ■

Більш за це, правильним є й наступне твердження.

Наслідок 3. *Геометрична фігура F' картинної площини може бути зображенням плоскої геометричної фігури F при певному невиродженому для фігури F ортогональному проєктуванні тоді*

та тільки тоді, коли фігури F і F' є афінно еквівалентними. Зокрема, будь-який трикутник може бути зображенням будь-якого трикутника при ортогональному проєктуванні.

Доведення. $\square$ Обґрунтування справедливості першої частини сформульованого твердження є тривіальним. Ортогональне проєктування є окремим випадком паралельного проєктування. І в силу цього, безпосередньо згідно наслідка 2, якщо фігура F' є зображенням фігури F при невиродженому для фігури F ортогональному проєктуванні, то фігури F і F' є афінно еквівалентними.

Розглянемо обернене твердження. Нехай плоскі фігури F і F' є афінно еквівалентними, $F \subset \beta$, $F' \subset \alpha$. Обґрунтуємо існування такої площини γ , що ортогональна проєкція фігури F на цю площину є подібною до фігури F' .

Афінна еквівалентність фігур F і F' означає існування такого афінного відображення f площини β на площину α , що $f(F) = F'$. Розглянемо у площині α довільне коло Q' з центром у точці O' . Нехай $f^{-1}(Q') = Q$. Відображення f^{-1} є афінним відображенням площини α на площину β . Отже, геометрична фігура Q площини β є або еліпсом, або колом, окремим випадком еліпса (див. [28], наприклад).

Якщо фігура Q є колом, то афінне відображення f є відображенням подібності площини β на площину α ([28]). ($f(Q) = Q'$, при відображенні f довільні взаємно перпендикулярні радіуси OA і OB кола Q переходять у радіуси $O'A'$ і $O'B'$ спряжених, тобто, взаємно перпендикулярних, діаметрів кола Q' . Відповідними точками A, O, B і A', O', B' афінне відображення f є визначеним однозначно. Але відображення подібності площини β на площину α

також є визначеним однозначно відповідними точками A, O, B і A', O', B' і, одночасно, є афінним відображенням площини β на площину α . Саме в силу цього у даному випадку афінне відображення f є відображенням подібності). Отже, у даному випадку, фігура F є подібною до фігури F' . Звідси випливає, що, у такому випадку, у якості площини γ можна обрати саму площину β . Ортогональне проєктування h площини β на площину γ при цьому буде переводити фігуру F саму у себе: $h(F)=F$. В силу того, що фігура F' є подібною до фігури F , згідно даного ортогонального проєктування фігура F' є зображенням фігури F .

Розглянемо тепер той загальний випадок, коли фігура Q є еліпсом, головними півсями якого є відрізки OA і OB ($OA \neq OB$). Нехай, для визначеності, $OA > OB$ (рис. 80). $f(A)=A', f(B)=B', f(O)=O'$, точки A' і B' належать колу Q' , відрізки $O'A'$ і $O'B'$ є взаємно перпендикулярними радіусами кола Q' (головні півосі еліпса є радіусами, які належать його головним, тобто, спряженим і взаємно перпендикулярним, діаметрам, при афінному відображенні f такі діаметри переходять у спряжені діаметри кола Q' , які містять його радіуси $O'A'$ і $O'B'$, будь-які спряжені діаметри кола Q' є його взаємно перпендикулярними діаметрами ([28])). Позначимо через φ гострий кут прямокутного трикутника $A''B''O''$, у якого $\angle A''B''O''=90^\circ$, $O''B''=OB$, $O''A''=OA$. Розглянемо площину σ , яка перетинає площину α за прямою $O'B'$ і складає з площиною α кут φ . У площині σ розглянемо такий прямокутний трикутник $A'''B'O'$, що $\angle A''O'B'=90^\circ$, $A'''O'=\frac{B'O'}{BO} \cdot AO$. Зрозуміло, що афінне відображен-

ня f' площини β на площину σ , при якому $f'(O)=O'$, $f'(B)=B'$, $f'(A)=A'''$, є відображенням подібності площини β на площину σ , коефіцієнт k якого дорівнює $\frac{B'O'}{BO}$. При цьому відображенні образом

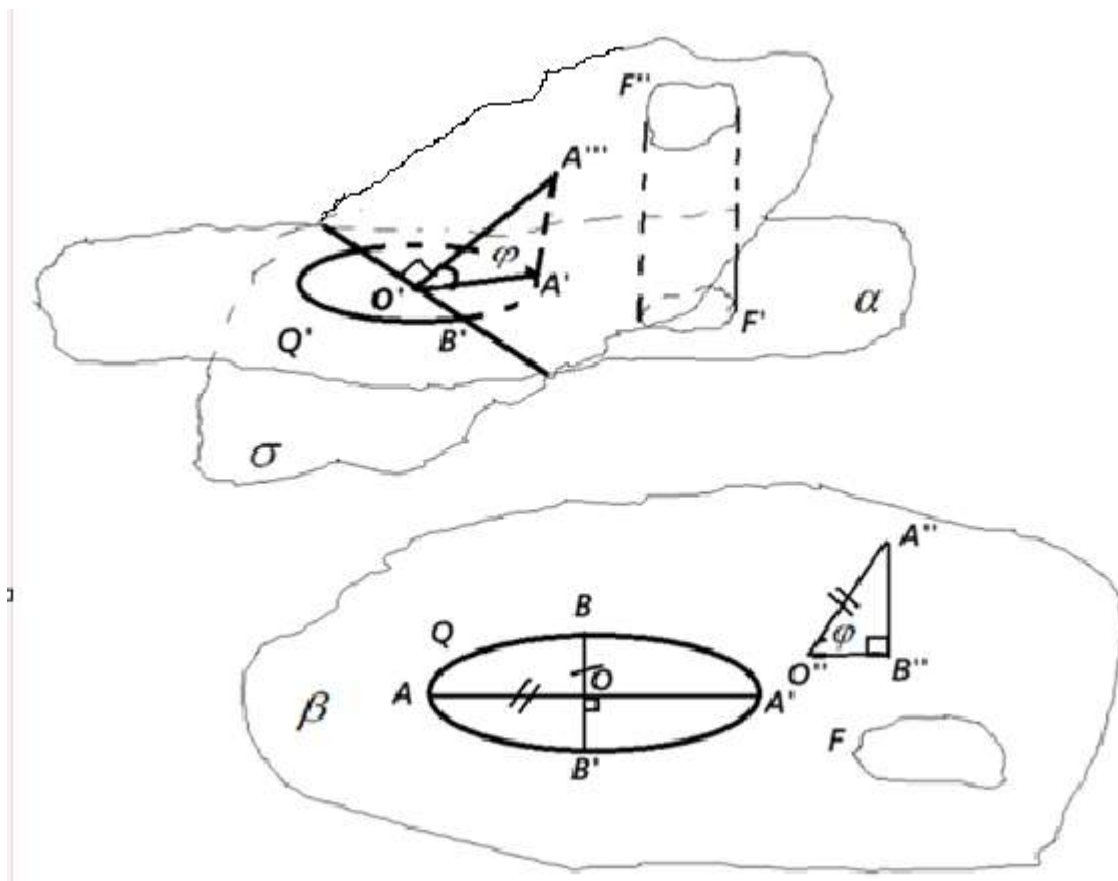


Рис 80.

еліпса Q є еліпс Q'' з головними осями $O'A'''$ і $O'B'$, еліпс Q'' є подібним до еліпса Q . Кут $A'O'A'''$ є лінійним кутом двограного кута, утвореного тією півплощиною з межею $O'B'$ площини α , що містить точку A' , і тією півплощиною з межею $O'B'$ площини σ , що містить точку A''' . Зрозуміло, що трикутник $A'''B'O'$ у площині σ можна обрати так, щоб $\angle A'O'A''' = \varphi$. При ортогональному проектуванні h площини σ на площину α точка A''' проектується у точку A' (кут φ , як кут прямокутного трикутника $A''B''O''$, є гострим). Ортогональне

проєктування h площини σ на площину α є афінним відображенням площини σ на площину α . Отже, з того, що $h(A'')=A'$, $h(O')=O'$, $h(B')=B'$, випливає, що $h(Q'')=Q'$, тобто, ортогональною проєкцією еліпса Q'' на площину α є коло Q' .

Розглянемо композицію відображень $f''=h \circ f'$. Як композиція двох афінних відображень, відображення f'' є афінним відображенням площини β на площину α . Одночасно, так само, як і для афінного відображення f , $f''(O)=O'$, $f''(B)=B'$, $f''(A)=A'$. Звідси випливає, що $f'' \equiv f$, $f''(F)=F'$. Нехай $f'(F)=F''$. Геометрична фігура F'' є подібною до фігури F . Одночасно, $h(F'')=F'$. Це означає, що геометрична фігура F' є зображенням (навіть, проєкцією) геометричної фігури F'' при ортогональному проєктуванні h . Тоді, відповідно до наслідка 2 з теореми 3.1, можна стверджувати, що існує така площина γ , унаслідок ортогонального проєктування на яку геометрична фігура F' є зображенням геометричної фігури F , що й треба було обґрунтувати. ■

Зауваження. Нехай площини α і β перетинаються за прямою a , пряма l (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині, пряма l не є паралельною до площини β і не належить цій площині) задає напрямок не виродженого паралельного проєктування h площини β на картинну площину α . Розглянемо такий трикутник ABC площини β , що $A \in a$, $C \in a$. Зрозуміло, що тоді $B \notin a$, $h(A)=A$, $h(C)=C$, $h(B)=B'$, $B' \in \alpha$, $B' \notin a$ (рис. 81). Згідно наслідка 2 з теореми 5.1 паралельне проєктування h здійснює перспективно-афінне відображення площини β на картинну площину α , яке однозначно визначається образами A , B' , C точок A , B , C .

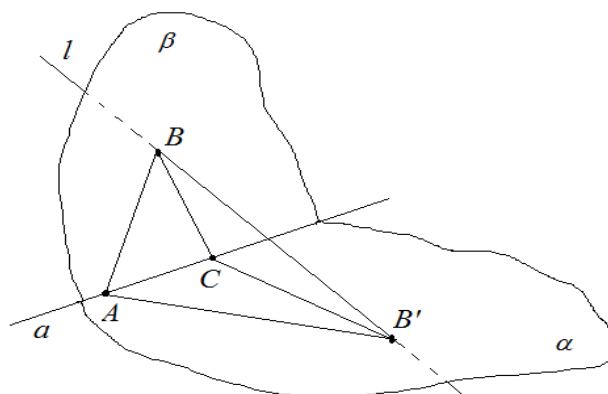


Рис. 81

У площині α розглянемо такий трикутник AB_1C , який дорівнює трикутнику ABC ($AB_1=AB$, $B_1C=BC$), що точки B_1 і B' розташовані по різні сторони відносно прямої a (рис. 82). Косий стиск f площини α до прямої a у напрямку прямої B_1B' , який переводить точку B_1 у точку B' , є афінним перетворенням спорідненості площини

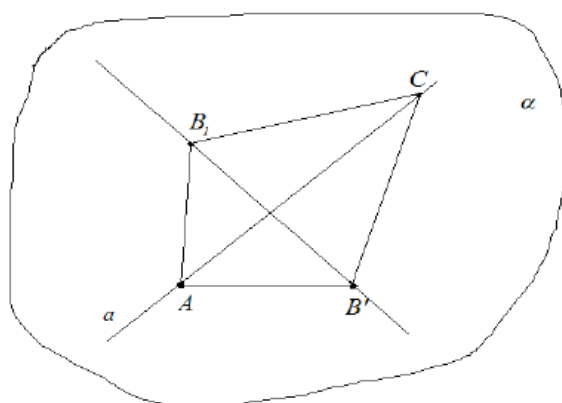


Рис. 82

α . Прямою нерухомих точок перетворення f є пряма a . $f(A)=A$, $f(B_1)=B'$, $f(C)=C$. Площина β відображається на площину α так, що трикутник ABC відображається на трикутник AB_1C за допомогою обертання g навколо прямої a , $h=f \circ g$. Це означає, що зображення точок площини β на площині α можна промодельовувати за допомогою косого стиска f . Якщо задано пряму a нерухомих точок і пару відповідних точок B_1 і B' , то, за допомогою циркуля і лінійки,

для кожної точки M площини α можна однозначно побудувати її образ $N = f(M)$ і прообраз $P = f^{-1}(M)$ див., наприклад, [1; 28]). Рух g^{-1} дозволяє відновити відповідний оригінал на площині β .

Наслідок 3. *Якщо відомо, що площини α і β є паралельними або співпадають, то фігура F' площини α може бути зображенням за допомогою паралельного проєктування на площину α фігури F площини β тоді та тільки тоді, коли фігури F і F' є подібними між собою.*

Справедливість твердження даного наслідка випливає із справедливості наслідка з теореми 3.7 і наслідка 2 з теореми 5.1.

В силу наслідка 2 з теореми 5.1, як і в силу наслідка 2 з теореми 4.3, зрозуміло, що при зображенні геометричних фігур за методом паралельного проєктування у загальному випадку величини кутів не зберігаються. Хоча справедливість наслідка 3 із теореми 5.1 гарантує збереження величин кутів у випадку, коли площина оригінала є паралельною до картинної площини. Одночасно, у теорії афінних відображень обґрунтовано, що кожне афінне відображення f площини β на площину α , відмінне від відображення подібності, має точно два так звані головних напрямки (див. [1; 28], наприклад). Це означає, що на площині β існують такі взаємно перпендикулярні прямі m і n , що їх образи при відображенні f - прямі $m' = f(m)$ і $n' = f(n)$ - також є взаємно перпендикулярними, аналогічну властивість мають будь-які дві прямі, що є, відповідно, колінеарними до прямих m і n , та лише такі прямі. Справедливість наслідка 2 з теореми 5.1 вказує на можливу особливу роль у теорії зображень геометричних фігур за методом паралельного проєктування головних напрямків відповідних афінних відображень. І це насправді так.

У випадку невиродженого ортогонального проєктування площини

β на площину α , головні напрямки легко знайти на підставі теореми про три перпендикуляри. Має місце

Наслідок 4. *Якщо площина β перетинає картинну площину α за певною прямою a , площина β не є перпендикулярною до площини α , то, при ортогональному проєктуванні площини β на площину α , тими взаємно перпендикулярними прямими площини β , які зображуються взаємно перпендикулярними прямими площини α , є такі взаємно перпендикулярні прямі площини β , одна з яких є паралельною до прямої a або співпадає з нею, і лише такі прямі.*

Доведіть самостійно.

Звідси випливає, що прямий кут, одна зі сторін якого є паралельною до картинної площини або належить картинній площині, при невиродженому для нього ортогональному проєктуванні на дану площину зображається прямим кутом.

Наслідок 5. *Будь-яке афінне відображення плоскої фігури F на плоску фігуру F' можна розглядати як процес зображення фігури F у вигляді фігури F' за методом паралельного проєктування.*

Справедливість даного твердження обґрунтовано під час доведення наслідка 2 з теореми 5.1.

Наслідок 6. *Якщо фігура F' площини α є зображенням фігури F площини β при певному невиродженому для площини β паралельному проєктуванні на площину α то існує невироджене паралельне проєктування площини α на площину β , при якому фігура F є зображенням фігури F' .*

Справедливість наслідка 6 випливає зі справедливості наслідка 2 з теореми 5.1 і того факту, що, якщо фігура F' є афінно еквівалентною до фігури F , то фігура F є афінно еквівалентною до фігури F' ([24]).

Наслідок 7. *Будь-яке зображення плоскої геометричної фігури за допомогою невивродженого для даної фігури паралельного проєктування є афінно повним.*

Доведення. $\square$ Нагадаємо, що зображення геометричної фігури F називають афінно повним, якщо за ним можна однозначно визначити усі афінні властивості даної фігури. Афінними властивостями фігури F називають ті її властивості, які зберігаються при усіх афінних перетвореннях евклідового простору, у якому розташовано дану фігуру. Такі перетворення індукують афінні відображення площини, що містить плоску фігуру F , і самої фігури F . Як було встановлено при доведенні наслідка 2 з теореми 5.1, при невивродженому для плоскої геометричної фігури F паралельному проєктуванню зображення F' даної фігури є афінно еквівалентним до самої фігури. Тобто, фігури F і F' мають однакові афінні властивості, усі афінні властивості фігури F , можна однозначно встановити за афінними властивостями фігури F' . Отже, зображення F' фігури F є афінно повним. $\blacksquare$

Зрозуміло, що площина є плоскою геометричною фігурою. Отже, будь-яке невивроджене зображення площини за методом паралельного проєктування є афінно повним.

Наслідок 8. *Для зображень плоских геометричних фігур, які належать одній площині або паралельним площинам, при невивродженому паралельному проєктуванні зберігається відношення площ (зрозуміло, якщо відповідні площі існують).*

Доведення. $\square$ При доведенні наслідка 2 з теореми 5.1 було обґрунтовано, що під час зображення площини β за допомогою невивродженого для неї паралельного проєктування відбувається афінне відображення площини β на картинну площину α . З теорії афінних відображень відомо, що під час афінних відображень площин

зберігається відношення площ геометричних фігур. Зрозуміло, мається на увазі, що такі фігури є квадровними, тобто, площі у них існують.

Нехай квадровна геометрична фігура F належить площині β , а квадровна геометрична фігура F_1 – площині β_1 , $\beta_1 \parallel \beta$. Розглянемо невироджене для площини β паралельне проєктування h у напрямку прямої l на картинну площину α (пряма l не є паралельною до площини α і не належить цій площині, пряма l не є паралельною до площини β і не належить цій площині). Таке проєктування буде невиродженим і для площини β_1 .

Нехай $h(F)=\Phi$, $h(F_1)=\Phi_1$, ($\Phi \subset \alpha$, $\Phi_1 \subset \alpha$). Зрозуміло, що визначеним є й паралельне проєктування h_1 на площину β у напрямку прямої l , для площини β_1 воно також є невиродженим, $h_1(F_1)=G$, $G \subset \beta$. Оскільки $\beta_1 \parallel \beta$, то проєктування h_1 для площини β_1 є паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{P_1P}$, де $P_1=l \cap \beta_1$, $P=l \cap \beta$. Звідси випливає, що $G=F_1$. З іншого боку, очевидно, що

$$h(F_1)=h(G). \text{ Отже, згідно доведеного, } \frac{S_{\Phi_1}}{S_{\Phi}} = \frac{S_G}{S_F} = \frac{S_{F_1}}{S_F}, \text{ де через } S_Q$$

позначено площу відповідної фігури Q , $Q \in \{F, F_1, G, \Phi, \Phi_1\}$. ■

Наслідок 9. *Якщо відомо, що заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням заданого трикутника-каркаса ABC площини β при певному паралельному проєктуванні площини β на площину α так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , то зображення площини β у вигляді площини α згідно застосованого закона зображення є метрично повним.*

Доведення. $\square$ Відповідно до наслідка 1 з теореми 5.1, при виконанні умов наслідка 8, для кожної точки площини α на площині β можна однозначно відновити оригінал. Отже, за зображенням можна встановити усі геометричні властивості оригінала, зокрема, усі його метричні властивості. $\blacksquare$

За означенням, метричними властивостями геометричної фігури називають ті її властивості, які зберігаються при довільних рухах цієї фігури, і в силу цього є однаковими для усіх рівних між собою геометричних фігур ([1; 25]). Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ площини β дорівнює трикутнику ABC цієї площини. Це означає, що існує такий рух g площини β , згідно якого $A_1 = g(A)$, $B_1 = g(B)$, $C_1 = g(C)$. Нехай h – таке паралельне проєктування площини β на площину α , при якому трикутник $A'B'C'$ площини α є зображенням трикутника ABC так, що точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , тобто, згідно відповідного закону зображення f , $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ і, зрозуміло, $C' = f(C)$. За теоремою 4.3, таке паралельне проєктування існує. Але, за теоремою 4.3, існує і паралельне проєктування h_1 площини β на площину α , при якому зображенням трикутника $A_1B_1C_1$ є той самий трикутник $A'B'C'$ так, що точка A' є зображенням точки A_1 , точка B' – зображенням точки B_1 ; згідно відповідного закону зображення f_1 , $A' = f_1(A_1)$, $B' = f_1(B_1)$, $C' = f_1(C_1)$. В силу наслідка 2 з теореми 5.1, відображення f і f_1 є афінними відображеннями площини β на площину α .

Розглянемо довільну точку M' площини α . $f^{-1}(M') = M$, $M \in \beta$, положення точки M на площині β однозначно визначається за допомогою трикутника ABC . Аналогічно, $f_1^{-1}(M') = M_1$, $M_1 \in \beta$,

положення точки M_1 на площині β однозначно визначається за допомогою трикутника $A_1B_1C_1$. Одночасно, очевидно також, що $A_1=(f_1^{-1} \circ f)(A)$, $B_1=(f_1^{-1} \circ f)(B)$, $C_1=(f_1^{-1} \circ f)(C)$. Але $A_1=g(A)$, $B_1=g(B)$, $C_1=g(C)$. Композиція афінних відображень площин є афінним відображенням відповідних площин. Отже, відображення $f_1^{-1} \circ f$ є афінним відображенням площини β на себе, тобто, афінним перетворенням площини β . Але рух площини також є афінним перетворенням цієї площини. З теорії афінних перетворень площин відомо, що, якщо два таких перетворення приймають однакові значення у трьох точках площини, які не належать одній прямій, то ці перетворення приймають однакові значення і у кожній точці даної площини. Отже, $f_1^{-1} \circ f = g$, $M_1 = g(M)$.

У підсумку, у даному випадку, за кожною геометричною фігурою F' картинної площини α на площині β можна однозначно визначити і оригінал F за законом зображення f , і оригінал F_1 за законом зображення f_1 , $F_1 = g(F)$. Останнє означає, що метричні властивості фігур F і F_1 є однаковими, ці метричні властивості можна встановити як за допомогою трикутника ABC , так і за допомогою трикутника $A_1B_1C_1$. Отже, справедливим є

Наслідок 10. *Якщо відомо, що заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням за методом паралельного проєктування визначеного з точністю до руху трикутника ABC площини β , то зображення, згідно застосованого закону зображення, площини β у вигляді площини α є метрично повним.*

Зрозуміло, що у випадку метричної повноти зображення площини β у вигляді картинної площини α метрично повним буде і зображення

F' кожної фігури F площини β , у тому числі і довільного трикутника площини β . Отже, твердження, обернене до наслідка 9 з теореми 5.1, також є справедливим, має місце

Наслідок 11. *Зображення за методом паралельного проєкування площини β у вигляді площини α є метрично повним тоді та тільки тоді, коли для певного трикутника-каркаса площини α згідно застосованого закону зображення на площині β з точністю до руха є визначеним оригінал.*

Очевидно, що трикутник-оригінал ABC на площині β буде визначено з точністю до руха, якщо буде задано довільний трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC . У той же час, згідно ознак рівності трикутників, для визначення трикутника ABC з точністю до руха, достатньо вказати значення трьох скалярних параметрів: або довжин двох сторін трикутника ABC і міри кута між ними, або довжини однієї сторони трикутника ABC і міри двох його кутів, або довжини усіх трьох сторін трикутника ABC . При цьому, зрозуміло, що вказані значення скалярних параметрів не можуть бути цілком довільними. Вони повинні задовольняти умови, які забезпечують існування відповідного трикутника ABC . Якщо, наприклад, вказані значення трьох скалярних параметрів задають довжини сторін трикутника ABC , то більше з цих значень повинне бути меншим за суму двох інших. Зрозуміло також, що, замість перелічених трійок скалярних параметрів, можна задати й інші трійки, які з точністю до руха визначають трикутник ABC . Можна, наприклад, задати довжини двох сторін трикутника ABC і довжину його медіани, проведеної до третьої сторони. У той же час, у евклідовій геометрії обґрунтовано, що у жодному випадку значень лише двох скалярних параметрів для визначення трикутника ABC з точністю до руха не є достатнім ([36]).

Згідно вищевказаного, вважають, що, якщо зображення F' **нелінійної плоскої геометричної фігури** F за методом паралельного проєктування не містить зображення жодного трикутника, для якого відомими є значення принаймні одного з трьох скалярних параметрів, що дозволяють відновити оригінал цього трикутника на площині фігури F з точністю до руха, то афінно повне, але метрично не повне, зображення F' фігури F має **коефіцієнт метричної неповноти**, який дорівнює трьом.

У той же час, коли зображення F' фігури F містить зображення трикутника, для якого відомими є значення одного, або двох скалярних параметрів з тих трьох, що дозволяють для цього трикутника з точністю до руха відновити трикутник-оригінал, то вважають, що афінно повне, але метрично не повне, зображення F' фігури F має **коефіцієнт метричної неповноти**, що, відповідно, дорівнює двом або одиниці.

Наслідок 12. *Якщо відомо, що заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням деякого, визначеного з точністю до перетворення подібності, трикутника-каркаса ABC площини β при певному паралельному проєктуванні площини β на площину α (тобто, вказані певні властивості трикутника-каркаса ABC , згідно яких усі трикутники, що мають такі властивості, і лише такі трикутники, є подібними до трикутника ABC), то зображення згідно застосованого закону зображення площини β у вигляді площини α є подібно (евклідово) повним.*

Доведення легко провести за аналогією до доведення наслідка 9.

Наслідок 13. *Якщо відомо, що площина β є паралельною до площини α або співпадає з площиною α , то будь-яке зображення за методом паралельного проєктування площини β у вигляді площини α є подібно повним.*

Справедливість наслідка 13 випливає зі справедливості наслідків 3 і 11 з теореми 5.1.

За умов наслідка 13, властивості подібності площини β безпосередньо співпадають з властивостями подібності площини α . Тобто, якщо на площині α кут між прямими a' і b' складає p° , то на площині β кут між відповідними прямими-оригіналами a і b також складає p° , зокрема, якщо $a' \perp b'$, то $a \perp b$. Якщо на площині α промінь $B'D'$ є бісектрисою кута $A'B'C'$, то на площині β кут-оригінал ABC дорівнює куту $A'B'C'$, промінь BD , оригінал для променя $B'D'$, є бісектрисою кута ABC . Відношення довжин довільних відрізків площини α дорівнює відношенню довжин їх оригіналів на площині β .

Зрозуміло, що, у випадку подібної повноти зображення площини β у вигляді картинної площини α , подібно повним є і зображення F' кожної фігури F площини β , у тому числі й довільного трикутника площини β . Отже, твердження, обернене до наслідка 12 з теореми 5.1, також має місце.

Наслідок 14. *Зображення за методом паралельного проєкування площини β у вигляді площини α є подібно повним тоді та тільки тоді, коли для певного трикутника-каркаса площини α згідно даного закону зображення на площині β з точністю до перетворення подібності визначено оригінал.*

Зрозуміло, що трикутник-оригінал ABC на площині β буде визначено з точністю до перетворення подібності, якщо буде задано довільний трикутник $A_1B_1C_1$, подібний до трикутника ABC . У той же час, для того, щоб визначити трикутник-оригінал ABC з точністю до перетворення подібності, згідно ознак подібності трикутників, для трикутника ABC достатньо вказати значення двох скалярних

параметрів: або відношення довжин двох сторін трикутника ABC і міру кута між ними, або міри двох кутів трикутника ABC , або відношення довжин усіх сторін трикутника ABC . При цьому, вказані значення скалярних параметрів не можуть бути цілком довільними, повинні існувати трикутники з такими значеннями наведених параметрів. Зрозуміло також, що замість зазначених пар значень скалярних параметрів, можна задати значення скалярних параметрів й інших пар, які, з точністю до подібності, визначають трикутник ABC . У той же час у евклідовій геометрії обґрунтовано, що у жодному випадку значення одного скалярного параметра для визначення трикутника ABC з точністю до перетворення подібності не є достатнім.

Згідно вищевказаного, вважають, що, якщо зображення F' **нелінійної плоскої геометричної фігури** F за методом паралельного проєктування не містить зображення жодного трикутника, для якого відомим є принаймні один з двох скалярних параметрів, які дозволяють визначити оригінал цього трикутника на площині фігури F з точністю до перетворення подібності, то афінно повне, але не подібно повне, зображення F' фігури F має **коефіцієнт подібної неповноти**, що дорівнює двом. У випадку, коли зображення F' фігури F містить зображення трикутника, для якого є відомим один з тих двох скалярних параметрів, що дозволяють для даного трикутника визначати трикутник-оригінал з точністю до перетворення подібності, вважають, що афінно повне, але подібно неповне, зображення F' фігури F має коефіцієнт подібної неповноти, що дорівнює одиниці.

Зрозуміло, що, як і у випадку лінійних геометричних фігур, подібно повне зображення нелінійної плоскої геометричної фігури (і, взагалі, будь-якої фігури), стає метрично повним, якщо вказано коефіцієнт подібності. Отже, подібно повні, але метрично неповні

зображення мають коефіцієнт метричної неповноти, що дорівнює одиниці.

Питання і завдання для самоконтролю до §5

5.1. Сформулюйте основну теорему теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування. Чому дана теорема має таку назву?

5.2. Визначте логічні етапи доведення основної теореми теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування.

5.3. Доведіть основну теорему теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування.

5.4. Чи є справедливим твердження, обернене до основної теореми теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування?

5.5. Які дві фігури евклідової геометрії називають афінно еквівалентними?

5.6. Сформулюйте критерій того, що одна плоска геометрична фігура може бути зображенням іншої плоскої геометричної фігури за допомогою певного, не виродженого для даної фігури, паралельного проєктування.

5.7. Відомо, що при певному паралельному проєктуванні зображенням кожного прямого кута площини β є прямий кут картинної площини α . Що можна стверджувати про характер розташування площини β відносно апарату даного проєктування? Відповідь обґрунтуйте.

5.8. Площина β перетинає площину α за прямою a . Паралельне проєктування на площину α у напрямку прямої l для площини β є не виродженим, пряма l є перпендикулярною до прямої a . Що, згідно даного паралельного проєктування, можна стверджувати про градусну міру зображення прямого кута, розташованого у площині β так, що одна з його сторін є паралельною до прямої a ? Відповідь обґрунтуйте.

5.9. Який характер повноти може мати зображення плоскої геометричної фігури при не виродженому для даної фігури паралельному проєктуванні?

5.10. Що можна стверджувати про залежності між площами квадратних геометричних фігур, розташованих на певній площині β , і площами їх зображень при не виродженому для площини β паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

5.11. Задано трикутник-оригінал ABC і трикутник $A'B'C'$, який є зображенням трикутника ABC за методом паралельного проєктування так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Що, згідно даного закону зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F , розташованої у площині трикутника ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

5.12. На картинній площині задано трикутник – зображення деякого трикутника згідно закону зображення певного, не виродженого для площини трикутника-оригінала, паралельного проєктування. Трикутник-оригінал є відомим з точністю до перетворення подібності. Що, згідно застосованого закону зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F , розташованої у площині трикутника-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

5.13. Сформулюйте критерій метричної повноти зображення за методом паралельного проєктування площини β у вигляді площини α .

5.14. Яка кількість скалярних параметрів дозволяє визначити трикутник з точністю до руху? Яким може бути геометричний зміст цих параметрів?

5.15. Як означають і як визначають коефіцієнт метричної неповноти невиродженого зображення плоскої геометричної фігури за методом паралельного проєктування? Які значення цей коефіцієнт може приймати?

5.16. Сформулюйте критерій подібної повноти зображення за методом паралельного проєктування площини β у вигляді площини α .

5.17. Яка кількість скалярних параметрів дозволяє визначити трикутник з точністю до перетворення подібності? Яким може бути геометричний зміст цих параметрів?

5.18. Як означають і як визначають коефіцієнт подібної неповноти невиродженого зображення плоскої геометричної фігури за методом паралельного проєктування? Які значення цей коефіцієнт може приймати?

5.19. Чому дорівнює коефіцієнт метричної неповноти подібно повного, але метрично неповного зображення? Відповідь обґрунтуйте.

5.20. Площина α є зображенням площини β за методом паралельного проєктування. На площині α задано нерозгорнутий кут, для якого відомою є градусна міра його кута-оригінала згідно застосованого закону зображення. Що, згідно даного закону

зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F , розташованої у площині β ? Відповідь обґрунтуйте.

5.21. Площина α є зображенням площини β за методом паралельного проєктування. На площині α задано дві прямі, які перетинаються. Відомо, що, згідно застосованого закону зображення, оригінали цих прямих є взаємно перпендикулярними. Що, згідно даного закону зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F , розташованої у площині β ? Відповідь обґрунтуйте.

5.22. Відомо, що площина β є паралельною до площини α . Який характер повноти має зображення за методом паралельного проєктування площини β у вигляді площини α ? Відповідь обґрунтуйте.

§6. Зображення основних відрізків, прямих і точок, пов'язаних з трикутником, при невикористаному для даного трикутника паралельному проєктуванні

Наведемо розв'язки певної кількості відповідних стандартних задач. При цьому, виходячи з міркувань методичного характеру, будемо використовувати лише положення елементарної геометрії. У кожній із задач під трикутником будемо розуміти трикутник-каркас.

Задача 6.1. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення медіани AM трикутника ABC .*

Розв'язання. $\square$ За умови задачі, задано трикутник-оригінал ABC площини β і трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 83). Згідно теореми 4.3, кожний з цих трикутників може бути цілком довільним. Побудуємо медіану AM трикутника ABC . Як відомо, це відрізок, що сполучає вершину A цього трикутника з серединою M його протилежної сторони BC ([5], наприклад). Оскільки зображенням

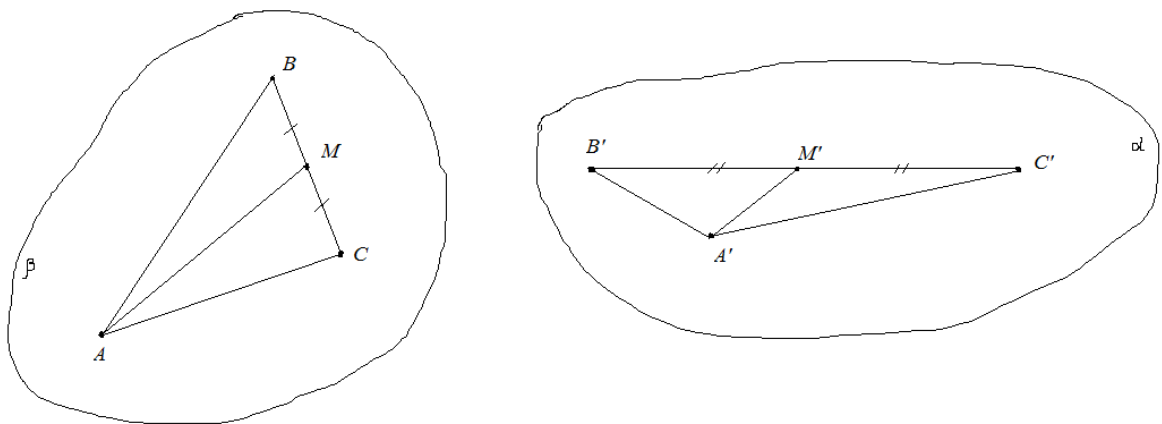


Рис. 83

трикутника площини β є трикутник картинної площини α ,

проєктування для площини β і для усіх розташованих на ній геометричних фігур є невиродженим. Отже, за теоремою 3.5, зображенням відрізка AM буде відрізок $A'M'$, кінець M' якого належить відрізку $B'C'$ (що є зображенням відрізка BC) і ділить його навпіл (тому що, за наслідком з теореми 3.10, при невиродженому для відрізка паралельному проєктуванню зображенням середини відрізка-оригінала є середина відрізка-зображення). У підсумку, для побудови зображення медіани AM трикутника ABC достатньо знайти середину M' відрізка $B'C'$ і побудувати відрізок $A'M'$, який є медіаною трикутника $A'B'C'$ проведеною з вершини A' (рис. 83). Відрізок $A'M'$ і є зображенням медіани AM трикутника ABC . ■

Отже, при невиродженому для трикутника паралельному проєктуванню медіана трикутника-оригінала завжди зображується відповідною медіаною трикутника-зображення, розв'язання задачі 6.1 не вимагає побудови медіани AM трикутника-оригінала.

Задача 6.2. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал ABC загублено. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення медіани AM трикутника ABC .*

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α . Зрозуміло, що, якщо невідомий

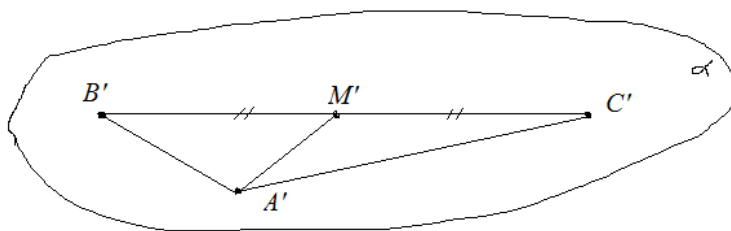


Рис. 84

трикутник ABC зображено трикутником, проєктування для площини трикутника ABC є невиродженим. Отже, як було обґрунтовано при

розв'язанні задачі 6.1, незалежно від форми трикутника ABC , зображенням його медіани AM згідно застосованого закону зображення буде медіана $A'M'$ трикутника $A'B'C'$ (рис. 84). ■

Задача 6.3. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте точку D' , яка згідно застосованого закону зображення є зображенням центроїда D трикутника ABC .*

Розв'язання. □ Центроїдом трикутника називають точку перетину медіан цього трикутника. Дану точку називають також центром тяжіння трикутника. У евклідовій геометрії кожний трикутник має три медіани, які перетинаються у одній точці і діляться цією точкою у відношенні 2:1, якщо рахувати від вершини ([6; 9], наприклад). Оскільки при невиродженому паралельному проєктуванні зображенням кожної медіани трикутника-оригінала є відповідна медіана трикутника-зображення (задача 6.1), зображення D' центроїда D трикутника ABC є центроїдом трикутника $A'B'C'$. Тобто, для побудови точки D' достатньо побудувати дві медіани трикутника $A'B'C'$ і знайти точку D' як точку їх перетину. Можна також побудувати одну медіану трикутника $A'B'C'$ і знайти точку D' як точку, що ділить цю медіану у відношенні 2:1, якщо рахувати від вершини. ■

Отже, знаходження розв'язку задачі 6.3 не вимагає побудов на площині трикутника-оригінала.

Задача 6.4. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC . Трикутник-оригінал ABC загублено. Побу-*

дуйте точку D' , яка згідно застосованого закону зображення є зображенням центроїда D трикутника ABC .

На підставі попередніх міркувань зрозуміло, що, незалежно від форми загубленого трикутника ABC , шукана точка D' є центроїдом трикутника $A'B'C'$, дана задача завжди має однозначно визначений розв'язок.

Задача 6.5. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення середньої лінії трикутника ABC , паралельної до сторони AB .

Розв'язання. $\square$ За умови даної задачі, задано трикутник-оригінал ABC площини β і трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 85). Згідно теореми 4.3, кожний з цих трикутників може бути цілком довільним.

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає

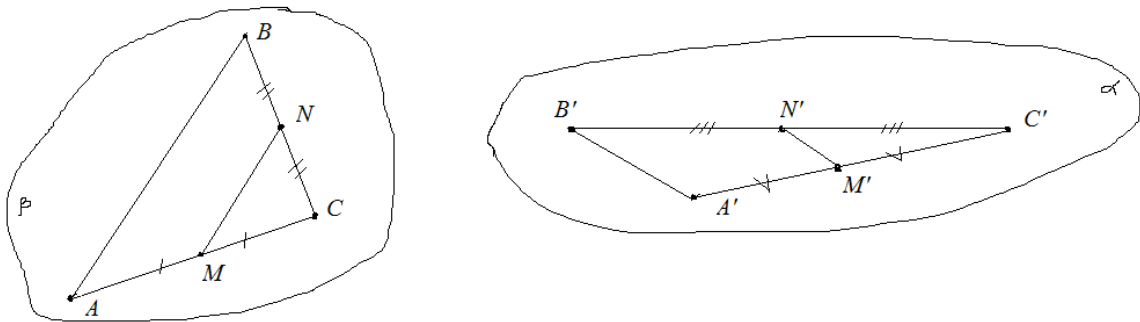


Рис. 85

середини двох сторін цього трикутника ([5; 8], наприклад). Отже, середня лінія трикутника ABC , яка є паралельною до сторони AB , сполучає середини сторін AC і BC . Нехай точка M є серединою сторони AC , точка N — серединою сторони BC . Відрізок MN — відповідна середня лінія трикутника ABC . Згідно наслідка з

теорему 3.10, зображенням точки M є середина M' відрізка $A'C'$, зображенням точки N – середина N' відрізка $B'C'$. Значить, відрізок $M'N'$ є зображенням середньої лінії MN трикутника ABC . Одночасно, він є середньою лінією трикутника $A'B'C'$, паралельною до сторони $A'B'$. ■

Отже, при невірному для трикутника паралельному проєктуванні середня лінія трикутника-оригінала завжди зображується відповідною середньою лінією трикутника-зображення, розв'язання задачі 6.5 не вимагає побудов на площині трикутника-оригінала

Задача 6.6. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що, при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал ABC загублено. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення середньої лінії трикутника ABC , паралельної до сторони AB .*

Розв'язання. □ За умови задачі задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 86). Зрозуміло, що, якщо невідомий трикутник-оригінал ABC зображено трикутником, проєктування для

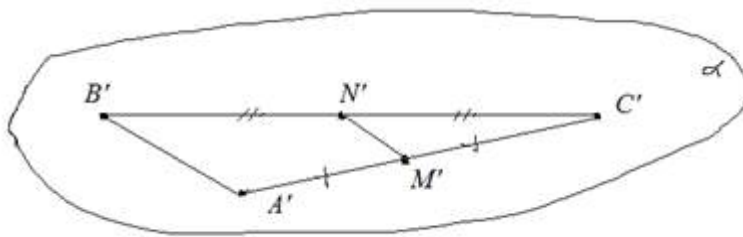


Рис. 86

площини (ABC) є невірним. Отже, як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 6.5, незалежно від форми

трикутника ABC , зображенням його середньої лінії, паралельної до сторони AB , буде середня лінія трикутника $A'B'C'$, паралельна до сторони $A'B'$, задача 6.6 має однозначно визначений розв'язок. ■

Зауваження. Згідно наслідка 7 з теореми 5.1, зображення, задані умовами задач 6.1 — 6.6, є афінно повними. Саме тому, що поняття медіани, центроїда та середньої лінії трикутника є поняттями афінної геометрії евклідового простору, розв’язання задач 6.1 — 6.6 не вимагають використання оригіналів, шуканими зображеннями зазначених фігур є аналогічні фігури, побудовані на підставі застосованого закону зображення.

Задача 6.7. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси BL трикутника ABC .

Розв’язання. □ За умови задачі, задано трикутник-оригінал ABC площини β і трикутник-зображення $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 87). Згідно теореми 4.3, обидва трикутника можуть бути довільними. Проведемо бісектрису BL трикутника ABC . Як відомо,

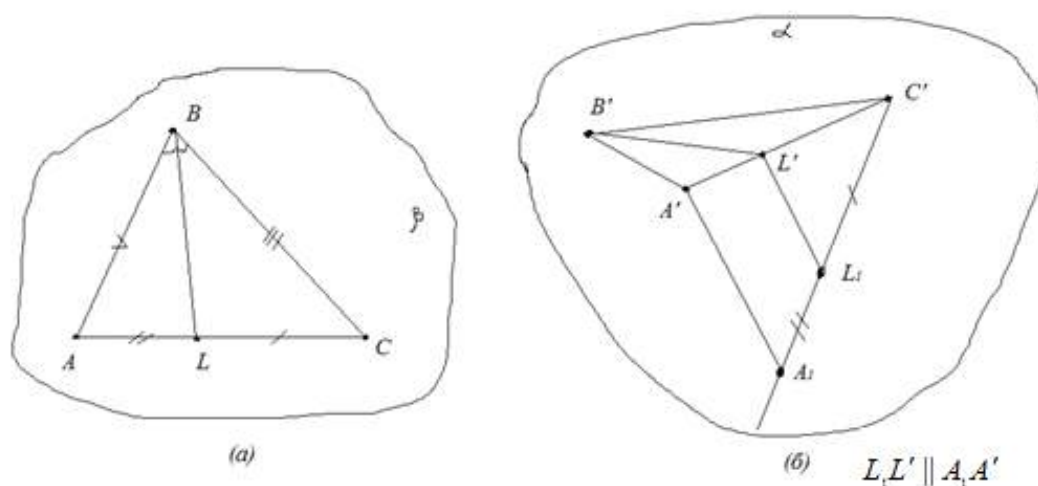


Рис. 87

це відрізок бісектриси кута ABC , що сполучає вершину B трикутника ABC з точкою на його протилежній стороні AC ($\angle ABL = \angle LBC$)

([5; 8], наприклад). Якщо зображенням трикутника площини β є трикутник, то розглянуте паралельне проєктування для площини β і усіх геометричних фігур, що цій площині належать, є не виродженим. За теоремою 3.5, зображенням відрізка BL буде відрізок, для знаходження якого достатньо побудувати зображення його кінців. Точка B' є зображенням точки B . Зображення L' точки L є внутрішньою точкою відрізка $A'C'$. Її однозначна побудова описана при розв'язанні задачі 3.9 розділу I і виконана на рис. 87 (б). Відрізок $B'L'$ є шуканим зображенням бісектриси BL .

Зрозуміло, що, на відміну від медіани, у загальному випадку відрізок $B'L'$ не є бісектрисою трикутника $A'B'C'$. Дійсно, відрізок

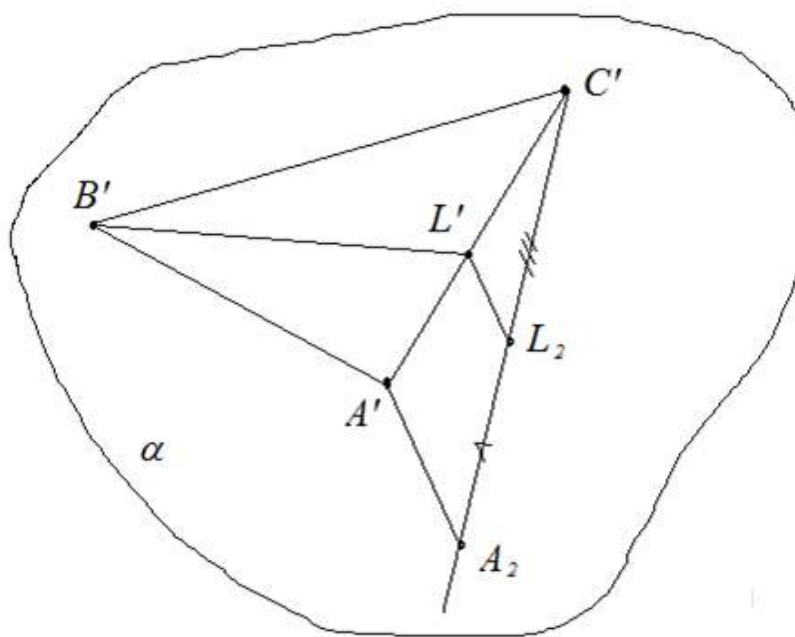


Рис. 88

BL є бісектрисою трикутника ABC . Загальновідомою є наступна характеристична властивість бісектриси трикутника: бісектриса трикутника ділить протилежну сторону трикутника на відрізки, пропорційні до

його прилеглих сторін: $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$. ([14], наприклад). Отже, відрізок

$B'L'$ буде бісектрисою трикутника $A'B'C'$ тоді та тільки тоді, коли $\frac{A'L'}{L'C'} = \frac{A'B'}{B'C'}$. За побудовою, $\frac{A'L'}{L'C'} = \frac{AL}{LC}$. Значить, для того, щоб

зображенням бісектриси трикутника-оригінала була бісектриса

трикутника-зображення, необхідно і достатньо, щоб $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$. Але в усьому іншому трикутники ABC і $A'B'C'$ можуть бути цілком довільними.

На відміну від задачі 6.1, при розв'язанні задачі 6.7 ми суттєвим чином використовували трикутник-оригінал: будували його бісектрису BL , розглядали відрізки AL і LC . Характеристична властивість бісектриси трикутника вказує на те, що бісектрису $B'L'$ можна було би і не будувати, а під час побудови точки L' на відповідному промені з початком у точці C' послідовно відкладати відрізки $C'L_2$ і L_2A_2 , $C'L_2 = BC$, $L_2A_2 = AB$ (рис. 88). За нерівністю трикутника, для сторін трикутника ABC справджується нерівність $AC < AB + BC$ або $AL + LC < AB + BC$. Отже, у будь-якому випадку $C'A_2 > C'A_1$. Саме тому, з технічної точки зору, такий шлях розв'язання задачі 6.7 є не завжди зручним. ■

Не використовувати трикутник-оригінал ABC при побудові за методом паралельного проєктування зображення його бісектриси BL неможливо, про що свідчить розв'язок наступної задачі.

Задача 6.8. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Трикутник-оригінал загублено. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси BL трикутника ABC .*

Розв'язання. □ За умови задачі 6.8, як і за умови задачі 6.2, задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α . Оскільки форма трикутника-оригінала ABC є невідомою, зрозуміло лише, що зображенням його бісектриси BL є відрізок $B'L'$, де L' — внутрішня точка

відрізка $A'C'$. (При невиродженому паралельному проєктуванні, згідно теореми 3.5, зображенням відрізка є відрізок, внутрішні точки відрізка-оригіналу зображуються внутрішніми точками відрізка-зображення).

Справедливим є наступне твердження: за умови задачі 6.8, будь-який відрізок $B'L'$, де L' – внутрішня точка відрізка $A'C'$, можна вважати зображенням бісектриси BL трикутника-оригінала ABC .

Дійсно, нехай точка L' є довільною внутрішньою точкою сторони $A'C'$ трикутника $A'B'C'$ (рис. 89 (а)). Розглянемо трикутник ABC , у якого $AB = A'L'$, $BC = L'C'$ (рис. 89 (б)). За формою, таких трикутників ABC існує безліч, бо $\angle ABC$ може приймати будь-які значення від 0° до 180° .

Згідно теореми 4.3, існує паралельне проєктування, при якому зображенням трикутника ABC є заданий умовою задачі трикутник

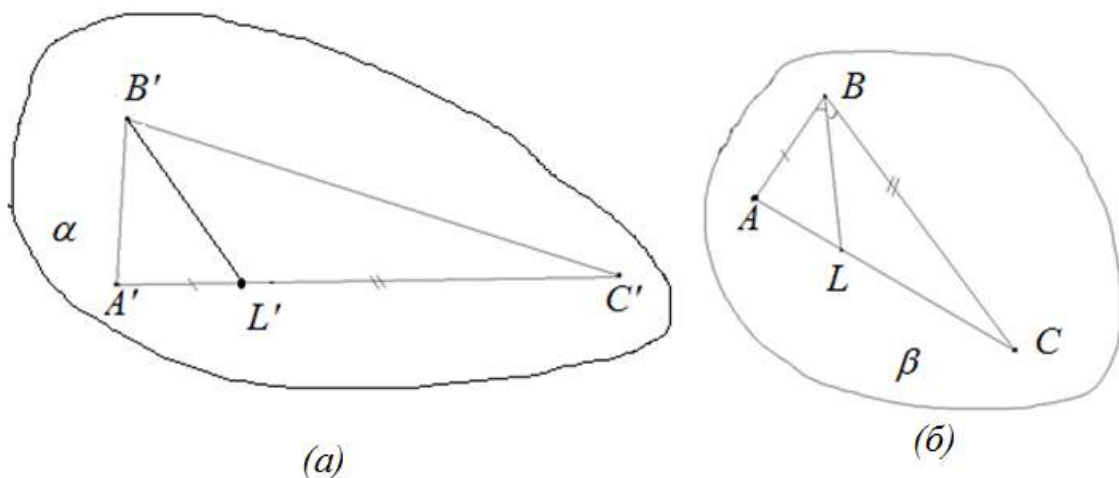


Рис. 89

$A'B'C'$ так, що вершина A' є зображенням вершини A , вершина B' – зображенням вершини B . Бісектриса BL трикутника ABC при цьому зображується таким відрізком $B'L''$, що точка L'' є внутрішньою

точкою відрізка $A'C'$, $\frac{A'L''}{L''C'} = \frac{AL}{LC}$. Але $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$, згідно побудови,

$\frac{AB}{BC} = \frac{A'L'}{L'C'}$. У евклідовій геометрії на кожному відрізку існує єдина

точка, яка ділить його у заданому (додатному) відношенні. Отже, точка L'' співпадає з точкою L' , відрізок $B'L'$ є зображенням згідно застосованого закону зображення бісектриси BL трикутника ABC . Правильність сформульованого твердження обґрунтовано. ■

Задача 6.9. *На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$ і відрізок $B'L'$, де L' – внутрішня точка відрізка $A'C'$. Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , відрізок $B'L'$ є зображенням бісектриси BL трикутника ABC . Трикутник-оригінал загублено. Визначте характер повноти даного зображення.*

Розв'язання. □ За умови задачі, задане зображення є невивороченим зображенням нелінійної плоскої геометричної фігури. Отже, згідно наслідка 5 з теореми 5.1, таке зображення є афінно повним. При розв'язанні задачі 6.8 було обґрунтовано, що оригіналом для заданого трикутника $A'B'C'$ є трикутник ABC , у якого $AB:BC = A'L':L'C'$, а кут ABC може приймати яке завгодно значення від 0° до 180° . Інших оригіналів для заданого трикутника $A'B'C'$ бути не може. Це означає, що умовою даної задачі форма трикутника-оригінала не є визначеною однозначно, задане зображення не є подібно повним. Але воно має коефіцієнт подібної неповноти, що дорівнює не двом, а одиниці. Один скалярний параметр, а саме, відношення довжин відрізків AB і BC є відомим. Відповідно, задане зображення не є метрично повним. Коефіцієнт метричної неповноти дорівнює двом. ■

Задача 6.10. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого*

трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте точку O' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням інцентра O трикутника ABC .

Розв'язання. $\square$ Інцентром трикутника називають точку перетину бісектрис даного трикутника. У евклідовій геометрії кожний трикутник має три бісектриси, які перетинаються у одній точці – інцентрі цього трикутника. Інцентр трикутника є центром кола, вписаного у даний трикутник. ([5; 8], наприклад).

За умови задачі задано і трикутник-оригінал, і трикутник-зображення. Проектування для площини трикутника-оригінала є не виродженим. Для розв'язання задачі можна, так само, як і при розв'язанні задачі 6.7, побудувати зображення двох бісектрис трикутника ABC і визначити шукану точку O' як точку перетину цих зображень.

Можна також побудувати дві бісектриси, наприклад, BL і AP трикутника-оригінала, визначити точку O як точку їх перетину,

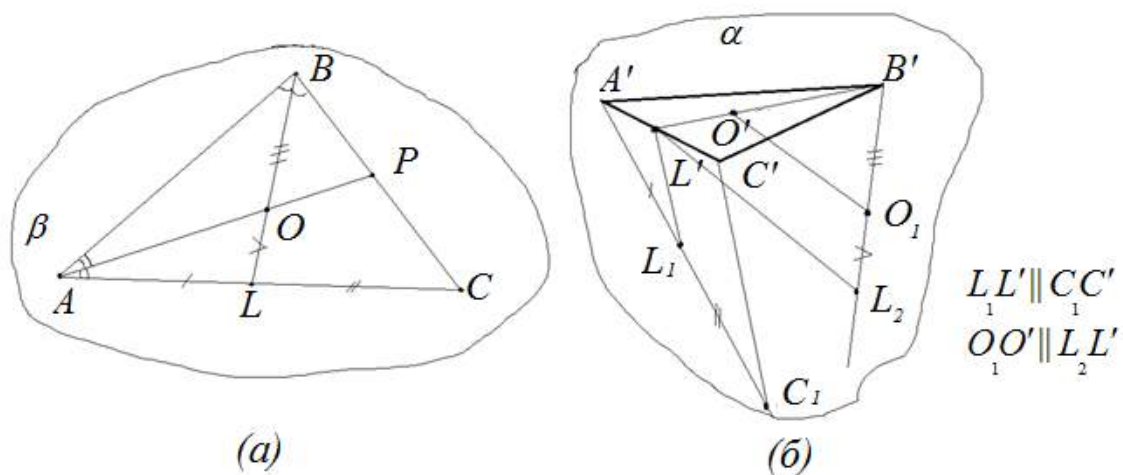


Рис. 90

побудувати зображення $B'L'$ бісектриси BL , побудувати зображення O' точки O як точки відрізка BL . Саме такий варіант розв'язання

даної задачі продемонстровано на рис. 90. ■

Зрозуміло, що, згідно теореми 5.1, задача 6.10, незалежно від обраного способу розв'язання, має однозначно визначений розв'язок. У той же час, при будь-якому способі розв'язання уникнути використання трикутника-оригінала не є можливим. Про це свідчить розв'язок наступної задачі.

Задача 6.11. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Оригінал загублено. Побудуйте точку O' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням інцентра O трикутника ABC .*

Розв'язання. □ За умови задачі задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α . Зрозуміло, що, якщо невідомий трикутник-оригінал ABC зображено трикутником, проєктування для площини (ABC) є не виродженням.

Доведемо, по-перше, що інцентр O довільного трикутника ABC

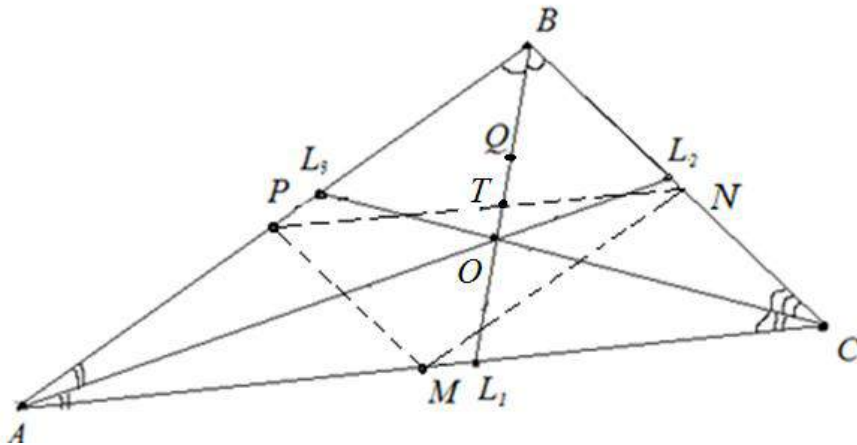


Рис. 91

належить внутрішній області трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC .

Нехай відрізки BL_1 , AL_2 і CL_3 є бісектрисами трикутника ABC . Відрізки BL_1 , AL_2 і CL_3 перетинаються в інцентрі O даного

трикутника (рис. 91). Відрізок AO є бісектрисою трикутника ABL_1 і тому $\frac{BO}{OL_1} = \frac{AB}{AL_1}$. Аналогічно, відрізок CO є бісектрисою, трикутника BCL_1 , $\frac{BO}{OL_1} = \frac{BC}{CL_1}$. Припустимо, що $BO \leq OL_1$ або $\frac{BO}{OL_1} \leq 1$. Тоді $\frac{AB}{AL_1} \leq 1$, $AB \leq AL_1$, $\frac{BC}{CL_1} \leq 1$, $BC \leq CL_1$, справедливою є нерівність $AB + BC \leq AL_1 + CL_1$ або $AB + BC \leq AC$. Отримано суперечність з фактом існування трикутника ABC (у кожному трикутнику довжина кожної сторони є строго меншою за суму довжин двох інших сторін). Отже, $BO > OL_1$. Відомо, що середня лінія PN трикутника ABC , яка є паралельною до сторони AC , ділить навпіл усі відрізки, що сполучають вершину B цього трикутника з точками на протилежній стороні AC . У тому числі, середня лінія PN ділить навпіл і бісектрису BL_1 . Це означає, що $BT = TL_1$, де точка T є точкою перетину середньою лінією PN бісектриси BL_1 . Але тоді $BT < BO$, відрізок BO перетинає пряму PN у внутрішній точці T , точки B і O лежать по різні сторони відносно прямої PN . Аналогічно, якщо відрізок MN є середньою лінією трикутника ABC , паралельною до сторони AB , точки C і O лежать по різні сторони відносно прямої MN . Так само, якщо відрізок MP є середньою лінією трикутника ABC , паралельною до сторони BC , точки A і O лежать по різні сторони відносно прямої MP . Трикутник MPN утворено середніми лініями трикутника ABC . Його внутрішня область – це перетин саме тих півплощин, відповідно, відносно прямих PN , MN і MP , яким належить точка O . У підсумку, доведено, що інцентр довільного трикутника ABC належить

внутрішній області трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC .

Згідно задач 6.5 і 6.6, середня лінія трикутника-оригінала завжди

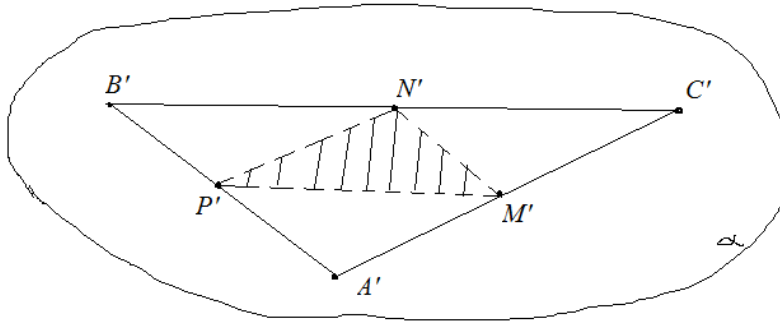


Рис. 92

зображується середньою лінією трикутника-зображення, згідно наслідків 2 і 3 з теореми 4.2, внутрішня область трикутника-оригінала

завжди зображується внутрішньою областю трикутника-зображення. Отже, оскільки за умови даної задачі трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC за методом паралельного проєктування, зображення O' інцентра O трикутника-оригінала належить внутрішній області трикутника $M'P'N'$, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$, тобто, знаходиться в області, заштрихованій на рис. 92.

Обґрунтуємо тепер, що будь-яка точка O' внутрішньої області трикутника $M'P'N'$, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$, може бути зображенням інцентра O загубленого трикутника-оригінала ABC .

Точніше, обґрунтування вимагає той факт, що для довільної точки O' всередині трикутника $M'P'N'$, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$, існує трикутник ABC , який при певному паралельному проєктуванні зображується трикутником $A'B'C'$ так, що при цьому вершина A зображується вершиною A' , вершина B — вершиною B' , інцентр O трикутника ABC зображується точкою O' .

Нехай точка O' є довільною точкою внутрішньої області трикутника $M'P'N'$. Проведемо промінь $A'O'$. Цей промінь належить внутрішній області кута $B'A'C'$ і тому перетинає відрізок $B'C'$ у

певній точці L' (рис. 93), $B'L' = \lambda \cdot L'C'$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $0 < \lambda \leq 1$. Середня лінія $P'M'$ трикутника $A'B'C'$ ділить усі відрізки, що сполучають точку A' з точками на стороні $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ навпіл. Отже, відрізок $A'L'$ перетинає середню лінію $P'M'$ у такій точці F' , що $A'F' = F'L'$. Якщо точка L' не співпадає з точкою N' ($\lambda \neq 1$), то промінь $A'L'$ у точці L' перетинає

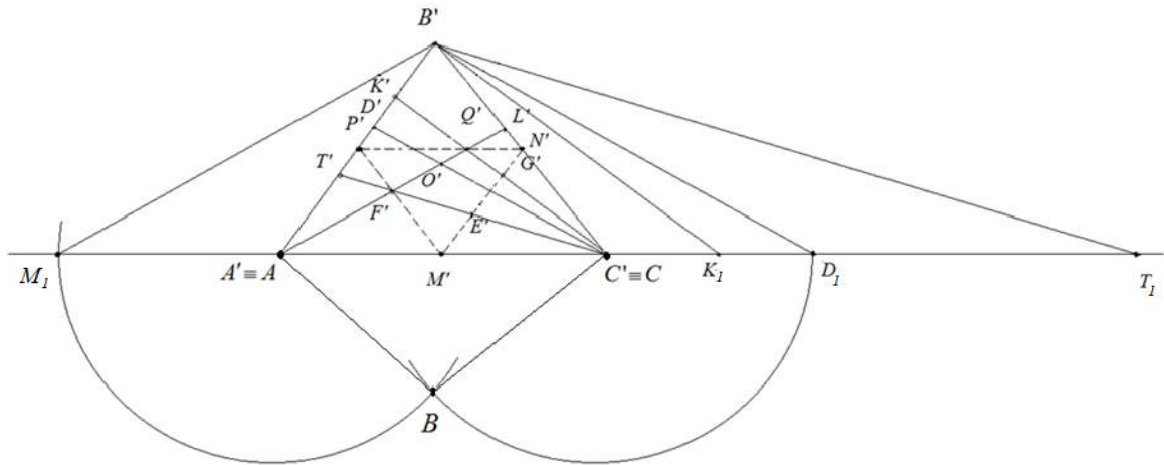


Рис. 93

відрізок $B'N'$ з кінцями на сторонах кута $B'A'N'$. Тоді він перетинає у певній точці Q' і відрізок $P'N'$ з кінцями на сторонах цього кута. Точки A' і N' лежать по різні сторони відносно прямої $P'M'$ тому, що відрізок $A'N'$ перетинає пряму $P'M'$ (чотирикутник $A'P'N'M'$ є паралелограмом з діагоналями $A'N'$ і $P'M'$). Точки N' і Q' лежать по один бік відносно прямої $P'M'$ тому, що пряма $P'M'$ перетинає пряму $N'Q'$ у точці P' , яка лежить поза відрізком $N'Q'$. Отже, точки A' і Q' лежать по різні сторони відносно прямої $P'M'$, точка F' лежить між точками A' і Q' . Точка O' лежить між точками F' і Q' бо вона знаходиться всередині трикутника $MP'N'$.

Промінь $C'F'$ проходить між сторонами кута $A'C'B'$ і перетинає сторону $A'B'$ трикутника $A'B'C'$ у певній точці T' . Аналогічно,

промінь $C'Q'$ перетинає відрізок $A'B'$ у певній точці K' , промінь $C'O'$ – у певній точці D' . Оскільки промінь $C'O'$ проходить між сторонами кута $T'C'K'$ (точка O' лежить між точками F' і Q' на сторонах цього кута), то точка D' лежить між точками T' і K' .

Знайдемо відношення $B'K':K'A'$. Промінь $C'K'$ перетинає середню лінію $M'N'$ трикутника $A'B'C'$ у певній точці G' , $M'N' \parallel A'B'$, $P'N' \parallel A'C'$. Тому

$$\frac{B'K'}{KA'} = \frac{N'G'}{G'M'} = \frac{N'Q'}{C'M'} = \frac{2 \cdot N'Q'}{A'C'} = \frac{2 \cdot L'N'}{L'C'}$$

$$\text{З іншого боку } \frac{B'L'}{L'C'} = \frac{\lambda}{1}; \quad \frac{B'L'}{B'L' + L'C'} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}; \quad \frac{B'L'}{B'C'} = \frac{\lambda}{\lambda + 1};$$

$$\frac{B'L'}{B'N'} = \frac{2 \cdot B'L'}{B'C'} = \frac{2 \cdot \lambda}{\lambda + 1}; \quad \frac{B'N'}{B'L'} = \frac{\lambda + 1}{2 \cdot \lambda}; \quad \frac{L'N'}{B'L'} = \frac{B'N' - B'L'}{B'L'} = \frac{1 - \lambda}{2 \cdot \lambda};$$

$$\frac{L'N'}{L'C'} = \frac{L'N'}{B'L'} \cdot \frac{B'L'}{L'C'} = \frac{1 - \lambda}{2 \cdot \lambda} \cdot \lambda = \frac{1 - \lambda}{2}; \quad \frac{B'K'}{K'A'} = \frac{2 \cdot (1 - \lambda)}{2} = 1 - \lambda.$$

Знайдемо відношення $B'T':T'A'$. Нехай промінь $C'T'$ перетинає середню лінію $M'N'$ у певній точці E' .

Тоді

$$\frac{B'T'}{T'A'} = \frac{N'E'}{E'M'} = \frac{N'C'}{F'M'} = \frac{2 \cdot N'C'}{L'C'} = \frac{B'C'}{B'C' - B'L'} = \frac{1}{1 - \frac{B'L'}{B'C'}} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda + 1}} = \lambda + 1.$$

Проведемо через точку B' пряму $B'M_1 \parallel A'L'$ до перетину з прямою $A'C'$ у точці M_1 . $\frac{M_1'A'}{A'C'} = \frac{B'L'}{L'C'} = \lambda$; $M_1'A' = \lambda \cdot A'C'$.

Проведемо через точку B' прямі $B'K_1 \parallel C'K'$; $B'D_1 \parallel C'D'$; $B'T_1 \parallel B'T'$ до перетину з прямою $A'C'$, відповідно, у точках K_1 , D_1 , T_1 .

Зрозуміло, що промінь $B'D_1$ буде проходити між сторонами кута $K_1B'T_1$ і тому точка D_1 буде лежати між точками K_1 і T_1 .

$$\frac{C'K_1}{A'C'} = \frac{B'K'}{K'A'} = 1 - \lambda; \quad C'K_1 = (1 - \lambda)A'C'; \quad \frac{C'T_1}{A'C'} = \frac{B'T'}{T'A'} = 1 + \lambda;$$

$$C'T_1 = (1 + \lambda)A'C'; \quad C'K_1 < C'D_1 < C'T_1.$$

Доведемо, що існує трикутник ABC зі сторонами $AC = A'C'$, $AB = A'M_1$, $BC = C'D_1$. Як було обґрунтовано раніше, $A'M_1 = \lambda \cdot A'C'$;

$$(1 - \lambda) \cdot A'C' < C'D_1 < (1 + \lambda) \cdot A'C'.$$

Отже, $C'D_1 + A'M_1 > (1 - \lambda) \cdot A'C' + \lambda \cdot A'C'$, або $C'D_1 + A'M_1 > A'C'$.

Одночасно, $(1 - 2\lambda) \cdot A'C' < C'D_1 - A'M_1 < A'C'$. Але $0 < \lambda < 1$,

$-2 < -2\lambda < 0$, $-1 < 1 - 2\lambda < 1$. Тому $-A'C' < (1 - 2\lambda) \cdot A'C' < A'C'$;

$$-A'C' < C'D_1 - A'M_1 < A'C'; \quad |C'D_1 - A'M_1| < A'C'.$$

Отже, відрізок $A'C'$ є меншим за суму відрізків $A'M_1$ і $C'D_1$, але більшим за модуль їх різниці, трикутник ABC існує. Такий трикутник легко побудувати, якщо прийняти точку A' за точку A , точку C' за точку C і знайти точку B як точку перетину кола з центром у точці A' радіусу $A'M_1$ і кола з центром у точці C' радіусу $C'D_1$.

Якщо $\lambda = 1$, точка L' співпадає з точкою N' , точка Q' - з точкою N' , точка K' - з точкою B' , $B'T' = 2 \cdot A'T'$, $M_1A' = A'C'$,

$$C'T_1 = 2 \cdot A'C', \quad 0 < C'D_1 < 2 \cdot A'C', \quad A'C' < C'D_1 + M_1A',$$

$$-A'C' < C'D_1 - M_1A' < A'C', \quad |C'D_1 - M_1A'| < A'C'.$$

Тобто, у даному випадку відповідний трикутник ABC існує також. У трикутнику ABC

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B'L'}{L'C'}, \quad \frac{AC}{CB} = \frac{A'D'}{D'B'}.$$

Звідси випливає, що, якщо при певному паралельному проєктуванні трикутник ABC зображено трикутником $A'B'C'$ так, що вершину A зображено вершиною A' , вершину B – вершиною B' (згідно теореми 4.3, таке проєктування існує), то зображенням інцентра O трикутника ABC при цьому є саме точка O' , як точка перетину відрізків $A'L'$ і $C'D'$, що зображують бісектриси AL і CD трикутника ABC . ■

Ідею саме такого способу розв'язання задачі 6.11 узято з [34].

Задача 6.12. *На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$ і точку O' у його внутрішній області. Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка O' – зображенням інцентра O трикутника ABC . Трикутник-оригінал загублено. Визначте характер повноти даного зображення.*

Розв'язання. □ Задане умовою задачі зображення складається з трикутника-каркаса $A'B'C'$ і точки O' у його внутрішній області. За умови задачі це – зображення певного трикутника-каркаса ABC та його інцентра O . Отже, це – невироджене зображення нелінійної плоскої геометричної фігури. Під час розв'язання задачі 6.11 було обґрунтовано, що при невиродженому для трикутника паралельному проєктуванні зображенням інцентра даного трикутника може бути лише точка, яка належить внутрішній області трикутника, утвореного середніми лініями трикутника-зображення. Отже, якщо задана точка O' не належить внутрішній області трикутника, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$, то задане зображення не є правильним, про характер його повноти не може йти мови.

Якщо же точка O' знаходиться всередині області, обмеженої середніми лініями трикутника $A'B'C'$, то, згідно задачі 6.11, задане

зображення є правильним. Як правильне невироджене зображення нелінійної плоскої геометричної фігури, воно є афінно повним. Як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 6.11, за таким зображенням трикутник-каркас ABC можна відновити з точністю до відношень довжин його сторін, наприклад, $AC:AB$ і $AC:BC$. Останнє означає, що задане зображення є подібно повним, а коефіцієнт його метричної неповноти дорівнює одиниці.

Задача 6.13. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти CH трикутника ABC .

Розв'язання. $\square$ За умови даної задачі задано трикутник ABC площини-оригіналу β і трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 94). Згідно теореми 4.3, кожний з цих трикутників може бути

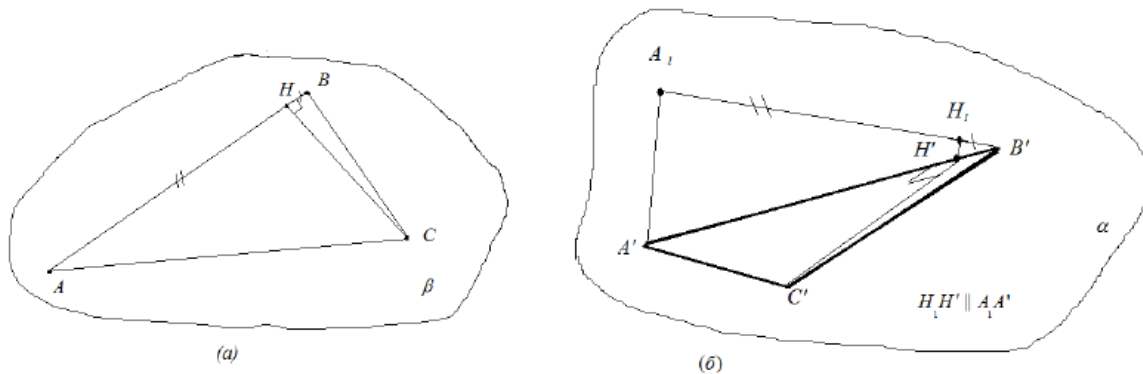


Рис. 94

цілком довільним, паралельне проєктування, що розглядається, для площини β є невиродженим.

Як відомо, висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини даного трикутника до прямої, що містить протилежну сторону ([5; 8], наприклад). Проведемо перпендикуляр

CH до прямої AB (рис. 94 (а)). Згідно теореми 3.5, зображенням відрізка CH буде відрізок, для знаходження якого достатньо побудувати зображення його кінців. Точка C' є зображенням точки C . Зображення H' точки H належить прямій $A'B'$. Однозначну побудову точки H' описано при розв'язанні задач 39 і 40 розділу I, виконано на рис. 94 (б). Відрізок $C'H'$ є шуканим зображенням висоти CH . У загальному випадку відрізок $C'H'$ не є висотою трикутника $A'B'C'$. ■

При наведеному розв'язанні задачі 6.13 було суттєво використано трикутник-оригінал. Подальші міркування обґрунтовують той факт, що для даної задачі це є необхідним.

Задача 6.14. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B , але оригінал загублено. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти CH трикутника ABC .*

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 95 (а)). Форма трикутника-оригінала ABC є невідомою, отже, зрозуміло лише, що зображенням його висоти CH буде такий відрізок $C'H'$, що точка H' належить прямій $A'B'$. Справедливим є наступне твердження: за умови задачі 6.14, довільний відрізок $C'H'$, кінець H' якого належить прямій $A'B'$, можна прийняти за зображення висоти CH трикутника ABC .

Насправді, нехай точка H' є довільною точкою прямої $A'B'$. Нехай, для визначеності, точка A' лежить між точками B' і H' (рис. 95 (а)). Розглянемо відрізок AB , який дорівнює відрізку $A'B'$ ($A'B' = AB$) і таку точку H на прямій AB , що точка A лежить між точками B і H , $AH = A'H'$. Через точку H , перпендикулярно до прямої AB , проведемо пряму a . На цій прямій розглянемо довільну

точку C , відмінну від точки H . Отримаємо трикутник ABC , для якого відрізок CH є висотою. За теоремою 4.3, існує невироджене для площини (ABC) паралельне проєктування, при якому зображенням трикутника ABC є трикутник $A'B'C'$ так, що зображенням вершини

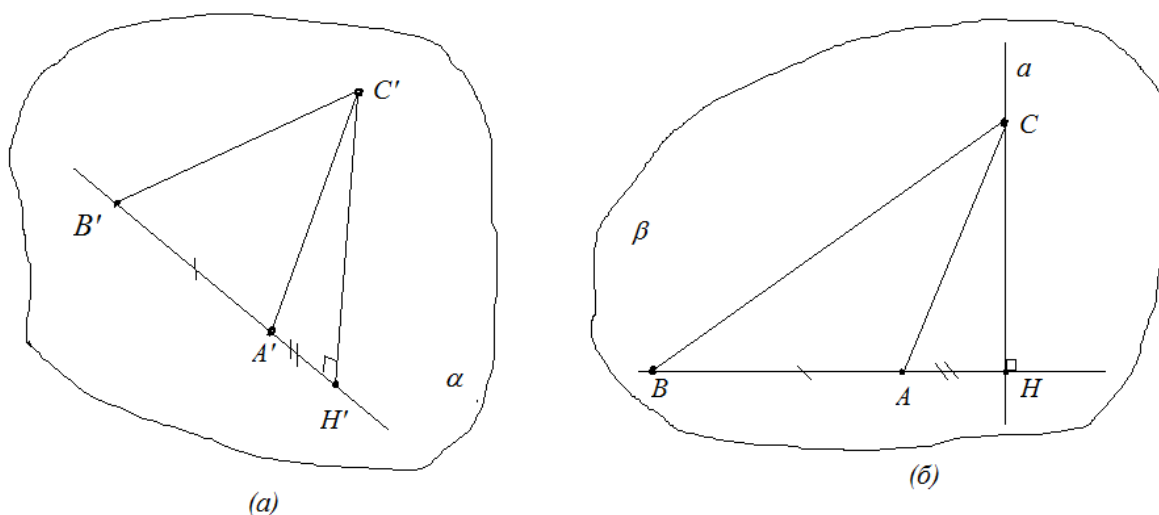


Рис. 95

A є точка A' , вершини B — точка B' . При цьому, за теоремами 3.4 і 3.10, зображенням точки H згідно застосованого закону зображення, є така точка H_1 прямої AB , що точка A' лежить між точками B' і H_1 ,

$$\frac{A'B'}{A'H_1} = \frac{AB}{AH}. \text{ Але, за побудовою, } AB = A'B'. \text{ Отже, } A'H_1 = AH. \text{ З}$$

іншого боку, точка H' на прямій $A'B'$ розташована так, що точка A' лежить між точками B' і H' , $A'H' = AH$. Звідси випливає, що точка H_1 співпадає з точкою H' , саме точка H' при даному законі зображення є зображенням точки H , відрізок $C'H'$ є зображенням висоти CH трикутника ABC (рис. 95 (б)).

У підсумку, для трикутника $A'B'C'$ і відрізка $C'H'$ знайдено можливий оригінал, справедливність сформульованого твердження обґрунтовано. Форма знайденого оригінала не є визначеною однозначно, вона залежить від розташування точки C на прямій a . ■

Задача 6.15. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Побудуйте точку T' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням ортоцентра T трикутника ABC .*

Розв'язання. $\square$ Ортоцентром трикутника називають точку перетину прямих, що містять висоти даного трикутника. У евклідовій геометрії кожний трикутник має точно три висоти, прямі, що їх містять, перетинаються у одній точці — ортоцентрі даного трикутника ([5; 8], наприклад).

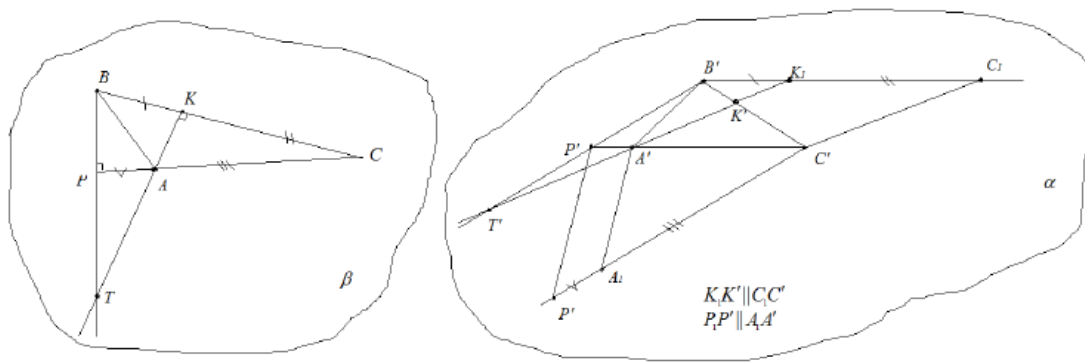


Рис. 96

За умови даної задачі задано і трикутник-оригінал, і трикутник-зображення. Проєктування для площини трикутника-оригінала, зрозуміло, є невиродженим.

Для розв'язання задачі варто, за методом, запропонованим при розв'язанні задачі 6.13, побудувати відрізки, які є зображеннями двох висот трикутника ABC , і визначити шукану точку T' як точку перетину прямих, що ці відрізки містять. Такі побудови продемонстровано на рис. 96. $\blacksquare$

Використання трикутника-оригінала для розв'язання задачі 6.15 є неминучим. Про це свідчить розв'язок наступної задачі.

Задача 6.16. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B , але оригінал загублено. Побудуйте точку T' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням ортоцентра T трикутника ABC .

Розв'язання. $\square$ По-перше, з'ясуємо, де, по відношенню до трикутника ABC , залежно від форми даного трикутника, може знаходитися його ор-

тоцентр. Припустимо спочатку, що трикутник ABC

є гострокутним (рис. 97). Проведемо його висоту

AN . Точка N на-

лежить прямій BC . Зрозуміло, що точка N не співпадає ані з точкою B , ані з точкою C , бо $\angle ABC \neq 90^\circ$ і $\angle ACB \neq 90^\circ$. Отже, існують прямокутні трикутники ABN і ACH . У трикутнику ABN кут ABN є гострим. Це означає, що кут ABC співпадає з кутом ABN , точка N є внутрішньою точкою променя BC . Аналогічно, з кутом ACH співпадає кут ACB і тому точка N є внутрішньою точкою променя CB . Звідси випливає, що точка N є внутрішньою точкою відрізка BC промінь AN проходить між сторонами кута BAC , усі внутрішні точки відрізка AN належать внутрішній області трикутника ABC .

Проведемо висоту BP трикутника ABC . Для неї правильними є аналогічні міркування. Отже, точка P є внутрішньою точкою відрізка AC , промінь BP проходить між сторонами кута ABC , усі внутрішні точки відрізка BP належать внутрішній області трикутника ABC . За

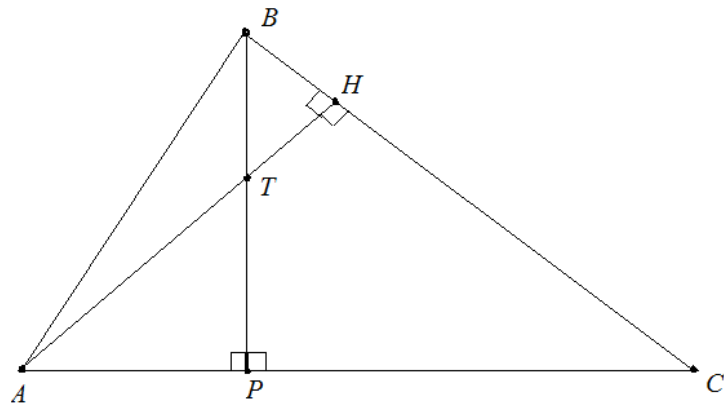


Рис. 97

відомим фактом евклідової геометрії, промінь, що виходить з вершини кута і проходить між його сторонами, перетинає кожний відрізок з кінцями на сторонах цього кута. Отже, промінь BP перетинає відрізок

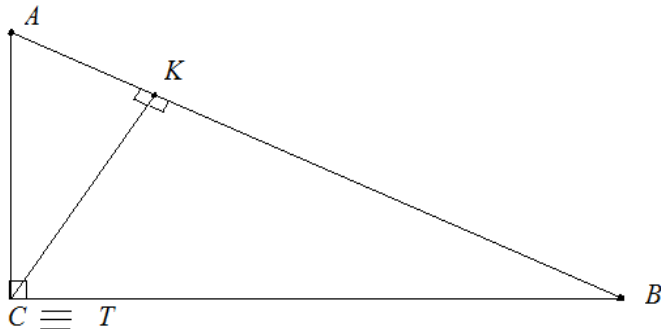


Рис. 98

перетинаються саме висоти трикутника ABC , ортоцентр T гострокутного трикутника ABC знаходиться у внутрішній області цього трикутника.

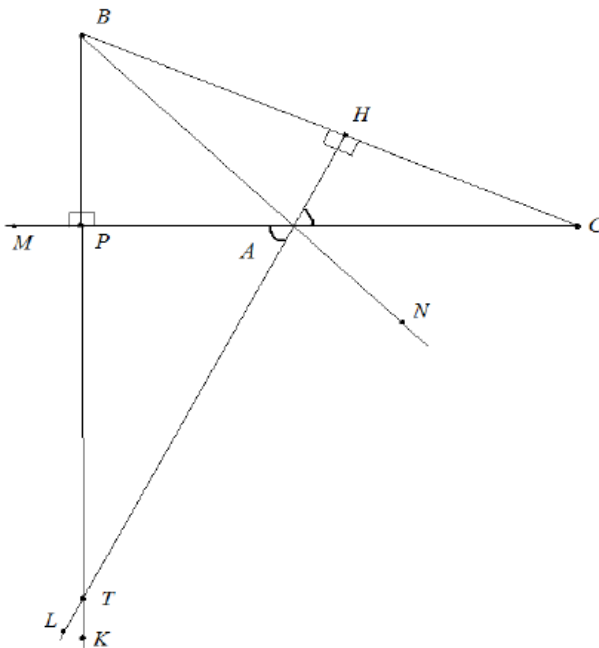


Рис. 99

тільки-но обґрунтованого, у даному випадку висота AN трикутника ABC є відрізком, усі внутрішні точки якого належать внутрішній області трикутника ABC , кінець N якого є внутрішньою точкою сторони BC .

Трикутник ANC є прямокутним з прямим кутом ANC . Отже,

AN , промінь AN перетинає відрізок BP . Звідси випливає, що в ортоцентрі T трикутника ABC , у випадку гострокутного трикутника ABC , пе-

Ортоцентр прямокутного трикутника, зрозуміло, співпадає з вершиною його прямого кута (рис. 98).

Тепер розглянемо той випадок, коли трикутник ABC є тупокутним. Нехай його тупим кутом є кут BAC . Тоді кути ABC і ACB є гострими (рис. 99). За аналогією до

його кут HAC є гострим, гострим є і вертикальний до нього кут MAL . Оскільки промінь AN проходить між сторонами тупого кута BAC , промінь AL , доповняльний до променя AN , належить внутрішній області кута MAN , вертикального до кута BAC .

Проведемо висоту BP трикутника ABC . Точка P належить прямій AC . Вона не співпадає з точкою A , бо кут BAC не є прямим. Утворюється прямокутний трикутник $BA P$. Його кут $BA P$ є гострим, отже, він не співпадає з кутом BAC , точка P лежить на промені AM , який є доповняльним до променя AC .

Пряма AC є січною для прямих BP і AN , першу з них вона перетинає у точці P , другу – у точці A . Розглянемо ту півплощину відносно прямої AC , яка не містить точку B . Дана півплощина містить промінь PK прямої BP доповняльний до променя PB , і промінь AL прямої AN . Промені PK і AL утворюють з прямою AC внутрішні односторонні кути KPA і MAL . Перший з них є прямим, другий – гострим. Отже, сума цих кутів є меншою за 180° , промені PK і AL , згідно теореми Евкліда, перетинаються у певній точці. Зрозуміло, що ця точка є і точкою перетину прямих BP і AN , тобто, ортоцентром T трикутника ABC .

У підсумку, доведено, що у даному випадку ортоцентр T трикутника ABC належить зовнішній області трикутника ABC , лежить у внутрішній області кута, вертикального до тупого кута трикутника ABC .

У результаті, визначеними є усі можливі варіанти розміщення ортоцентра T трикутника ABC у залежності від форми трикутника ABC . Одночасно, в силу того, що при невиродженому для неї паралельному проєктуванні півплощина зображується півплощиною (теорема 3.8) і тому внутрішня область трикутника – його внутрішньою областю, внутрішня область кута – його внутрішньою

областю, доведено, що, якщо трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC при паралельному проєктуванні, то зображення T' ортоцентра T трикутника ABC належить множині, заштрихованій на рис. 100, точки A' , B' , C' включно.

Розглянемо заданий умовою задачі трикутник $A'B'C'$. Оберемо у

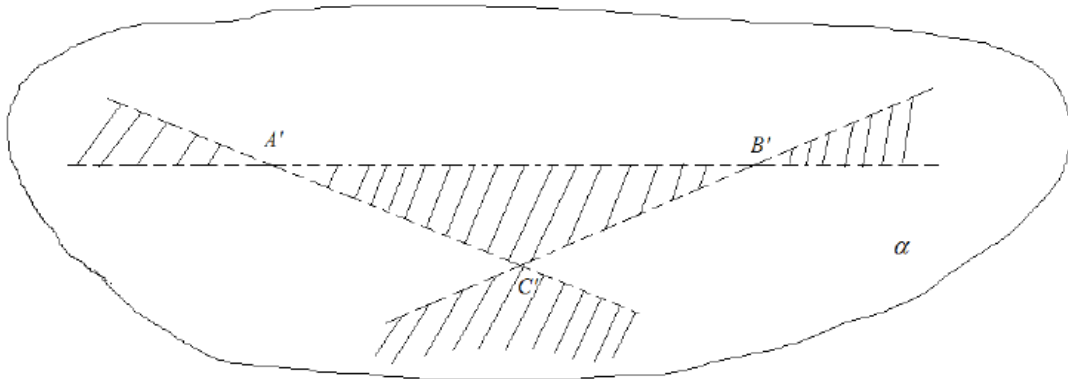


Рис. 100

його внутрішній області довільну точку T' (рис. 101). Обґрунтуємо, що існує такий трикутник ABC з ортоцентром T , який при певному паралельному проєктуванні зображується трикутником $A'B'C'$ так, що саме точка T' стає зображенням точки T .

У трикутнику $A'B'C'$ через точку T' проведемо відрізки $A'H'$ і $B'P'$ до перетину зі сторонами $B'C'$ і $A'B'$ трикутника $A'B'C'$, відповідно, у точках H' і P' (існування точок H' і P' нескладно обґрунтувати). Проведемо пряму $H'K \parallel B'P'$ до перетину з відрізком $P'C'$ у точці K . Далі, у тій півплощині відносно прямої $A'C'$, що не містить точку B' , через точки P' і K , перпендикулярно до прямої $A'C'$, проведемо промені $P'M$ і KN . На відрізку $A'C'$, як на діаметрі, у тій самій півплощині побудуємо півколо. Позначимо через N точку перетину цього півкола з променем KN , через B — точку перетину променя CH з променем $P'M$ (існування цих точок також нескладно обґрунтувати).

Будемо вважати, що точка A співпадає з точкою A' , точка C — з

точкою C' . Розглянемо трикутник ABC . За теоремою 4.3, існує паралельне проєктування, при якому саме трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC так, що точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C , для площини (ABC) таке проєктування є не виродженням.

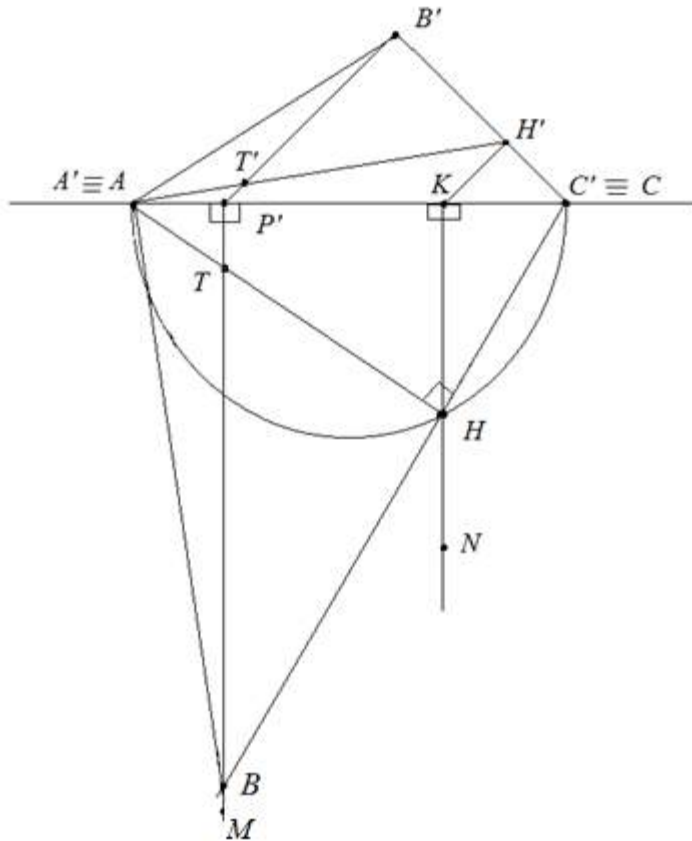


Рис. 101

Відрізок BP' є висотою трикутника ABC за побудовою. Кут AHC дорівнює 90° , бо є тим вписаним у коло кутом, який спирається на діаметр даного кола. Отже, відрізок AH також є висотою трикутника ABC . Точка T перетину висот BP' і AH є ортоцентром трикутника ABC . (Існування точки T саме як

точки перетину відрізків BP' і AH неважко обґрунтувати). Згідно побудови, відрізок $A'P'$ співпадає з відрізком AP' , відрізок $P'C'$ – з відрізком $P'C$. Обидва відрізка належать одній прямій. Значить, при паралельному проєктуванні зберігається відношення їх довжин. Це означає, що, згідно даного закону зображення, зображенням точки P' є саме ця точка, зображенням висоти BP' трикутника ABC – відрізок $B'P'$. Прямі BP' і HK є паралельними між собою як два перпендикуляра до однієї прямої. Зображенням точки K є саме ця точка, бо

точка K , як і точка P' , належить прямій AC . При невиродженому паралельному проєктуванні паралельні прямі зображуються паралельними прямими. Отже, зображенням прямої HK є пряма, яка проходить через точку K паралельно до прямої $B'P'$. Але, за побудовою, $H'K \parallel B'P'$. Значить, саме пряма $H'K$ є зображенням прямої HK . $H = BC \cap HK$, $AH' = B'C' \cap H'K$. Звідси випливає, що саме точка H' є зображенням точки H згідно даного закону зображення, відрізок $A'H'$ – зображенням висоти AH трикутника ABC . Відрізки $B'P'$ і $A'H'$ перетинаються у точці T' . Точка перетину відрізків-оригіналів при невиродженому паралельному проєктуванні зображується точкою перетину відрізків-зображень. Значить, зображенням точки T є саме точка T' , шуканий трикутник ABC знайдено.

Якщо точка T' співпадає з однією з вершин трикутника $A'B'C'$, для визначеності, з вершиною C' , то зрозуміло, що за оригінал можна прийняти довільний прямокутний трикутник ABC з прямим кутом при вершині C (і лише такий трикутник).

Виберемо тепер точку T' всередині кута, який є вертикальним до певного кута заданого трикутника $A'B'C'$, нехай, для визначеності, до кута $B'A'C'$ (рис. 102). Побудуємо відрізок $T'B'$ та проведемо промінь $T'A'$ до перетину зі стороною $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ у точці H' (така точка H' буде існувати завдяки вищевказаному розташуванню точки T'). Відрізок $T'B'$ перетне пряму $A'C'$, а саме, промінь, доповняльний до променю $A'C'$, у певній точці P' . Через точку H' , паралельно до прямої $B'T'$, проведемо промінь $H'N$ до перетину з відрізком $A'C'$ у певній точці K . Така точка буде існувати, бо промінь $H'N$ належить внутрішній області кута $A'H'C'$. Дійсно, точка K буде існувати як точка перетину променя $H'N$ з прямою $A'C'$. Кут $P'T'A'$

дорівнює куту $\angle KH'A'$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих $T'B'$ і $H'K$ та січній $T'H'$. Кут $\angle T'H'C'$ є зовнішнім кутом для трикутника $T'H'B'$. Отже,

$$\begin{aligned}\angle T'H'C' &> \angle B'T'H' + \angle T'B'H' = \angle A'H'K + \angle T'B'H', \\ (\angle T'H'C') &> (\angle A'H'K).\end{aligned}$$

Промені $H'K$ і $H'S'$ належать одній півплощині відносно прямої

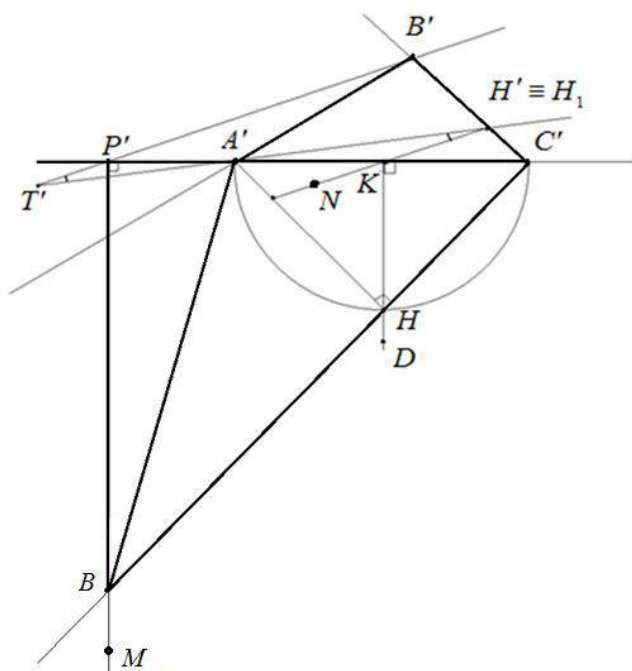


Рис. 102

$T'H'$. Тому доведена нерівність свідчить про те, що промінь $H'N$ проходить між сторонами $\angle A'H'C'$. Це обґрунтовує той факт, що точка K є внутрішньою точкою відрізка $A'C'$.

У тій півплощині відносно прямої $A'C'$, що не містить точку B' , на відрізку $A'C'$, як на діаметрі, побудуємо півколо.

У тій самій півплощині побудуємо промені $P'M$ і KD , перпендикулярні до прямої $A'C'$. Промінь KD перетне побудоване півколо у певній точці H . Проведемо промінь $C'H$ до перетину з променем $P'M$ у деякій точці B . Розглянемо трикутник $A'B'C'$, $\angle A'HC' = 90^\circ$, бо є кутом, вписаним у коло, який спирається на діаметр. Отже, відрізок $A'H$ є висотою даного трикутника. Іншою висотою цього трикутника є, за побудовою, відрізок BP' .

Згідно теореми 4.3, будь-який трикутник може бути зображенням будь-якого трикутника при певному паралельному проєктуванні.

Розглянемо паралельне проєктування, при якому трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC так, що зображенням точки B є точка B' , для точок A і C оригінали співпадають із зображеннями. Згідно даного закону зображення, для точки P зображення також, очевидно, співпадає з оригіналом, зображенням висоти BP буде відрізок $B'P'$. Зображенням точки H буде така точка H_1 відрізка $B'C'$, що

$$\frac{B'H_1}{H_1C'} = \frac{BH}{HC'}. \text{ Але, за теоремою Фалеса, для кута } P'C'B \text{ (} KH \parallel P'B \text{ як}$$

два перпендикуляра до однієї прямої) $\frac{BH}{HC'} = \frac{P'K}{KC'}$. За теоремою

Фалеса, для кута $B'C'P'$ ($H'K \parallel B'P'$ за побудовою) $\frac{P'K}{KC'} = \frac{B'H'}{H'C'}$.

$$\text{Отже, } \frac{BH}{HC'} = \frac{B'H'}{H'C'}.$$

Звідси випливає, що точка H_1 співпадає з точкою H' . Відрізок $A'H'$, згідно даного закону зображення, є зображенням висоти AH трикутника ABC . Прямі $B'P'$ і $A'H'$ перетинаються у точці T' . При невиродженому паралельному проєктуванні точка перетину прямих-зображень є зображенням точки перетину прямих-оригіналів. Отже, згідно даного закону зображення, точка T' є зображенням ортоцентра T трикутника ABC . Шуканий оригінал для трикутника ABC і точки T у тому випадку, що розглядається, знайдено.

У підсумку, обґрунтовано, що довільну точку заштрихованої на рис. 100 області, точки A , B , C включно, і лише таку точку можна прийняти за зображення ортоцентра трикутника-оригінала ABC у випадку, коли цей трикутник-оригінал загублено. ■

Ідею наведеного способу розв'язання задачі 6.16 взято з [35].

Задача 6.17. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC .

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано трикутник ABC площини β і трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 103).

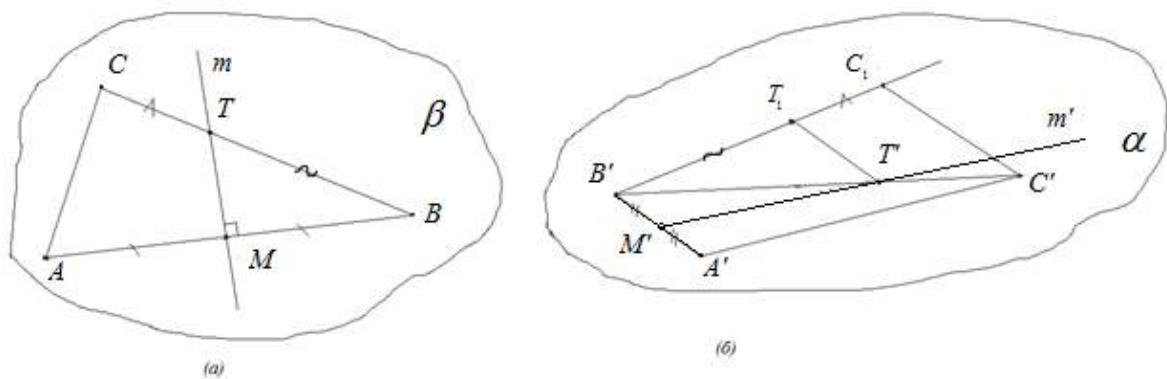


Рис. 103

Згідно теореми 4.3, обидва трикутника можуть бути довільними. Серединним перпендикуляром до сторони AB трикутника ABC називається пряма, яка проходить через середину M сторони AB перпендикулярно до прямої AB ([5; 8], наприклад).

Зображенням відрізка AB є відрізок $A'B'$. Зображенням середини M відрізка AB – точка M' , що є серединою відрізка $A'B'$. Проведемо серединний перпендикуляр m до сторони AB трикутника ABC . Пряма m або пройде через вершину C цього трикутника, або у певній внутрішній точці перетне його сторону AC чи його сторону CB . Розглянемо, для визначеності, той випадок, коли пряма m перетинає саме сторону CB трикутника ABC у точці T (рис. 103 (a)). Згідно теорем 3.5 і 3.10, зображення T' точки T при застосованому законі

зображення є внутрішньою точкою відрізка $C'B'$ і може бути побудовано на картинній площині α однозначно, за теоремою Фалеса, за допомогою циркуля і лінійки (рис. 103 (б)). Пряма $M'T'$ при даному законі зображення є шуканим зображенням m' серединного перпендикуляра m до сторони AB трикутника ABC . ■

Зрозуміло, що, згідно теореми 5.1, сформульована задача завжди має єдиний розв'язок. У той же час, використання для її розв'язання трикутника-оригінала є неминучим. Про це свідчить розв'язок наступної задачі.

Задача 6.18. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B , але оригінал загублено. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC .*

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 104). Зрозуміло, що, незалежно від форми трикутника-оригінала ABC , зображенням m' серединного

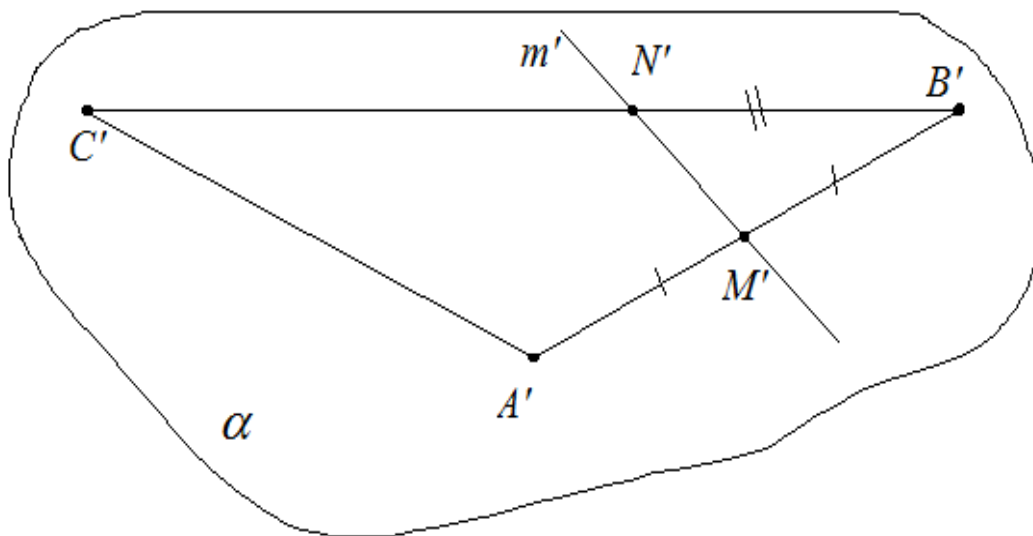


Рис. 104

перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC буде пряма, яка проходить через середину M' відрізка $A'B'$. Обґрунтуємо, що довільна пряма m' картинної площини α , яка проходить через точку M' і не співпадає з прямою $A'B'$, може бути зображенням середнього перпендикуляра до сторони AB певного трикутника ABC .

На картинній площині α через точку M' проведемо довільну пряму m' відмінну від прямої $A'B'$. Така пряма або пройде через вершину C' трикутника $A'B'C'$, або перетне його сторону $A'C'$ чи його сторону $B'C'$ у певній внутрішній точці. Нехай, для визначеності, пряма m' перетне сторону $B'C'$ у точці N' (рис. 104). Розглянемо на довільній площині β відрізок BC , який дорівнює відрізку $B'C'$ (рис. 105). Розглянемо на ньому таку точку N , що $BN = B'N'$. На площині β проведемо такий промінь BK , що кут KBC є гострим.

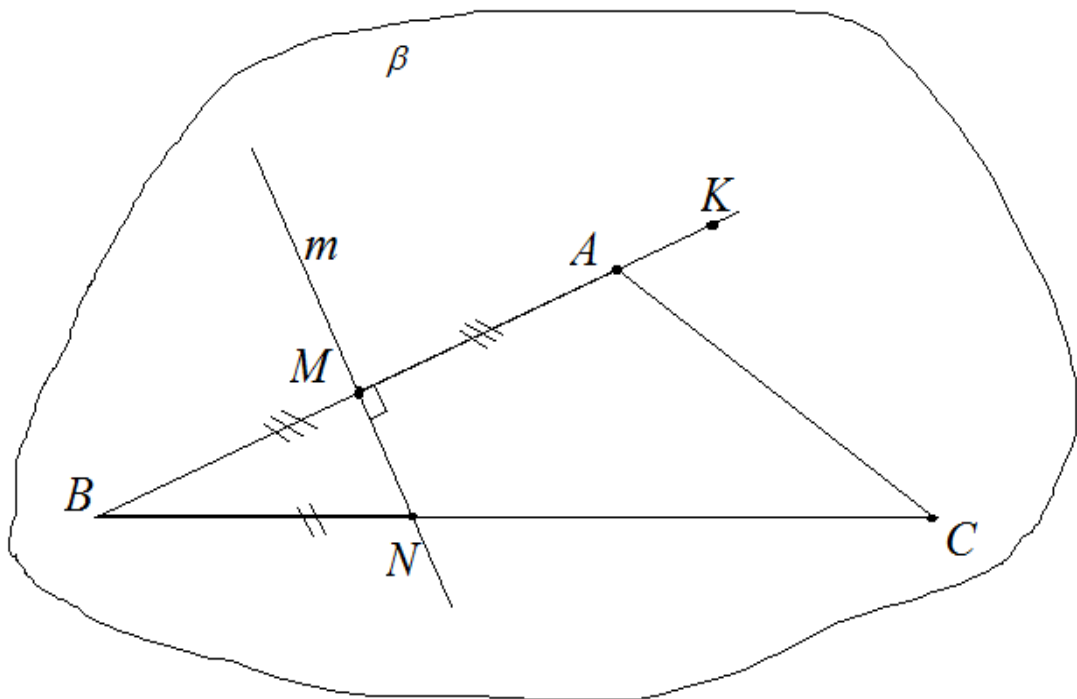


Рис. 105

Проведемо $NM \perp BK$. Точка M буде належати променю BK . На промені, доповняльному до променя MB , відкладемо відрізок MA ,

$MA=MB$. Згідно теореми 4.3, існує таке паралельне проєктування, що при відповідному законі зображення зображенням трикутника ABC є трикутник $A'B'C'$, при цьому, точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Згідно даного закону зображення, зображенням точки N буде точка N' , тому, що при невиродженому паралельному проєктуванні зберігається відношення довжин відрізків,

які належать одній прямій, а, за побудовою, $\frac{BN}{BC} = \frac{B'N'}{B'C'}$. Точка M є

серединою відрізка AB . Отже, її зображенням буде саме точка M' — середина відрізка $A'B'$. Але тоді зображенням прямої MN буде пряма $M'N'$ (пряма m'). Шуканий оригінал знайдено, сформульований факт доведено. Отже, задачу розв'язано.

Якщо побудована пряма m' проходить через точку C' , то за оригінал для трикутника $A'B'C'$ можна прийняти довільний трикутник ABC , у якого $AC=BC$. ■

Зрозуміло, що дана задача має безліч розв'язків. Навіть при фіксованій на відрізку $B'C'$ точці N' форма трикутника-оригінала ABC залежить від величини гострого кута KBC .

Задача 6.19. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Побудуйте точку Q' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням центра Q кола, описаного навколо трикутника ABC .*

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано трикутник ABC площини β і трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 106 (а), (б)). Згідно теореми 4.3, обидва трикутники можуть бути довільними. У евклідовій геометрії навколо кожного трикутника можна

описати єдине коло, центр якого є точкою перетину серединних

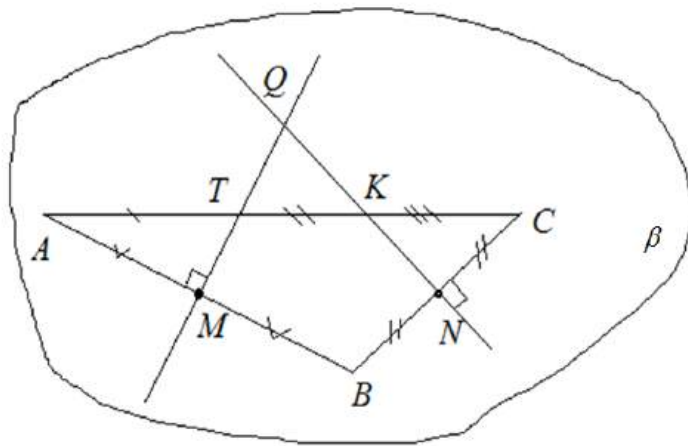


Рис. 106 (а)

перпендикулярів до сторін даного трикутника ([5; 8], наприклад).

Отже, для знаходження центра Q кола, описаного навколо трикутника ABC , достатньо побудувати серединні

перпендикуляри до

двох сторін даного трикутника, припустимо, до сторін AB і BC , і знайти точку Q їх перетину. Зображення серединних перпендикулярів до сторін AB і BC на картинній площині α можна однозначно

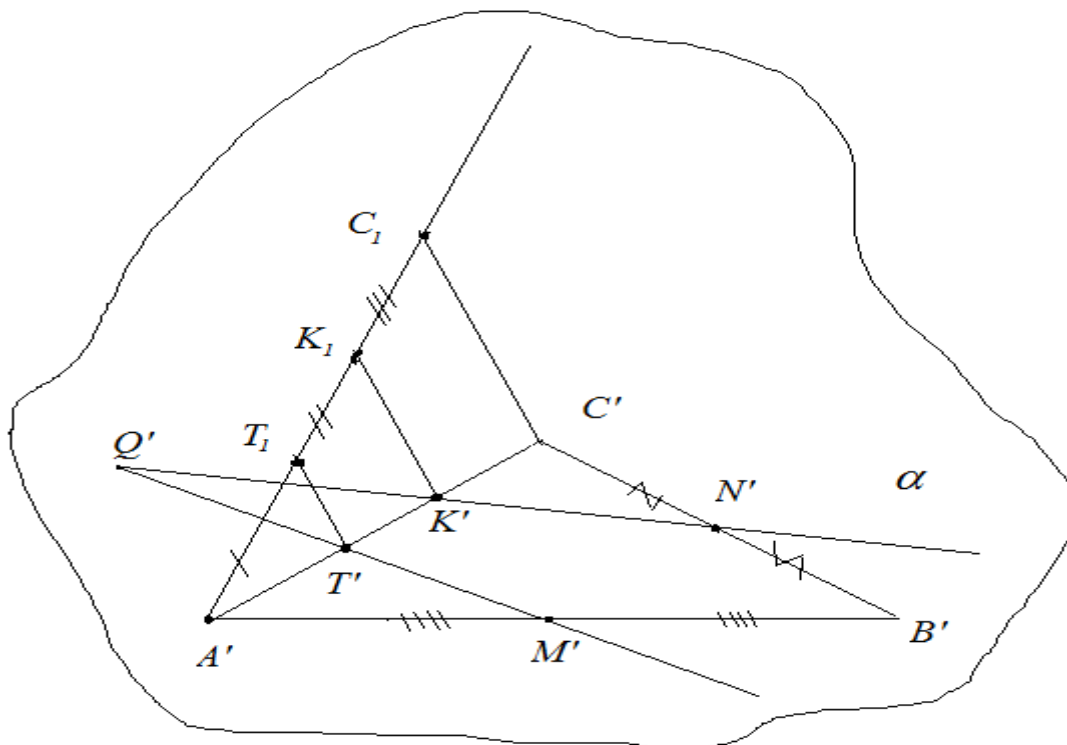


Рис. 106(б)

побудувати так само, як при розв'язанні задачі 6.17. Точка Q' перетину таких побудованих прямих буде шуканим зображенням точки Q .

Наведені міркування неявним чином свідчать про те, що при розв'язанні даної задачі використання оригінала, тобто застосування теореми Фалеса, виключити неможливо.

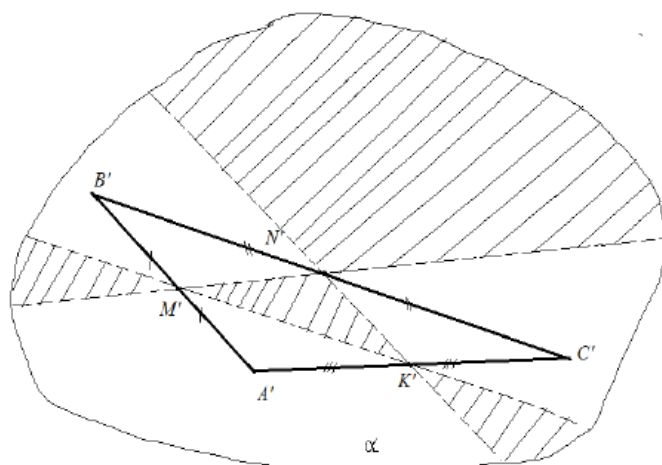
Розв'язання задачі такого типу вважається тим більш раціональним, чим меншу кількість разів воно вимагає звернення до оригінала (використання теореми Фалеса). Дану задачу завжди можна розв'язати за допомогою використання теореми Фалеса два рази. Зрозуміло, що у випадку заданого умовою задачі рівностороннього трикутника ABC або прямокутного трикутника ABC , потреби у використанні теореми Фалеса немає взагалі. У випадку будь-якої іншої форми трикутника ABC теорему Фалеса можна використати лише один раз, якщо належним чином обрати ті дві сторони трикутника ABC , до яких проводяться серединні перпендикуляри. Саме таким шляхом розв'язання задачі 6.19 продемонстровано на рис. 106 (б). ■

Задача 6.20. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B , але оригінал загублено. Побудуйте точку Q' , яка згідно застосованого закону зображення є зображенням центра Q кола, описаного навколо трикутника ABC .*

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α . Згідно теореми 4.3, незалежно від форми загубленого трикутника ABC , форма трикутника $A'B'C'$ може бути цілком довільною. Розв'язання задачі 6.18 вказує на те, що, скоріше за все, задача 6.20 не має однозначного розв'язку.

Обґрунтуємо, що довільна точка заштрихованої на рис. 107 множини, точки M' , N' , K' включно, і лише така точка, може бути зображенням Q' центра Q кола, описаного навколо загубленого

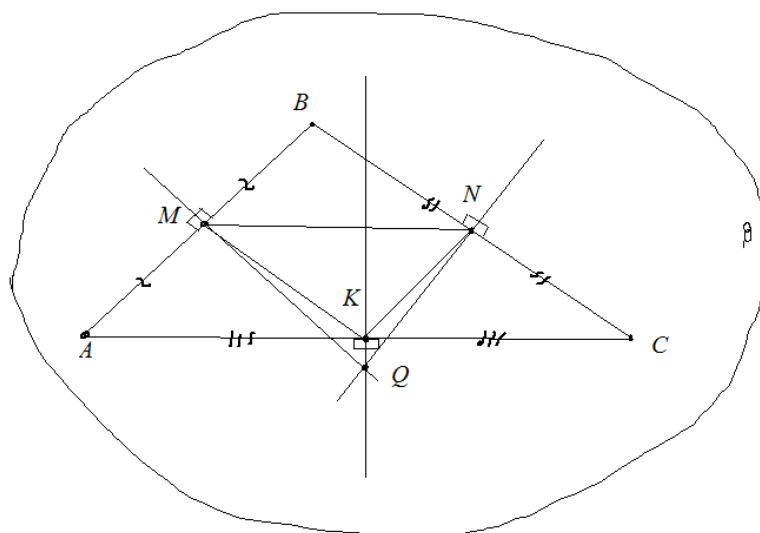
трикутника ABC . На рис. 107 на картинній площині α зображено трикутник $A'B'C'$, його середні лінії $M'N'$, $N'K'$, $M'K'$, а також прямі, що ці середні лінії містять. Згідно задачі 6.6, незалежно від форми трикутника-оригіналу ABC , відрізки $M'N'$, $N'K'$, $M'K'$ є зображеннями середніх



$$A'M' = M'B'; B'N' = N'C'; A'K' = K'C'$$

Рис. 107

ліній трикутника ABC , відповідно, відрізків MN , NK , MK . У



$$AM = MB; BN = NC; AK = KC; MQ \perp AB; NQ \perp BC; KQ \perp AC$$

Рис. 108

евклідовій геометрії серединні перпендикуляри до сторін трикутника ABC є прямими, що містять висоти трикутника MNK , утвореного середніми лініями трикутника ABC

(рис. 108) ([14], на-

приклад). При невиродженому для площини оригінала паралельному проєктуванні прямі зображуються прямими, півплощини – півплощинами, паралельні прямі – паралельними прямими.

Отже, справедливість сформульованого твердження впливає з наведеного розв'язання задачі 6.16. ■

Питання і завдання для самоконтролю до §6

6.1. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Який відрізок може бути зображенням медіани BM трикутника ABC при застосованому законі зображення? Відповідь обґрунтуйте.

6.2. Наведіть означення центроїду трикутника. Чи є справедливим твердження про те, що при невиродженому для трикутника паралельному проєктуванні центроїд трикутника-оригінала завжди зображується центроїдом трикутника-зображення? Відповідь обґрунтуйте.

6.3. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Трикутник-оригінал ABC загублено. Який відрізок, згідно застосованого закону зображення, може бути зображенням середньої лінії трикутника ABC , паралельної до сторони BC ? Відповідь обґрунтуйте.

6.4. Чи є правильним твердження про те, що при невиродженому паралельному проєктуванні зображенням бісектриси заданого трикутника-оригінала завжди є бісектриса трикутника-зображення? Відповідь обґрунтуйте.

6.5. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Чи є обов'язковою побудова бісектриси AL

трикутника-оригінала для побудови зображення цієї бісектриси згідно даного закону зображення? Відповідь обґрунтуйте.

6.6. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Чи є обов'язковим безпосереднє використання трикутника-оригінала ABC для побудови зображення його бісектриси AL згідно застосованого закону зображення? Відповідь обґрунтуйте.

6.7. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , але оригінал загублено. Який відрізок можна прийняти за зображення бісектриси CL трикутника ABC згідно застосованого закону зображення. Відповідь обґрунтуйте.

6.8. Наведіть означення інцентра трикутника. Чи є справедливим твердження про те, що при невиродженому для трикутника паралельному проєктуванні зображенням інцентра цього трикутника завжди є інцентр трикутника-зображення? Відповідь обґрунтуйте.

6.9. Для заданого трикутника ABC задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням трикутника ABC за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення інцентра трикутника-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

6.10. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC , але оригінал загублено. Яку точку можна прийняти за зображення інцентра трикутника ABC згідно застосованого закону зображення?

6.11. Задано трикутник $A'B'C'$ і відрізок $B'L'$. Точка L' належить відрізку $A'C'$ і ділить його у відношенні 3:5. Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC , так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , відрізок $B'L'$ – зображенням бісектриси BL трикутника ABC . Вкажіть характер повноти заданого зображення. Відповідь обґрунтуйте.

6.12. Задано трикутник $A'B'C'$ і точку O' у внутрішній області трикутника, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$. Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC , точка O' при цьому є зображенням інцентра O даного трикутника. Вкажіть характер повноти заданого зображення. Відповідь обґрунтуйте.

6.13. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC , так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Як можна побудувати зображення згідно застосованого закону зображення висоти $АН$ трикутника ABC ? Чи завжди подібна побудова вимагає явного використання оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

6.14. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , але оригінал загублено. Який відрізок можна прийняти за зображення згідно застосованого закону зображення висоти $ВН$ трикутника ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

6.15. Наведіть означення ортоцентра трикутника. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' зображенням точки B . Як можна побудувати зображення згідно застосованого закону зображення ортоцентра трикутника ABC ? Чи обов'язково вимагає подібна побудова явного використання оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

6.16. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC , але оригінал загублено. Яку точку можна прийняти за зображення згідно застосованого закону зображення ортоцентра трикутника ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

6.17. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC , так, що точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Як можна побудувати зображення, згідно застосованого закону зображення, серединного перпендикуляра до сторони AC трикутника ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

6.18. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B , але оригінал загублено. Яку геометричну фігуру, згідно застосованого закону зображення, можна прийняти за зображення серединного перпендикуляра до сторони AC трикутника ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

6.19. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так,

що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Як можна побудувати зображення згідно застосованого закону зображення центра кола, описаного навколо трикутника ABC ? Чи обов'язково вимагає подібна побудова явного використання оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

6.20. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC , але оригінал загублено. Де може бути розташовано точку, яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням центра кола, описаного навколо трикутника ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

6.21. Визначте, які з наведених у §6 задач є афінними задачами теорії зображень фігур евклідової геометрії? Відповідь обґрунтуйте.

6.22. Визначте, які з наведених у §6 задач є евклідовими задачами теорії зображень фігур евклідової геометрії? Відповідь обґрунтуйте.

§7. Зображення плоских n -кутників, $n \in N, n > 3$, при невиродженому для даних фігур паралельному проектуванні

У евклідовій геометрії під n -кутником-каркасом, $n \in N, n > 3$, розуміють просту замкнену ламану, яка містить n ланок. При цьому ламаною $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, $n \in N, n \geq 2$, називають геометричну фігуру, утворену точками $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ і відрізками $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_{n+1}$, що

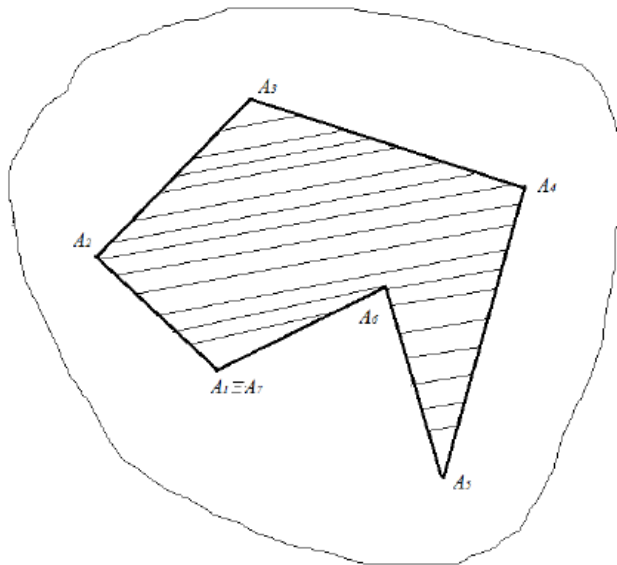


Рис. 109

послідовно сполучають ці точки. Точки називають вершинами ламаної, відрізки – її ланками. Ламану називають замкненою, якщо її вершина A_{n+1} співпадає з її вершиною A_1 . Ламану називають простою, якщо жодні дві її сусідні ланки не належать одній прямій і жодні дві її ланки не мають спільних внутрішніх

точок (див., наприклад, [6; 14; 23]).

Вершини відповідної ламаної називають вершинами n -кутника, а ланки – сторонами n -кутника. Так, на рис. 109 зображено шестикутник-каркас $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, а на рис. 110 – п'ятикутник-каркас $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Перший з них має шість вершин ($A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, сьома вершина співпадає з першою) і шість сторін ($A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_5, A_5 A_6, A_6 A_1$), другий – п'ять вершин

(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , шоста вершина співпадає з першою) і п'ять сторін ($A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$).

n -кутник-каркас, $n \in N, n > 3$, як і кожен геометричний фігуру, називають плоским, якщо існує площина, якій належать усі його точки. Зрозуміло, що для того, щоб n -кутник-каркас був плоским, необхідно і достатньо, щоб існувала площина, якій належать усі його вершини. На рисунках 109 і 110 зображено плоскі n -кутники-каркаси. Кожен плоский n -кутник-каркас розділяє площину, якій він належить, на дві підмножини. Одну з таких підмножин для даного n -кутника-каркаса називають його внутрішньою областю (на рисунках 109 і 110 внутрішні області зображених n -кутників-каркасів заштриховано), іншу – його зовнішньою областю. Кожна з областей визначається за допомогою об'єднань та перетинів відповідних півплощин. Плоский n -кутник-каркас разом з його внутрішньою областю також називають плоским n -кутником ($n \in N, n > 3$).

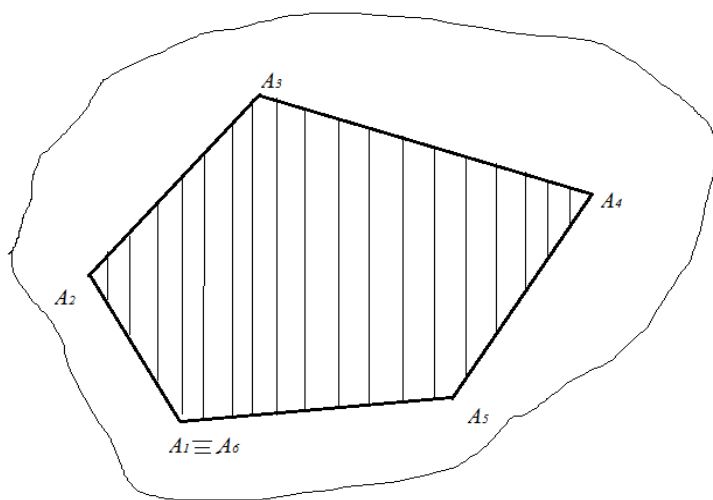


Рис. 110

n -кутника-каркаса паралельному проєктуванню його зображення є також плоский n -кутник-каркас. При цьому зображенням вершин n -кутника-оригінала є відповідні вершини n -кутника-зображення, зображенням сторін n -кутника-оригінала є відповідні сторони

n -кутника-зображення, зображенням внутрішньої області n -кутника-

оригінала є внутрішня область n -кутника-зображення. Згідно означень, саме таке проєктування для плоских n -кутників-каркасів вважають невиродженим.

За наявності оригінала, загальна теорія побудови зображень плоских n -кутників, $n \in N, n > 3$, при невиродженому для них паралельному проєктуванні спирається на застосування теореми 5.1 – основної теореми теорії зображень плоских геометричних фігур за методом паралельного проєктування та її наслідків. При цьому, спочатку обирають довільний трикутник площини плоского n -кутника-оригіналу. За зображення цього трикутника, згідно теореми 4.3, можна прийняти довільний трикутник картинної площини. Потім, за теоремою Фалеса, відбудовують зображення всіх вершин n -кутника-оригіналу і вже потім – зображення усього n -кутника. Найчастіше, у якості трикутника площини n -кутника-оригінала обирають трикутник, утворений вершинами даного n -кутника. Але не завжди.

У стандартному курсі геометрії для закладів загальної середньої освіти головним чином розглядають опуклі плоскі n -кутники, $n \in N, n > 3$ ([6; 9; 14], наприклад). Плоский n -кутник, $n \in N, n \geq 3$, називають опуклим у випадку, коли він має наступну властивість: якщо через будь-яку сторону даного n -кутника провести пряму, то усі точки цього n -кутника, які не належать цій прямій, будуть лежати у одній півплощині відносно даної прямої. На рис. 110 зображено опуклий п'ятикутник, а на рис. 109 – шестикутник, який не є опуклим. У відповідності до наведеного означення, кожний трикутник, зрозуміло, є опуклим. Із найпростіших властивостей паралельного проєктування випливає, що при невиродженому для n -кутника $n \in N, n > 3$, паралельному проєктуванні зображенням опуклого n -кутника є опуклий n -кутник, а не опуклого – не опуклий. Серед опуклих n -кутників, $n \in N, n > 3$, у першу чергу розглядають такі чотирикутники, як пара-

лелограм та його окремі види (прямокутник, ромб, квадрат) і трапецію, а також правильний шестикутник, і вже потім – правильний п'ятикутник, правильний семикутник та інші правильні n -кутники, $n \in N, n > 6$.

Саме тому, у теоретичному розділі даного навчального посібника зупинимося на основних твердженнях, які відносяться до можливих зображень паралелограмів, трапецій і правильного шестикутника.

Теорема 7.1. *Довільний паралелограм і лише паралелограм картинної площини може бути зображенням довільного паралелограма при невиродженому для останнього паралельному проєктуванні. Зокрема, довільний паралелограм картинної площини може бути зображенням довільного прямокутника, ромба чи квадрата при відповідному паралельному проєктуванні.*

Доведення. $\square$ Справедливість твердження про те, що при невиродженому паралельному проєктуванні зображенням будь-якого паралелограма може бути лише паралелограм, випливає з означення паралелограма і твердження теореми 3.9 про те, що при невиродженому для даних фігур паралельному проєктуванні зображенням пари паралельних прямих є пара паралельних прямих.

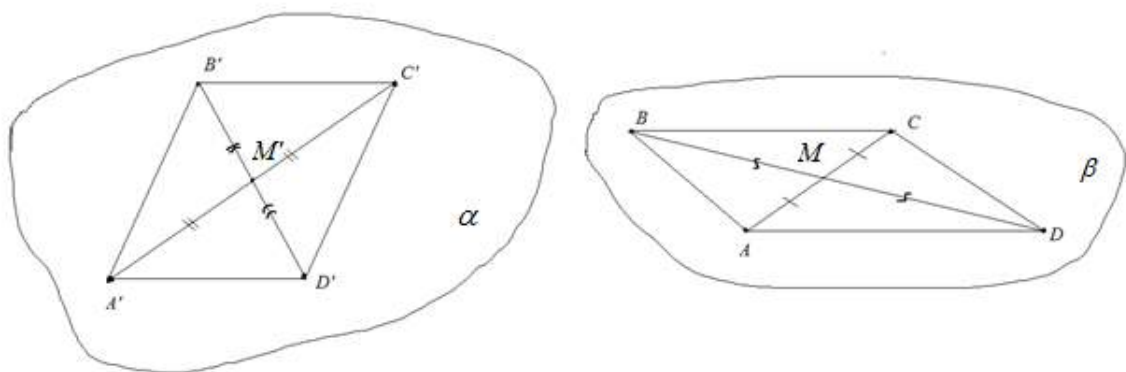


Рис. 111

Тепер обґрунтуємо справедливість другої частини теореми. Розглянемо довільний паралелограм $A'B'C'D'$ ($A'B' \parallel C'D'$) картинної

площини α . Розглянемо також довільний паралелограм $ABCD$. Він однозначно визначає площину β , якій належить (рис. 111). Згідно теореми 4.3, існує не вироджене для площини β паралельне проєктування h , при якому зображенням трикутника ABC , згідно відповідного закону зображення, є трикутник $A'B'C'$ так, що зображенням точки A є точка A' , зображенням точки B – точка B' . Найпростіші властивості зображень фігур за методом паралельного проєктування дозволяють стверджувати, що при цьому зображенням відрізка AC є відрізок $A'C'$, зображенням середини M відрізка AC – середина M' відрізка $A'C'$, зображенням відрізка BM – відрізок $B'M'$, зображенням променя BM – промінь $B'M'$.

Діагоналі кожного паралелограма перетинаються і діляться точкою перетину навпіл. Отже, діагональ BD паралелограма $ABCD$ містить точку M , діагональ $B'D'$ паралелограма $A'B'C'D'$ – точку M' , точка D розташована на промені BM так, що $BM = MD$ (точка D не співпадає з точкою B), точка D' розташована на промені $B'M'$ так, що $M'D' = B'M'$ (точка D' не співпадає з точкою B'), $\frac{BM}{MD} = \frac{1}{1}$;

$\frac{B'M'}{M'D'} = \frac{1}{1}$. Це означає, що, згідно розглянутого закону зображення фігур за допомогою паралельного проєктування h , зображенням точки D буде саме точка D' , бо при зображенні геометричних фігур за допомогою не виродженого паралельного проєктування зберігається порядок точок і відношення довжин відрізків, які належать одній прямій, а в евклідовій геометрії на промені $B'M'$ існує єдина точка D' , що не співпадає з точкою B' , для якої $B'M' = M'D'$. ■

Наведений варіант доведення заслуговує на увагу тому, що він не містить жодних понять, які виходять за межі курсів геометрії закладів

загальної середньої освіти і, завдяки цьому, може бути використаним при опануванні таких курсів. У теорії афінних перетворень евклідового простору доведено, що будь-які два паралелограма є афінно еквівалентними. Отже, справедливість твердження теореми 7.1 безпосередньо випливає зі справедливості наслідку 2 з теореми 5.1.

Наслідок. *Якщо відомо, що паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням паралелограма $ABCD$ за методом паралельного проєктування так, що точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C , то точка D' при цьому є зображенням точки D .*

Доведення є очевидним.

Теорема 7.2. *Зображенням трапеції при невиродженому паралельному проєктуванні завжди є трапеція. При невиродженому паралельному проєктуванні одна трапеція може бути зображенням іншої трапеції тоді та тільки тоді, коли ці трапеції мають однакові відношення довжин основ.*

Доведення. $\square$ Справедливість першого твердження теореми випливає з означення трапеції і тих найпростіших властивостей паралельного проєктування, які стверджують, що при невиродженому паралельному проєктуванні зображенням пари паралельних прямих є пара паралельних прямих, зображенням пари непаралельних прямих є пара непаралельних прямих.

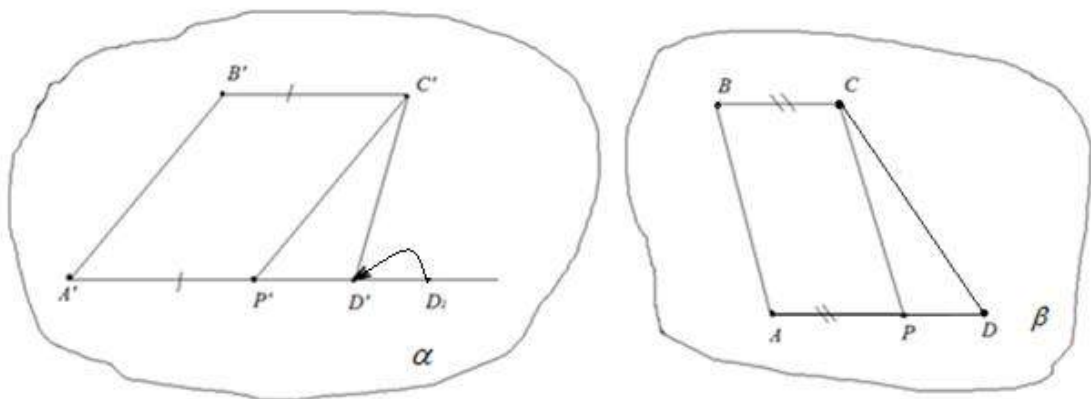


Рис. 112

Справедливість твердження необхідності другої частини теореми є наслідком тієї найпростішої властивості невиродженого паралельного проєктування, яка стверджує, що при невиродженому паралельному проєктуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать паралельним прямим.

Перейдемо до обґрунтування справедливості твердження достатності. Розглянемо трапецію $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$) картинної площини α і трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$), для яких $\frac{B'C'}{A'D'} = \frac{BC}{AD}$ (рис. 112).

Трапеція $ABCD$ однозначно визначає площину β , якій належить. Проведемо $C'P' \parallel A'B'$ і $CP \parallel AB$. $P' \in A'D'$, $P \in AD$. Утворяться паралелограми $A'B'C'P'$ і $ABCP$ (рис. 112).

Згідно теореми 7.1, існує невироджене паралельне проєктування, при якому паралелограм $A'B'C'P'$ є зображенням паралелограма $ABCP$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C , точка P' – зображенням точки P .

Точка D' лежить на промені $A'P'$, точка D – на промені AP . За теоремою 3.6, зображенням променя AP згідно даного закону зображення є промінь $A'P'$. Отже, зображенням точки D є певна точка D_1 променя $A'P'$. Завдяки збереженню відношень довжин відрізків, які належать паралельним прямим,

$\frac{A'D_1}{B'C'} = \frac{AD}{BC}$. Звідси $A'D_1 = B'C' \cdot \frac{AD}{BC}$.

Але $\frac{A'D'}{B'C'} = \frac{AD}{BC}$, $A'D' = B'C' \cdot \frac{AD}{BC}$. Отже, $A'D_1 = A'D'$. У евклідовій

геометрії на кожному промені від його початку (на промені $A'P'$ від точки A') можна відкласти лише один відрізок даної довжини. Це означає, що точки D_1 і D' співпадають, саме точка D' при даному

законі зображення є зображенням точки D , трапеція $A'B'C'D'$ є зображенням трапеції $ABCD$, що й треба було обґрунтувати. ■

Наслідок. *Якщо відомо, що трапеція $A'B'C'D'$ є зображенням трапеції $ABCD$ за методом паралельного проєктування так, що точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C , то точка D' при цьому є зображенням точки D .*

Доведення є очевидним.

Для побудови зображень правильного шестикутника при невикористаному для нього паралельному проєктуванні, як правило, використовують загальнотеоретичні положення, описані на початку даного параграфу. Побудову зображення можна виконати багатьма способами, виходячи з обрання того чи іншого трикутника на площині оригінала. У вигляді задачі наведемо один з найбільш доцільних на думку авторів варіантів виконання відповідної побудови.

Задача 7.1. *Побудуйте можливе зображення правильного шестикутника при невикористаному для даного шестикутника паралельному проєктуванні.*

Розв'язання. □ У евклідовій геометрії усі правильні шестикутники є подібними між собою. Це означає, що будь-який із них можна прийняти за оригінал шуканого зображення.

Розглянемо довільний правильний шестикутник $ABCDEF$ ($AB = BC = CD = DE = EF = AF$, $\angle ABC =$

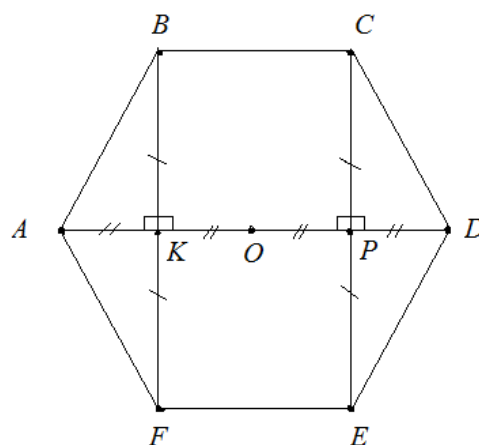


Рис. 113

$\angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFA = \angle FAB$), (рис. 113). Проведемо

його діагоналі AD , BF і CE . Відомо, що $BF \perp AD$, $CE \perp AD$ і тому $BF \parallel CE$. Відомо також, що, якщо точка O є серединою діагоналі AD , а діагоналі BF і CE перетинають діагональ AD , відповідно, у точках K і P , то $AK = KO = OP = OD$ ([6; 14], наприклад). Такі властивості правильного шестикутника визначають наступний варіант побудови його зображення (рис. 114). Перш за все, на картинній площині α , найчастіше, горизонтально, будують відрізок $A'D'$, який легко ділиться на чотири однакові частини: $A'K' = K'O' = O'P' = P'D'$. Якщо побудови виконуються в зошиті у клітинку, то зручніше за все, щоб кожна така частина містила дві або три клітинки. Потім, через точки K' і P' проводять паралельні і рівні між собою відрізки $F'B'$ і $E'C'$, які, відповідно, точками K' і P' діляться навпіл: $F'K' = K'B' = E'P' = P'C'$ (рис. 114).

Якщо побудови виконані в зошиті у клітинку, зручніше за все проводити відрізки $F'B'$ і $E'C'$ під кутом у 45° до прямої $A'D'$. У випадку, коли відрізок $A'K'$ складає три клітинки, відрізок $K'B'$ зручніше обрати таким, щоб він складав діагоналі двох клітинок (рис. 114); у випадку, коли відрізок $A'K'$ складає дві клітинки, відрізок $K'B'$ краще обрати таким, щоб він складав діагональ однієї клітинки. Шес-

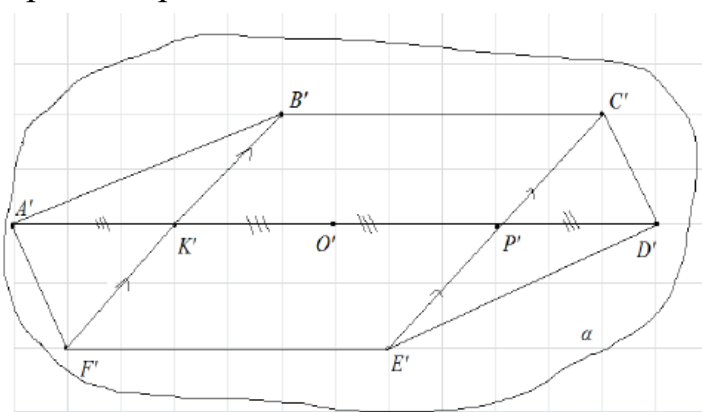


Рис. 114

тикутник $A'B'C'D'E'F'$ утворює правильне зображення правильного шестикутника при певному невідродженому паралельному проєктуванні.

Дійсно, згідно теореми 4.3, існує невідроджене паралельне проєктування, при якому зображенням трикутника ABK є

трикутник $A'B'K'$ так, що при цьому зображенням точки A є точка A' , точки B – точка B' , точки K – точка K' . Положення зображень C', D', E', F' інших вершин C, D, E, F шестикутника $ABCDEF$ при даному законі зображення визначаються на картинній площині α однозначно. За теоремою 5.1, вони визначаються саме так, як показано при розв'язанні даної задачі, на підставі властивостей зображень найпростіших геометричних фігур за методом паралельного проєктування.

Питання і завдання для самоконтролю до §7

7.1. Наведіть означення n -кутника-каркаса, $n \in N, n > 3$.

7.2. Наведіть означення плоского n -кутника, $n \in N, n > 3$, (у двох розуміннях).

7.3. На що спирається і у чому полягає загальна теорія побудови зображень при невиродженому паралельному проєктуванні плоских n -кутників, $n \in N, n > 3$, за наявності оригіналів?

7.4. Наведіть означення опуклого n -кутника, $n \in N, n \geq 3$.

7.5. Вкажіть види n -кутників, $n \in N, n > 3$, які у першу чергу розглядають у стандартному курсі геометрії для закладів загальної середньої освіти.

7.6. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями паралелограма при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.7. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями ромба при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.8. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями прямокутника при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.9. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями квадрата при невиродженому для нього паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.10. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями трапеції при невиродженому для неї паралельному проєктуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.11. Сформулюйте необхідні та достатні умови того, що одна трапеція може бути зображенням іншої при певному паралельному проєктуванні. Відповідь обґрунтуйте.

7.12. Наведіть приклад побудови зображення правильного шестикутника при невиродженому для нього паралельному проєктуванні. Правильність запропонованих побудов обґрунтуйте.

7.13. На картинній площині задано паралелограм, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого квадрата. Що, згідно даного закону зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F , розташованої у площині квадрата-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

7.14. На картинній площині задано правильне зображення правильного шестикутника за допомогою певного, невиродженого для цього шестикутника, паралельного проєктування. Що, згідно застосованого закону зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення F' довільної фігури F , розташованої у площині шестикутника-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

7.15. На картинній площині задано трапецію, про яку відомо, що вона є зображенням за допомогою певного паралельного проєктування деякої прямокутної трапеції. Що, згідно застосованого закону зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення F' довільної фігури F , розташованої у площині трапеції-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

§8. Зображення кола, круга та їх основних елементів при невиродженому для даних фігур паралельному проєктуванні

8.1. Коло та круг

Як відомо, у евклідовій геометрії колом називають множину тих та тільки тих точок площини, які знаходяться на постійній фіксованій від-

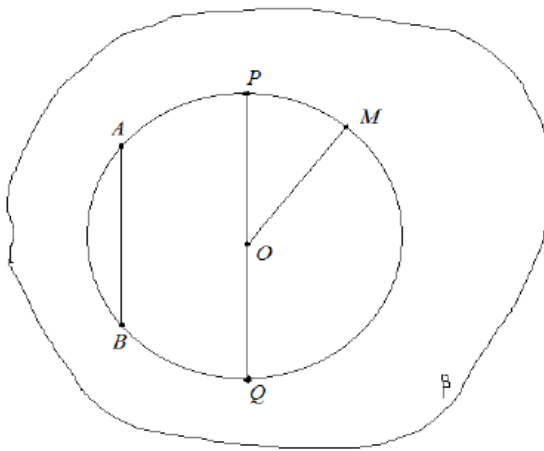


Рис. 115

стані від певної точки O цієї площини. Точку O називають центром даного кола (рис. 115). Постійну фіксовану відстань називають радіусом кола і часто позначають буквою R . Радіусом кола називають також будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром ([5; 8], на-

приклад) На рис. 115 відрізок OM є радіусом зображеного кола. Зрозуміло, що усі радіуси кола мають однакову довжину, яка дорівнює R .

Будь-які дві точки A і B кола ділять його на дві частини, обидві з яких називають дугами AB даного кола (рис. 116). Точки A і B називають кінцями цих дуг. Часто виникає необхідність точно визначити, яка саме з двох дуг AB мається на увазі. Тоді на відповідній дугі

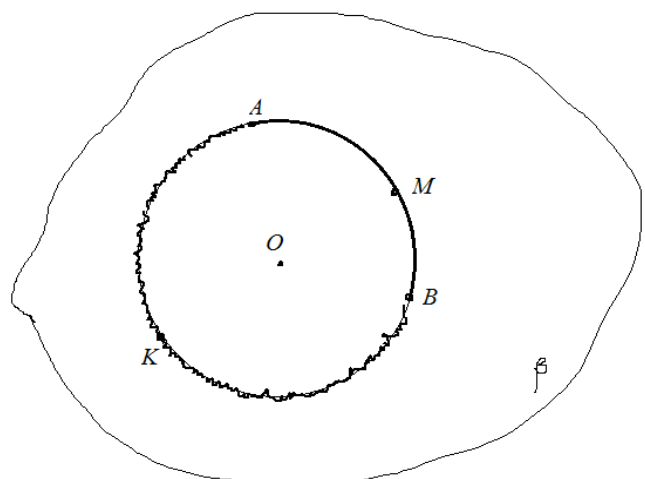


Рис. 116

обирають довільну внутрішню точку і позначають цю дугу вже не двома, а трьома буквами. Так, зображене на рис. 116 коло точками A і B

розділене на дуги $A_M B$ і $A_K B$. (Одночасно, можна стверджувати, що точками K і M це коло розділене на дуги $K_A M$ і $K_B M$).

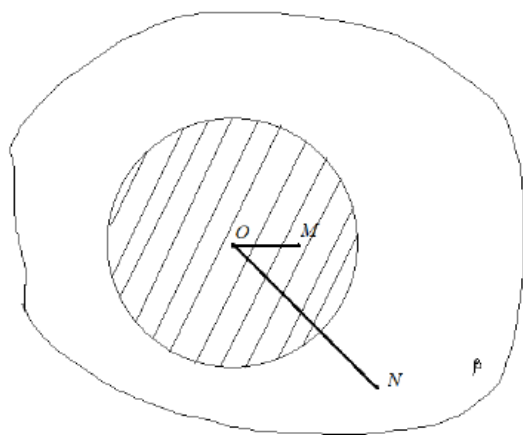


Рис. 117

Хордою кола називають кожний відрізок, кінці якого належать даному колу. На рис. 115 відрізок AB є хордою зображеного кола. Хорду кола, що проходить через його центр, називають діаметром. На рис. 115 відрізок PQ є діаметром зображеного кола. Зрозуміло, що довжина діаметра кола дорівнює

двом довжинам його радіусів: $PQ = 2R$.

Коло з центром у точці O площини β розділяє усі точки цієї площини на дві області – внутрішню і зовнішню (на рис. 117 внутрішню область кола з центром у точці O заштриховано). Точка M площини β належить внутрішній області даного кола (лежить всередині даного кола) тоді та тільки тоді, коли довжина відрізка OM є меншою за радіус кола. Точка N площини β належить зовнішній області даного кола (лежить зовні нього) тоді та тільки тоді, коли довжина відрізка ON є більшою за радіус. Коло, разом з його внутрішньою областю, називають кругом ([5; 8], наприклад).

Нехай коло з центром у точці O належить площині β . Пряма a площини β може не мати з даним колом спільних точок, може мати одну спільну точку, може – дві (рис. 118). Більшої кількості спільних точок пряма a з даним колом мати не може ([5; 8], наприклад).

Наявність і кількість спільних точок залежить від співвідношення між радіусом кола і відстанню від центра кола до прямої a . (Відстанню від точки до прямої називають довжину перпендикуляра, проведеного

із даної точки до даної прямої). У евклідовій геометрії справедливими є наступні твердження.

1. Пряма a площини β не має з колом цієї площини жодної спільної точки тоді та тільки тоді, коли відстань від центра даного кола до прямої a перевищує радіус даного кола. У подібному випадку усі точки даної прямої знаходяться у зовнішній відносно даного кола області.

2. Пряма a площини β має з колом цієї площини єдину спільну точку тоді та тільки тоді, коли відстань від центра кола до прямої a дорівнює радіусу даного кола. Якщо пряма площини β має з колом цієї площини єдину спільну точку, то дану пряму називають дотичною до кола у цій точці, спільна точка називається точкою дотику. Пряма є дотичною до кола тоді та тільки тоді, коли вона є перпендикулярною до радіуса даного кола, який проведено до точки дотику. Точка дотику дотичної розташована на колі. Усі інші точки дотичної знаходяться у зовнішній відносно даного кола області площини β . Через кожну точку кола проходить одна та тільки одна дотична до даного кола.

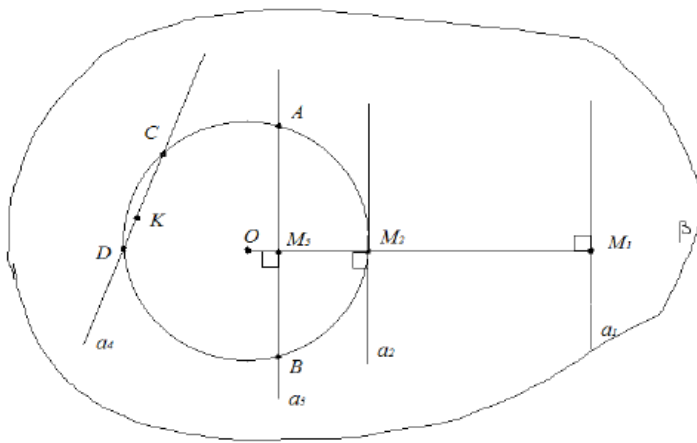


Рис. 118

3. Пряма a площини β має з колом цієї площини дві спільні точки тоді та тільки тоді, коли відстань від центра кола до прямої a є меншою за радіус даного кола. У такому

випадку пряму a для даного кола називають січною. Якщо пряма площини β проходить через точку всередині кола, то вона має з колом дві спільні точки, для даного кола є січною.

Так, на рис. 118, $OM_1 \perp a_1$, $OM_1 > R$, де R – радіус даного кола.

Пряма a_1 не має з колом спільних точок, усі точки прямої a_1 розташовані поза даним колом, у зовнішній для даного кола області; $OM_2 \perp a_2$, $OM_2 = R$, пряма a_2 має з колом єдину спільну точку M_2 , точка M_2 є точкою дотику прямої a_2 до даного кола, усі точки прямої a_2 , за виключенням точки M_2 , розташовані поза даним колом, у зовнішній для даного кола області; $OM_3 \perp a_3$, $OM_3 < R$, пряма a_3 перетинає дане коло у точках A і B . Відрізок AB для даного кола є хордою. Усі внутрішні точки відрізка AB розташовані всередині даного кола. У той же час, усі точки прямої a_3 , які не належать відрізку AB , розташовані у зовнішній відносно даного кола області. Точка K на рис. 118 знаходиться всередині даного кола ($OK < R$). Пряма a_4 проходить через точку K . Пряма a_4 перетинає дане коло у двох точках – C і D .

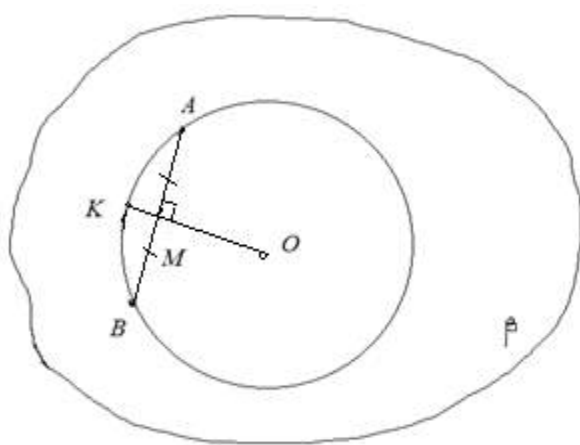


Рис. 119

Відомою теоремою елементарної евклідової геометрії є твердження про те, що радіус кола є перпендикулярним до хорди даного кола тоді та тільки тоді, коли він ділить цю хорду навпіл ([5; 8], наприклад).

Так, на рис. 119, радіус OK кола перетинає хорду AB даного кола у точці M і є перпендикулярним до

цієї хорди ($OK \perp AB$). При цьому $AM = MB$. З вищевказаної теореми випливає, що середини усіх паралельних між собою хорд даного кола належать одному діаметру цього кола, а саме тому діаметру, який одночасно є перпендикулярним до кожної з цих хорд. Наприклад, на

рис. 120, у колі проведені чотири паралельні між собою хорди:
 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$. Точки M_1 , M_2 , M_3 і M_4 є, відповідно,
 їхніми серединами: $A_1M_1 = M_1B_1$, $A_2M_2 = M_2B_2$, $A_3M_3 = M_3B_3$,

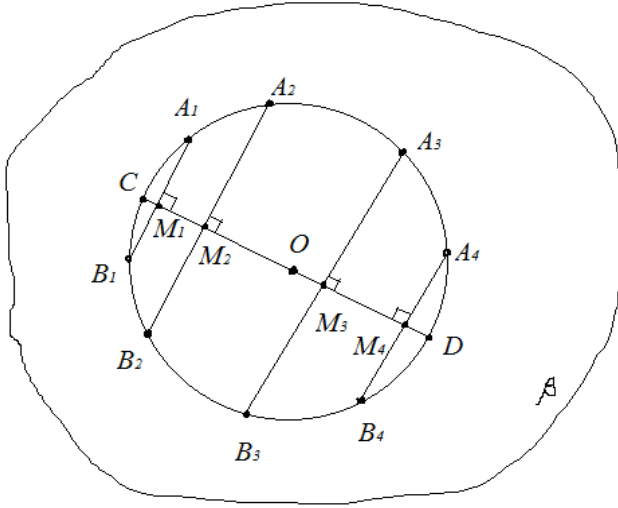


Рис. 120

$A_4M_4 = M_4B_4$. Точки M_1 , M_2 , M_3 і M_4 належать діаметру CD даного кола, $CD \perp A_1B_1$ і тому $CD \perp A_2B_2$, $CD \perp A_3B_3$, $CD \perp A_4B_4$.

Кожний з двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола ділить

навпіл усі хорди, паралельні до іншого діаметра.

На підставі вищевказаних властивостей хорд кола, при наявності кола, можна за допомогою циркуля і лінійки визначити положення його центра. Для цього достатньо у колі провести дві паралельні між собою

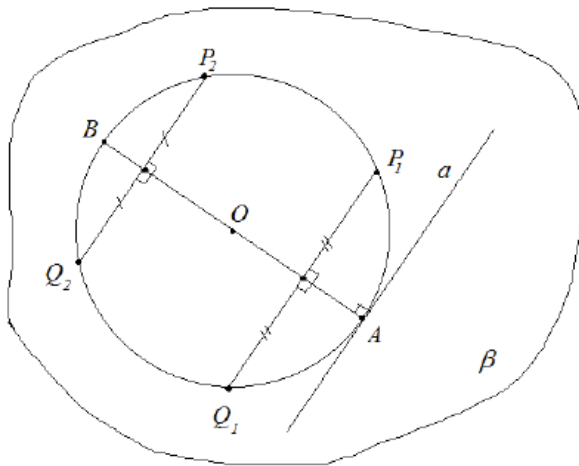


Рис. 121

хорди (хорди P_1Q_1 і P_2Q_2 на рис. 121, наприклад), поділити кожен з цих хорд навпіл, через знайдені середини хорд провести третю хорду (хорда AB на рис. 121), яка виявиться діаметром даного кола. Середина цієї хорди і є шуканим центром кола (точка O на рис. 121).

Дотична до кола є паралельною до кожної хорди кола, що є перпендикулярною до діаметра, який містить радіус, проведений до точки

дотику. Так, на рис. 121, пряма a дотикається зображеного кола у точці A , відрізок OA – радіус, проведений у точку дотику, відрізок AB – діаметр кола, що містить радіус OA . Відрізки P_1Q_1 і P_2Q_2 – такі хорди даного кола, що $P_1Q_1 \perp AB$, $P_2Q_2 \perp AB$ (діаметр AB ділить кожен з цих хорд навпіл). $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \parallel a$.

Центральним кутом кола називають плоский кут, вершина якого знаходиться в центрі даного кола ([6; 8], наприклад).

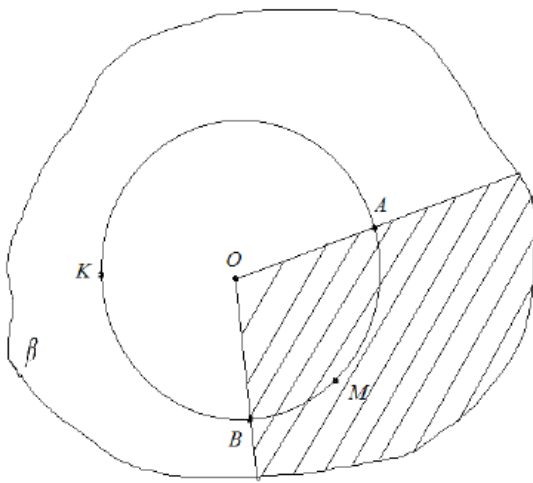


Рис. 122

Нехай на площині β задано коло з центром у точці O , точки A і B належать даному колу (рис. 122). Проведемо промені OA і OB . При цьому утворяться два плоских кута AOB і, відповідно, два цент-

ральних кута даного кола. Якщо промені OA і OB не є взаємно доповняльними, то один з даних кутів є опуклою геометричною фігурою, інший – неопуклою. Кожний із даних кутів можна визначити за допомогою операцій перетину і об'єднання відповідних півплощин. Якщо треба точно вказати, який центральний кут AOB кола мається на увазі, то на тій дузі AB кола, яка знаходиться всередині даного кута, обирають довільну точку. Говорять, що відповідний центральний кут кола спирається на дану дугу. Так, на рис. 122 заштриховано центральний кут

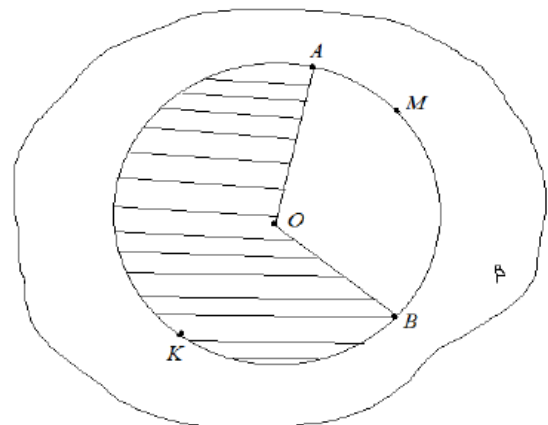


Рис. 123

AOB кола, який спирається на дугу $A_M B$. Він є опуклою геометричною фігурою. Одночасно, там зображено центральний кут AOB кола, який спирається на дугу $A_K B$ і є неопуклою геометричною фігурою.

Сектором називають геометричну фігуру, утворену спільними точками круга і певного центрального кута того кола, що визначає да-

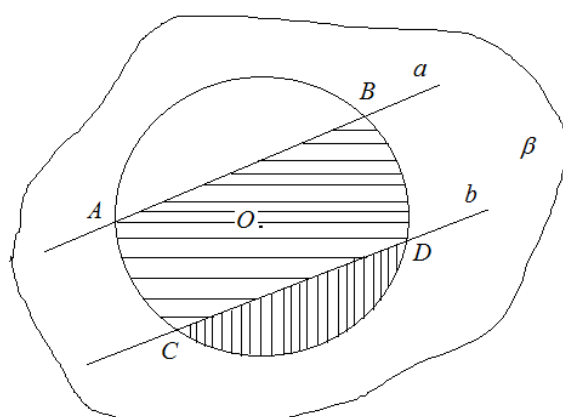


Рис. 124

ний круг ([6; 9], наприклад).

Кожний сектор є обмеженим двома радіусами і дугою кола, на яку спирається відповідний центральний кут. Два радіуса кола визначають два сектора даного кола, які розрізняються дугами.

Якщо такі радіуси кола не належать одному діаметру цього ко-

ла, то один з утворених секторів є опуклою геометричною фігурою, а інший – неопуклою. Так, на рис. 123 зображено два сектора AOB кола з центром у точці O . Один з них містить дугу $A_M B$ даного кола, другий – дугу $A_K B$. Той, що містить дугу $A_M B$, заштриховано.

Розглянемо коло з центром у точці O (рис. 124). Проведемо дві паралельні між собою січні даного кола. На рис. 123 січна a перетинає коло у точках A і B , січна b – у точках C і D ; $a \parallel b$. Сегментом кола називають 1) множину тих та тільки тих точок круга, обмеженого даним колом, які лежать всередині смуги між січними a і b , а також на хордах AB і CD ; 2) множину тих та тільки тих точок круга, обмеженого даним колом, що належать певній півплощині, яку визначено січною даного кола, відповідну хорду січної включно. Тобто, сегменти кола бувають двох типів. Кожна січна кола визначає точно два сегмента другого типу. На рис. 124 зображено п'ять сегментів: чотири сегмен-

та другого типу і один першого. Сегмент першого типу заштриховано горизонтальними рисками. Один сегмент другого типу заштриховано вертикальними рисками.

8.2. Еліпс

Еліпс є однією з трьох основних кривих другого порядку. На практиці використовують кілька еквівалентних між собою означень еліпса ([12; 33; 36]). У даному навчальному посібнику будемо спиратися на наступне означення: еліпсом називають плоску геометричну фігуру, яка відносно певної прямокутної декартової системи координат Oxy відповідної площини, задається рівнянням виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

У рівнянні (2) $a \neq 0$, $b \neq 0$, за загальною домовленістю приймають, що $a > 0$, $b > 0$. Рівняння виду (2) для еліпса F називають канонічним.

Прямокутну декартову систему координат, відносно якої еліпс F зада-

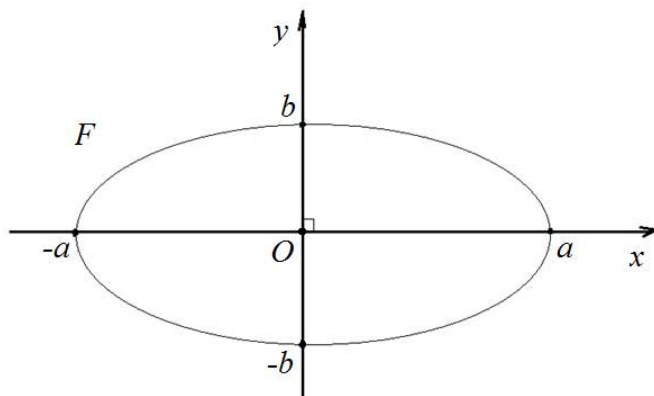


Рис. 125

но канонічним рівнянням виду (2), для даного еліпса також називають канонічною. Загальний вигляд еліпса F відносно канонічної для нього системи координат продемонстро-

вано на рис. 125. Точку O – початок канонічної для еліпса F системи координат – називають центром даного еліпса. Спираючись на рівняння (2), неважко довести, що центр еліпса є центром його симетрії. Коло вважають окремим випадком еліпса. Відносно канонічної для кола прямокутної декартової системи координат Oxy воно задається рівнянням

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \quad (3)$$

де R – радіус кола. Тобто, для кола $a = b = R$.

Так само, як і для кола, для еліпса визначають дуги еліпса, хорди еліпса. Радіусом еліпса називають кожний відрізок, що сполучає точку

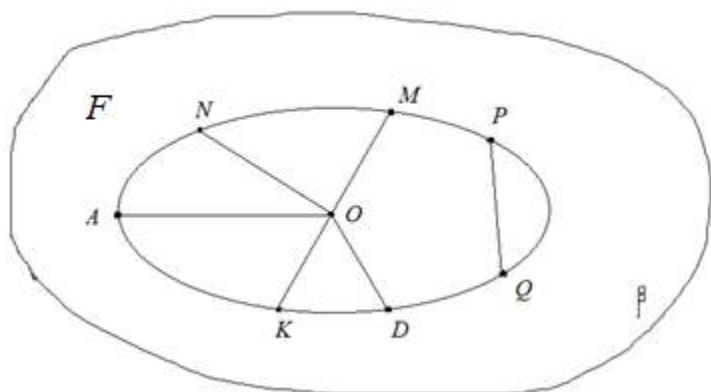


Рис. 126

еліпса з його центром. Відмінний від кола еліпс має безліч радіусів різної довжини. Якщо відносно прямокутної декартової системи координат Oxy еліпс задано рівнянням (2), то відносно одиничного відрізка

даної системи координат довжини його радіусів можуть дорівнювати будь-якому числу із сегмента $[b; a]$, якщо $b \leq a$, або сегмента $[a; b]$, якщо $a < b$, і тільки.

Діаметром еліпса, як і діаметром кола, називають будь-яку хорду даного еліпса, що проходить через його центр. Кожний еліпс, що не є колом, має безліч діаметрів різної

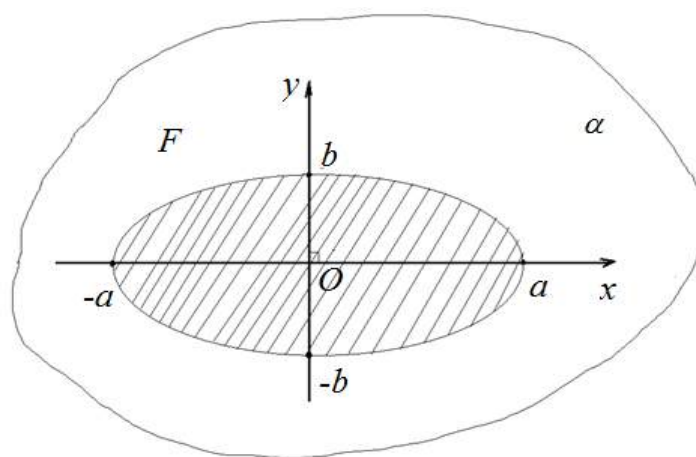


Рис. 127

довжини. Довжина кожного з діаметрів еліпса, зрозуміло, дорівнює двом довжинам відповідних радіусів (центр еліпса ділить кожний діаметр еліпса навпіл). Різні діаметри еліпса, який не є колом, у загальному випадку не мають однакової довжини. Якщо відносно прямокутної декартової системи координат Oxy еліпс задано рівнянням (2), то відносно одиничного відрізка даної системи координат довжини його діаметрів можуть дорівнювати будь-якому числу з сегмента $[2b; 2a]$ якщо

$b \leq a$, або $[2a; 2b]$, якщо $a < b$, і тільки. На рис. 126 точка O є центром еліпса F , відрізки OA , OD , OK , OM , ON – його радіусами, відрізки PQ і MK – його хордами, відрізок MK – діаметром.

Нехай еліпс F розташований на площині β . Як і у випадку кола,

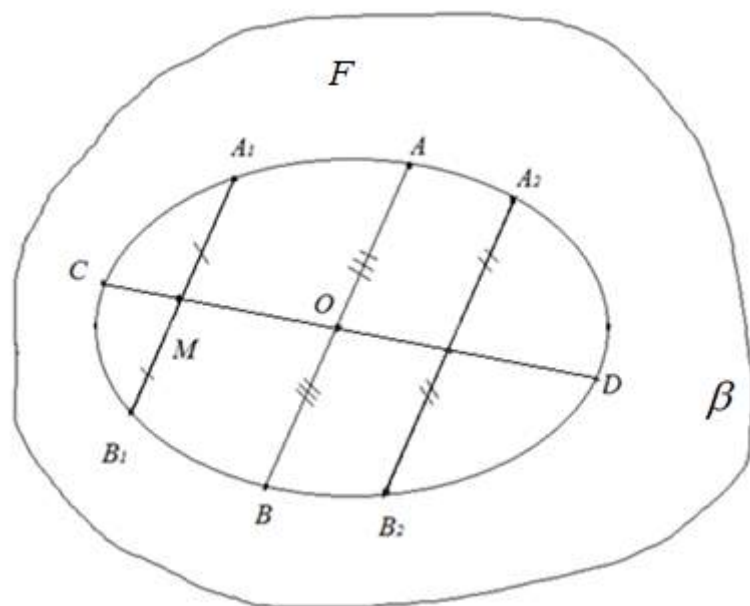


Рис. 128

еліпс розділяє площину β на дві області, внутрішню і зовнішню. На рис. 127 внутрішню область зображеного еліпса заштриховано. Якщо відносно прямокутної декартової системи координат Oxy

еліпс F задано рів-

нянням (2), то внутрішня область цього еліпса характеризується нерів-

ністю $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, а зовнішня – нерівністю $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$. У випадку

кола, відповідно, маємо нерівності $x^2 + y^2 < R^2$ і $x^2 + y^2 > R^2$, де R – радіус кола.

Як і у випадку кола, якщо радіус еліпса ділить певну його хорду навпіл, то діаметр, що цей радіус містить, ділить навпіл будь-яку хорду, паралельну до даної. Так, на рис. 128 радіус OC еліпса F проходить через середину M хорди A_1B_1 . Діаметр CD еліпса містить радіус OC . Хорда A_2B_2 є паралельною до хорди A_1B_1 . Діаметр CD ділить хорду A_2B_2 навпіл. Як і у випадку кола, цей факт надає можливість при

наявності еліпса за допомогою циркуля і лінійки визначити положення його центра. Для цього достатньо побудувати дві паралельні між собою хорди даного еліпса (хорди A_1B_1 і A_2B_2 на рис. 128, наприклад), через середини цих хорд провести третю хорду (хорда CD на рис. 128), яка виявиться діаметром даного еліпса, і поділити її навпіл.

Діаметр CD еліпса називається спряженим до його діаметра AB , якщо діаметр CD ділить навпіл усі хорди, що є паралельними до діаметра AB . Для кожного діаметра еліпса існує єдиний спряжений діаметр ([12]). На рис. 128, наприклад, діаметр CD є спряженим до діаметра AB ($AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$). Доведено ([12], наприклад), що, якщо діаметр CD еліпса є спряженим до діаметра AB , то діаметр AB цього еліпса є спряженим до діаметра CD . Отже, для еліпса розглядають пари взаємно спряжених діаметрів. Так, на рис. 129 діаметри AB і CD еліпса F утворюють пару його взаємно спряжених діаметрів, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel AB$, $A_1M_1 = M_1B_1$, $A_2M_2 = M_2B_2$, $A_3M_3 = M_3B_3$, $M_1 \in CD$, $M_2 \in CD$, $M_3 \in CD$; $C_1D_1 \parallel C_2D_2 \parallel C_3D_3 \parallel CD$; $C_1N_1 = N_1D_1$, $N_1 \in AB$; $C_2N_2 = N_2D_2$, $N_2 \in AB$, $C_3N_3 = N_3D_3$, $N_3 \in AB$. Будь-яка пара спряжених діаметрів кола є парою його взаємно перпендикулярних діаметрів. У еліпса,

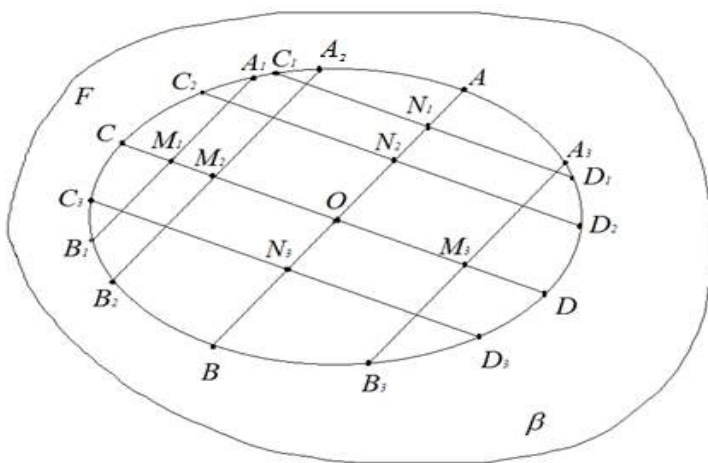


Рис. 129

що не є колом, існує лише одна пара взаємно перпендикулярних спряжених діаметрів ([12]). Такі діаметри називають головними осями даного еліпса. Вони належать координатним осям канонічної для даного еліпса прямокутної декартової системи координат.

Так, на рис.130 відрізки AB і CD є осями еліпса F . Осі еліпса мають, відповідно, найбільшу і найменшу можливі для діаметрів даного еліпса довжини. Якщо еліпс відносно канонічної прямокутної декартової системи координат задано рівнянням (2), у якому $a > b$, то $AB = 2a$, $CD = 2b$.

Нехай еліпс з центром у точці O розташовано на площині β . Як і у випадку кола, пряма площини β може не мати з даним еліпсом жодної спільної точки.

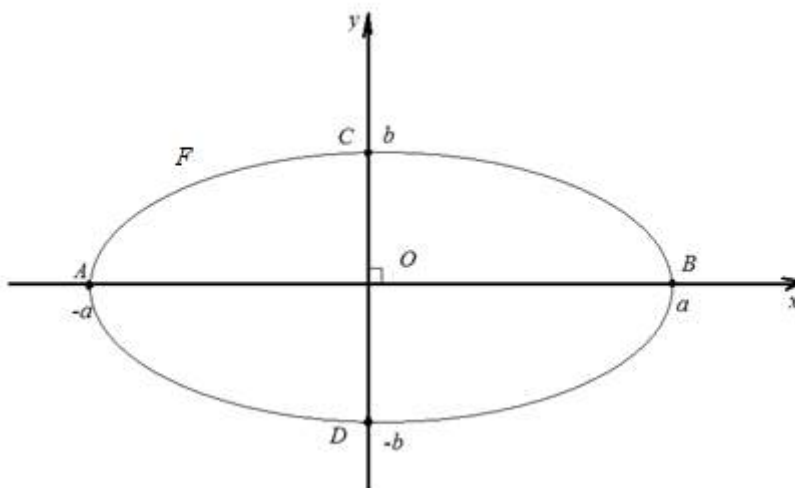


Рис. 130

Тоді вона знаходиться у зовнішній відносно даного еліпса області площини β ([12]).

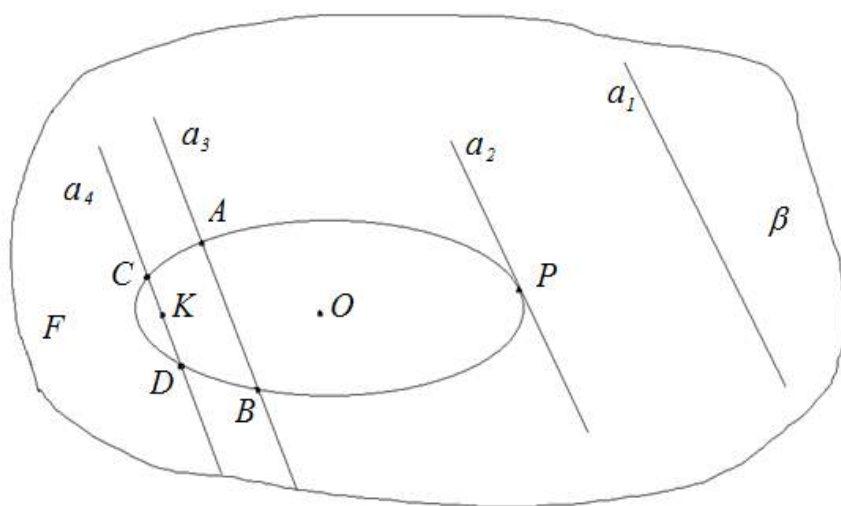


Рис. 131

Пряма може мати з еліпсом єдину спільну точку. У цьому випадку пряму називають дотичною до еліпса, спільну точку називають точкою дотику.

Усі точки дотичної до еліпса, за виключенням точки дотику, розташовані у зовнішній відносно даного еліпса області площини β .

Через кожну точку еліпса проходить одна і тільки одна дотична до нього ([12]). Пряма може мати з еліпсом дві спільні точки. У такому випадку пряма для даного еліпса називається січною. Більше ніж дві спільні точки пряма з еліпсом мати не може ([12]). Якщо пряма площини β проходить через внутрішню точку еліпса, то вона для даного еліпса є січною.

Так, на рис. 131 пряма a_1 не має з еліпсом F жодної спільної точки, усі точки прямої a_1 розташовані у зовнішній відносно даного еліпса F області площини β . Пряма a_2 є дотичною до еліпса F , точка P є точкою дотику, єдиною спільною точкою еліпса F і прямої a_2 , усі точки прямої a_2 , за виключенням точки P , розташовані на площині β

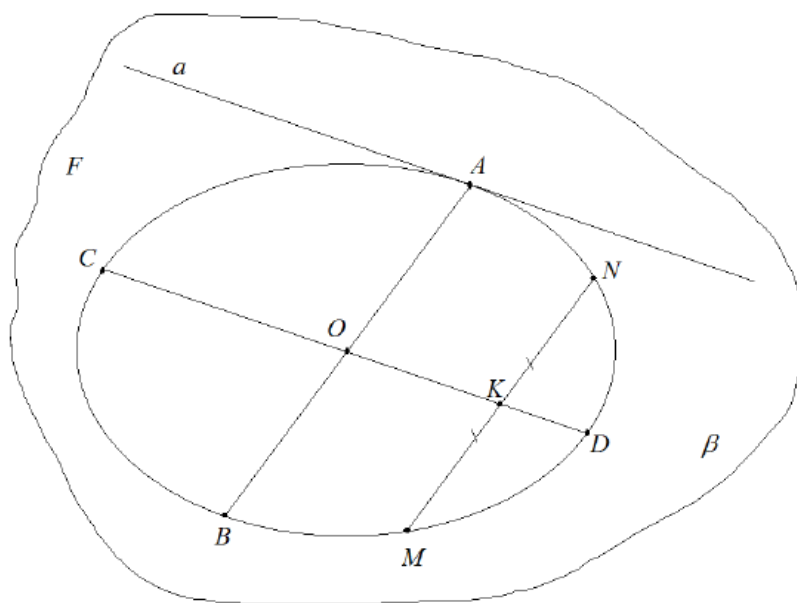


Рис. 132

у зовнішній відносно еліпса F області. Пряма a_3 є січною до еліпса F . Вона має з еліпсом F дві спільні точки – A і B . Відрізок AB для еліпса F є хордою, усі внутрішні точки відрізка AB належать внутрішній області

даного еліпса, усі точки прямої a_3 , за виключенням точок відрізка AB , розташовані у зовнішній відносно еліпса F області площини β . Пряма a_4 проходить через точку K , що належить внутрішній області еліп-

са F . Ця пряма є січною до даного еліпса, перетинає його у точках C і D .

Нехай пряма a площини β дотикається еліпса F , який належить цій площині, у точці A (рис. 132). Проведемо діаметр AB даного еліпса. Нехай діаметр CD є спряженим діаметром до діаметра AB . (Тобто, він ділить навпіл усі хорди даного еліпса, паралельні до діаметра AB , зокрема хорду MN). Доведено, що пряма a є паралельною до діаметра CD , $a \parallel CD$ ([12]). Звідси випливає простий спосіб побудови дотичної до еліпса у його довільній точці за допомогою циркуля і лінійки.

Аналогічно тому, як і для кола, для еліпса вводять поняття про центральний кут, сектор, сегмент.

8.3. Вписані у еліпс та описані навколо еліпса МНОГОКУТНИКИ

Многокутник називають вписаним у еліпс (відповідно, еліпс — описаним навколо многокутника), якщо усі вершини многокутника належать даному еліпсу. Сторони вписаного многокутника є хордами описаного еліпса.

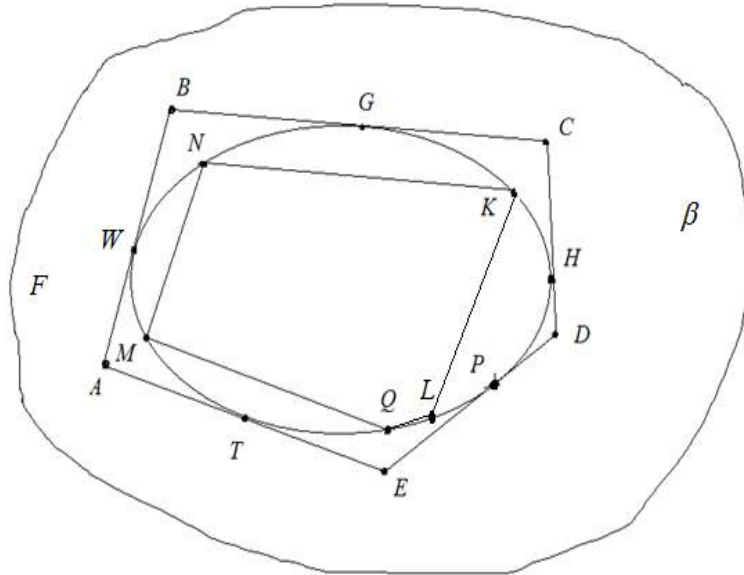


Рис. 133

Многокутник називають описаним навколо еліпса (відповідно, еліпс — вписаним у многокутник), якщо усі сторони цього многокутника дотикаються даного еліпса у певних своїх внутрішніх точках. Тобто, усі прямі, що містять сторони многокутника, є дотичними до даного еліпса, і усі точки дотику є внутрішніми точками відповідних сторін многокутника ([36], наприклад). Так, на рис. 133 п'ятикутник $MNKLQ$ є вписаним у еліпс F . Його сторони MN , NK , KL , LQ , QM є хордами даного еліпса. П'ятикутник $ABCDE$ є описаним навколо даного еліпса, його сторони дотикаються даного еліпса, відповідно, у точках W , G , H , P , T .

Доведено ([36]), що, якщо многокутник вписано у еліпс, або многокутник описано навколо еліпса, то цей многокутник є опуклим.

Теорема 8.1. *У будь-який еліпс можна вписати паралелограм.*

Справедливість твердження даної теореми є очевидним фактом тому, що будь-який еліпс має центр, будь-які два діаметра еліпса центром еліпса діляться навпіл, будь-який чотирикутник, діагоналі якого

перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, є паралелограмом. Зрозуміло, що у кожний еліпс можна вписати безліч паралелограмів.

Теорема 8.2. *У будь-який еліпс можна вписати трапецію.*

Справедливість твердження даної теореми також є очевидним фактом. Основами вписаної трапеції будуть будь-які дві паралельні між собою хорди еліпса, що не є рівними між собою, тобто, перетинають діаметр еліпса, спряжений до їхнього напрямку, у точках, які знаходяться на різних відстанях від центра еліпса. Зрозуміло, що у кожний еліпс можна вписати безліч трапецій.

Теорема 8.3. *Навколо кожного еліпса можна описати паралелограм.*

Доведення. $\square$ Розглянемо довільний еліпс F з центром у точці O . Проведемо у ньому довільний діаметр AB і побудуємо спряжений до AB діаметр CD . Через точку A , паралельно до діаметра CD , про-

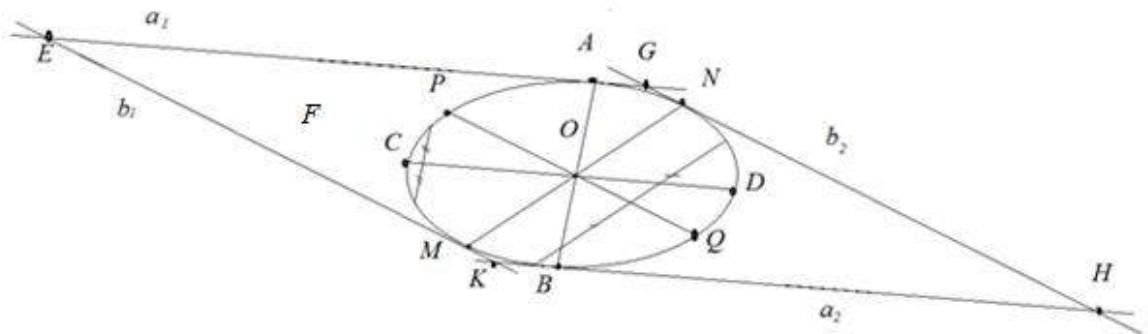


Рис. 134

ведемо пряму a_1 . Через точку B , паралельно до діаметра CD , проведемо пряму a_2 . Проведемо у еліпсі F діаметр MN , відмінний від діаметра AB . Побудуємо спряжений до нього діаметр PQ . Через точку M , паралельно до діаметра PQ , проведемо пряму b_1 , через точку N , паралельно до діаметра PQ , проведемо пряму b_2 . Позначимо

$E = a_1 \cap b_1$, $G = a_1 \cap b_2$, $H = a_2 \cap b_2$, $K = a_2 \cap b_1$. Зрозуміло, що паралелограм $EGHK$ є описаним навколо еліпса F (рис. 134).

Навколо кожного еліпса можна описати безліч різних за своєю формою паралелограмів. Форма кожного з таких паралелограмів визначається обранням діаметрів AB і MN . ■

Теорема 8.4. *Навколо кожного еліпса можна описати трапецію.*

Доведення є очевидним. У той же час воно є складовою частиною розв'язання, наприклад, задачі 10.22. Зрозуміло, що навколо кожного еліпса можна описати безліч різних за своєю формою трапецій.

Теорема 8.5. *Нехай квадрат $EGHP$ ($EG \parallel HP$) описано навколо кола з центром у точці O (рис. 135), сторони квадрата дотикаються кола, відповідно, у точках A, D, B, C , відрізки AB і CD є взаємно перпендикулярними діаметрами даного кола. Нехай точка M належить відрізку EA , відрізок CM перетинає коло у точці N , хорда DN кола перетинає радіус OA у точці K . Тоді $MK \parallel EO$.*

Доведення. □ Дана теорема є теоремою шкільного курсу евклідової геометрії. Але сформульоване твердження виявилось принципово важливим саме для теорії зображень просторових фігур на площині за методом паралельного проєктування. Тому наведемо відповідне обґрунтування.

$\angle CND = 90^\circ$, тому що він є кутом, вписаним у коло, який спирається на діаметр. Отже, $CM \perp ND$. Розглянемо $\triangle MEC$ і $\triangle KOD$. $\angle MEC = 90^\circ$, бо чотирикутник $EGHP$ є квадратом.

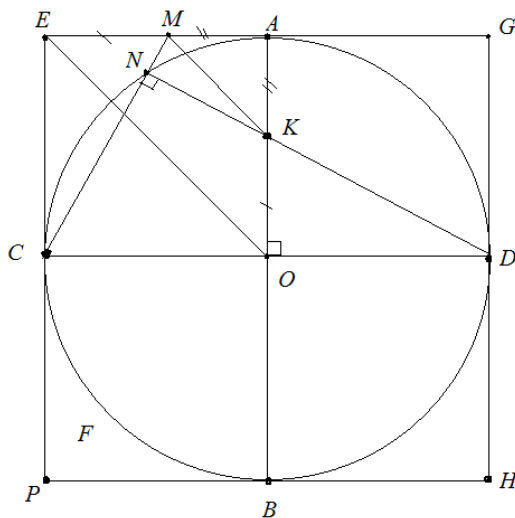


Рис. 135

$\angle KOD = 90^\circ$, бо діаметри AB і CD , згідно умови даної теореми, є взаємно перпендикулярними. $CE = OA$, бо $CEAO$ – квадрат, $OA = OD$, бо $OAGD$ – квадрат. Значить, $CE = OD$. $\angle ECM = \angle ODK$ як гострі кути з взаємно перпендикулярними сторонами. Отже, $\triangle MEC = \triangle KOD$ (за катетом і прилеглим гострим кутом). Звідси, $EM = KO$. Але $EA = AO$ бо $EAOC$ – квадрат. Отже, $AM = AK$. Тоді, за теоремою, оберненою до теореми Фалеса, $MK \parallel EO$, що й треба було довести. ■

8.4. Еліпс як зображення кола

при паралельному проєктуванні

Теорема 8.6. *Будь-який еліпс і лише еліпс може бути зображенням будь-якого еліпса при певному, невиродженому для еліпса-оригіналу, паралельному проєктуванні. Зокрема, будь-який еліпс і лише еліпс може бути зображенням будь-якого кола при певному, невиродженому для цього кола, паралельному проєктуванні.*

Доведення. $\square$ Як вже було вказано у параграфі 5, у аналітичній геометрії обґрунтовано ([12; 24] наприклад), що будь-які два еліпса є афінно еквівалентними. Вже доведено (наслідок 2 з теореми 5.1), що одна плоска геометрична фігура може бути зображенням іншої плоскої геометричної фігури при невиродженому паралельному проєктуванні тоді та тільки тоді, коли ці фігури є афінно еквівалентними. Звідси і випливає справедливість сформульованої теореми. $\blacksquare$

У підручнику [33] для учнів одинадцятих класів закладів загальної середньої освіти синтетичними методами доведено, що саме еліпс є проєкцією кола при будь-якому, невиродженому для кола, паралельному проєктуванні, фактично, обґрунтовано, що це може бути еліпс довільної форми. (Доведено, що відношення довжин головних осей еліпса-проєкції може дорівнювати довільному додатному дійсному числу). Усі еліпси однакової форми є подібними між собою. Отже, можна обґрунтувати справедливість теореми 8.6 й елементарними методами.

Наслідок 1. *Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проєктуванні, то, згідно застосованого закону зображення,*

1) точки, що належать внутрішній області еліпса F , зображуються точками, що належать внутрішній області еліпса F' ; кожна точка внутрішньої області еліпса F' є зображенням певної точки внутрішньої області еліпса F ;

2) точки, що належать зовнішній області еліпса F , зображуються точками, що належать зовнішній області еліпса F' ; кожна точка зовнішньої області еліпса F' є зображенням певної точки зовнішньої області еліпса F ;

3) кожна хорда еліпса F зображується певною хордою еліпса F' ; кожна хорда еліпса F' є зображенням певної хорди еліпса F ;

4) центр еліпса F зображується центром еліпса F' ;

5) кожний діаметр еліпса F зображується діаметром еліпса F' ; кожний діаметр еліпса F' є зображенням певного діаметра еліпса F ;

6) кожна пара спряжених діаметрів еліпса F зображується парою спряжених діаметрів еліпса F' ; кожна пара спряжених діаметрів еліпса F' є зображенням певної пари спряжених діаметрів еліпса F ;

7) кожна дотична до еліпса F зображується дотичною до еліпса F' ; кожна дотична до еліпса F' є зображенням певної дотичної до еліпса F ;

8) кожний паралелограм, описаний навколо еліпса F , зображується паралелограмом, описаним навколо еліпса F' ; кожний паралелограм, описаний навколо еліпса F' є зображенням певного паралелограма, описаного навколо еліпса F ;

9) кожна дуга AB еліпса F зображується дугою $A'B'$ еліпса F' , при цьому зображеннями кінців дуги AB є кінці дуги $A'B'$; кожна дуга $A'B'$ еліпса F' є зображенням певної дуги AB еліпса F , при цьому кінці цієї дуги є зображеннями кінців дуги-оригіналу;

10) кожний опуклий (неопуклий) центральний кут еліпса F зображується опуклим (неопуклим) центральним кутом еліпса F' ; кожний опуклий (неопуклий) центральний кут еліпса F' є зображенням певного опуклого (неопуклого) центрального кута еліпса F ;

11) кожний опуклий (неопуклий) сектор еліпса F зображується опуклим (неопуклим) сектором еліпса F' ; кожний опуклий (неопуклий) сектор еліпса F' є зображенням певного опуклого (неопуклого) сектора еліпса F ;

12) кожний сегмент еліпса F зображується сегментом аналогічного типу еліпса F' ; кожний сегмент еліпса F' є зображенням певного сегмента аналогічного типу еліпса F ;

13) кожний n -кутник, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, вписаний у еліпс F , зображується n -кутником, вписаним у еліпс F' ; кожний n -кутник, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, вписаний у еліпс F' , є зображенням певного n -кутника, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, вписаного у еліпс F ;

14) кожний n -кутника, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, описаний навколо еліпса F , зображується n -кутником, описаним навколо еліпса F' ; кожний n -кутник, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, описаний навколо еліпса F' , є зображенням певного n -кутника, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, описаного навколо еліпса F .

Справедливість наслідка 1 випливає із властивостей афінних перетворень, афінних відображень геометричних фігур ([24; 28] наприклад), її також можна обґрунтувати й елементарними методами.

Наслідок 2. *Будь-які два відрізка, які не належать одній прямій, перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, є спряженими діаметрами певного еліпса. За даними відрізками такий еліпс є визначеним однозначно, кожна його точку можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. $\square$ Нехай відрізки $A'B'$ і $C'D'$, що не належать одній прямій, перетинаються у точці O' , $A'O' = O'B'$, $C'O' = O'D'$. Через точки A' і B' проведемо прямі, паралельні до прямої $C'D'$, через точки C' і D' – прямі, паралельні до прямої $A'B'$. Унаслідок попарного

перетину прямих першої пари з прямими другої пари утвориться паралелограм $E'G'H'P'$ (рис. 136), відрізки $A'B'$ і $C'D'$ сполучають середини його протилежних сторін. За теоремою 7.1, будь-який паралелограм може бути зображенням будь-якого паралелограма унаслідок певного паралельного проєктування, зокрема, будь-який паралелограм може бути зображенням будь-якого квадрата унаслідок певного паралельного проєктування. Розглянемо паралельне проєктування h , при якому довільним чином обраний квадрат $EGHP$ (рис. 135) зображується паралелограмом $E'G'H'P'$ так, що, згідно відповідного закону зображення f , точка E' зображує точку E , точка G' – точку G , точка H' – точку H . Зрозуміло, що при цьому точка P' зображує

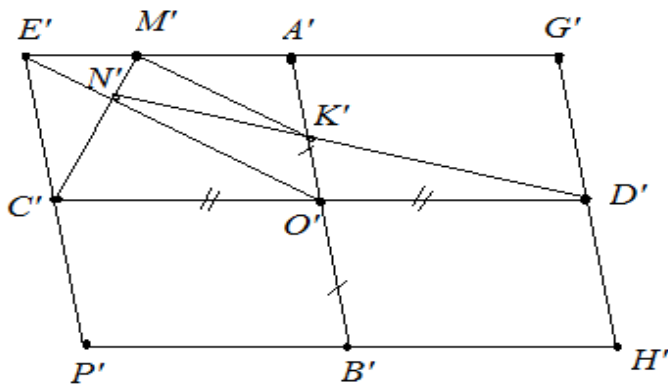


Рис. 136

жує точку P . Оскільки при паралельному проєктуванні середина відрізка оригінала зображується серединою відрізка зображення, згідно застосованого закону зображення середина A сторони

EG зображується серединою A' сторони $E'G'$, середина B сторони PH – серединою B' сторони $P'H'$, середина C сторони EP – серединою C' сторони $E'P'$, середина D сторони GH – серединою D' сторони $G'H'$. Отже, тоді відрізок $A'B'$ є зображенням відрізка AB , відрізок $C'D'$ – зображенням відрізка CD . Центр O квадрата $EGHP$ є точкою перетину відрізків AB і CD . Тому він зображується точкою O' перетину відрізків $A'B'$ і $C'D'$. Розглянемо коло F з центром у точці O радіусу OA (рис. 135). Це коло є вписаним у квадрат $EGHP$, дотикається сторін цього квадрата, відповідно, у точках A , D , B , C . Відрізки AB і CD є взаємно перпендикулярними і тому

спряженими діаметрами даного кола. При паралельному проєктуванні h , згідно закону зображення f , дане коло зображується еліпсом F' з центром у точці O' , вписаним у паралелограм $E'G'H'P'$. Еліпс F' дотикається до сторін цього паралелограма, відповідно, у точках A' , D' , B' , C' . Оскільки при невиродженому паралельному проєктуванні спряжені діаметри еліпса-оригінала зображуються спряженими діаметрами еліпса-зображення, відрізки $A'B'$ і $C'D'$ є спряженими діаметрами еліпса F' , вписаного у паралелограм $E'G'H'P'$. Існування шуканого еліпса таким чином обґрунтовано.

Розглянемо довільну точку N' еліпса F' , розташовану всередині паралелограма $C'E'A'O'$. Проведемо промінь $C'N'$ до перетину з відрізком $E'A'$ у точці M' . При зображенні квадрата $EGHP$ паралелограмом $E'G'H'P'$ згідно закону зображення f у точки M' існує єдиний прообраз M , який належить відрітку EA (рис. 135). Промінь CM перетинає коло F у точці N , хорда ND перетинає радіус OA у такій точці K , що, як було обґрунтовано при доведенні теореми 8.5, $MK \parallel EO$.

При невиродженому паралельному проєктуванні паралельні прямі зображуються паралельними прямими. Отже, зображенням прямої MK є пряма $M'K'$, $M'K' \parallel E'O'$, $K' \in O'A'$, точка K' є зображенням точки K . Точка N' є точкою перетину еліпса F' і відрізка $C'M'$. Точка N є точкою перетину кола F і відрізка CM . Зображенням кола F є еліпс F' , зображенням відрізка CM – відрізок $C'M'$. Точка перетину геометричних фігур при паралельному проєктуванні зображується їх точкою перетину. Отже, зображенням точки N при даному законі зображення є точка N' . З іншого боку, точка N є точкою перетину променів CM і DK , зображеннями яких, відповідно, є промені $C'M'$ і $D'K'$. Звідси випливає, що точка N' є точкою перети-

ну променів $C'M'$ і $D'K'$. Даний факт обґрунтовує можливість побудови точки N' за обраною довільним чином на відрізку $E'A'$ точкою M' за допомогою циркуля і лінійки. (Проводимо $M'K' \parallel E'O'$, $K' \in O'A'$, точка N' лежить на перетині променів $C'M'$ і $D'K'$). Одночасно, встановлюється взаємно однозначна відповідність між точками еліпса F' , розташованими всередині паралелограма $C'E'A'O'$, і внутрішніми точками відрізка $E'A'$ (Легко обґрунтувати, що, за вказаним правилом, для кожної точки M' відрізка $E'A'$ знаходиться єдина точка N' , різним точкам M' відрізка $E'A'$ відповідають різні точки N' , для кожної точки $N' \in F'$ існує відповідна точка M' на відрізку $E'A'$). Аналогічні міркування є правильними і для точок еліпса F' , розташованих всередині паралелограмів $O'A'G'D'$, $P'C'O'B'$ і $B'O'D'H'$. Отже, наведені міркування є правильними для кожної точки еліпса F' (Зрозуміло, що для точок A' , D' , B' і C' еліпса F' жодні побудови не потрібні).

Припустимо, існує інший еліпс F'' , для якого відрізки $A'B'$ і $C'D'$ є спряженими діаметрами. Тоді еліпс F'' також є вписаним у паралелограм $E'G'H'P'$. Існує паралельне проєктування h_1 , за допомогою відповідного закону зображення f_1 якого паралелограм $E'G'H'P'$ зображується квадратом $EGHP$ так, що точка E' зображується точкою E , точка G' – точкою G , точка H' – точкою H і, зрозуміло, точка P' – точкою P . Закон зображення f_1 є визначеним однозначно, бо він співпадає з тим афінним відображенням паралелограма $E'G'H'P'$ на квадрат $EGHP$, при якому точка E' переходить у точку E , точка G' – у точку G , точка H' – у точку H (див. наслідок 2 з теореми 5.1). У той же час саме таку властивість має афінне відображення, обернене до відображення f . З теорії афінних відображень площин відомо, що,

якщо два афінних відображення площини приймають однакові значення для трьох точок площини, які не належать одній прямій, то такі відображення співпадають ([24; 28]). Отже, $f_1 \equiv f^{-1}$, $f \equiv f_1^{-1}$. Але, якщо $f_1(F'')=F$, то $f_1^{-1}(F)=F''$. Звідси випливає, що еліпс F'' , як і еліпс F' , є зображенням кола F при паралельному проєктуванні h , згідно закону зображення f , F'' співпадає з F' , однозначну визначеність еліпса F' відрізками $A'B'$ і $C'D'$ обґрунтовано. ■

Наслідок 3. *Будь-які два відрізка, які перетинаються під прямим кутом і точкою перетину діляться навпіл, є осями певного еліпса. Такий еліпс є визначеним однозначно, кожен його точку можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення є очевидним. Але можна вказати й інший ніж той, що було визначено під час обґрунтування справедливості наслідка 2 з теореми 8.6, спосіб побудови точок вищевказаного еліпса за його осями.

Розглянемо взаємно перпендикулярні відрізки AB і CD , які перетинаються у точці O і діляться цією точкою навпіл: $AB \perp CD$, $AB \cap CD = O$, $AO = OB$, $CO = OD$. Якщо $AB = CD$, то твердження наслідка 3 є очевидним, шуканий еліпс є колом з діаметром AB , зрозуміло, що таке коло можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Припустимо, $AB \neq CD$. Побудуємо коло Q_1 з центром у точці O радіуса OC і коло Q_2 з центром у точці O радіуса OA (рис. 137). Проведемо довільний промінь ON . Позначимо через M_1 точку перетину променя ON з колом Q_1 , через M_2 - точку перетину променя ON з колом Q_2 . Через точку M_1 проведемо пряму a_1 , $a_1 \parallel AB$. Через точку M_2 проведемо пряму a_2 , $a_2 \parallel CD$. Точка M , $M = a_1 \cap a_2$, буде належати еліпсу F , осями якого є відрізки AB і CD . Дійсно, точку M

ємно однозначним відображенням кожної геометричної фігури на її образ, $f^{-1}(F) = Q_1$, вищевказаним чином за допомогою кіл Q_1 і Q_2 можна побудувати кожну точку еліпса F .

Наслідок 4. *У будь-який паралелограм, зокрема, у будь-який прямокутник, можна вписати еліпс. Такий еліпс є визначеним однозначно.*

Доведення є очевидним.

Наслідок 4. *Якщо точки A і A' є, відповідно, довільними точками довільних еліпсів F і F' , то існує таке паралельне проєктування, згідно певного закону зображення якого, еліпс F' є зображенням еліпса F , точка A' – зображенням точки A .*

Доведення. $\square$ Розглянемо еліпси F і F' разом з їх центрами O і O' (Як було обґрунтовано раніше, за наявності еліпса, його центр не тільки є однозначно визначеним, а й може бути побудованим за допомогою циркуля і лінійки). Згідно умови даного наслідка, $A \in F$, $A' \in F'$. Проведемо діаметри AB і $A'B'$ даних еліпсів. Побудуємо спряжені до них діаметри – відповідно, CD і $C'D'$ (рис. 138). За теоремою 4.3, існує паралельне проєктування h , згідно певного закону зображення якого зображенням точки A є точка A' , зображенням точки O – точка O' , зображенням точки D – точка D' . Згідно властивостей зображень фігур за методом паралельного проєктування, при цьому зображенням відрізка AB буде відрізок $A'B'$, зображенням відрізка CD – відрізок $C'D'$. Згідно

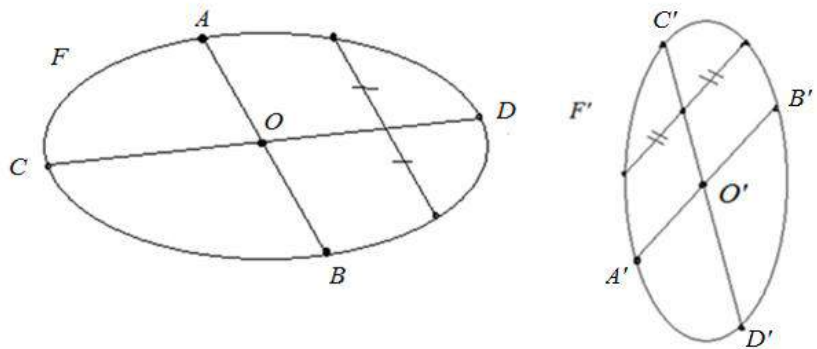


Рис. 138

наслідку 2 з теореми 8.6, за відрізками AB і CD , як за спряженими діаметрами, однозначно відновлюється еліпс F , за відрізками $A'B'$ і $C'D'$, як за спряженими діаметрами, однозначно відновлюється еліпс F' . За теоремою 8.6 і першим наслідком із неї зображенням еліпса F при паралельному проєктуванні h згідно застосованого закону зображення буде еліпс, спряженими діаметрами якого є саме відрізки $A'B'$ і $C'D'$. Отже, це еліпс F' .

Наслідок 5. *Якщо задано коло F і еліпс F' , довільну точку A на колі F і довільну точку A' на еліпсі F' , то існує таке паралельне проєктування, згідно певного закону зображення якого, еліпс F' є зображенням кола F , точка A' – зображенням точки A .*

Доведення є очевидним.

Наслідок 6. *Якщо задано коло F і еліпс F' , довільний діаметр AB кола F і довільний діаметр $A'B'$ еліпса F' , то існує таке паралельне проєктування, згідно певного закону зображення якого, еліпс F' є зображенням кола F , діаметр $A'B'$ – зображенням діаметра AB так, що точка A' є зображенням точки A .*

Доведення є очевидним.

Наслідок 7. *Якщо задано еліпс F з довільною парою спряжених діаметрів AB та CD і еліпс F' з довільною парою спряжених діаметрів $A'B'$ та $C'D'$, то існує таке паралельне проєктування, згідно певного закону зображення якого, еліпс F' є зображенням еліпса F , діаметр $A'B'$ – зображенням діаметра AB , діаметр $C'D'$ – зображенням діаметра CD , так, що точка A' є зображенням точки A , точка C' – зображенням точки C .*

Доведення є очевидним.

Наслідок 8. *Якщо задано коло F і еліпс F' , довільні взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD кола F , довільні спряжені діаметри $A'B'$ і $C'D'$ еліпса F' , то існує таке паралельне проєкту-*

вання, згідно певного закону зображення якого, еліпс F' є зображенням кола F , діаметр $A'B'$ – зображенням діаметра AB , діаметр $C'D'$ – зображенням діаметра CD , так, що точка A' є зображенням точки A , точка C' – зображенням точки C .

Доведення є очевидним.

Наслідок 9. *Якщо точка A' площини еліпса F' знаходиться у зовнішній відносно еліпса F' області, то через цю точку проходять точно дві дотичні до еліпса F' . Якщо точка A' належить еліпсу F' , то через цю точку проходить єдина дотична до еліпса F' . Якщо точка A' площини еліпса F' належить внутрішній області еліпса F' , то через цю точку не проходить жодної дотичної до еліпса F' . У випадку їхньої наявності, дотичні можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. $\square$ Зрозуміло, що справедливості тверджень наслідка 9 у теорії кривих другого порядку можна довести без жодних посилань на теорему 8.6. Але усі ці факти очевидним чином безпосередньо впливають і з теореми 8.6.

Обґрунтуємо, наприклад, справедливості першого твердження.

Нехай еліпс F' з центром у точці O' належить площині α , точка A' площини α лежить у зовнішній відносно еліпса F' області. Побудуємо відрізок $O'A'$. Він перетне еліпс F' у певній точці K' , відрізок $O'K'$ є радіусом еліпса F' (рис. 139(б)).

Розглянемо довільне коло F певної площини β (рис. 139(а)). Оберемо на ньому довільну точку K . Згідно наслідка 5 з теореми 8.6, еліпс F' можна вважати зображенням кола F при певному паралельному проєктуванні так, що, як результат відповідного афінного відображення f , яке є законом даного зображення, точка K' є зображенням точки K . Проведемо промінь OK . За допомогою теореми Фалеса побудуємо на ньому таку точку A , що точка K лежить між точками O

і A та $\frac{OK}{KA} = \frac{O'K'}{K'A'}$. За теоремою 3.10 і задачею 40, $f(A) = A'$.

Оскільки $O'A' > O'K'$, $OA > OK$, точка A у площині β знаходиться поза колом F . Відомо, що через точку A проходять точно дві дотичні до кола F . Нехай це будуть прямі AP_1 і AP_2 , $P_1 \in F$, $P_2 \in F$. $f(P_1) = P'_1$, $f(P_2) = P'_2$, $P'_1 \in F'$, $P'_2 \in F'$, P'_1 не співпадає з P'_2 . Згідно наслідка з теореми 8.6, прямі $A'P'_1$ і $A'P'_2$ будуть тими двома дотичними до еліпса F' , які проходять через точку A' . При зображенні за допомогою даного паралельного проєктування площини β у вигляді площини α здійснюється взаємно однозначне відображення площини β на площину α , зберігається відношення приналежності фігур. Отже, третьої дотичної до еліпса F' , яка проходить через точку A' , не існує. Інакше, її прообразом при відображенні f була би третя дотична до кола F , яка проходить через точку A .

Зрозуміло, що побудову точок P'_1 і P'_2 еліпса F' можна здійснити за допомогою теореми Фалеса за умови явного використання оригінала. Але можливими виявилися й такі побудови, які використання оригінала не вимагають.

Насправді, якщо у оригіналі (рис. 139 (a)) прямі AP_1 і AP_2 дотикаються кола F , відповідно, у точках P_1 і P_2 , то $OP_1 = OP_2$ як радіуси одного кола, за відомою теоремою елементарної геометрії $\angle OP_1A = \angle OP_2A = 90^\circ$. Тоді $\triangle OP_1A = \triangle OP_2A$, як прямокутні трикутники, що мають рівні катети і спільну гіпотенузу. Звідси випливає, що $\angle P_1OA = \angle P_2OA$. Але тоді відрізок OT ($OA \cap P_1P_2 = T$) є бісектрисою рівнобедреного трикутника P_1OP_2 , проведеною до його основи, $OT \perp P_1P_2$, $OA \perp P_1P_2$. Відрізок P_1T є висотою прямокутного

добутку гіпотенузи на проєкцію цього катета на гіпотенузу). Але $OP_1 = OK$. Отже, $OK^2 = OA \cdot OT$, точки A і T є інверсними одна до одної відносно кола F як кола інверсії, $\frac{OK}{OT} = \frac{OA}{OK}$.

258

$OC=OB=OK$ як радіуси кола F . Тому $\frac{OK}{OT_1} = \frac{OA}{OK}$, точка T_1 співпадає з точкою T .

Звідси випливає наступний спосіб побудови дотичних до еліпса F' які проходять через точку A' , розташовану у його зовнішній області.

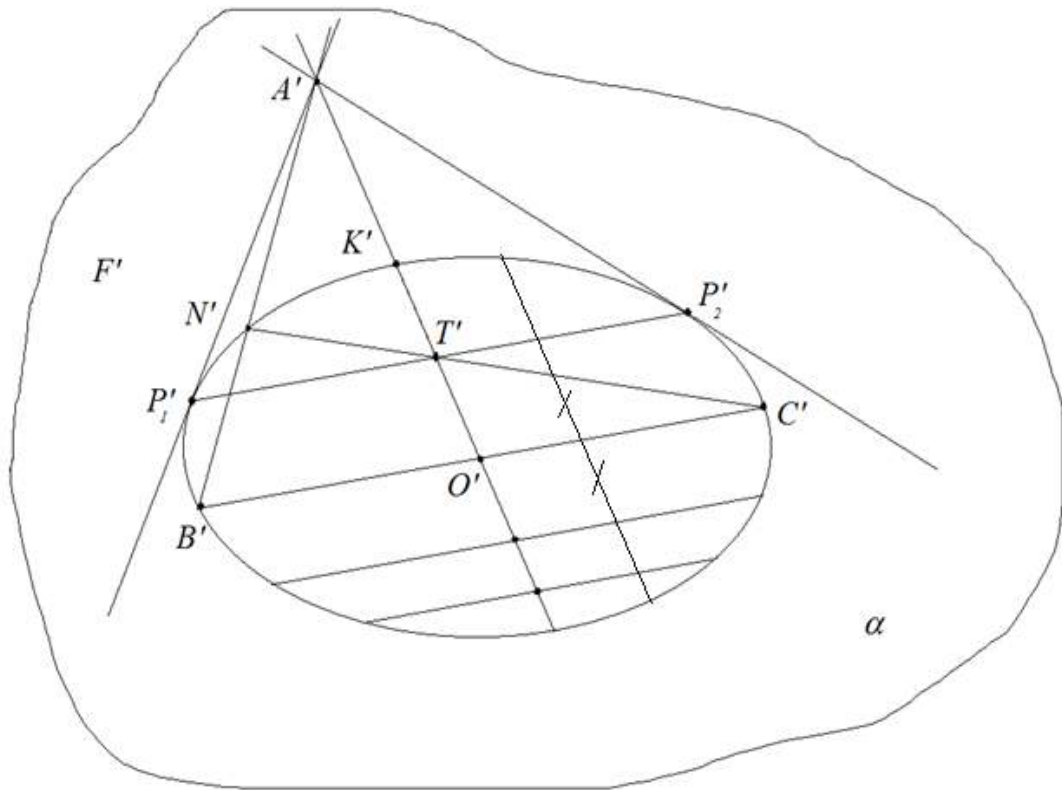


Рис. 139 (б)

1. Будуємо відрізок $O'A'$, що перетинає еліпс F' у певній точці K' .
2. З використанням допоміжної хорди будуємо діаметр $B'C'$ еліпса F' , спряжений до діаметра, що містить радіус $O'K'$.
3. Будуємо відрізок $B'A'$ який перетинає еліпс F' у певній точці N' .
4. Проводимо хорду $C'N'$, яка перетинає радіус $O'K'$ у точці T' .
5. Через точку T' , паралельно до діаметра $B'C'$, проводимо хорду $P'P''$. Прямі $A'P'_1$ і $A'P'_2$ є дотичними до еліпса F' (рис. 139 (б)).

Справедливість першого твердження наслідка 9 доведено. Справедливість інших його тверджень так само неважко обґрунтувати. ■

Зауваження. Спираючись на теорію проєктивних перетворень проєктивної площини, теорію полюсів і поляр, модель евклідової геометрії на проєктивній площині, можна обґрунтувати (див. [1; 28], наприклад) справедливість наступного, дуже простого, способу побудови за допомогою лише лінійки дотичних до еліпса, які проходять через точку, задану у зовнішній відносно даного еліпса області.

Розглянемо еліпс F і точку A у його зовнішній області. Проведемо через точку A прямі a_1, a_2, a_3 , які перетинають еліпс F , відповідно, у точках B_1 і C_1, B_2 і C_2, B_3 і C_3 . Нехай точка D є точкою перетину відрізків B_1C_2 і B_2C_1 , точка E – точкою перетину відрізків B_2C_3 і B_3C_2 , пряма DE перетинає еліпс F у певних точках H і K . Прямі AH і AK дотикаються еліпса F , відповідно, у точках H і K (рис. 140).

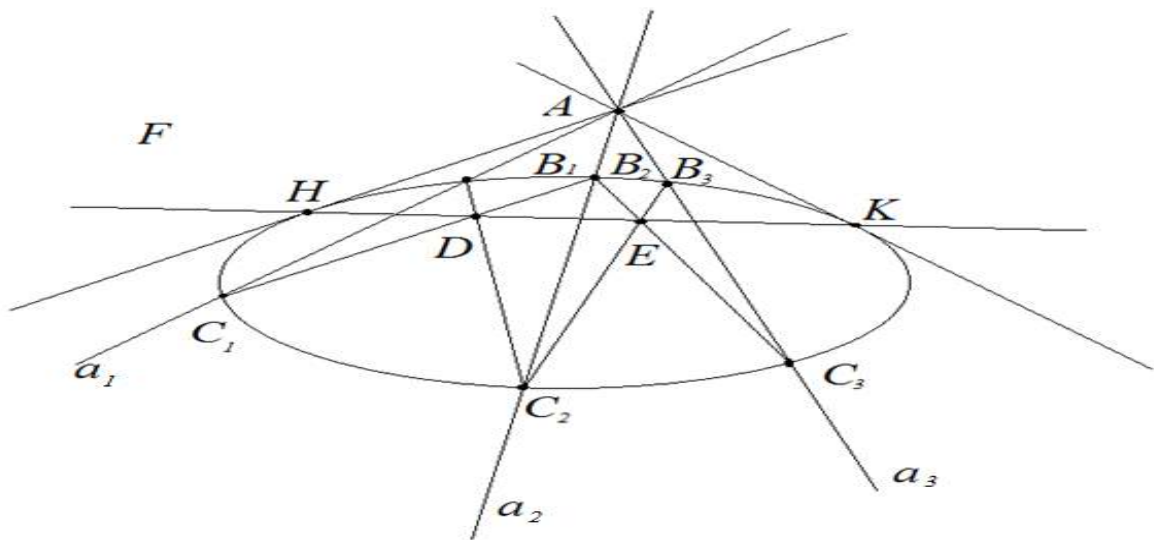


Рис. 140

Зрозуміло, що подібний спосіб побудови дотичних є правильним й для кола. Цей факт можна обґрунтувати методами елементарної евклі-

дової геометрії. Але доведення є достатньо складним. Пропонуємо зацікавленим читачам відшукати його самостійно (див. додаток на с. 499). Оскільки будь-який еліпс є афінно еквівалентним до кола, і усі використані побудови носять суто афінний характер, тим самим для еліпса буде обґрунтовано справедливність вищевказаних побудов за виключенням застосування теорії проєктивних перетворень.

Наслідок 10. *Осі еліпса, визначеного парою своїх спряжених діаметрів, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. $\square$ Нехай задано відрізки $A'B'$ і $C'D'$, які не належать одній прямій, перетинаються у точці O' , кожний з них точкою O'

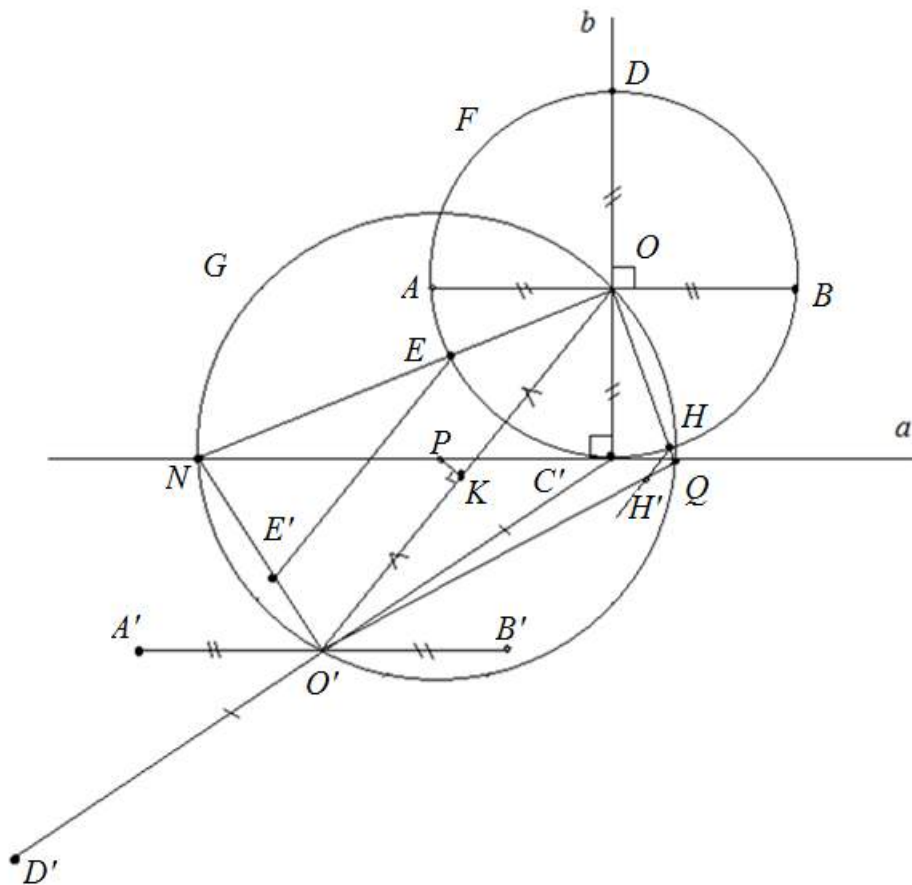


Рис. 141

ділиться навпіл (рис. 141). Згідно наслідка 2 з теореми 8.6, за відрізками $A'B'$ і $C'D'$ еліпс F' , для якого ці відрізки є спряженими діаметрами, визначається однозначно. Зрозуміло, що точка O' є центром даного еліпса. Очевидно, має сенс розглядати лише ті випадки, коли

задані відрізки $A'B'$ і $C'D'$ не є взаємно перпендикулярними (якщо $A'B' \perp C'D'$, то відрізки $A'B'$ і $C'D'$ є осями еліпса F' , сформульовану задачу розв'язано вже за її вихідними даними). За теоремою 8.6. і наслідком 8 із неї, еліпс F' може вважатися зображенням довільного кола F при певному паралельному проєктуванні, будь-які два взаємно перпендикулярних діаметра AB і CD кола F , згідно відповідного закону зображення можуть вважатися оригіналами для заданих спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$ еліпса F' . Обранням кола F і довільної пари його взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD закон зображення f , згідно якого $F' = f(F)$, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$ є визначеним однозначно, для кожної точки M площини β , яка містить коло F , її зображення $M' = f(M)$ на площині α еліпса F' можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. У відповідності до наслідка 2 з теореми 5.1, закон зображення f є афінним відображенням площини β на площину α , єдиним афінним відображенням площини β на площину α , при якому точка A' є образом точки A , точка B' – образом точки B , точка C' – образом точки C .

Поставлену задачу буде розв'язано, якщо на обраному колі F вдасться знайти таку пару взаємно перпендикулярних діаметрів, зображеннями яких, згідно закону зображення f , є взаємно перпендикулярні спряжені діаметри, тобто, осі, еліпса F' . Результат розв'язання даної задачі, очевидно, не може залежати від обрання площини β , розмірів кола F , прийнятих у якості оригіналів для заданих відрізків $A'B'$ і $C'D'$ взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD кола F . Достатньо лише розглянути таке афінне відображення f площини β на площину α , при якому $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Але тоді

площину β можна обрати так, щоб вона співпадала з площиною α , згідно зауваження до наслідка 2 з теореми 5.1, розглядати відповідне афінне перетворення площини α , зокрема, перетворення косого стиску.

Звідси випливає доцільність виконання на площині α наступних кроків шуканих побудов (рис. 141).

1. Через точку C' , паралельно до прямої $A'B'$ проводимо пряму a .
2. Через точку C' , перпендикулярно до прямої a , проводимо пряму b .

3. На прямій b , від точки C' , у ту півплощину відносно прямої a , що не містить точку O' , відкладаємо відрізок $C'O$, який дорівнює відрізку $O'A'$.

4. Будуємо коло F з центром у точці O радіуса $C'O$, діаметр $C'D$ цього кола і перпендикулярний до нього діаметр AB .

5. У якості закона зображення кола F розглядаємо косий стиск f площини α до прямої a у напрямку прямої OO' , при якому $O' = f(O)$. Зрозуміло, що тоді $A' = f(A)$ ($A'AOO'$ – паралелограм). $C'O' = f(C'O)$ і тому $D' = f(D)$ ($D'O' = O'C'$, $DO = OC'$, $DD' \parallel OO'$). Звідси випливає, що $F' = f(F)$, де F' - еліпс, спряженими діаметрами якого є відрізки $A'B'$ і $C'D'$ тобто, саме той еліпс, осі якого треба побудувати.

6. Через середину K відрізка OO' до даного відрізка проводимо серединний перпендикуляр, позначаємо через P точку перетину цього серединного перпендикуляра з прямою a (Точка P існує тому, що відрізок OO' не є перпендикулярним до прямої a , бо відрізок $C'D'$ не є перпендикулярним до відрізка $A'B'$).

7. Будуємо коло G з центром у точці P радіусу OP . Зрозуміло, що точка O' буде належати цьому колу.

8. Позначаємо через N і Q точки перетину кола G , з прямою a . Відрізок NQ є діаметром кола G , $\angle NOQ=90^\circ$, $\angle NO'Q=90^\circ$, бо це кути, вписані у коло G , які спираються на його діаметр NQ .

9. Нехай промінь ON перетинає коло F у точці E , промінь OQ перетинає коло F у точці H . Побудуємо образи E' і H' , відповідно, точок E і H при косому стиску f . Зрозуміло, що $f(N)=N$, $f(Q)=Q$, отже, $E' \in O'N$, $H' \in O'Q$. Одночасно, $EE' \parallel OO'$, $HH' \parallel OO'$. У підсумку, точка E' – це точка перетину прямої $O'N$ з прямою, яка проходить через точку E паралельно до прямої OO' , точка H' – це точка перетину прямої $O'Q$ з прямою, яка проходить через точку H паралельно до прямої OO' .

$E' = f(E)$, $H' = f(H)$. Точки E і H належать колу F , $f(F)=F'$. Отже, $E' \in F'$, $H' \in F'$. $\angle E'O'H' \equiv \angle NOQ = 90^\circ$. Це означає, що радіуси $O'E'$ і $O'H'$ еліпса F' є його півосями, за якими легко побудувати й відповідні осі. ■

Запропонований варіант доведення наслідка 10 взято з [35]. Зрозуміло, що за характером проведених міркувань, таке доведення відноситься до теорії афінних перетворень площини. Але цей наслідок є вельми корисним для загальної теорії побудов зображень геометричних фігур евклідового простору за допомогою паралельного проєкування. Відповідне зауваження до наслідка 2 з теореми 5.1. можна переформулювати так, щоб вилучити із нього поняття про косий стиск як афінне перетворення площини. У підсумку, виникає обґрунтування справедливості наслідка 10 лише «у термінах теорії зображень». Це робить його цілком доступним й для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти.

Теорема 8.7. *Якщо відомо, що заданий еліпс F' є зображенням*

заданого еліпса F за методом паралельного проєктування так, що при застосованому законі зображення задана точка A' еліпса F' є зображенням заданої точки A еліпса F , то зображення площини, що містить еліпс F , у вигляді площини, що містить еліпс F' , згідно застосованого закону зображення є метрично повним.

Доведення. $\square$ Якщо еліпс задано, то, як було вказано раніше, заданим можна вважати і його центр. Отже, нехай точка O є центром еліпса F , точка O' – центром еліпса F' . Проведемо діаметр AB еліпса F , побудуємо спряжений до нього діаметр CD . Проведемо діаметр $A'B'$ еліпса F' , побудуємо спряжений до нього діаметр $C'D'$ (рис. 142). Згідно наслідка 1 з теореми 8.6, при даному паралельному проєктуванні точка O' є зображенням точки O , відрізок $A'B'$ – зображенням відрізка AB , відрізок $C'D'$ – зображенням відрізка CD . Але тоді трикутник $A'O'D'$ є зображенням трикутника AOD .

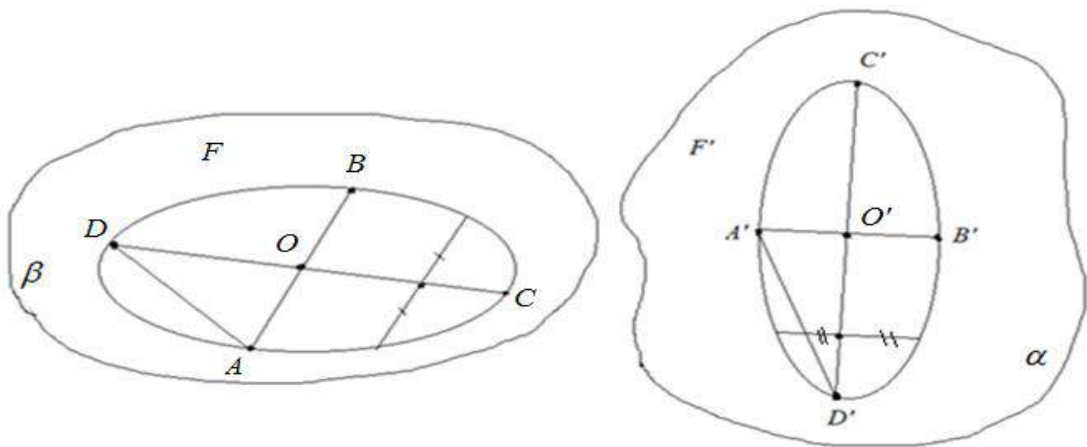


Рис. 142

Згідно наслідка 8 з теореми 5.1, звідси і випливає справедливність твердження теореми 8.7. $\blacksquare$

Наслідок 1. Якщо відомо, що заданий еліпс F' є зображенням заданого кола F за методом паралельного проєктування, то для будь-якого відрізка $P'Q'$ площини, що містить еліпс F' , за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати відрізок, довжина якого

дорівнює довжині відрізка PQ , який належить площині, що містить еліпс F і, згідно застосованого закону зображення, є оригіналом для відрізка $P'Q'$.

Доведення. $\square$ Розглянемо довільну точку A' еліпса F' . При застосованому законі зображення на колі F для неї існує оригінал – певна точка A . Будь-яка точка кола переходить у будь-яку іншу точку даного кола за допомогою обертання площини, яка містить дане коло, навколо центра цього кола. Обертання площини є її рухом. Отже, довільна точка B заданого кола F визначає точку A з точністю до руху площини β , що містить коло F , для трикутника $A'O'D'$, побудованого за еліпсом F' і точкою A' так само, як і при доведенні теореми 8.7,

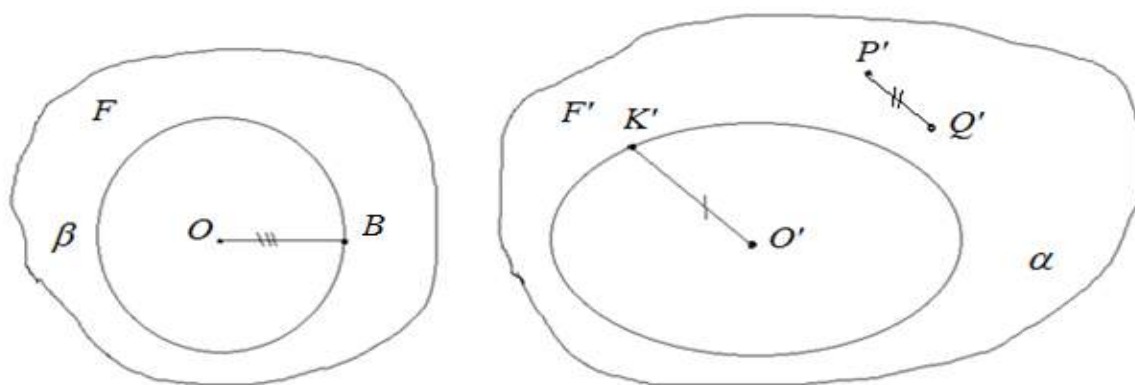


Рис. 143

оригінал, згідно застосованого закону зображення, є визначеним з точністю до руху площини β , у відповідності до наслідка 9 з теореми 5.1, зображення площини β у вигляді площини α , яка містить еліпс F' , згідно застосованого закону зображення є метрично повним, для кожного відрізка $P'Q'$ площини α його оригінал на площині β можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки (наслідок 1 з теореми 5.1) з точністю до руху площини β , що, зрозуміло, обґрунтовує справедливність даного наслідка.

У той же час, усі кола однакових радіусів є рівними між собою,

суміщаються за допомогою певного руху. Тому для розв'язання поставленої задачі можна обмежитися наступними, більш простими, побудовами. На площині α проведемо радіус $O'K'$ еліпса F' , паралельний до відрізка $P'Q'$ (рис. 143). Згідно наслідка 1 з теореми 8.6,

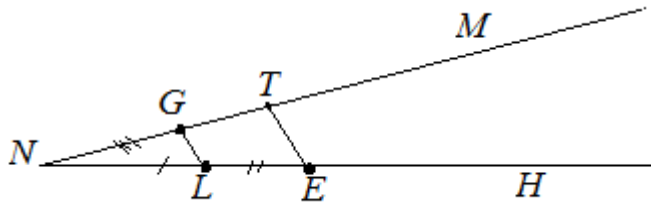


Рис. 144

радіус $O'K'$ при застосованому законі зображення є зображенням такого радіуса кола F , який є паралельним до оригінала

PQ відрізка $P'Q'$ (при невиродженому для площини паралельних відрізків паралельному проєктуванні вони зображуються паралельними відрізками і навпаки). Одночасно, при цьому зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих. І тому для

довільного радіуса OB кола F має місце рівність $\frac{PQ}{OB} = \frac{P'Q'}{O'K'}$. Побу-

дову відрізка, довжина якого дорівнює довжині відрізка PQ , неважко виконати за допомогою теореми Фалеса (рис. 144): $\angle MNH$ є довільним нерозгорнутим кутом, $NL = O'K'$, $LE = P'Q'$, $NG = OB$, $ET \parallel LG$, $GT = PQ$. Відрізок GT є шуканим. ■

Теорема 8.8. *Якщо відомо, що заданий еліпс F' є зображенням деякого кола F за методом паралельного проєктування, то, згідно застосованого закону зображення, зображенням площини β , яка містить коло F , у вигляді площини α , яка містить еліпс F' , є подібно повним.*

Справедливість теореми 8.8 впливає зі справедливості наслідка 9 із теореми 5.1 і того факту, що будь-які два кола є подібними між собою.

Питання і завдання для самоконтролю до §8

8.1. Наведіть означення кола, його центра і радіуса.

8.2. Наведіть означення дуги кола.

8.3. Наведіть означення хорди кола, діаметра кола.

8.4. Наведіть означення внутрішньої і зовнішньої областей кола.

8.5. Охарактеризуйте можливі варіанти взаємного розташування на площині кола і прямої. Наведіть відповідні приклади.

8.6. Наведіть означення дотичної до кола. Сформулюйте критерій того, що пряма є дотичною до кола.

8.7. Сформулюйте теорему евклідової геометрії про властивість радіуса кола, перпендикулярного до хорди цього кола.

8.8. Наведіть означення центрального кута кола, сектора кола, сегмента кола. Надайте відповідні приклади.

8.9. Наведіть означення еліпса. Поясніть, чому коло вважають окремим випадком еліпса.

8.10. Наведіть означення дуги еліпса, радіуса еліпса, хорди еліпса, діаметра еліпса.

8.11. Наведіть означення внутрішньої і зовнішньої областей еліпса.

8.12. Поясніть, як, за наявності еліпса, можна визначити положення його центра за допомогою циркуля і лінійки?

8.13. У якому випадку один діаметр еліпса називають спряженим до іншого? Що таке пара взаємно спряжених діаметрів еліпса? Що

можна стверджувати про взаємне розташування спряжених діаметрів кола?

8.14. Наведіть означення осей еліпса.

8.15. Охарактеризуйте можливі варіанти взаємного розташування на площині прямої і еліпса. Наведіть відповідні приклади.

8.16. Наведіть означення дотичної до еліпса. Сформулюйте той критерій дотичної до еліпса, який, за наявності еліпса, надає можливість побудови за допомогою циркуля і лінійки дотичної до даного еліпса у заданій на ньому точці.

8.17. Що можна стверджувати про існування дотичних до кола, які проходять через задану точку площини даного кола? Вкажіть способи побудови таких дотичних (у випадку їх існування) за допомогою циркуля і лінійки.

8.18. Що можна стверджувати про існування дотичних до еліпса, які проходять через задану точку площини даного еліпса? Вкажіть способи побудови таких дотичних (у випадку їх існування) за допомогою циркуля і лінійки.

8.19. Наведіть означення центрального кута еліпса, сектора еліпса, сегмента еліпса. Надайте необхідні приклади.

8.20. Який многокутник називають вписаним у еліпс?

8.21. Який многокутник називають описаним навколо еліпса?

8.22. Чи можна у будь-який еліпс вписати паралелограм? Відповідь обґрунтуйте.

8.23. Чи можна навколо будь-якого еліпса описати паралелограм? Відповідь обґрунтуйте.

8.24. Чи можна у будь-який еліпс вписати трапецію? Відповідь обґрунтуйте.

8.25. Чи можна навколо будь-якого еліпса описати трапецію? Відповідь обґрунтуйте.

8.26. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями еліпса при невиродженому для даного еліпса паралельному проєктуванні?

8.27. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями кола при невиродженому для даного кола паралельному проєктуванні?

8.28. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому точки, що належать внутрішній області еліпса F , зображені ...»

8.29. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому точки, що належать зовнішній області еліпса F , зображені ...»

8.30. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому зображенням хорди еліпса F є ...»

8.31. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому зображенням центра еліпса F є ...»

8.32. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому зображенням діаметра еліпса F є ...»

8.33. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є

зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому зображенням пари спряжених діаметрів еліпса F є ...»

8.34. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому зображенням дотичної до еліпса F є ...»

8.35. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому зображенням многокутника, вписаного у еліпс F , є ...»

8.36. Наведіть правильне закінчення речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F за методом паралельного проєктування, то при цьому зображенням многокутника, описаного навколо еліпса F , є ...»

8.37. Задано довільний еліпс F , точку A , $A \in F$, довільний еліпс F' , точку A' , $A' \in F'$. Чи існує паралельне проєктування, при якому еліпс F' є зображенням еліпса F , а точка A' – зображенням точки A ? Відповідь обґрунтуйте.

8.38. Задано довільне коло F з довільною парою взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD та еліпс F' з довільною парою спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$. Чи існує паралельне проєктування, при якому еліпс F' є зображенням кола F , діаметр $A'B'$ – зображенням діаметра AB , діаметр $C'D'$ – зображенням діаметра CD ? Відповідь обґрунтуйте.

8.39. Відомо, що заданий еліпс F' є зображенням заданого еліпса F за методом паралельного проєктування, фігура H' площини еліпса F' згідно застосованого закону зображення є зображенням певної фігури H площини еліпса F . Що можна стверджувати про характер повноти зображення H' ? Відповідь обґрунтуйте.

8.40. Відомо, що заданий еліпс F' є зображенням кола F за методом паралельного проєктування. Що, згідно застосованого закону зображення, можна стверджувати про характер повноти зображення H' довільної фігури H , розташованої на площині кола F ? Відповідь обґрунтуйте.

§9. Зображення вписаних багатокутників при невивродженому для даних фігур паралельному проєктуванню

Наведемо розв'язки певної кількості стандартних задач на побудову зображень, вписаних у коло n -кутників, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, при невивродженому для даного кола паралельному проєктуванню.

У кожній запропонованій задачі під відповідним n -кутником розумітимемо n -кутник-каркас. За умови кожної із запропонованих задач буде задано еліпс F' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F . Зрозуміло, що таке паралельне проєктування для кола F (і площини, яка це коло містить,) є невивродженим. Більш за це, згідно теореми 8.8, отримане зображення є евклідово повним. Також завжди вважатимемо, що, одночасно з еліпсом (і колом, як окремим випадком еліпса), задано і його центр. (За наявності еліпса можливість побудови за допомогою циркуля і лінійки його центру було обґрунтовано раніше).

Задача 9.1. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення довільного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. $\square$ Відомо, що вписаний у коло трикутник є прямокутним тоді та тільки тоді, коли одна з його сторін (гіпотенуза) є діаметром даного кола. Згідно наслідка 1 з теореми 8.6, при невивродженому для кола паралельному проєктуванню кожний діаметр кола F зображується діаметром еліпса F' , для кожного діаметра еліпса F' оригіналом є певний діаметр кола F , кожний трикутник, вписаний у коло F , зображується трикутником, вписаним у еліпс F' , для кожного трикутника, вписаного у еліпс F' , оригіналом є певний

трикутник, вписаний у коло F . Тому, для побудови зображення довільного прямокутного трикутника, вписаного у коло F , достатньо

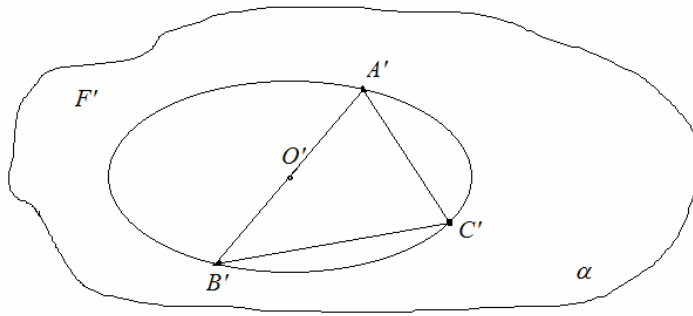


Рис. 145

побудувати довільний діаметр $A'B'$ еліпса F' , за зображення вершини прямого кута прийняти довільну точку C' еліпса F' , відмінну від точок A' і B' . Трикутник

$A'B'C'$ буде шуканим (рис. 145). ■

Задача 9.2. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення довільного прямокутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. □ Зрозуміло, що для того, щоб вписати у коло прямокутник, достатньо провести два довільних діаметра цього кола і послідовно з'єднати їх кінці. Так, на рис. 146 у колі F проведено діаметри MN і PQ .

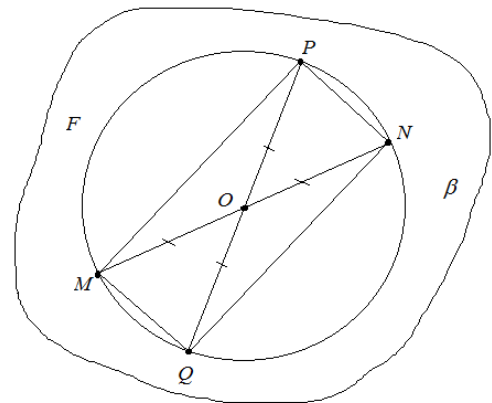


Рис. 146

Чотирикутник $MPNQ$ є прямокутником, бо він має рівні діагоналі, які перетинаються у точці O і своєю точкою перетину діляться

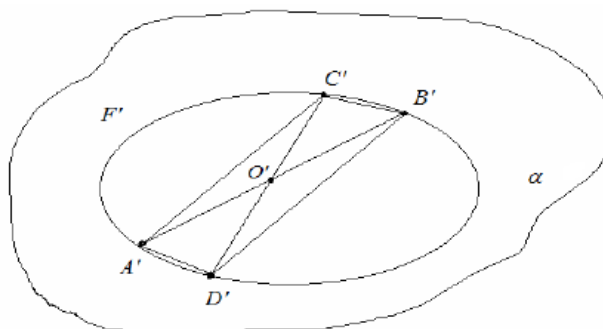


Рис. 147

навпіл. Діагоналі кожного прямокутника, вписаного у коло, є

діаметрами даного кола. Якщо еліпс F' є зображенням кола F за методом паралельного проєктування, то зображеннями діаметрів кола F є діаметри еліпса F' , кожний діаметр еліпса F' є зображенням певного діаметра кола F (теорема 8.6, наслідок 1). Отже, для побудови зображення довільного прямокутника, вписаного у коло-оригінал, достатньо побудувати два довільних діаметра еліпса F' і послідовно з'єднати їх кінці. Так, на рис. 147 побудовано діаметри $A'B'$ і $C'D'$ еліпса F' , чотирикутник $A'C'B'D'$ є шуканим. Реально, він є паралелограмом, бо його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. ■

Задача 9.3. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. □ Розглянемо довільне коло F з центром у точці O . Гіпотенузою будь-якого прямокутного трикутника, вписаного у коло F , є діаметр цього кола. Як відомо, для того, щоб трикутник був рівнобедреним, необхідно й достатньо, щоб медіана цього трикутника, проведена до однієї з його сторін, одночасно, була і

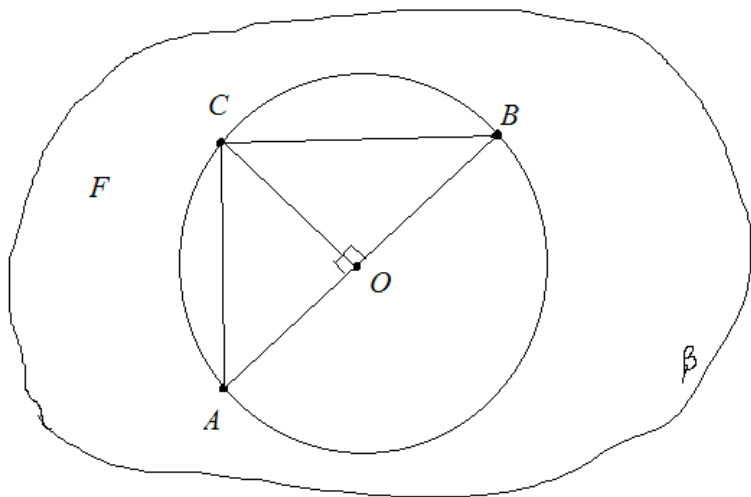


Рис. 148

його висотою. Отже, для того, щоб вписати у коло рівнобедрений прямокутний трикутник, достатньо для даного кола побудувати довільний діаметр AB (рис. 148) і, перпендикулярно до AB , провести

радіус CO . Трикутник ABC буде шуканим. Усі рівнобедрені прямокутні трикутники, вписані у те ж саме коло, є рівними між собою.

Згідно наслідка 1 з теореми 8.6, якщо еліпс F' є зображенням кола F за методом паралельного проєктування, то будь-який діаметр еліпса F' є зображенням певного діаметра кола F , довільна пара спряжених діаметрів

еліпса F' є зображенням певної пари взаємно перпендикулярних діаметрів кола F , зображенням будь-якого діаметра кола F може бути лише діаметр еліпса

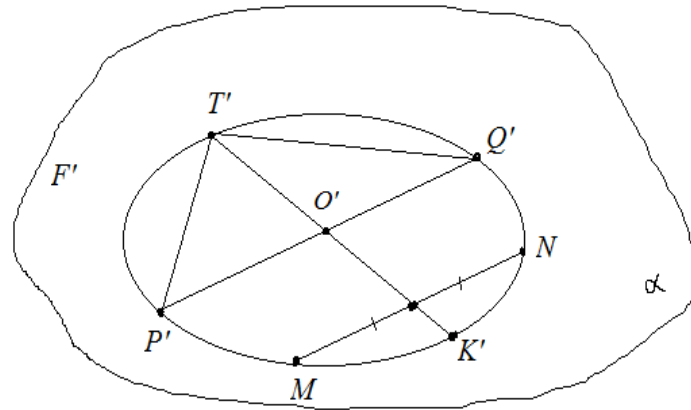


Рис. 149

F' , зображенням пари взаємно перпендикулярних діаметрів кола F може бути лише пара спряжених діаметрів еліпса F' . Звідси випливає наступний шлях розв'язання поставленої задачі.

1. У даному еліпсі F' проводимо довільний діаметр $P'Q'$.
2. За допомогою хорди MN , яка є паралельною до діаметра $P'Q'$, будуємо діаметр $T'K'$, спряжений до діаметра $P'Q'$.
3. Будуємо трикутник $P'T'Q'$, який є шуканим зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал (рис. 149). ■

Задача 9.4. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB=90^\circ$). Відомо, що еліпс F' є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення, вписаного у коло-оригінал трикутника, подібного до заданого.*

Розв'язання. □ Розглянемо заданий прямокутний трикутник ABC . Проведемо у ньому висоту CH ($CH \perp AB$) (рис. 150). У заданому еліпсі F' побудуємо довільний діаметр $A'B'$ і, за допомогою хорди MN , яка є паралельною до діаметра $A'B'$, спряжений до нього діаметр PQ (рис. 151). Проведемо довільний промінь з початком у

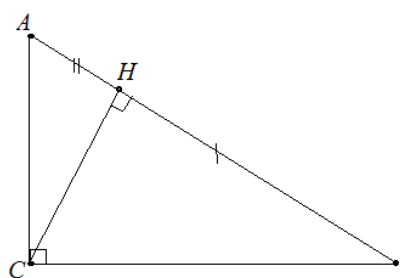


Рис. 150

точці B' . На цьому промені послідовно відкладемо відрізки $B'H_1 = BH$ і $H_1A_1 = HA$. Паралельно до прямої A_1A' проведемо пряму H_1H' до перетину з діаметром $A'B'$ у точці H' . За теоремою Фалеса, $B'H' : H'A' = B'H_1 : H_1A_1 = BH : HA$. Проведемо півхорду $H'C'$, $H'C' \parallel PQ$. Трикутник $A'B'C'$ буде шуканим.

Дійсно, трикутник $A'B'C'$ є вписаним у еліпс F' . Отже, оригінал

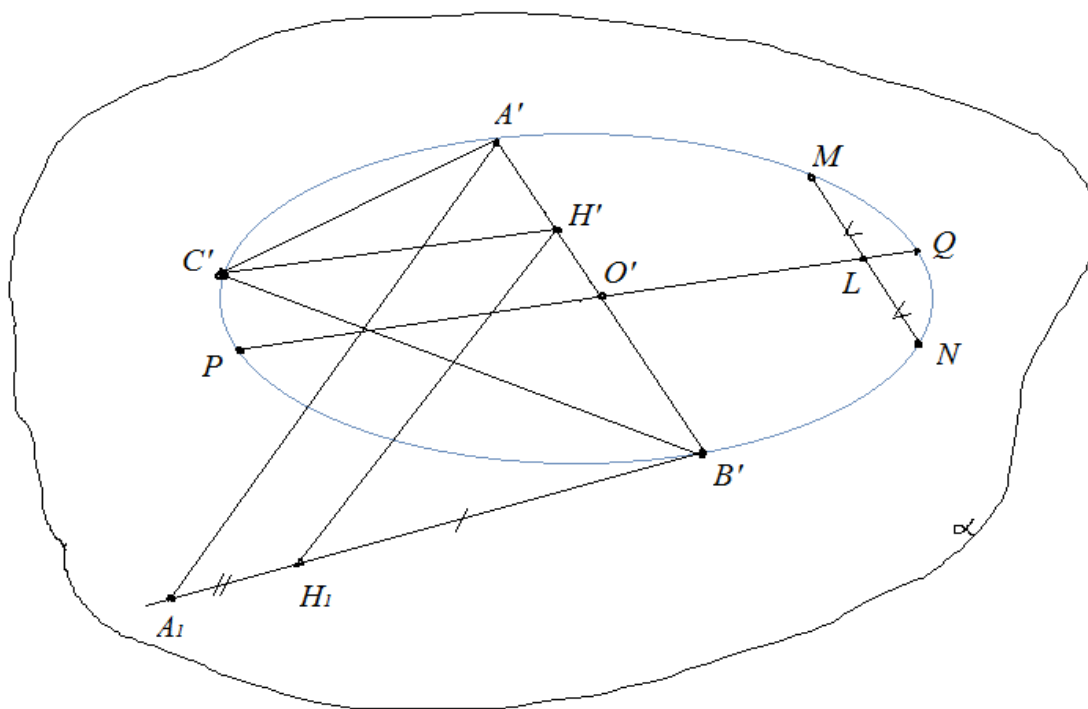


Рис. 151

цього трикутника, згідно застосованого закону зображення, вписано у коло F . Сторона $A'B'$ трикутника $A'B'C'$ є діаметром еліпса F' . Це

означає, що відповідна сторона трикутника-оригінала є діаметром кола F , трикутник-оригінал є прямокутним. Діаметр PQ еліпса F' є спряженим до діаметра $A'B'$. Отже, оригінали діаметрів PQ і $A'B'$ є взаємно перпендикулярними діаметрами кола F . Відрізок $C'H'$ є паралельним до діаметра PQ . Це означає, що оригінал цього відрізка є висотою трикутника-оригінала, проведеною до його гіпотенузи. При зображенні фігур за допомогою невинного для відповідної прямої паралельного проектування зберігається відношення довжин відрізків, які належать цій прямій (теорема 3.10). Це означає, що у трикутнику-оригіналі основа висоти, проведеної до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні $BH:HA$, тобто, у такому самому відношенні, як і у трикутнику ABC . За відомою теоремою шкільного курсу геометрії, для заданого прямокутного трикутника ABC , $AC^2 = AH \cdot AB$,

$$BC^2 = BH \cdot AB, \quad \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BH}{AH}, \quad \frac{BC}{AC} = \sqrt{\frac{BH}{AH}}. \text{ Аналогічні міркування}$$

для трикутника-оригінала дозволять зробити висновок про те, що

катети цього трикутника також відносяться як $\sqrt{\frac{BH}{AH}}$. Отже,

трикутник-оригінал є подібним до трикутника ABC , трикутник $A'B'C'$ дійсно є шуканим. ■

Усі кола є подібними між собою. Коло є подібним лише до кола. Отже, у відповідності до наслідка 2 з теореми 3.1, для розв'язання задачі 9.4 можна було обрати довільне коло, вписати у це коло трикутник, подібний до заданого трикутника ABC , і прийняти отриману фігуру за оригінал. При цьому побудови шуканого зображення, фактично, співпали би з описаними у наведеному розв'язанні. Можна також було просто описати коло навколо заданого трикутника ABC і саме таким чином отриману фігуру прийняти за оригінал.

Усе це означає, що наведений спосіб розв'язання задачі 9.4 є не єдиним можливим. Але, здається, він є одним з найбільш раціональних.

Спосіб розв'язання задачі на побудову зображення геометричної фігури вважається тим більш раціональним, чим меншу кількість разів під час його реалізації доводиться використовувати оригінал чи фігуру, подібну до оригінала. Найраціональнішим вважається таке розв'язання задачі, реалізація якого взагалі не потребує використання оригінала. У той же час розв'язання задачі 9.4 вимагає обов'язкового використання оригінала у вигляді трикутника ABC тому, що, згідно умови даної задачі, цей прямокутний трикутник ABC є довільним, його не охарактеризовано з точністю до перетворення подібності.

Задача 9.5. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні $3 : 4$.*

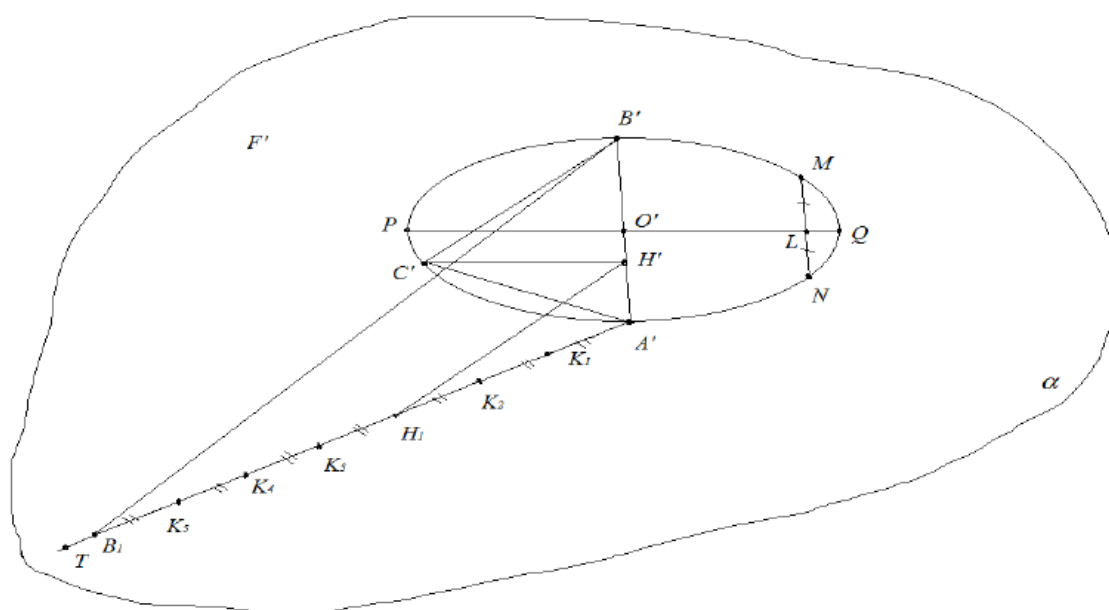
Розв'язання. $\square$ Зрозуміло, що для розв'язання задачі 9.5 можна застосувати ту ж саму схему, що й для розв'язання задачі 9.4.

Але можна запропонувати й таке розв'язання, для якого використання оригінала не є потрібним. У цьому випадку точку H' на діаметрі $A'B'$ треба просто побудувати як точку, що ділить цей діаметр у відношенні $3 : 4$. Такі побудови стандартним чином виконуються за допомогою теореми Фалеса.

Вищевказаний спосіб розв'язання продемонстровано на рис. 152. Нижче описані послідовні кроки виконаних побудов.

1. Для заданого еліпса F' з центром у точці O' будуємо довільний діаметр $A'B'$.

4. На промені $A'T$, від його початку, послідовно


$$A'K_1=K_1K_2=K_2H_1=H_1K_3=K_3K_4=K_4K_5=K_5B, A'H_1:H_1B=3:4.$$

8. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим. ■

280

зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника, катети якого відносяться як $2 : 3$.

Розв'язання. $\square$ Відомо, що усі прямокутні трикутники з однаковим відношенням катетів, як і усі кола, є подібними між собою, коло є подібним лише до кола. Отже, можна розглянути довільний прямокутний трикутник, катети якого відносяться як $2 : 3$, описати навколо нього коло і прийняти отриману фігуру за оригінал. Можна, навіть, не описувати коло, а просто провести висоту до гіпотенузи. Далі задачу можна розв'язати за допомогою теореми Фалеса, за зразком розв'язання задачі 9.4.

Задачу можна розв'язати і за зразком розв'язання задачі 9.5, якщо використати той, доведений при розв'язанні задачі 9.4, факт, що у прямокутному трикутнику основа висоти, проведеної до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні, яке дорівнює відношенню квадратів відповідних катетів. У випадку даної задачі це відношення складає $4 : 9$.

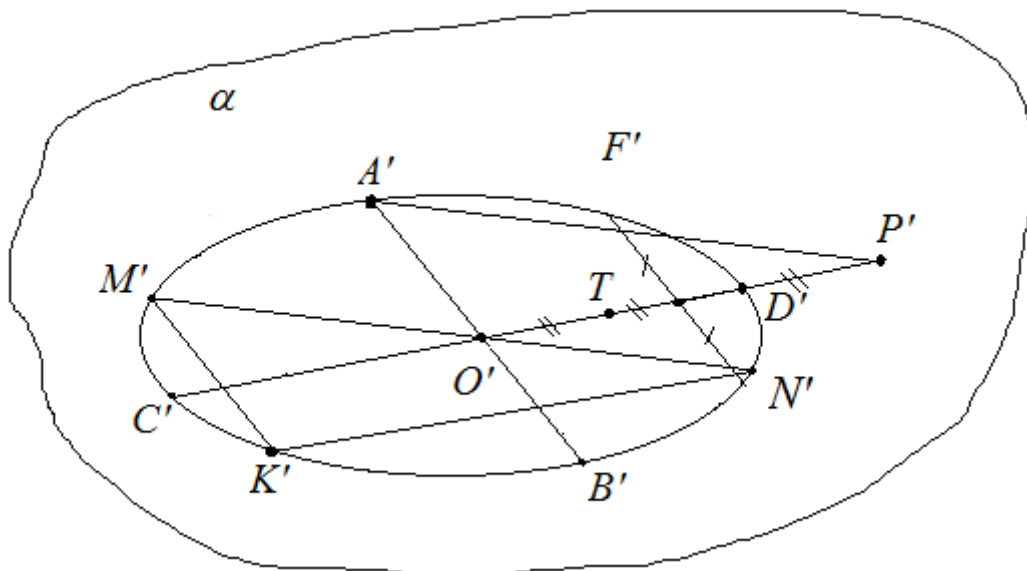


Рис. 153

Але цікавим є інший шлях розв'язання сформульованої задачі (рис.153).

1. У заданому еліпсі F' будемо пару спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$.

2. Ділимо радіус $O'D'$ навпіл ($O'T = TD'$), на промені, доповняльному до променя $D'O'$, відкладемо відрізок $D'P' = O'T$.

3. Розглядаємо трикутник $A'O'P'$. Оскільки відрізки $O'A'$ і $O'P'$ належать прямим, які містять спряжені діаметри даного еліпса, оригінали AO і OP цих відрізків, згідно застосованого закону зображення, є взаємно перпендикулярними, оригіналом трикутника $A'O'P'$ є прямокутний трикутник AOP з катетами AO і OP . Відрізок $O'A'$ є радіусом еліпса F' , отже, оригінал OA цього відрізка є радіусом кола F , $OA = R$, де R – довжина радіуса кола F . Відрізок

$O'P'$ містить радіус $O'D'$ еліпса F' , $O'P' = \frac{3}{2}O'D'$. Значить, оригінал

OP цього відрізка містить радіус OD кола F , $OP = \frac{3}{2}OD$, $OP = \frac{3}{2}R$.

Але тоді, для прямокутного трикутника AOP , є справедливою рівність

$$AO:OP = R:\frac{3}{2}R = 2:3.$$

4. Проводимо у еліпсі F' діаметр $M'N'$, $M'N' \parallel A'P'$. Паралельно до діаметра $A'B'$, проводимо хорду $M'K'$. Будуємо хорду $K'N'$.

5. Трикутник $M'N'K'$ є шуканим.

Дійсно, оригіналом цього трикутника є трикутник MNK , вписаний у коло F . Оригінал MN відрізка $M'N'$ є діаметром кола F . Отже, трикутник MNK є прямокутним трикутником з катетами MK і KN (рис. 154).

Згідно побудови, відрізки $A'B'$ і $C'D'$ є спряженими діаметрами еліпса F' . Значить, їх оригінали AB і CD є взаємно перпендикулярними діаметрами кола F . За побудови, $M'K' \parallel A'B'$. Це означає, що

для кола-оригінала F , $MK \parallel AB$. Але тоді $KN \parallel CD$ бо $\angle MKN = 90^\circ$, а $CD \perp AB$. Тоді, для еліпса F' , $K'N' \parallel C'D'$. Отже, сторони три-

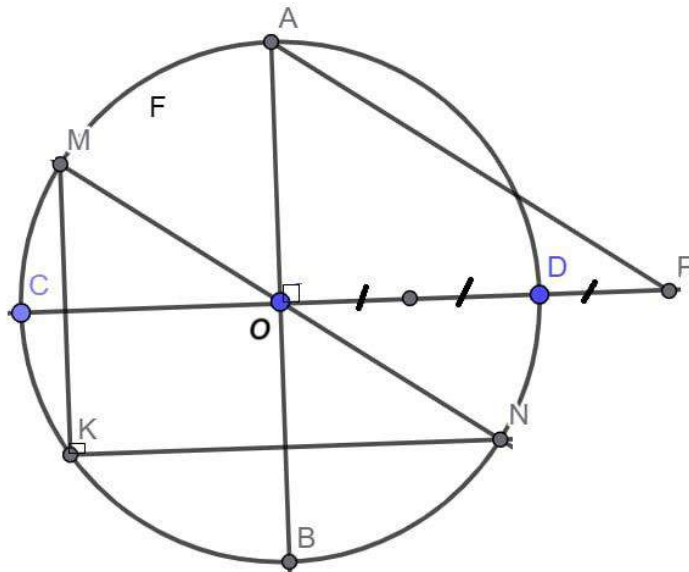


Рис. 154

кутників $M'N'K'$ і $A'P'O'$ є попарно паралельними. За відомою теоремою елементарної геометрії звідси випливає, що ці трикутники є подібними, їх відповідні сторони є пропорційними:

$$\frac{M'N'}{A'P'} = \frac{M'K'}{A'O'} = \frac{K'N'}{O'P'}.$$

Оскільки при невиродженому паралельному проєктуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать паралельним

прямим, правильними є рівності $\frac{MK}{AB} = \frac{M'K'}{A'B'}$; $\frac{KN}{CD} = \frac{K'N'}{C'D'}$. Звідси

$$\frac{MK}{KN} = \frac{M'K' \cdot AB}{A'B' \cdot C'D'} = \frac{M'K' \cdot 2R \cdot C'D'}{A'B' \cdot K'N' \cdot 2R} = \frac{M'K' \cdot C'D'}{A'B' \cdot K'N'}.$$

Але з подібності трикутників $M'N'K'$ і $A'P'O'$ випливає, що

$$\frac{M'K'}{K'N'} = \frac{A'O'}{O'P'}. \text{ Отже, } \frac{MK}{KN} = \frac{A'O' \cdot C'D'}{A'B' \cdot O'P'} = \frac{A'O' \cdot 2O'D'}{2A'O' \cdot \frac{3}{2}O'D'} = \frac{2}{3}. \blacksquare$$

Задача 9.7. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника з кутом у 30° .*

Розв'язання. $\square$ Усі прямокутні трикутники з гострим кутом у

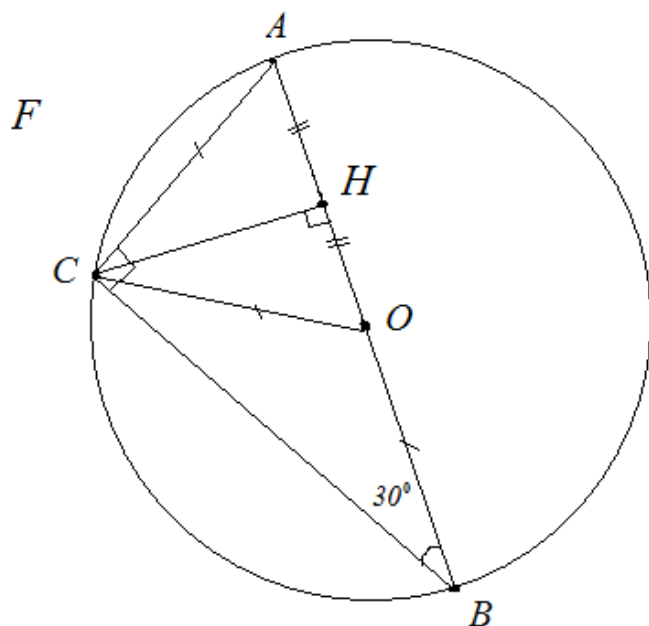


Рис. 155

30° є подібними між собою. Отже, довільний із них можна прийняти за оригінал і розв'язати задачу 9.7 за зразком розв'язання задачі 9.4. Такий шлях розв'язання передбачає використання оригінала в явному вигляді (при цьому потрібна точна, а не схематична побудова оригінала) і застосування

теореми Фалеса. У той же час, для даної задачі можливим є й інший спосіб розв'язання, який не передбачає явного використання трикутника-оригінала. Для знаходження цього способу наведемо наступні міркування.

Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами AC і BC , у якого $\angle ABC = 30^\circ$ (рис. 155). Відомо, що тоді катет AC (який є протилежним до кута ABC) дорівнює половині гіпотенузи AB . Опишемо навколо трикутника ABC коло F . Як відомо, його центр O ділить навпіл гіпотенузу AB : $AO = BO = CO$. Але тоді трикутник AOC є рівностороннім: $AO = CO = AC$, основа H його висоти CH ділить його сторону AO на дві рівні частини: $AH = HO$.

Звідси випливає наступна відповідь на питання, як у коло вписати прямокутний трикутник з гострим кутом у 30° . У колі з центром у точці O треба побудувати довільний діаметр AB . Радіус AO треба поділити навпіл, припустимо, точкою H : $AH=HO$. Далі, треба, перпендикулярно до діаметра AB , провести півхорду CH і розглянути трикутник ABC . У цього трикутника $\angle ACB=90^\circ$ тому, що цей кут є таким вписаним у дане коло кутом, який спирається діаметр.

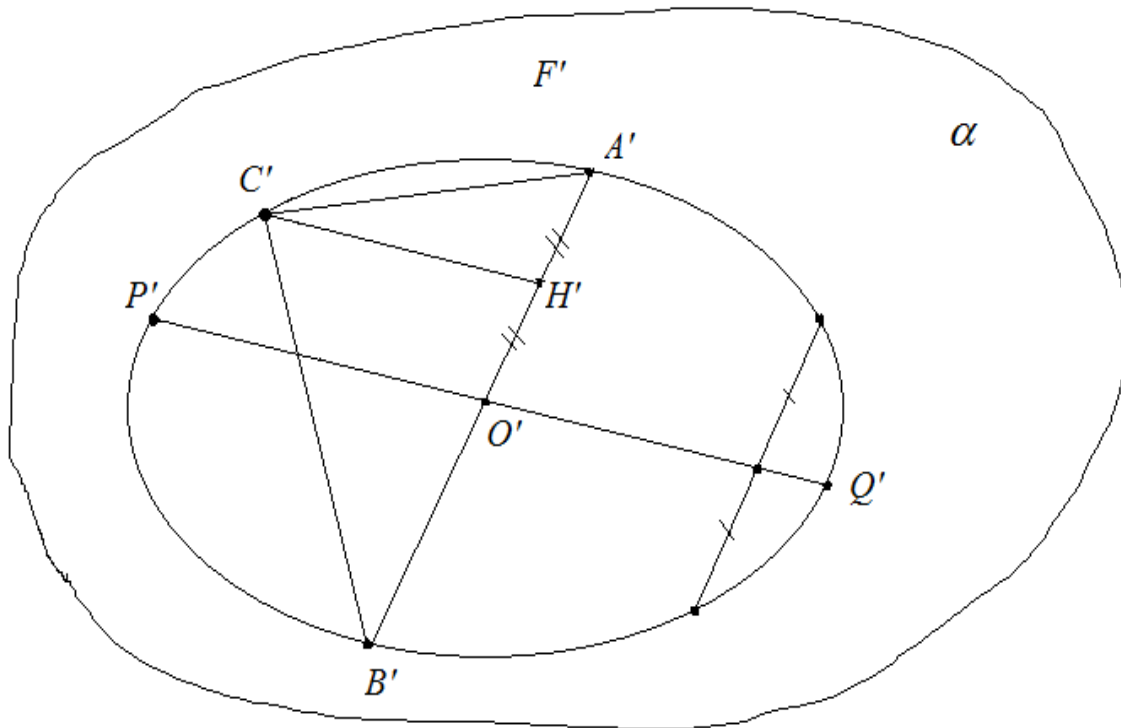


Рис. 156

Трикутник ACO є рівнобедреним трикутником з основою AO , бо, за побудовою, його висота CH одночасно є і його медіаною. Отже, $AC=CO$. Але $CO=AO=BO$, бо точка O є центром кола, описаного

навколо трикутника ABC . Тому $AC=\frac{1}{2}AB$. За відомою теоремою

курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, звідси випливає, що $\angle ABC=30^\circ$ (рис. 155).

Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати

аналогічні побудови для еліпса і саме таким чином розв'язати поставлену задачу 9.7 (рис. 156).

1. У заданому на картинній площині α еліпсі F' будуюмо довільний діаметр $A'B'$.

2. Будуюмо спряжений до діаметра $A'B'$ діаметр $P'Q'$.

3. Знаходимо середину H' радіуса $O'A'$.

4. Паралельно до діаметра $P'Q'$ проводимо півхорду $H'C'$.

5. Будуюмо сторони $A'C'$ і $C'B'$ трикутника $A'B'C'$, який є шуканим.

Обґрунтування правильності таких побудов є очевидним. ■

Задача 9.8. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення довільного рівнобедреного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. □ Оскільки серединний перпендикуляр, проведений до основи рівнобедреного трикутника, містить висоту цього трикутника, проведену до його основи, центр кола, описаного навколо

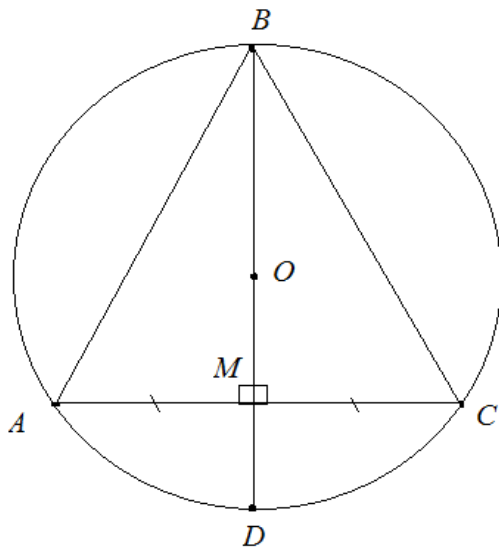


Рис. 157

рівнобедреного трикутника, належить прямій, що містить цю висоту. Звідси випливає наступний легкий спосіб побудови довільного рівнобедреного трикутника, вписаного у коло:

1. Будуюмо довільний діаметр BD даного кола (рис. 157).

2. На діаметрі BD обираємо довільну точку M (відмінну від

точок B і D).

3. Через обрану точку M , перпендикулярно до діаметра BD , проводимо хорду AC .

4. Трикутник ABC є шуканим.

Насправді, трикутник ABC є вписаним у дане коло. Відомо, що діаметр кола, перпендикулярний до хорди даного кола, ділить цю хорду навпіл. Отже, у трикутнику ABC відрізок BM одночасно є медіаною і висотою. Значить, трикутник ABC є рівнобедреним трикутником з основою AC . Форма цього рівнобедреного трикутника залежить від положення точки M на діаметрі BD .

Якщо еліпс F' є зображенням кола F при паралельному проєктуванні, то, згідно наслідка 1 з теореми 8.6, кожний діаметр $P'Q'$ еліпса F' є зображенням певного діаметра PQ кола F , хорда еліпса F' , паралельна до його діаметра, спряженого до діаметра $P'Q'$, є зображенням хорди кола F , перпендикулярної до діаметра PQ . Звідси випливає справедливість наступного розв'язання задачі 9.8.

1. У даному еліпсі F' будуюмо довільний діаметр $B'D'$ (рис. 158).

2. Використовуючи допоміжну хорду, будуюмо спряжений до діаметра $B'D'$ діаметр $H'K'$.

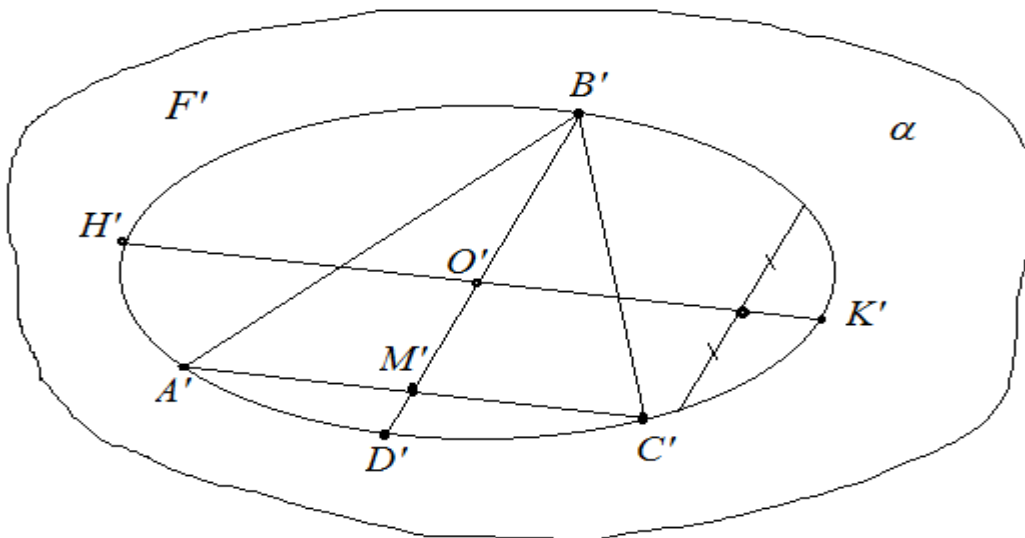


Рис. 158

3. На діаметрі $B'D'$ обираємо довільну внутрішню точку M' .

4. Через точку M' , паралельно до діаметра $H'K'$, проводимо хорду $A'C'$ еліпса F' (Якщо $M' \equiv O'$, то $A'C' \equiv H'K'$).

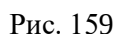
5. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим.

Насправді, трикутник $A'B'C'$ є вписаним у еліпс F' . Оскільки еліпс F' є зображенням кола F за методом паралельного проєктування, то оригіналом для трикутника $A'B'C'$, згідно застосованого закону зображення, є певний трикутник ABC , вписаний у коло F . За побудовою, сторона $A'C'$ трикутника $A'B'C'$ є паралельною до діаметра $H'K'$, спряженого до діаметра $B'D'$, який містить відрізок $B'M'$. Це означає, що аналогічна паралельність має місце і для кола-оригінала. Але для кола-оригінала це означає, що сторона AC трикутника ABC є перпендикулярною до відрізка BM (який є оригіналом для відрізка $B'M'$), відрізок BM є висотою трикутника ABC , проведеною до сторони AC .

Для еліпса F' відрізки $A'M'$ і $M'C'$ є рівними, тому що кожний діаметр еліпса ділить навпіл усі хорди, паралельні до діаметра, спряженого до нього, відрізок $B'M'$ є медіаною трикутника $A'B'C'$. Звідси випливає, що відрізок BM є медіаною трикутника ABC . Отже, у трикутнику ABC висота, проведена до сторони AC , одночасно є і його медіаною. Це означає, що трикутник ABC є рівнобедреним ($AB=BC$), тобто, побудований трикутник $A'B'C'$ насправді є шуканим. ■

Задача 9.9. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і рівнобедрений трикутник ABC ($AB=BC$). Про еліпс F' відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення трикутника, подібного до заданого трикутника ABC , вписаного у коло-оригінал.*

Оскільки усі кола є подібними між собою, коло є подібним лише



Нехай відрізок BD є діаметром кола $\tilde{F}$. Проведемо довільний діаметр $B'D'$ еліпса F' (рис. 159 (б)). Згідно наслідка 6 з теореми 8.6,

діаметр $B'D'$ можна вважати зображенням діаметра BD кола $\tilde{F}$. За допомогою теореми Фалеса побудуємо на діаметрі $B'D'$ зображення M' точки M діаметра BD $\left(\frac{D'M'}{M'B'} = \frac{DM}{MB} \right)$. Через точку M' проведемо хорду $A'C'$, паралельну до діаметра PQ еліпса F' , спряженого до діаметра $B'D'$. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим (рис. 159 (б)).

Дійсно, згідно наслідка 1 з теореми 8.6, для діаметра PQ еліпса F' оригіналом є діаметр кола $\tilde{F}$, перпендикулярний до діаметра BD . Хорда $A'C'$ еліпса F' проходить через точку M' і є паралельною до діаметра PQ . Отже, оригіналом цієї хорди є хорда кола $\tilde{F}$, яка проходить через точку M перпендикулярно до діаметра BD . А такою хордою є хорда AC .

Оскільки конкретна форма заданого рівнобедреного трикутника є невідомою, використання оригінала для розв'язання даної задачі є неминучим. ■

Задача 9.10. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. □ Усі правильні трикутники, як і усі кола, є подібними між собою. Отже, будь-який з таких трикутників, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, можна прийняти за оригінал шуканого зображення, описати навколо такого трикутника коло і проводити розв'язання даної задачі саме таким чином, як було розв'язано попередню задачу 9.9.

Але існує достатньо простий спосіб побудови вписаного у коло

У колі F з центром у точці O побудуємо довільний діаметр (рис. 160). Через середину M радіуса OD проведемо перпендикулярну до нього хорду AC . Трикутник ABC є шуканим.



Рис. 160

Тому трикутник OAD є рівносто-

291

AD . $\angle ABM$, він же $\angle ABD$, є кутом, вписаним у дане коло, який спирається на ту ж саму дугу. Тому $\angle ABM = \frac{1}{2} \angle AOD = 30^\circ$. Але

тоді $\angle ABC = 2 \angle ABM = 60^\circ$, у рівнобедреному трикутнику ABC один з кутів дорівнює 60° . Звідси випливає, що усі інші кути цього трикутника також складають по 60° , трикутник ABC є правильним.

Властивості паралельного проєктування і проведені міркування обґрунтовують той факт, що задачу 9.10 можна розв'язати за схемою розв'язання задачі 9.9, але без використання теореми Фалеса. Точка M' повинна бути серединою радіуса $O'D'$. Відповідні побудови виконані на рис. 161. (Діаметр PQ , спряжений до діаметра $B'D'$, побудовано за допомогою хорди KT , паралельної до діаметра $B'D'$).

Зрозуміло, що усі вищевказані побудови на картинній площині α не вимагають проведення жодних побудов у колі F . ■

Задача 9.11. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного шестикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. □ Задачу можна розв'язати багатьма різними способами. Але найбільш цікавим здається спосіб, ідею якого підказано

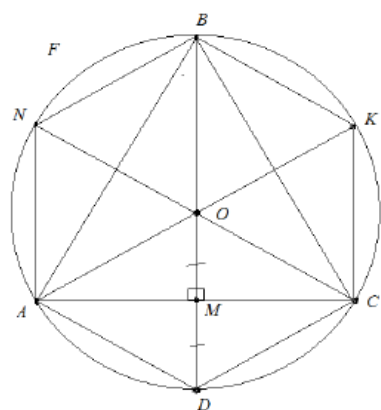


Рис. 162

наведеним розв'язанням задачі 9.10.

З'ясуємо, спочатку, як можна правильний шестикутник вписати у коло. (Зрозуміло, загальновідомим є той факт, що сторона вписаного у коло правильного шестикутника дорівнює радіусу цього кола. Звідси випливає традиційний шлях розв'язання

поставленої задачі. Але подібний спосіб розв'язання важко перенести на еліпс тому, що, у загальному випадку, при зображенні геометричних фігур за методом паралельного проєктування не зберігається відношення довжин відрізків, які не належать одній прямій, або паралельним прямим).

Розглянемо довільний діаметр BD кола F (рис. 162). Через середину M радіуса OD , перпендикулярно до нього, проведемо хорду AC . Проведемо діаметри AK і CN кола F . Шестикутник $ANBKCD$ є правильним шестикутником, вписаним у коло F (доведіть самостійно).

Аналогічні побудови можна виконати і для еліпса F' (рис. 163).

1. Будуємо довільний діаметр $B'D'$ і спряжений до нього діаметр PQ .
2. Через середину M' радіуса $O'D'$ паралельно до діаметра PQ

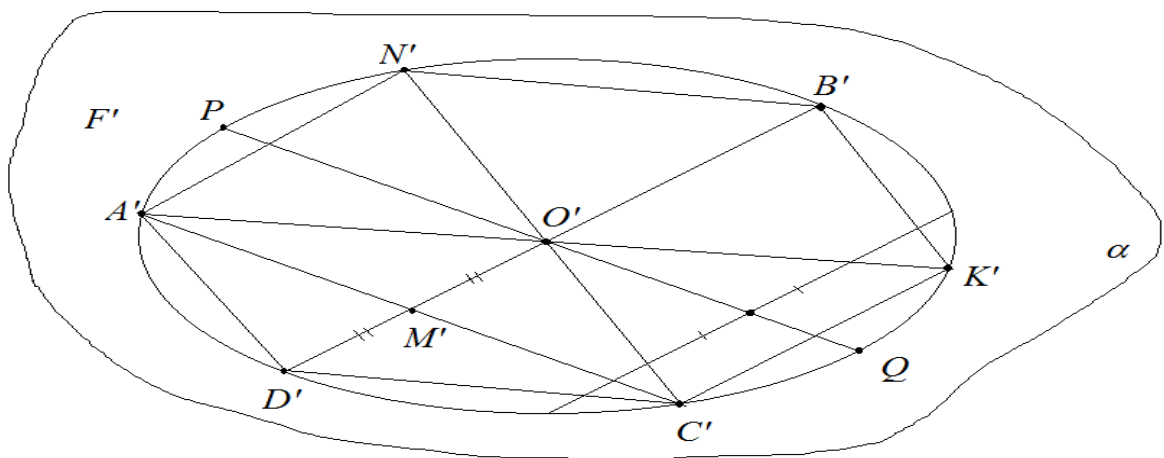


Рис. 163

проводимо хорду $A'C'$.

3. Проводимо діаметри $A'K'$ і $C'N'$.
4. Шестикутник $A'N'B'K'C'D'$ є шуканим (обґрунтуйте самостійно). ■

Задача 9.12. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення*

згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у 120° .

Розв'язання. $\square$ Усі рівнобедрені трикутники з однаковими кутами при вершинах, як і всі кола, є подібними між собою. Отже, можна розглянути довільний рівнобедрений трикутник з кутом при вершині у 120° і розв'язати сформульовану задачу за зразком розв'язання задачі 9.9. Але найбільш цікавим є спосіб, який не вимагає явного використання фігури, прийнятої за оригінал.

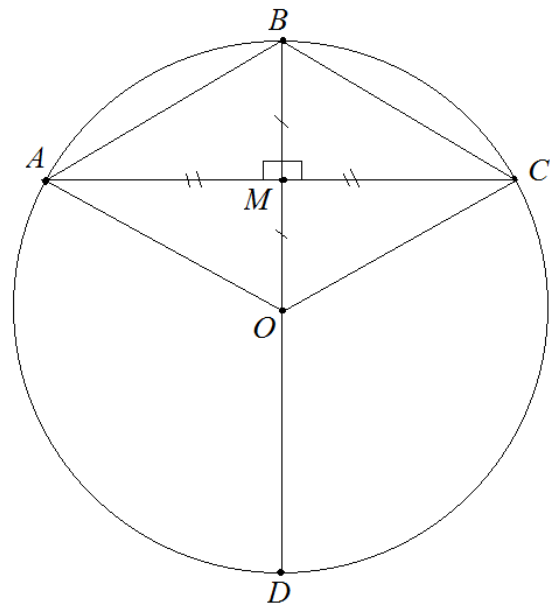


Рис. 164

Розглянемо коло F . Проведемо у ньому довільний діаметр BD (рис. 164). Через середину M радіуса OB , перпендикулярно до OB , проведемо хорду AC . Трикутник ABC є рівнобедреним трикутником, вписаним у коло F , $\angle ABC = 120^\circ$.

Дійсно, будь-який радіус кола ділить перпендикулярну до нього хорду навпіл. Тому $AM = MC$, відрізок BM у трикутнику ABC , одночасно, є медіаною і висотою. Саме тому трикутник ABC є рівнобедреним, $AB = BC$. Чотирикутник $ABCO$ є паралелограмом, тому що його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Але він є, до того ж, ромбом, тому що його діагоналі, згідно побудови, перетинаються під прямим кутом. Отже, $OA = AB = BC = OC$. Але $OA = OB = OC$ як радіуси одного кола.

Тому трикутники OAB і OCB є правильними, кожний з їх кутів містить по 60° . Отже, $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Згідно наслідка 2 з теореми 3.1, коло F і вписаний у нього трикутник ABC для шуканого зображення можна вважати оригіналом. Зображення трикутника ABC можна побудувати на підставі еліпса F'

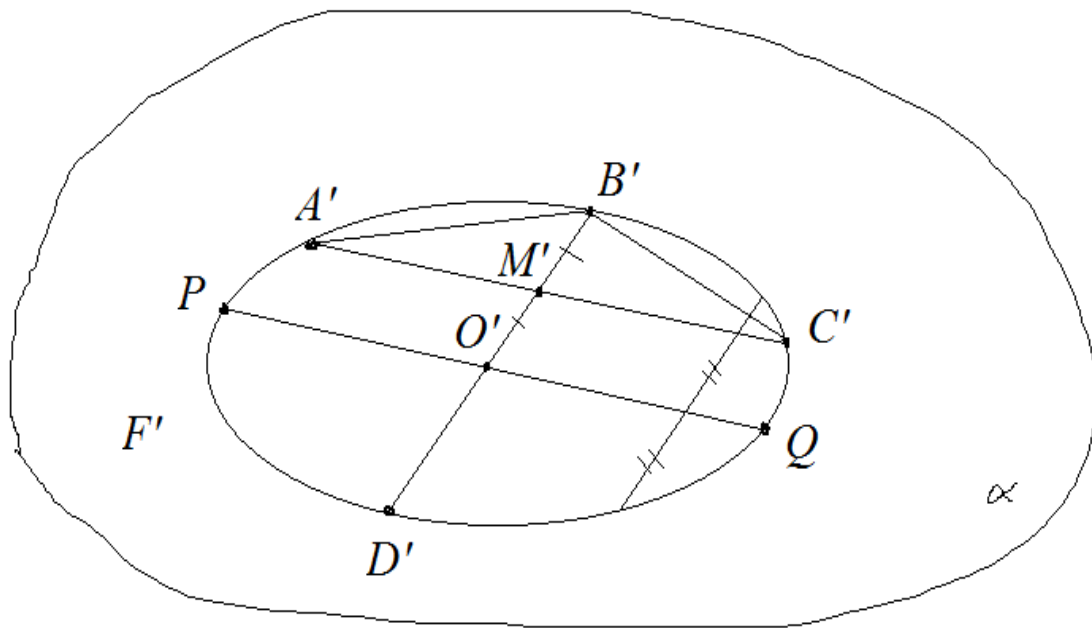


Рис. 165

за допомогою наступних, аналогічних до проведених у колі F , побудов (рис. 165).

1. Будуємо довільний діаметр $B'D'$ еліпса F' . За наслідком 6 з теореми 8.6, при даному законі зображення цей діаметр можна вважати зображенням діаметра BD кола F .

2. Використовуючи допоміжну хорду, будуємо спряжений до діаметра $B'D'$ діаметр PQ .

3. Через середину M' радіуса $O'B'$, паралельно до діаметра PQ , проводимо хорду $A'C'$. Оскільки діаметр PQ є зображенням діаметра кола F , перпендикулярного до діаметра BD , хорда $A'C'$ є зображенням хорди AC , перпендикулярної до радіуса OB у його середині M .

4. Трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC .

Задачу розв'язано без застосування будь-яких явних вимірювань або побудов на оригіналі. ■

Задача 9.13. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у 135° .*

Розв'язання. □ Спробуємо, як і у випадку задачі 9.12, знайти такий спосіб розв'язання даної задачі, який не вимагає безпосереднього використання оригінала.

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O . Проведемо у ньому довільний діаметр BD , перпендикулярно

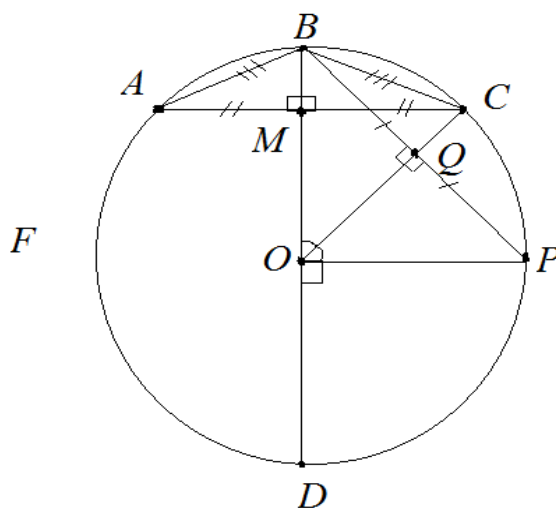


Рис. 166

до діаметра BD проведемо радіус OP (рис. 166). Нехай точка Q ділить хорду BP навпіл ($BQ = QP$). Через точку Q проведемо радіус OC . Відрізок OQ є медіаною, проведеною до основи BP рівнобедреного трикутника BOP . Отже, відрізок OQ є висотою і бісектрисою даного трикутника: $OQ \perp BP$, $\angle BOQ = \angle QOP$. Але

$\angle BOP = 90^\circ$. Тому $\angle BOQ = \angle BOC = \frac{1}{2}(\angle BOP) = 45^\circ$. Проведемо

у колі F , перпендикулярно до радіуса OB , хорду AC . Трикутник ABC є рівнобедреним трикутником, вписаним у коло F , у якого

$\angle ABC = 135^\circ$. Дійсно, радіус OB є перпендикулярним до хорди AC . Тому $AM = MC$, відрізок BM є висотою і, одночасно, медіаною трикутника ABC , для трикутника ABC правильною є рівність $AB = BC$. Кут BAC є кутом, вписаним у коло F , який спирається на ту ж саму дугу BC , на яку спирається центральний кут BOC цього кола. Отже, $\frac{1}{2}(\angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ$. У трикутнику ABC

$$\angle ABC = 180^\circ - 2(\angle BAC) = 180^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 135^\circ.$$

Зрозуміло, що усі геометричні фігури, які складаються з рівнобедреного трикутника з фіксованим кутом при вершині і описаного навколо такого трикутника кола, є подібними між собою. Отже, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, будь-яку з таких фігур можна

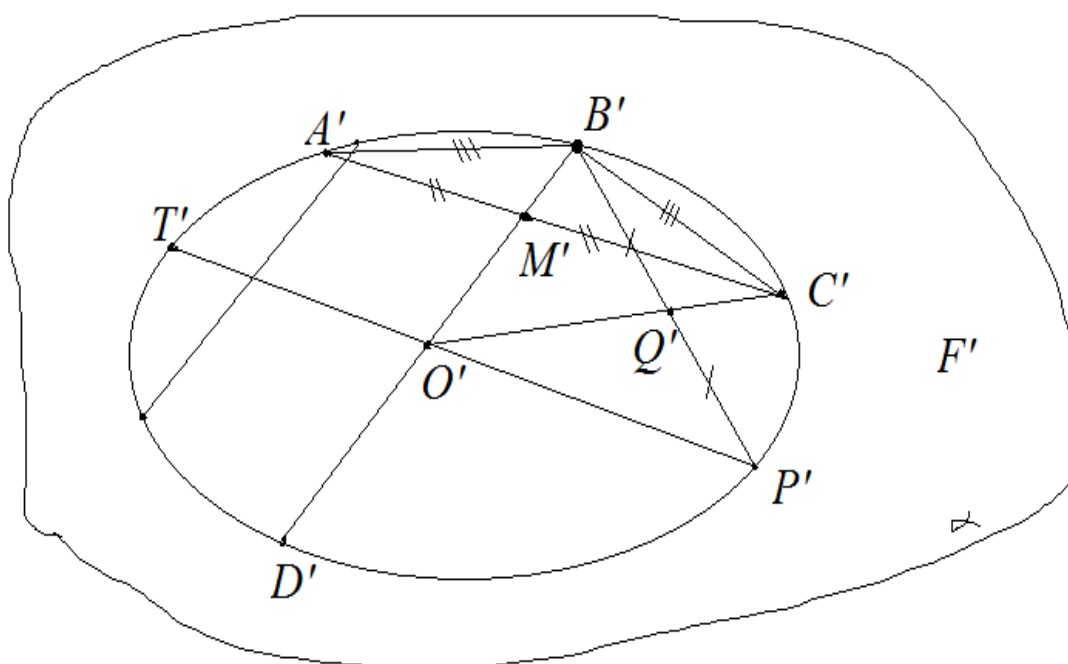


Рис. 167

прийняти за оригінал шуканого зображення. Згідно властивостей зображень фігур за методом паралельного проєктування, зображення трикутника ABC при тому законі зображення, при якому еліпс F' є зображенням кола F , можна побудувати на підставі еліпса F' за

допомогою наступних, аналогічних до проведених у колі F побудов (рис. 167).

1. Проводимо у еліпсі F' довільний діаметр $B'D'$. Відповідно до наслідків 1 і 6 з теореми 8.6, цей діаметр при вказаному законі зображення можна вважати зображенням діаметра BD кола F .

2. Використовуючи допоміжну хорду, будуємо діаметр $T'P'$, спряжений до діаметра $B'D'$. Оскільки при паралельному проєктуванні спряжені діаметри еліпса зображують взаємно перпендикулярні діаметри кола-оригінала, радіус $O'P'$ при застосованому законі зображення можна вважати зображенням радіуса OP .

3. При даному законі зображення хорда $B'P'$ є зображенням хорди BP , середина Q' хорди $B'P'$ – зображенням середини Q хорди BP .

4. Радіус OC кола F проходить через точку Q . Отже, його зображенням є радіус $O'C'$ еліпса F' , який проходить через точку Q' .

5. У еліпсі F' , паралельно до діаметра $T'P'$, проводимо хорду $A'C'$. У колі F хорда AC є паралельною до радіуса OP , зображенням якого є радіус $O'P'$, що належить діаметру $T'P'$. При невиродженому паралельному проєктуванні паралельні відрізки зображуються паралельними, хорди кола-оригінала зображуються хордами еліпса-зображення. Тому хорда $A'C'$ є зображенням хорди AC , трикутник $A'B'C'$ – зображенням трикутника ABC , трикутник $A'B'C'$ є шуканим. Запропоновані побудови не вимагають явного використання оригінала. ■

Задача 9.14. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і вписаного у коло F трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосо-*

ваного закону зображення, вписаного у коло F рівнобедреного трикутника, кут при вершині якого складає половину кута ABC .

Розв'язання. $\square$ Згідно теореми 8.8, задане умовою даної задачі зображення дозволяє відновити оригінал з точністю до перетворен-

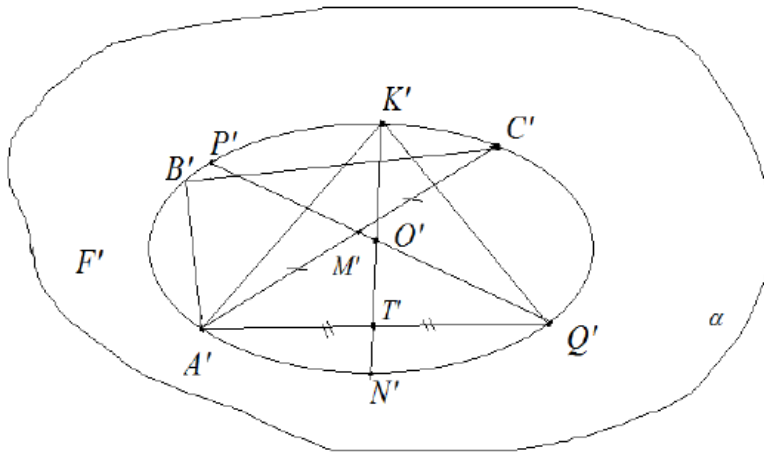


Рис. 168

ня подібності. Після цього можна виконати усі необхідні побудови на площині оригінала і вже потім, за допомогою теореми Фалеса, перенести їх на площину зображень.

Але такий спосіб розв'язання запропонованої задачі важко визнати раціональним.

Задачу можна розв'язати і за виключенням побудови оригінала. Насправді, за умови задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ (рис. 168). Нехай точка M' є серединою сторони $A'C'$. Проведемо через точку M' діаметр $P'Q'$ даного еліпса. (Якщо точка M' співпадає з точкою O' , то діаметр $P'Q'$ побудуємо спряженим до діаметра $A'C'$. Зрозуміло, що у цьому випадку $\angle A'B'C'$ є зображенням кута у 90°). Точки P' і Q' лежать по різні сторони відносно прямої $A'C'$. Одна з них належить тій півплощині відносно прямої $A'C'$, яка не містить точку B' . Нехай, для визначеності, це буде точка Q' . Тоді $\angle A'B'C'$ спирається на дугу $A'Q'C'$. Нехай точка T є серединою хорди $A'Q'$. Проведемо через точку T діаметр $N'K'$ даного еліпса. (Точка T не може співпадати з точкою O' тому, що точка A' не лежить на прямій $P'Q'$). Нехай, для

визначеності, саме точка K' лежить на прямій $N'K'$ по той бік відносно точки T , що і точка O' . Трикутник $A'K'Q'$ є шуканим (рис. 168).

Насправді, у оригіналі, діаметр $K'N'$ еліпса F' є діаметром KN кола F , який ділить хорду AQ цього кола навпіл. Це означає, що $KN \perp AQ$, оригіналом трикутника $A'K'Q'$ є рівнобедрений трикутник, вписаний у коло F . Кут $A'K'Q'$ трикутника $A'K'Q'$ є кутом, вписаним у еліпс F' , який спирається на дугу $A'_N Q'$. Значить, у оригіналі, кут AKQ спирається на дугу $A_N Q$ кола, яка є половиною дуги $A_Q C$. Але кут $A'B'C'$ є кутом, вписаним у еліпс, що спирається на дугу $A'_Q C'$. Отже, у оригіналі, $\angle AKQ = \frac{1}{2}(\angle ABC)$. ■

Задача 9.15. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення довільного трикутника ABC , вписаного у коло-оригінал.*

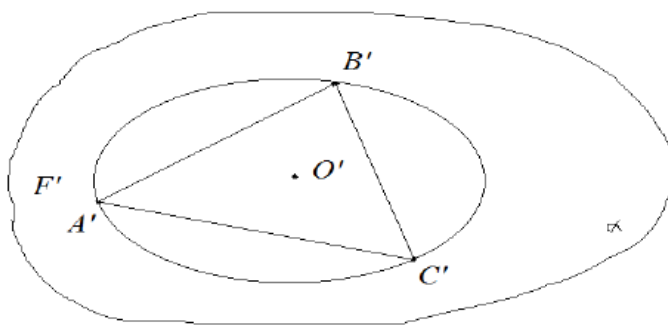


Рис. 169

Розв'язання. □ У евклідовій геометрії пряма може перетинати коло не більш, ніж у двох точках (див., наприклад, [8]). Отже, будь-які три точки кола, що належать

одній прямій, є вершинами трикутника, вписаного у це коло. Звідси випливає, що для розв'язання даної задачі достатньо на заданому еліпсі F' обрати три довільні точки A' , B' , C' і сполучити їх відрізками (рис. 169). ■

Задача 9.16. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і довільної форми трикутник ABC (не прямокутний і не рівнобедрений). Про еліпс F' відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал трикутника, подібного до заданого трикутника ABC .*

Розв'язання. $\square$ Навколо заданого

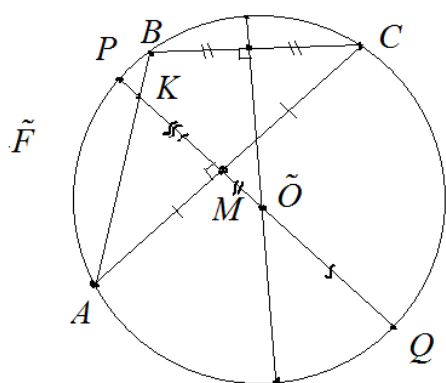


Рис. 170

трикутника ABC опишемо коло $\tilde{F}$.

Центр $\tilde{O}$ цього кола знайдемо як точку перетину серединних перпендикулярів до сторін AC і BC (рис. 170). Зрозуміло, що усі кола є подібними між собою, коло є подібним лише до кола.

Отже, умовою задачі оригінал визначено з точністю до перетворення по-

дібності евклідового простору, побудована фігура є подібною до оригінала шуканого зображення, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, для побудови шуканого зображення, її можна прийняти за оригінал.

Нехай діаметр PQ кола $\tilde{F}$ є перпендикулярним до сторони AC . трикутника ABC у її середині M і перетинає сторону AB даного трикутника у точці K . Для еліпса F' побудуємо довільний діаметр $P'Q'$ (рис. 171). У відповідності до наслідка 1 з теореми 8.6, при застосованому законі зображення цей діаметр можна вважати зображенням діаметра PQ . Розглянемо довільний промінь з початком у точці Q' , який не належить прямій $P'Q'$. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $Q'O_1$, O_1M_1 , M_1K_1 , $Q'O_1 = Q\tilde{O}$, $O_1M_1 = \tilde{O}M$, $M_1K_1 = MK$. Паралельно до прямої O_1O' проведемо прямі M_1M' і K_1K' до перетину з діаметром $P'Q'$, відповідно, у точках M' і K' .

Згідно теореми 3.10, точки M' і K' будуть, відповідно, зображеннями точок M і K трикутника ABC . Використовуючи допоміжну хорду, побудуємо діаметр ED , спряжений до діаметра $P'Q'$. Він буде зображенням діаметра кола $\tilde{F}$, перпендикулярного до діаметра PQ . Через точку M' , паралельно до прямої ED , проведемо хорду $A'C'$. Оскільки у оригіналі хорда AC є перпендикулярною до діаметра PQ і проходить через точку M , то хорда $A'C'$ є зображенням хорди

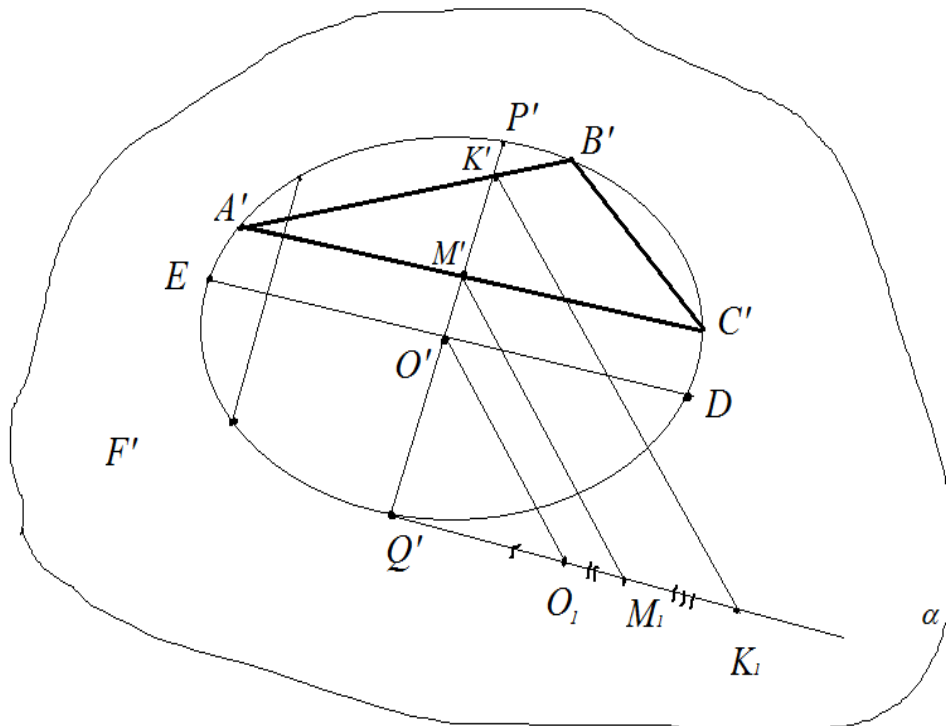


Рис. 171

AC . Через точку K' проведемо хорду $A'B'$. Вона буде зображенням хорди AB і тому трикутник $A'B'C'$ буде шуканим. ■

Задача 9.17. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутника, сторони якого відносяться як 2:5.*

Розв'язання. □ За умови задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O' . Але усі прямокутники з однаковим відношенням сторін, як і

усі кола, є подібними між собою. Тому можна розглянути довільний прямокутник, сторони якого відносяться як 2:5, описати навколо нього коло і прийняти утворену геометричну фігуру за оригінал шуканого зображення. Далі задачу можна розв'язати шляхом використання оригінала у явному вигляді і застосування теореми Фалеса.

У той же час, дану задачу можна розв'язати і без явного використання оригінала, за зразком розв'язання задачі 9.6.

Діагональ кожного прямокутника поділяє його на два рівних між собою прямокутних трикутника. Так, на рис. 146 діагональ MN поділяє прямокутник $MPNQ$ на рівні між собою прямокутні трикутники MPN і MQN . Якщо прямокутник вписано у коло, то, очевидно, вписаним у це коло є і кожний з цих трикутників. Якщо один з цих трикутників вписано у коло, то у це коло вписано і увесь прямокутник (рис. 146). Отже, можна, спочатку, за зразком наведеного розв'язання задачі 9.6, побудувати зображення вписаного у коло оригінал прямокутного трикутника, катети якого відносяться як 2:5. У підсумку буде побудовано три вершини шуканого зображення прямокутника. Зображенням четвертої вершини буде точка, симетрична відносно центра O' заданого еліпса F' до тієї вершини побудованого трикутника, що є зображенням вершини прямого кута. Можна також одразу ставити питання про побудову зображення прямокутника у цілому і проводити аналогічні, по суті, міркування дещо у іншій послідовності.

Розглянемо довільне коло $\tilde{F}$ з центром у точці $\tilde{O}$. Проведемо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD . Нехай точка M є серединою радіуса $\tilde{O}D$ (рис. 172). На промені, доповняльному до променя $D\tilde{O}$, послідовно відкладемо відрізки DP і PQ , $DP = \tilde{O}D$,

$PQ = \tilde{O}M$. На відрізках $\tilde{O}A$ і $\tilde{O}Q$, як на суміжних сторонах, побудуємо прямокутник $\tilde{O}ATQ$, $\tilde{O}A:\tilde{O}Q=1:2,5=2:5$. Проведемо пряму $\tilde{O}T$. Вона перетне коло $\tilde{F}$ у діаметрально протилежних точках N і

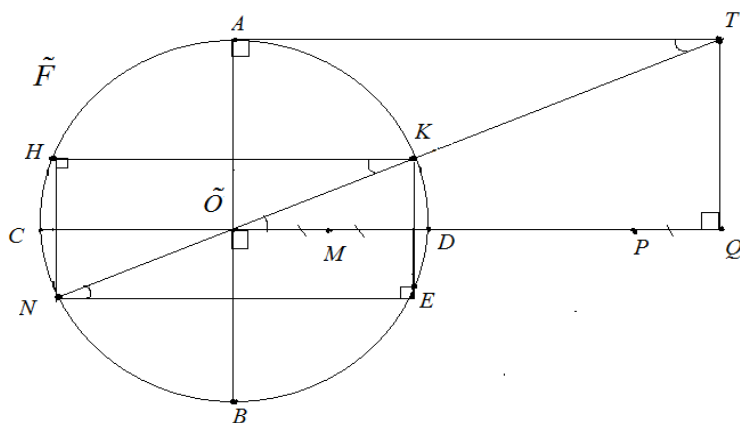


Рис. 172

K . Паралельно до діаметра CD , проведемо хорди KN і EN . Розглянемо вписаний у коло $\tilde{F}$ чотирикутник $NHKE$. $HK \parallel NE$ за побудовою (дві різні хорди, паралельні до третьої,

є паралельними між собою). $\angle NHK = \angle NEK = 90^\circ$ бо це кути, вписані у коло $\tilde{F}$, які спираються на його діаметр NK . $\angle HKN = \angle KNE$ бо це внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих HK та NE і січній NK . Отже, трикутники NHK і KEN є рівними між собою як прямокутні трикутники, що мають спільну гіпотенузу NK і рівні гострі кути. Звідси випливає, що $NH = KE$. Але тоді чотирикутник $NHKE$ є паралелограмом (його протилежні сторони NH і KE є паралельними і рівними), вписаним у коло $\tilde{F}$, і тому прямокутником. Трикутник $\tilde{O}AT$ є прямокутним, $\angle \tilde{O}AT = 90^\circ$. $AT \parallel HK$, бо кожна з цих двох прямих є паралельною до прямої $\tilde{O}D$. $\angle HKN = \angle AT\tilde{O}$ як відповідні кути при паралельних прямих HK , AT і січній NT . Звідси випливає, що прямокутні трикутники NHK і $\tilde{O}AT$ є подібними, $\frac{NH}{HK} = \frac{\tilde{O}A}{AT} = 2:5$. Отже, у

вписаного до кола $\tilde{F}$ прямокутника $NHKE$ суміжні сторони мають потрібне відношення.

Побудови, аналогічні до проведених, можна виконати і для еліпса

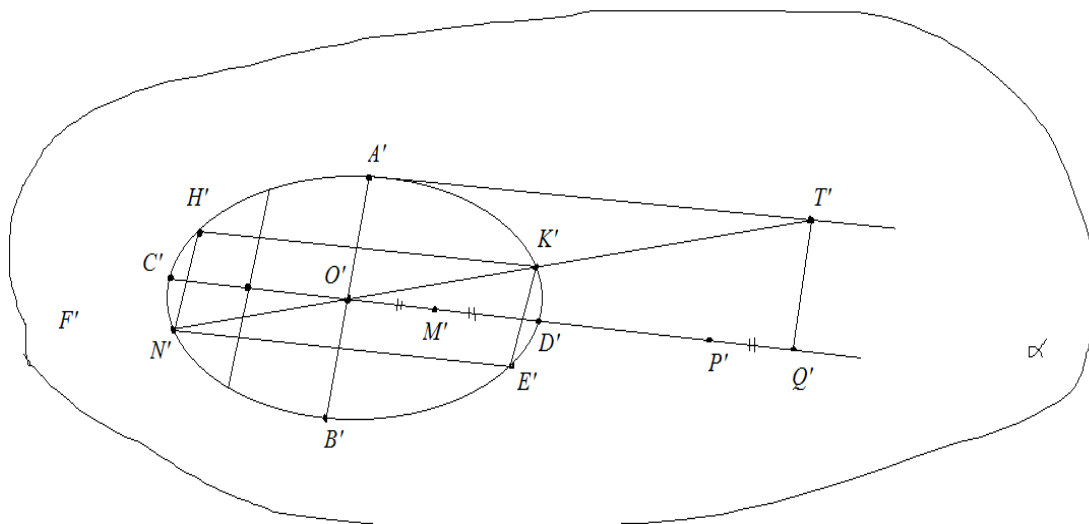


Рис. 173

F' . Таким чином буде отримано шукане розв'язання поставленої задачі. Насправді, побудуємо спряжені діаметри $A'B'$ і $C'D'$ еліпса F' (рис. 173). За наслідком 6 з теореми 8.6, їх можна вважати зображеннями взаємно перпендикулярних діаметрів A_1B_1 і C_1D_1 кола F згідно застосованого закону зображення. Нехай точка M' є серединою відрізка $O'D'$. На промені, доповняльному до променя $D'O'$, послідовно відкладемо відрізки $D'P'$ і $P'Q'$, $D'P' = O'D'$, $P'Q' = O'M'$. На відрізках $O'A'$ і $O'Q'$, як на сторонах, побудуємо паралелограм $O'A'T'Q'$. Згідно властивостей паралельного проєкування, він буде зображенням при застосованому законі зображення прямокутника $OATQ_1$, побудованого на основі діаметрів A_1B_1 і C_1D_1 кола F так само, як побудовано прямокутник $\tilde{O}ATQ$ на основі діаметрів AB і CD . Проведемо пряму $O'T'$. Вона перетне еліпс F' у діаметрально протилежних точках K' і N' . Паралельно до діаметра

$C'D'$ проведемо хорди $H'K'$ і $N'E'$. При застосованому законі зображення чотирикутник $N'H'K'E'$ буде зображенням прямокутника $N_1H_1K_1E_1$, побудованого для кола F так само, як побудовано прямокутник $NHKE$ для кола $\tilde{F}$. Суміжні сторони прямокутника $N_1H_1K_1E_1$ також відносяться як 2:5. Отже, чотирикутник $N'H'K'E'$ є шуканим розв'язком даної задачі. Як зображення прямокутника при невиродженому паралельному проєктуванні, він є паралелограмом. Запропоновані вище побудови на еліпсі F' не вимагають безпосереднього використання оригінала.

Технічним недоліком представлених способів розв'язання даної задачі можна вважати проведення побудов на картинній площині α зовні еліпса F' . Мова йде про побудову паралелограма $O'A'T'Q'$, подібного до шуканого паралелограма $N'H'K'E'$. Але паралелограм, подібний до шуканого, можна побудувати й всередині еліпса F' . Доцільним є, наприклад, наступний варіант побудов (рис. 174).

1. Будуємо спряжені діаметри $A'B'$ і $C'D'$ еліпса F' .
2. Нехай точка A'_1 є серединою відрізка $O'A'$, точка A'_2 –

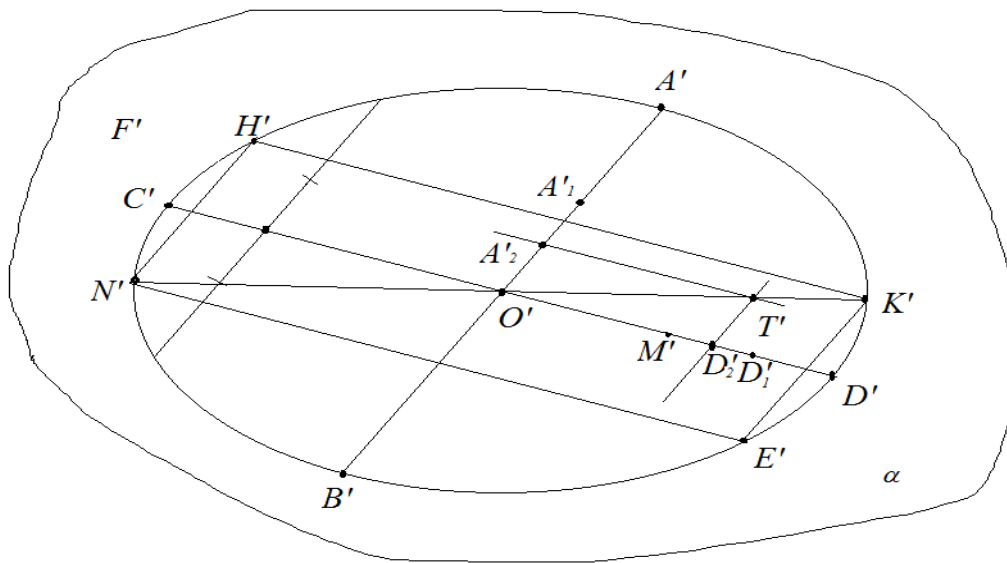


Рис. 174

серединою відрізка $O'A'_1$. Тоді $O'A'_2 = \frac{1}{4}O'A'$. Якщо точка M' є сере-

диною відрізка $O'D'$, точка D'_1 – серединою відрізка $M'D'$, точ-

ка D'_2 – серединою відрізка $M'D'_1$, то $O'D'_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)O'D' = \frac{5}{8}O'D'$.

(Для кола-оригінала $OA=OB$, $OA_2 = \frac{1}{4}OA$, $OD_2 = \frac{5}{8}OD$, $\frac{OA_2}{OD_2} = \frac{2}{5}$).

3. Проводимо прямі A'_2T' і D'_2T' , $A'_2T' \parallel O'D'$, $D'_2T' \parallel O'A'$.
 $O'A'_2T'D'_2$ – паралелограм, оригіналом якого є прямокутник OA_2TD_2 ,
 суміжні сторони OA_2 і OD_2 якого відносяться як 2:5.

4. Проводимо пряму $O'T'$, яка перетинає еліпс F' у діаметрально
 протилежних точках N' і K' .

5. Далі виконуємо точно такі побудови, як і при попередньому
 розв'язанні задачі. Паралелограм $N'H'K'E'$ є шуканим. ■

Задача 9.18. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який
 відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєкту-
 вання деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення
 згідно застосованого закону зображення довільної рівнобічної трапе-
 ції, вписаної у коло-оригінал.*

Розв'язання. □ Відомо, що вписаний у коло чотирикутник, дві
 сторони якого є паралельними між собою, є або прямокутником або
 рівнобічною трапецією. Прямокутником він є тоді та тільки тоді, коли
 його діагоналі є діаметрами даного кола. Звідси випливає наступний
 простий спосіб побудови вписаної у коло рівнобічної трапеції.

Проводимо у колі F довільну хорду BC , яка не є його діаметром
 (рис. 175). Проводимо діаметри BB_1 і CC_1 даного кола. Обираємо на
 колі довільну точку A , відмінну від точок B , C , B_1 і C_1 . Паралельно

до хорди BC , проводимо хорду AD . Чотирикутник $ABCD$, очевидно, є вписаною в коло F рівнобічною трапецією.

Аналогічні побудови для еліпса відповідають властивостям зображень геометричних фігур за методом паралельного проєктування.

1. Проводимо у еліпсі F' довільну хорду $B'C'$, яка не є його діаметром.

2. Будуємо діаметри $B'B'_1$ і $C'C'_1$.

3. Обираємо на еліпсі точку A' , відмінну від точок B', C', B'_1, C'_1 (рис. 176). Паралельно до хорди $B'C'$, проводимо хорду $A'D'$.

4. Чотирикутник $A'B'C'D'$ є трапецією ($B'C' \neq A'D'$), вписаною у еліпс F' , зображенням певної трапеції, вписаної у коло-оригінал F , яка за необхідністю, є рівнобічною.

Запропоновані побудови не вимагають явного використання оригіналу. ■

Задача 9.19. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і рівнобічну трапецію $ABCD$, ($BC \parallel AD$, $BC < AD$). Відомо, що еліпс F' є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосо-*

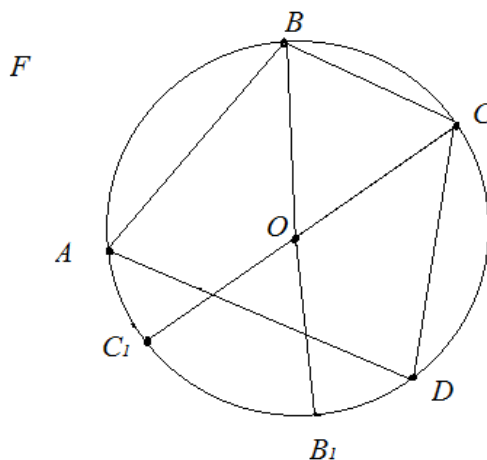


Рис. 175

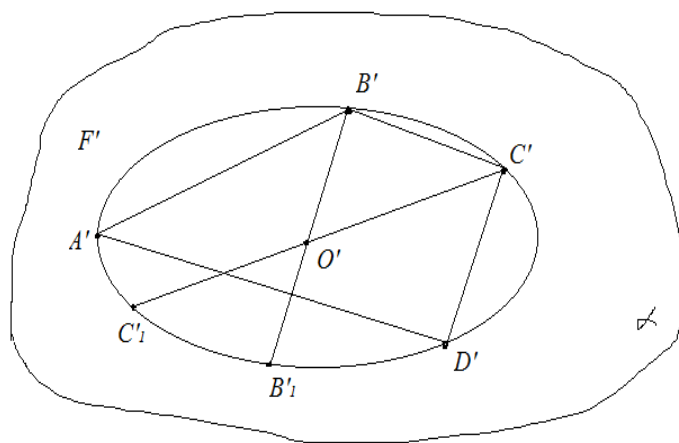


Рис. 176

ваного закону зображення вписаної у коло-оригінал трапеції, подібної до заданої трапеції $ABCD$.

Розв'язання. $\square$ Опишемо навколо заданої рівнобічної трапеції $ABCD$ коло. Як відомо, його центр є точкою перетину прямої, що сполучає середини основ даної трапеції, з серединним перпендикуляром, наприклад, до бічної сторони AB (рис. 175). Оскільки усі кола є

подібними між собою, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, побудоване коло при застосованому законі зображення можна розглядати у якості оригінала F для заданого еліпса F' . Тоді, в силу того, що кожна трапеція є подібною сама до себе, можна вважати, що на

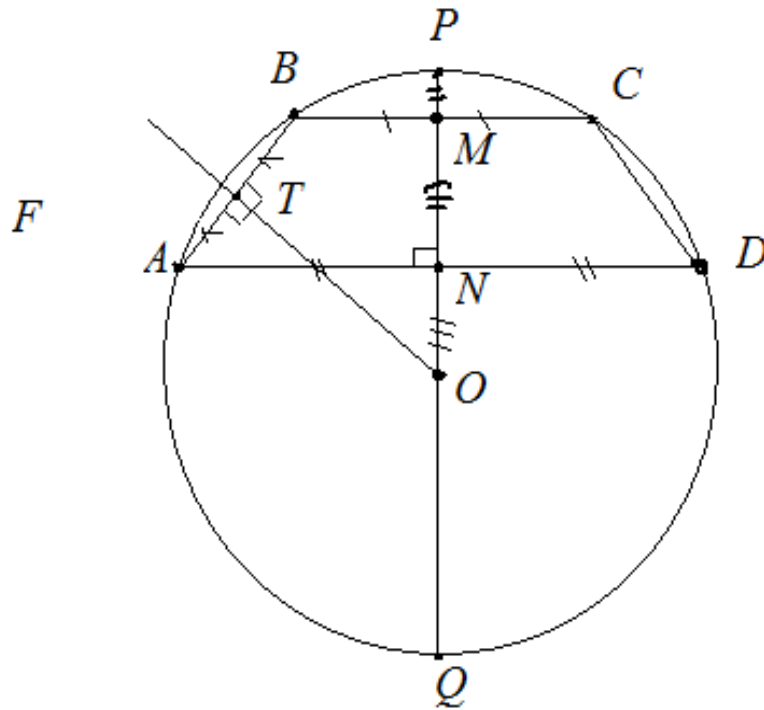
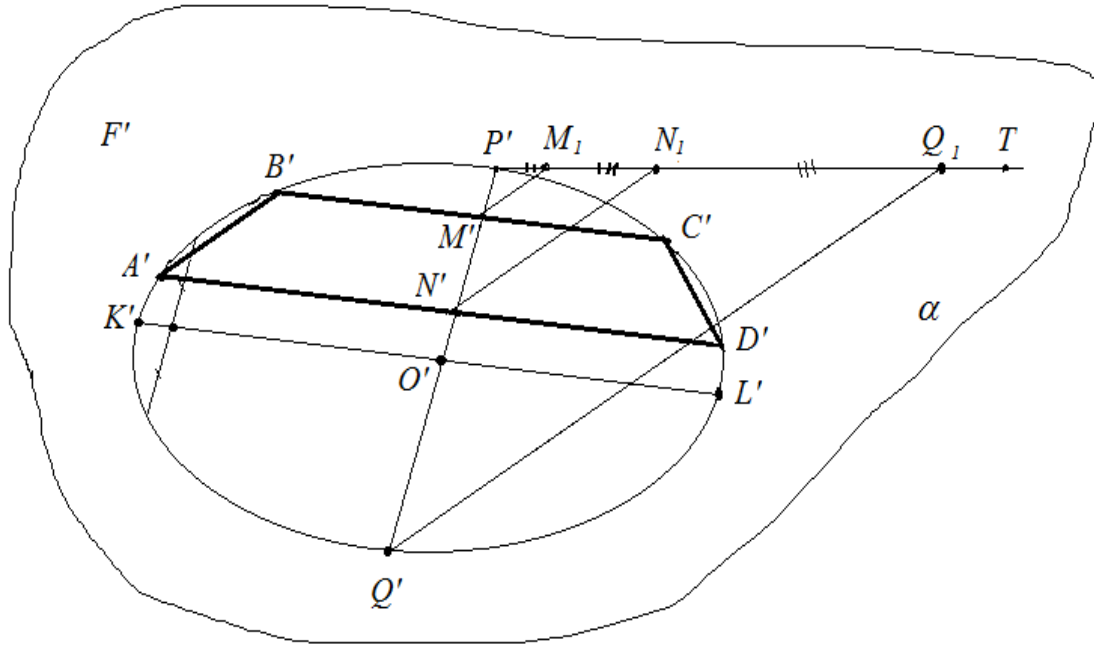


Рис. 177

рис. 177 задано оригінал зображення, треба побудувати зображення трапеції $ABCD$ за умови, що еліпс F' є зображенням саме побудованого кола F . Нехай точка M є серединою основи BC трапеції $ABCD$, точка N – серединою основи AD . Пряма MN містить діаметр PQ кола F , $BC \perp PQ$, $AD \perp PQ$.

Проведемо у еліпсі F' довільний діаметр $P'Q'$. Згідно наслідка 6 з теореми 8.6, при застосованому законі зображення його можна вважати зображенням діаметра PQ кола F . На картинній площині α проведемо довільний промінь $P'T$, який не належить прямій $P'Q'$.

Послідовно відкладемо на цьому промені відрізки $P'M_1$, M_1N_1 , N_1Q_1 , $P'M_1 = PM$, $M_1N_1 = MN$, $N_1Q_1 = NQ$. Паралельно до прямої Q_1Q' , проведемо прямі M_1M' , N_1N' до перетину з відрізком $P'Q'$, відповідно, у точках M' і N' . Згідно теореми Фалеса і теореми 3.10, при даному законі зображення, точка M' є зображенням точки M ,



Т

Рис. 178

точка N' – зображенням точки N . Використовуючи допоміжну хорду, побудуємо діаметр $K'L'$, спряжений до діаметра $P'Q'$. Згідно наслідка 1 з теореми 8.6, цей діаметр є зображенням діаметра кола F , перпендикулярного до діаметра PQ . Через точку M' , паралельно до діаметра $K'L'$, проведемо хорду $B'C'$ еліпса F' . Через точку N' , паралельно до діаметра $K'L'$, проведемо хорду $A'D'$ еліпса F' . Вписана у еліпс F' трапеція $A'B'C'D'$, згідно застосованого закону зображення, буде зображенням заданої рівнобічної трапеції $ABCD$, вписаної у коло F (рис. 178). ■

Задача 9.20. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєкту-*

вання деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції з кутом у 60° .

Розв'язання. $\square$ З'ясуємо, спочатку, як можна у коло F з центром у точці O вписати рівнобічну трапецію, один з кутів якої дорівнює 60° . По-перше, кути при кожній з двох основ рівнобічної трапеції є рівними між собою. Отже, не один, а два кута шуканої трапеції, кути, прилеглі до більшої з її основ, складають по 60° . Якщо у коло вписано правильний трикутник (кожний кут якого дорівнює 60°), а основи шуканої трапеції є паралельними до однієї зі сторін цього трикутника, то бічні сторони трапеції можна шукати як хорди кола, відповідно, паралельні до двох інших сторін даного трикутника. Звідси випливає наступний, можливий, шлях побудови шуканої трапеції (рис. 179).

1. Проводимо у колі F довільний діаметр AB .
2. Знаходимо середину K радіуса OB .
3. Через точку K , перпендикулярно до діаметра AB , проводимо хорду MN .

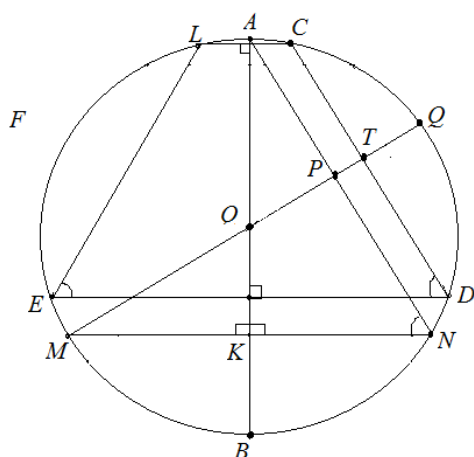


Рис. 179

4. Будуємо хорду AN .
5. Через точку M проводимо діаметр MQ , який перетинає хорду AN у певній точці P .
6. На відрізку PQ обираємо довільну внутрішню точку T .
7. Через точку T , паралельно до хорди AN , проводимо хорду CD .
8. Через точки C і D , паралельно до хорди MN , проводимо, відповідно, хорди CL і DE .

9. Трапеція $ELCD$ є шуканою.

Насправді, за побудовою, чотирикутник $ELCD$ є вписаним у коло F . $CL \parallel DE$, отже, чотирикутник $ELCD$ є або паралелограмом (прямокутником), або трапецією. За побудовою, $MN \perp AB$, $CL \parallel MN$, $DE \parallel MN$. Звідси випливає, що $CL \perp AB$, $DE \perp AB$, діаметр AB ділить хорди CL і DE навпіл. За побудовою $CD \parallel AN$, пряма AN не є паралельною до прямої AB . Отже, пряма CD також не є паралельною до прямої AB , точки C і D розташовані на різних відстанях від діаметра AB , $CL \neq DE$, $ELCD$ – трапеція. $EL = CD$, бо у коло можна вписати лише рівнобічну трапецію. $\angle EDC = \angle MNA$ як гострі кути з відповідно паралельними сторонами. $\angle MNA = 60^\circ$ як кут рівностороннього трикутника MAN . Отже, $\angle EDC = 60^\circ$, трапеція $ELCD$, насправді, є шуканою.

Обґрунтуйте самостійно, що форма трапеції $ELCD$ залежить лише від положення точки T на відрізку PQ .

Аналогічні побудови можна виконати для еліпса F' . Вони у повній мірі відповідають властивостям зображень фігур за методом паралельного проєктування (рис. 180).

1. Проводимо у еліпсі F' довільний діаметр $A'B'$. Згідно наслідка 1 з теореми 8.6, при застосованому законі зображення його можна вважати зображенням діаметра AB кола F .

2. Використовуючи допоміжну хорду, будуємо діаметр $H'G'$, спряжений до діаметра $A'B'$. Згідно наслідка 1 з теореми 8.6, він є зображенням діаметра кола F , перпендикулярного до діаметра AB .

3. Через середину K' радіуса $O'B'$ паралельно до діаметра $H'G'$ проводимо хорду $M'N'$. Вона є зображенням хорди MN кола F , перпендикулярної до діаметра AB .

4. Через точки M' і O' проводимо діаметр $M'Q'$ еліпса F' , який

обрання на площині оригінала двох взаємно перпендикулярних прямих, тим чи іншим чином пов'язаних з даним n -кутником-оригіналом, і визначення однакових за довжиною відрізків цих прямих. По суті, таким чином на площині оригінала фіксується певна прямокутна декартова система координат. На картинній площині обрані прямі зображуються прямими, паралельними, відповідно, до двох взаємно спряжених діаметрів заданого еліпса. Радіуси еліпса, що належать цим спряженим діаметрам, зображують однакові за довжиною відрізки двох обраних взаємно перпендикулярних прямих оригінала. Все це означає, що, фактично, ми маємо на картинній площині певну афінну систему координат. Відповідний закон зображення фігур за методом паралельного проєктування виступає тоді як відображення за рівністю координат відносно прямокутної декартової системи координат площини оригінала і афінної системи координат картинної площини.

Питання і завдання для самоконтролю до §9

9.1. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.2. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного прямокутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.3. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F

з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.4. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного рівнобедреного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.5. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення правильного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.6. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.7. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал трикутника, подібного до довільного заданого? Відповідь обґрунтуйте.

9.8. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого

закону зображення довільної рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.9. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції, подібної до довільної заданої? Відповідь обґрунтуйте.

9.10. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Які загальні пропозиції є доцільними щодо знаходження шляхів розв'язання задач на побудову зображень згідно застосованого закону зображення многокутників, вписаних у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

§10. Зображення описаних багатокутників при невиродженому для даних фігур паралельному проєктуванні

Наведемо розв'язки певної кількості стандартних задач на побудову зображень описаних навколо кола n -кутників, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, при невиродженому для даного кола паралельному проєктуванні.

У кожній задачі під відповідним n -кутником розумітимемо n -кутник-каркас. За умови кожної запропонованої задачі буде задано еліпс F' , про який буде відомо, що він є зображенням деякого кола F при певному паралельному проєктуванні. Зрозуміло, що таке паралельне проєктування для кола F (і площини, яка це коло містить,) є невиродженим. Більше за це, зображення площини, яка містить коло F , у вигляді площини, яка містить еліпс F' , згідно теореми 8.8 при відповідному законі зображення є подібно повним. Також завжди вважатимемо, що одночасно з еліпсом (і колом, як окремим випадком еліпса) задано і його центр. (При наявності еліпса можливість побудови за допомогою циркуля і лінійки його центра було обґрунтовано раніше).

Задача 10.1. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення довільного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. $\square$ Нехай коло F з центром у точці O , вписане у прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) дотикається катета BC у точці M , катета AC – у точці N , гіпотенузи AB – у точці K (рис. 181). З елементарної геометрії відомо, що чотирикутник $CMON$ є квадратом, точка K належить тій дугі кола F , на яку спирається кут

QOP , вертикальний до прямого кута NOM .

Звідси випливає той простий спосіб побудови довільного прямо-

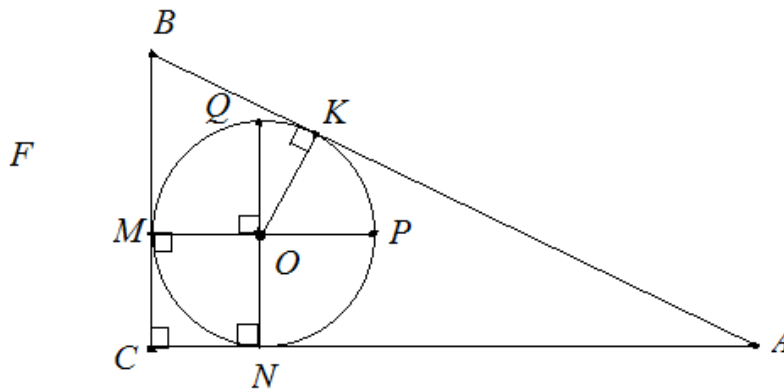


Рис. 181

кутного три-
кутника, опи-
саного навколо
кола, аналогіч-
ний до якого, в
силу відповід-
них властивос-
тей паралель-
ного проєкту-

вання, підходить для побудови зображення відповідного прямокутного трикутника.

Побудуємо довільний діаметр $Q'N'$ заданого на картинній площині α еліпса F' і, використовуючи допоміжну хорду, спряжений до цього діаметра діаметр $M'P'$ (рис. 182). Згідно наслідка 8 з

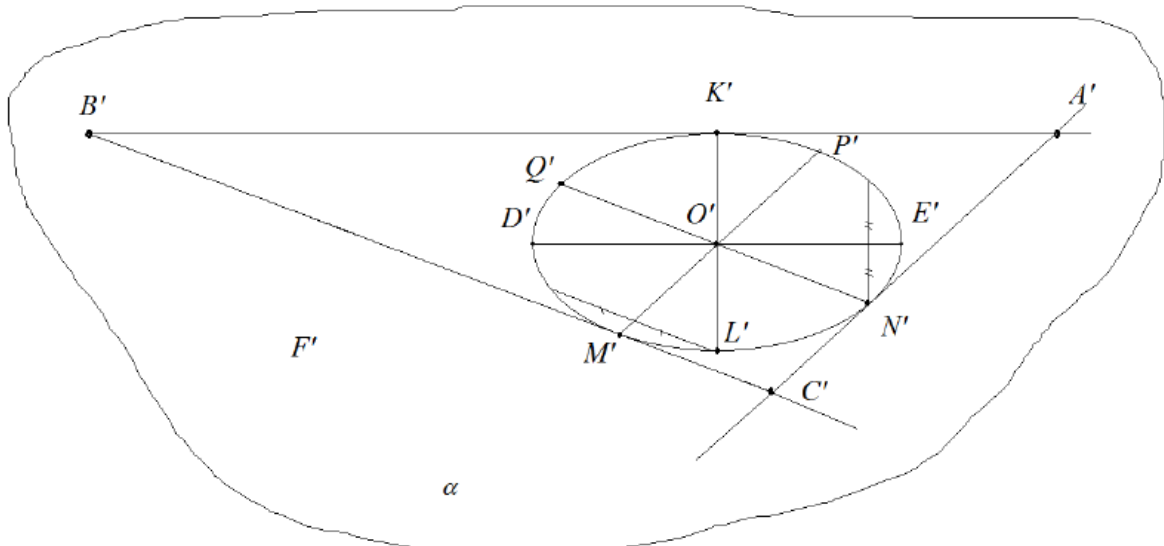


Рис. 182

теорема 8.6, діаметри $Q'N'$ і $M'P'$ можна вважати зображеннями будь-яких взаємно перпендикулярних діаметрів кола-оригінала F , зокрема, діаметрів QN і MP . Через точку N' , паралельно до діаметра

$M'P'$, проведемо пряму $C'A'$. Через точку M' , паралельно до діаметра $Q'N'$, проведемо пряму $B'C'$. Пряма $C'A'$ буде дотикатися до еліпса F' у точці N' , пряма $B'C'$ – у точці M' . Точка C' (рис. 180), очевидно, буде зображенням точки C оригінала. На дугі $Q'P'$ еліпса F' , на яку спирається кут $Q'O'P'$, вертикальний до кута $N'O'M'$, оберемо довільну точку K' . Завдяки довільності, зрозуміло, її не можна вважати зображенням саме точки K кола F . Але, згідно умови даної задачі, у цьому немає потреби, бо мова йде про побудову зображення довільного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала. Проведемо діаметр $K'L'$ еліпса F' . Використовуючи допоміжну хорду, побудуємо спряжений до діаметра $K'L'$ діаметр $D'E'$. Через точку K' , паралельно до прямої $D'E'$, проведемо пряму $B'A'$. Ця пряма буде дотикатися до еліпса F' у точці K' . $B' = B'C' \cap B'A'$, $A' = C'A' \cap B'A'$. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим. Дійсно, за побудовою, він є трикутником, описаним навколо еліпса F' . Отже, його оригіналом є трикутник, описаний навколо кола F . Сторони $C'A'$ і $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ є, відповідно, паралельними до спряжених діаметрів $M'P'$ і $Q'N'$ еліпса F' . Отже, у оригіналі $CA \perp CB$.

Зрозуміло, що представлені побудови не вимагають явного використання оригінала. ■

Задача 10.2. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і певний прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Відомо, що еліпс F' є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала трикутника, подібного до заданого.*

Розв'язання. □ Побудуємо коло $\tilde{F}$, вписане у трикутник ABC (рис. 183 (a)). Центр $\tilde{O}$ цього кола є точкою перетину бісектрис CP і

BQ трикутника ABC . Проведемо $\tilde{OK} \perp AC$, $\tilde{OM} \perp BC$, $\tilde{ON} \perp AB$.

$\tilde{ON} = \tilde{OM} = \tilde{OK}$ як радіуси даного кола, точки K , M і N є точками

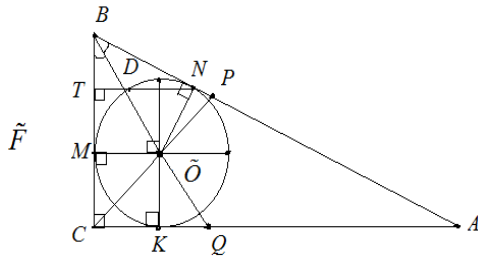


Рис. 183 (а)

дотику даного кола, відповідно, до сторін AC , BC і AB трикутника ABC . Оскільки усі кола є подібними між собою, коло є подібним лише до кола, згідно наслідку 2 з теореми 3.1, побудоване коло $\tilde{F}$ з центром у точці

$\tilde{O}$ можна розглядати замість оригінала F еліпса F' . Кожний трикутник є подібним до себе, отже, задача зводиться до побудови на картинній площині α зображення саме трикутника ABC . Оскільки форма прямокутного трикутника ABC є цілком довільною, для розв'язання даної задачі безпосереднє використання заданого трикутника ABC і кола $\tilde{F}$ є неминучим.

Побудуємо у еліпсі F' довільний діаметр $M'H$ і спряжений до нього діаметр $K'L$. Згідно наслідка 8 з теореми 8.6, радіуси $O'M'$ і $O'K'$ можна вважати зображеннями радіусів $\tilde{OM}$ і $\tilde{OK}$ так, що точка M' є зображенням точки M , точка K' – зображенням точки K . Через точку M' , паралельно до діаметра $K'L$, проведемо пряму a_1 , через точку K' , паралельно до діаметра $M'H$, проведемо пряму a_2 . Ці прямі будуть дотикатися еліпса F' , відповідно, у точках M' і K' , будуть, відповідно, зображеннями прямих BC і AC . $a_1 \cap a_2 = C'$, отже, точка C' буде зображенням точки C . За теоремою Фалеса на прямій a_2 можна побудувати точку A' , яка буде зображенням точки A . Аналогічно, на прямій a_1 за теоремою Фалеса можна побудувати точку B' яка буде зображенням точки B . Трикутник $A'B'C'$ буде шуканим, пряма $A'B'$, буде дотичною до еліпса F' .

У той же час, з технічної точки зору, згідно вищевказаного, краще побудувати точку B' , а також точку N' дотику прямої $A'B'$ до еліпса F' (точка N' є зображенням точки N). Зручніше за все, для цього спочатку провести перпендикуляр NT до прямої BC і, за допомогою теореми Фалеса, за точками C' і M' на прямій a_1 побудувати точку T' , яка є зображенням точки T (рис. 183(б)). Далі, через точку T' , паралельно до діаметра $M'H$, треба провести пряму l (бо, у оригіналі, $TN \parallel M\tilde{O}$). У оригіналі пряма NT є січною до кола F і перетинає коло F не лише у точці N , а ще й у точці D , яка лежить між точками

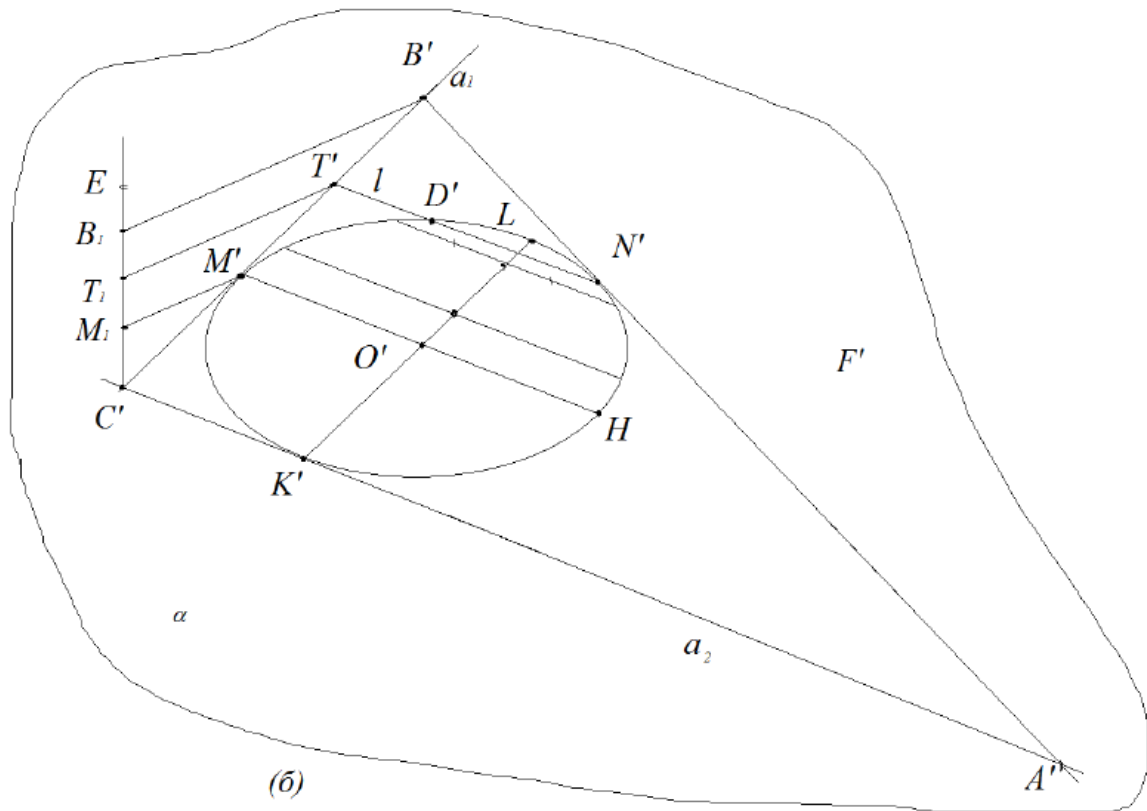


Рис. 183 (б)

T і N . Отже, пряма l перетне еліпс F' у точках D' і N' , точка D' лежатиме між точками T' і N' (рис. 183 (б)). Саме точка N' буде шуканим зображенням точки N . Точка A' утвориться тоді як точка перетину прямих a_2 і $B'N'$. ■

Задача 10.3. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який*

відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.

Розв'язання. □ На відміну від попередньої задачі, у задачі 10.3 форма трикутника-оригінала є визначеною однозначно. Це надає можливість розв'язати дану задачу за виключенням використання оригінала у явному вигляді.

Насправді, розглянемо коло F з центром у точці O (рис. 184). Проведемо у цьому колі взаємно перпендикулярні діаметри QN і MP .

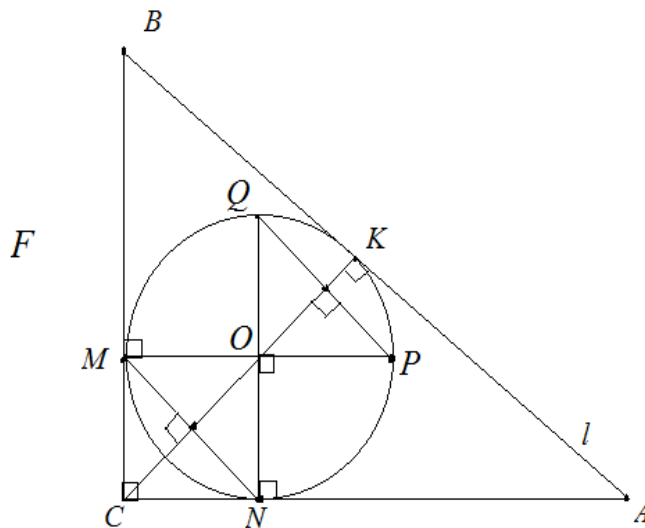
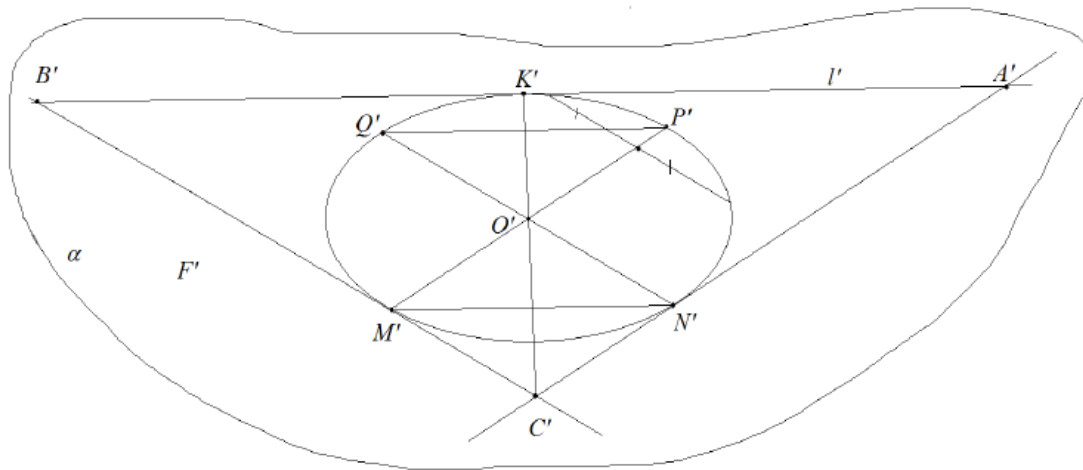


Рис. 184

Через точку M , паралельно до діаметра QN , проведемо пряму BC . Через точку N , паралельно до діаметра MP , проведемо пряму CA . Зрозуміло, що $BC \perp CA$, коло F є вписаним у прямий кут ACB , чотирикутник $CMON$ є квадратом. Проведемо пряму CO .

$CO \perp MN$, бо діагоналі квадрата є взаємно перпендикулярними. Але $MN \parallel QP$, бо чотирикутник $MQPN$ є паралелограмом (насправді, навіть, квадратом) – його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Тоді $CO \perp QP$. Нехай радіус OK кола F лежить на прямій CO і перетинає хорду QP . Через точку K , паралельно до прямої QP , проведемо пряму l . $l \perp OK$, отже, пряма l дотикається кола F у точці K . Нехай пряма l перетинає пряму CA у точці A , пряму CB – у точці B . Трикутник ABC є прямокутним трикутником, описаним навколо кола F . $\angle BAC = \angle QPO$; $\angle ABC = \angle PQO$,

Згідно умови даної задачі, для її розв'язання треба побудувати зображення трикутника ABC . Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати для еліпса F' побудови, аналогічні проведеним для кола F . Явне використання оригінала при цьому не є потрібним.



1. Проводимо довільний діаметр $Q'N'$ еліпса F' .
2. Використовуючи допоміжну хорду, будуємо спряжений до діаметра $Q'N'$ діаметр $M'P'$.
3. Через точку M' , паралельно до діаметра $Q'N'$, проводимо пряму $B'C'$.
4. Через точку N' , паралельно до діаметра $M'P'$, проводимо пряму $C'A'$.
5. Проводимо пряму $C'O'$, позначаємо через K' ту точку перетину цієї прямої з еліпсом F' , яка розташована зовні паралелограма $C'M'O'N'$.

6. Через точку K' , паралельно до хорди $Q'P'$, проводимо пряму l' .

7. Нехай $l' \cap C'A' = A'$, $l' \cap C'B' = B'$, трикутник $A'B'C'$ є шуканим (рис. 185). ■

Задача 10.4. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення квадрата, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ Відомо, що, якщо квадрат описано навколо кола

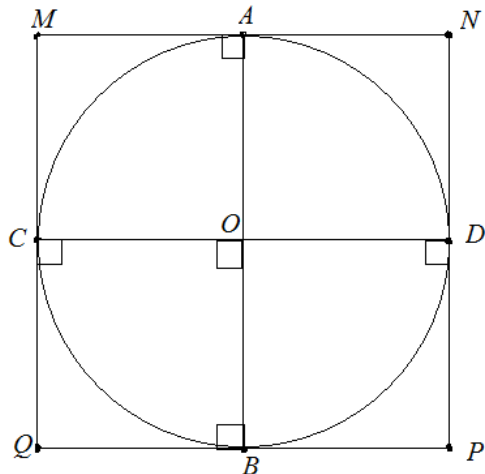


Рис. 186

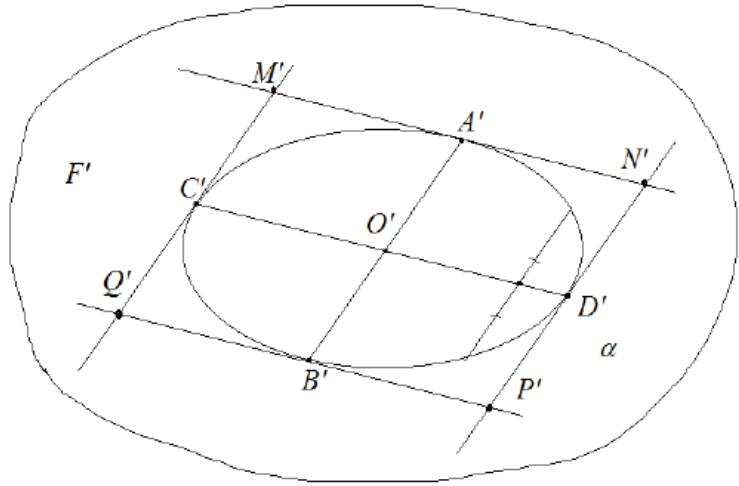
F , то сторони цього квадрата є, відповідно, паралельними до двох взаємно перпендикулярних діаметрів даного кола (рис. 186). Якщо еліпс F' є зображенням кола F за методом паралельного проєктування, то, згідно наслідка 1 з теореми 8.6, зображенням двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола F може бути будь-яка

пара спряжених діаметрів еліпса F' і лише така пара його діаметрів. При невиродженому паралельному проєктуванні паралельні прямі зображуються паралельними прямими (теорема 3.9). Звідси випливає справедливість наступного способу розв'язання сформульованої задачі. Цей спосіб не вимагає безпосереднього використання оригінала.

1. Проводимо у еліпсі F' довільний діаметр $A'B'$.
2. Будуємо діаметр $C'D'$, спряжений до діаметра $A'B'$ (рис. 187).
3. Через точку C' , паралельно до діаметра $A'B'$, проводимо пряму $M'Q'$. Через точку D' , паралельно до діаметра $A'B'$, проводимо

пряму $N'P'$.

4. Через точку A' , паралельно до діаметра $C'D'$, проводимо пряму $M'N'$, через точку B' , паралельно до діаметра $C'D'$, проводимо пряму $Q'P'$.



5. Паралелограм

$Q'M'N'P'$, утворений

Рис. 187

унаслідок попарного перетину проведених прямих, є зображенням квадрата, описаного навколо кола F .

Відповідно до теореми 8.3, якщо еліпс F' є зображенням кола за методом паралельного проєктування, то будь-який паралелограм, описаний навколо еліпса F' , згідно застосованого закону зображення є зображенням квадрата, описаного навколо довільного кола F . ■

Задача 10.5. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутного трикутника з кутом у 60° , описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ Дослідимо, спочатку, питання про те, як прямокутний трикутник з гострим кутом у 60° можна описати навколо кола F . Проведемо у колі взаємно перпендикулярні діаметри PQ і MN (рис. 188). Через середину T радіуса OM паралельно до діаметра PQ проведемо хорду KE . $KE \perp OM$. За доведеним раніше, (див. задачу 9.10), $\angle TKN = 60^\circ$. Через точку M , паралельно до хорди KE , проведемо пряму a_1 . Через точку Q , паралельно до діаметра MN ,

проведемо пряму a_2 . $a_1 \perp a_2$. Позначимо через C , точку перетину

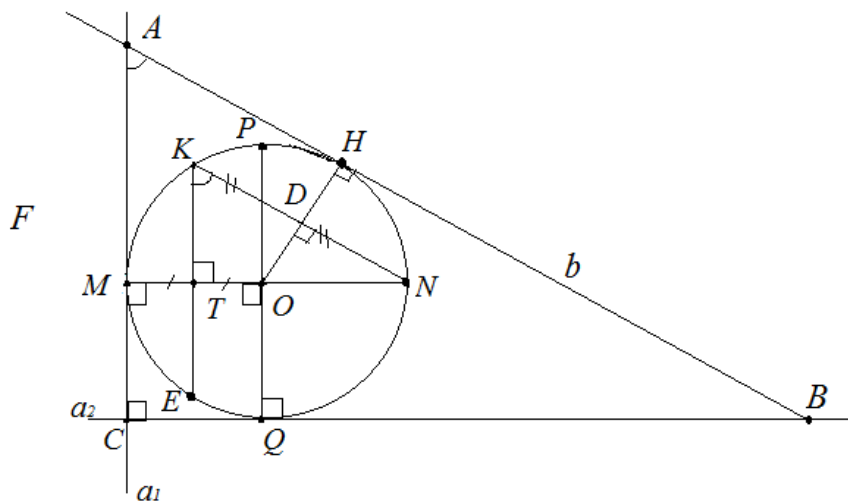


Рис. 188

прямих a_1 і a_2 .

Через середину

D хорди KN

проведемо радіус OH .

$OH \perp KN$. Че-

рез точку H

паралельно до

хорди KN

проведемо

пряму b . $b \perp OH$. Отже, пряма b дотикається кола F у точці H .

Позначимо через A точку перетину прямих b і a_1 , через B – точку

перетину прямих b і a_2 . Трикутник ABC є шуканим. Дійсно,

він є прямокутним трикутником, описаним навколо кола F .

$\angle CAB = \angle TKN = 60^\circ$ як гострі кути з відповідно паралельними сторонами.

Зрозуміло, що усі аналогічні побудови можна виконати для еліпса F' . Вони у повній мірі відповідають властивостям зображень фігур за методом паралельного проєктування і не вимагають безпосереднього використання оригінала.

Нехай еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проєктуванні.

1. Проводимо у еліпсі F' довільний діаметр $M'N'$. Згідно наслідка 6 з теореми 8.6 його можна вважати зображенням діаметра MN кола F при застосованому законі зображення.

2. Будуємо спряжений до діаметра $M'N'$ діаметр $P'Q'$.

3. Через точку M' , паралельно до діаметра $P'Q'$, проводимо

пряму a'_1 .

4. Через точку Q' , паралельно до діаметра $M'N'$, проводимо пряму a'_2 .

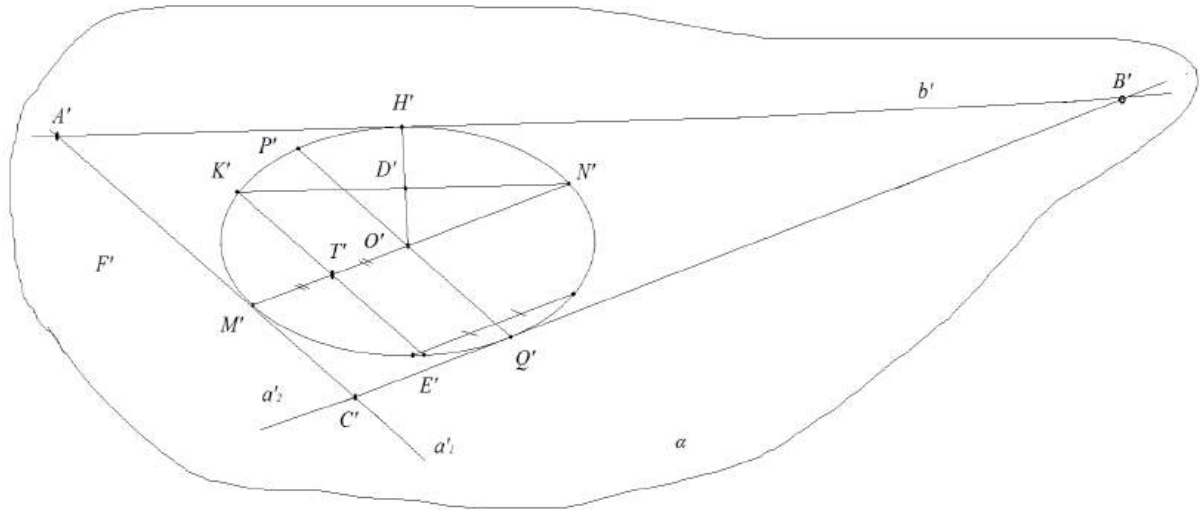


Рис. 189

5. $a'_1 \cap a'_2 = C'$.

6. Через середину T' радіуса $O'M'$, паралельно до діаметра $P'Q'$, проводимо хорду $K'E'$.

7. Через середину D' хорди $K'N'$ проводимо радіус $O'H'$.

8. Через точку H' , паралельно до хорди $K'N'$, проводимо пряму b' .

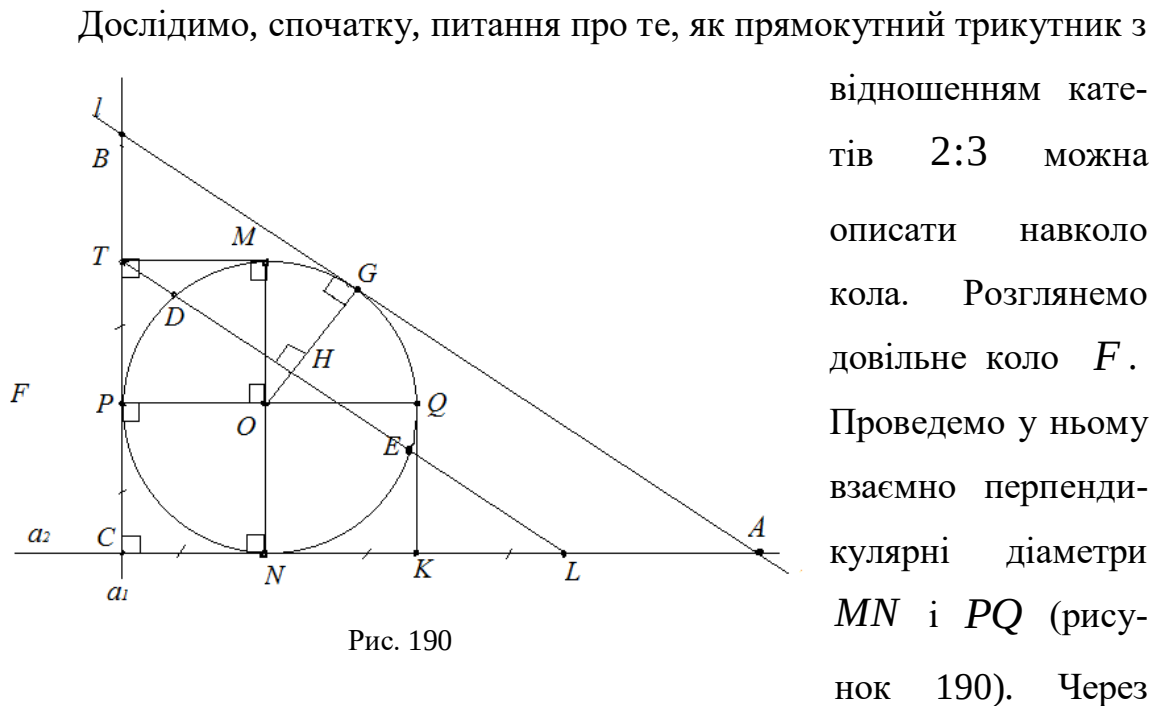
9. $A' = b' \cap a'_1$; $B' = b' \cap a'_2$.

10. Побудований трикутник $A'B'C'$, який описано навколо еліпса F' , є зображенням згідно застосованого закону зображення побудованого трикутника ABC , який описано навколо кола F . Тому трикутник $A'B'C'$ є трикутником шуканим (рис.189). ■

Задача 10.6. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутного трикутника.*

ка, катети якого відносяться як 2:3, описаного навколо кола-оригінала.

Розв'язання. $\square$ Усі прямокутні трикутники з однаковим відношенням катетів, як і усі кола, є подібними між собою. Отже, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, можна побудувати довільний прямокутний трикутник, катети якого відносяться як 2:3, вписати у цей трикутник коло, прийняти отриману геометричну фігуру за оригінал шуканого зображення, а потім розв'язати дану задачу так само, як було розв'язано задачу 10.2. Але у даному випадку можна уникнути безпосереднього використання оригінала.



точку P , паралельно до діаметра MN , проведемо пряму a_1 . Через точку N , паралельно до діаметра PQ , проведемо пряму a_2 . Зрозуміло, що $a_1 \perp a_2$. Нехай $C = a_1 \cap a_2$. Проведемо також прямі MT і OK , $MT \perp a_1$, $OK \perp a_2$. Чотирикутники $PTMO$, $CPON$ і $NOQK$ є рівними між собою квадратами, усі відрізки TP , PC , CN і NK дорівнюють радіусу кола F . На промені, доповняльному до променя KC , відкладемо відрізок $KL = NK$. Тоді $TC:CL = 2:3$; $TC \perp CL$. Відрізок

TL перетинає коло F за хордою DE . Через середину H даної хорди ($DH = HE$) проведемо радіус OG кола F . Зрозуміло, що $OG \perp DE$. Через точку G , паралельно до хорди DE , проведемо пряму l . Пряма l буде дотичною до кола F у точці G тому, що $OG \perp l$. Нехай $B = l \cap a_1$; $C = l \cap a_2$. Трикутник ABC є шуканим. Дійсно, за побудовою – це прямокутний трикутник, описаний навколо кола F . $\angle TLC = \angle BAC$ як відповідні кути при паралельних прямих TL і BA і січній AC . Отже, трикутник ABC є подібним до трикутника LTC . Але катети трикутника LTC відносяться як 2:3. Значить, і у трикутнику ABC відповідні катети відносяться так само: $BC:CA = 2:3$.

Побудови, аналогічні до проведених для кола F , можна виконати і для еліпса F' . Їх справедливість повністю обумовлена властивостями зображень фігур за методом паралельного проєктування, використання оригінала у явному вигляді для них не є потрібним.

1. Для заданого еліпса F' з центром у точці O' будуюмо пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно наслідка 8 з теореми 8.6, їх можна вважати зображеннями при застосованому законі зображення взаємно перпендикулярних діаметрів MN і PQ кола F .

2. Через точку P' , паралельно до діаметра $M'N'$, проводимо пряму a'_1 . Через точку N' , паралельно до діаметра $P'Q'$, проводимо пряму a'_2 . Нехай $C' = a'_1 \cap a'_2$. Згідно властивостей зображення фігур за методом паралельного проєктування, при застосованому законі зображення пряма a'_1 є зображенням прямої a_1 , пряма a'_2 – зображенням прямої a_2 , точка C' – зображенням точки C (рис. 191).

3. Проводимо пряму $O'K'$, $O'K' \parallel MN'$, до перетину з прямою a'_2 у точці K' ; пряму $M'T'$, $M'T' \parallel P'Q'$ до перетину з прямою a'_1 у

відрізок $K'L' = N'K'$. Згідно застосованого закону зображення точка L' є зображенням точки L .

6. Через точку G' , паралельно до хорди $D'E'$, проводимо пряму l' ; пряма l' є дотичною до еліпса F' у точці G' при застосованому законі зображення пряма l' є зображенням прямої l .

7. $B' = l' \cap a'_1$, $A' = l' \cap a'_2$, точка B' є зображенням точки B , точка A' – зображенням точки A , трикутник $A'B'C'$ є шуканим (рис. 191). ■

Варто відмітити, що вирішальним етапом розв'язання усіх наведених задач на побудову зображення прямокутного трикутника, описаного навколо кола, був етап побудови точки дотику до даного кола гіпотенузи шуканого трикутника.

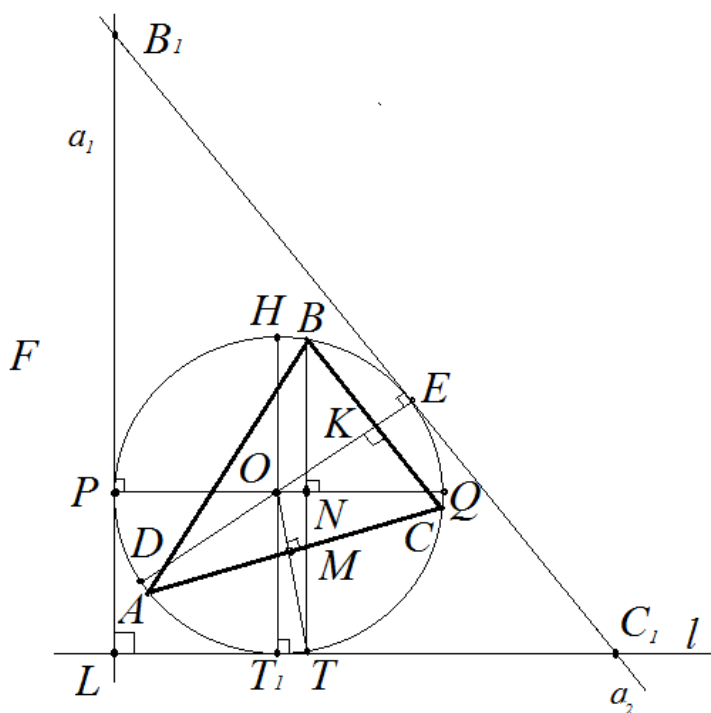
Задача 10.7. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F і вписаного у це коло трикутника ABC . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола F прямокутного трикутника, один з кутів якого складає половину кута ABC .*

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони є зображеннями певного кола F і вписаного у це коло трикутника ABC . Згідно теореми 8.8, за таким зображенням, з точністю до перетворення подібності, можна відновити оригінал. На площині оригінала можна виконати необхідні побудови. (Кожний кут φ довільного трикутника ABC знаходиться у межах $0 < \varphi < 180^\circ$. Але тоді

$0 < \frac{\varphi}{2} < 180^\circ$, кут, величина якого дорівнює $\frac{\varphi}{2}$, є гострим кутом пев-

ного прямокутного трикутника, тобто, відповідний прямокутний трикутник існує, навколо будь-якого кола можна описати трикутник, подібний до нього). Далі, за допомогою теореми Фалеса, виконані на площині оригінала побудови можна перенести на площину зображень.

Але поставлену задачу можна розв'язати і без явного використання оригінала. Для знаходження шляхів такого розв'язання дослідимо, спочатку, спосіб виконання відповідних побудов для оригінала.



Нехай трикутник ABC вписано у коло F . Через середину M сторони AC проведемо діаметр кола F . Нехай радіус OT кола F є таким радіусом цього діаметра, що кут ABC , як кут, вписаний у коло F , спирається на дугу $A_T C$. Тоді промінь BT є бісектрисою кута ABC , три-

кутник TBC є вписаним у коло F , $\angle TBC = \frac{1}{2} \angle ABC$. Через сере-

дину N хорди BT проведемо діаметр PQ . Через середину K хорди BC проведемо діаметр DE . (Якщо одна з цих хорд є діаметром кола F , то проведемо діаметр, перпендикулярний до неї). Паралельно до хорди BT проведемо діаметр HT_1 кола F , через точку P паралельно до хорди BT проведемо пряму a_1 . Вона буде дотикатися кола F у точці P . Серед точок D і E виберемо ту, яка лежить по іншу сторону відносно прямої HT_1 , ніж точка P . (Така точка, безумовно, буде існувати, бо діаметр DE перетинає пряму HT_1 у точці O). Нехай, для визначеності, це буде точка E . Паралельно до хорди BC проведемо через точку E пряму a_2 . Ця пряма буде дотикатися кола F у точці E . Позначимо через B_1 точку перетину прямих a_1 і a_2 (рис. 192). Така точка буде існувати, бо у точці B перетинаються прямі TB і BC , паралельні, відповідно, до прямих a_1 і a_2 . При цьому $\angle PB_1E = \angle TBC$

як гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Через точку T_1 , паралельно до діаметра PQ , проведемо пряму l . Вона буде дотичною до кола F у точці T_1 . Пряма l перетне пряму a_1 у точці L . Чотирикутник $LPOT_1$ буде квадратом, бо усі його кути є прямими і $OP=OT_1$ як радіуси одного кола. Позначимо через C_1 точку перетину прямих l і a_2 . При цьому безпосередньо будуть перетинатися промені LT_1 і B_1E , бо саме ці промені утворюють з січною a_1 внутрішні односторонні кути, сума яких є меншою за 180° . Таким чином утвориться описаний навколо кола F прямокутний трикутник B_1LC_1 , для якого має місце рівність $\angle LB_1C_1 = \angle TBC = \frac{1}{2} \angle ABC$, тобто, шуканий трикутник.

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєкування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' і вписаного у нього трикутника $A'B'C'$. Використання оригінала у явному вигляді для цього не є потрібним.

1. Розглянемо заданий еліпс F' і вписаний у нього трикутник $A'B'C'$. Через середину M' сторони $A'C'$ проведемо діаметр еліпса F' . Нехай радіус $O'T'$ еліпса F' є таким радіусом даного діаметра, що кут $A'B'C'$, як кут, вписаний у еліпс F' , спирається на дугу $A'_T C'$. Вписаний у еліпс F' кут $T'B'C'$ є зображенням вписаного у коло F кута, що складає половину того кута, який зображено кутом $A'B'C'$.

2. Через середину N' хорди $B'T'$ проведемо діаметр $P'Q'$. Через середину K' хорди $B'C'$ проведемо діаметр $D'E'$. Якщо якась з хорд $B'T'$ чи $B'C'$ є діаметром еліпса F' , побудуємо відповідний спряжений діаметр. Діаметр $H'T'_1$ проведемо паралельно до хорди $B'T'$. Нехай точки P' і E' лежать по різні сторони відносно прямої $H'T'_1$.

3. Через точку P' , паралельно до хорди $B'T'$, проведемо пряму a'_1 . Через точку E' , паралельно до хорди $B'C'$, проведемо пряму a'_2 .

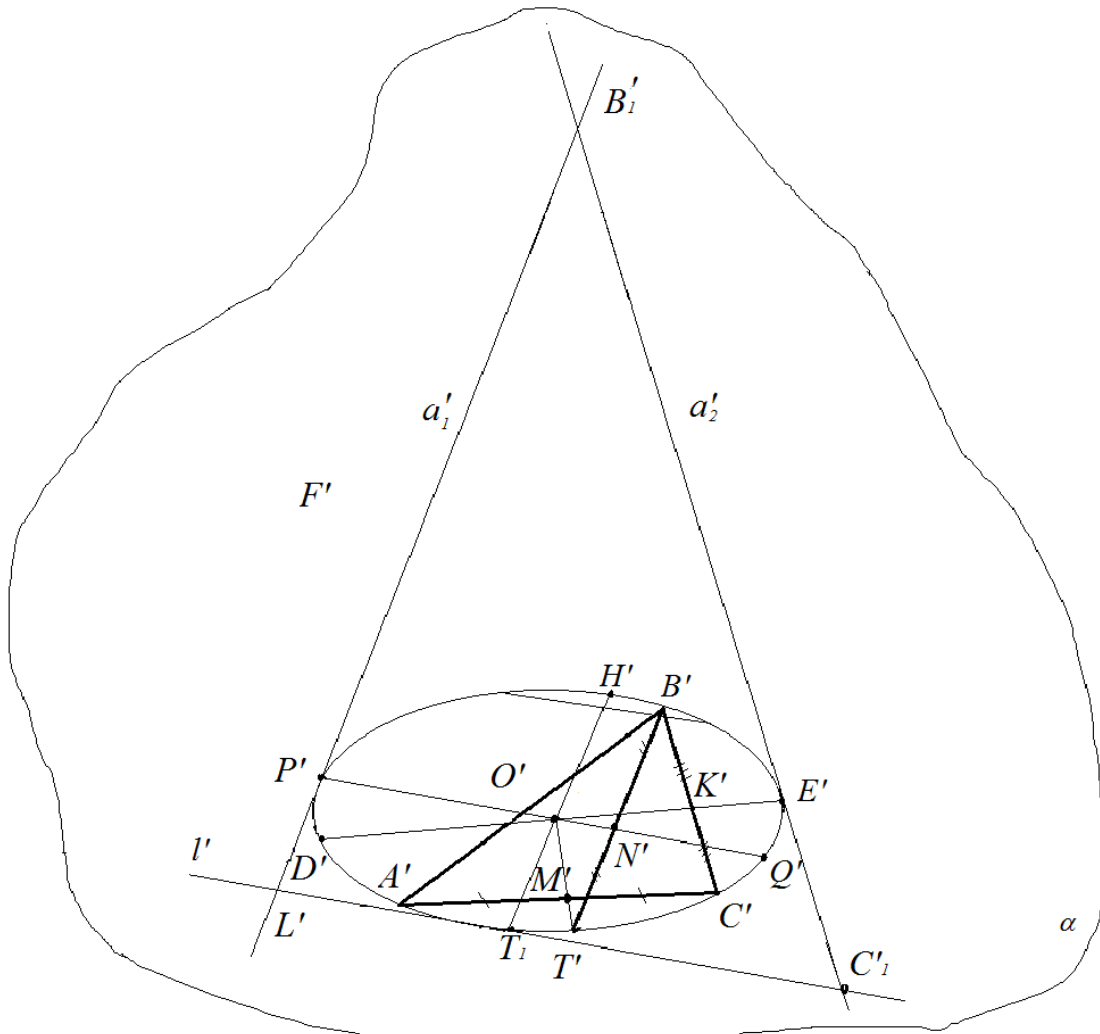


Рис. 193

Позначимо точку перетину прямих a'_1 і a'_2 через B'_1 .

4. Через точку T'_1 , паралельно до діаметра $P'Q'$, проведемо пряму l' . Позначимо $L' = l' \cap a'_1$, $C' = l' \cap a'_2$.

Трикутник $L'B'_1C'_1$ є шуканим (рис. 193). ■

Задача 10.8. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення*

згідно застосованого закону зображення довільного рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.

Розв'язання. □ Розглянемо довільний рівнобедрений трикутник ABC ($AB=BC$). Зрозуміло, що $\angle BAC = \angle BCA$ як кути при його основі. Знайдемо центр O кола, вписаного у трикутник ABC , як точку перетину його бісектрис BM і AL (рис. 194). Промінь CO тоді, зви-

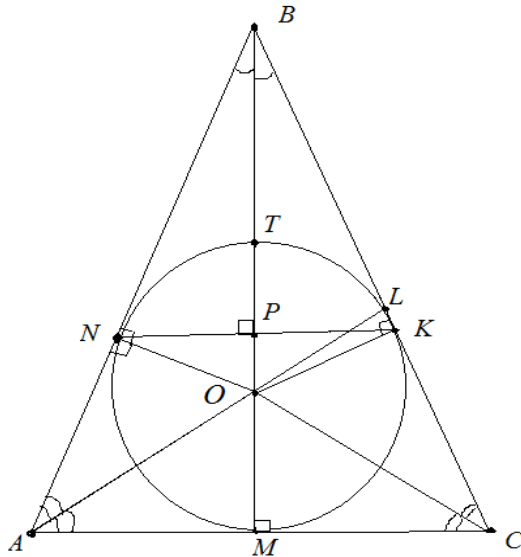


Рис. 194

чайно, є бісектрисою кута BCA . Бісектрису BM проведено до основи AC рівнобедреного трикутника ABC . Тому $BM \perp AC$, $AM=MC$. Проведемо відрізки $ON \perp AB$, $OK \perp BC$. Точки M , N і K є точками дотику вписаного кола, відповідно, до сторін AC , AB і BC трикутника ABC .

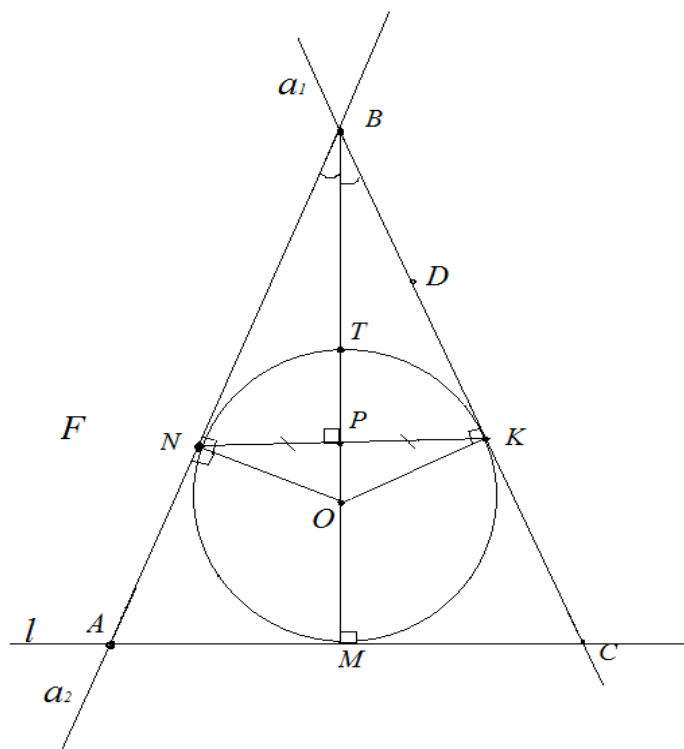
Розглянемо трикутник AON і трикутник COK . Вони є прямокутними трикутниками, $ON=OK$ як

радіуси одного кола, $\angle NAO = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BCA = \angle KCO$. Звід-

си випливає, що трикутник NAO дорівнює трикутнику KCO за катетом і протилежним гострим кутом. Але тоді $AN=CK$ як відповідні катети рівних прямокутних трикутників, і $BN=AB-AN=BC-CK=BK$, трикутник NBK є рівнобедреним.

Промінь BM є бісектрисою кута ABC , отже, він перетинає відрізок NK у певній точці P , відрізок BP є бісектрисою, проведеною до основи NK рівнобедреного трикутника NBK . Тому $BP \perp NK$, $NK \parallel AC$. Відрізок NP є висотою прямокутного трикутника ONB , проведеною до його гіпотенузи BO . Основа P такої висоти завжди

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O (рис. 195). Проведемо у ньому довільний діаметр TM . Через точку M , перпендикулярно до радіуса OM , проведемо пряму l . Ця пряма буде дотичною до



кола F у точці M .

ком з прямим кутом OPK . Отже, його кут POK є гострим. Пряма OK для прямих TM і a_1 є січною. По ту сторону відносно прямої OK , якій належить точка T , прямі TM і a_1 утворюють з прямою OK внутрішні односторонні кути TOK і OKD . Перший з них є гострим,

другий – прямим. Отже, у сумі ці кути складають менше, ніж 180° . За відомою теоремою евклідової геометрії, звідси випливає, що прямі TM і a_1 перетинаються у певній точці B , яка є точкою перетину тих променів цих прямих, які знаходяться по той самий бік відносно прямої OK , що й точка T .

Пряма a_1 перетинає пряму l у певній точці C ($l \parallel NK$, бо ці дві прямі є перпендикулярними до однієї й тієї ж прямої; якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу). Через точки B і N проведемо пряму a_2 . Вона перетне пряму l у певній точці A , утвориться трикутник ABC (точки A , B і C не лежать на одній прямій).

Розглянемо трикутник NBK . Відрізок BP для цього трикутника є, одночасно, і медіаною, і висотою. Звідси випливає, що трикутник NBK є рівнобедреним трикутником з основою NK , $BN = NK$, $\angle NBP = \angle PBK$.

Розглянемо трикутники ONB і OKB . $OK = ON$ як радіуси одного кола, $BN = BK$ – за доведеним, відрізок BO є спільною стороною цих трикутників. Звідси випливає, що трикутник ONB дорівнює трикутнику OKB за третьою ознакою рівності трикутників, за трьома сторонами. Але тоді $\angle ONB = \angle OKB = 90^\circ$, бо ці кути лежать у рівних трикутниках проти спільної сторони, пряма a_2 є дотичною до кола F у точці N , трикутник ABC є описаним навколо кола F . У трикутнику ABC відрізок BM одночасно є висотою і бісектрисою, проведеними до сторони AC . Це означає, що трикутник ABC є рівнобедреним ($AB = BC$), тобто, шуканим.

Побудови, аналогічні до проведених для кола F , можна виконати і для еліпса F' . Їх справедливість обумовлена властивостями зобра-

жень фігур за методом паралельного проєктування. Побудова оригінала і його безпосереднє використання при цьому не є потрібними.

1. У заданому еліпсі F' з центром у точці O' будемо довільний діаметр $M'T'$ та спряжений до нього діаметр $D'E'$ (рис. 196).

2. Через точку M' , паралельно до діаметра $D'E'$, проводимо пряму l' .

3. На відрізку $O'T'$ обираємо довільну точку P' .

4. Через точку P' , паралельно до діаметра $D'E'$, проводимо хорду $N'K'$ еліпса F' .

5. Проводимо діаметр $K'L'$ еліпса F' . Будемо спряжений до нього діаметр $H'Q'$.

6. Через точку K' , паралельно до діаметра $H'Q'$, проводимо пряму a'_1 .

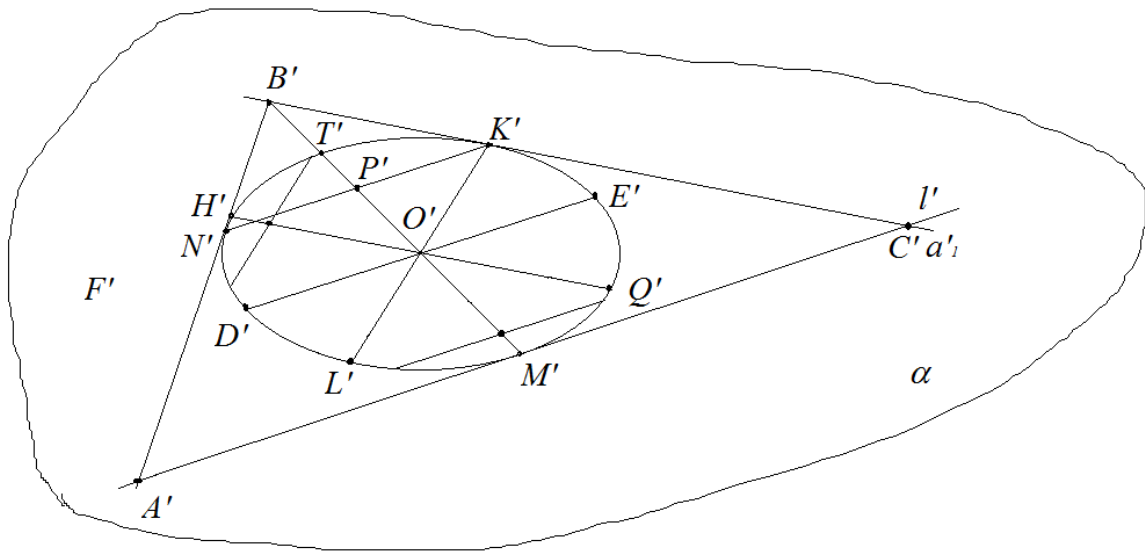


Рис. 196

7. Позначаємо через B' точку перетину прямої a'_1 з прямою $M'T'$, через C' – точку перетину прямої a'_1 з прямою l' .

8. Через точки B' і N' проводимо пряму a'_2 . Позначаємо через A' точку перетину прямої a'_2 з прямою l' .

9. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим зображенням.

Як зрозуміло із побудов, виконаних на рис. 194, запропонований спосіб розв'язання задачі 10.8 технічно є не дуже простим завдяки необхідності знаходження у еліпсі F' двох пар спряжених діаметрів. Можна обмежитися однією парою спряжених діаметрів, якщо обґрунтувати правильність іншого шляху побудови зображення рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола F .

У колі F з центром у точці O проведемо пару взаємно перпендикулярних діаметрів MN і PQ (рис. 197). Через точку N , паралельно до діаметра PQ , проведемо пряму a . $a \perp MN$, пряма a є дотичною до кола F у точці N .

Виберемо довільну точку T на дузі $M_p N$ кола F і проведемо хорду MT . Через середину K цієї хорди проведемо радіус ON . Пряма b_1 , що проходить через точку H паралельно до хорди MT , буде дотичною до кола F у точці H . Кут

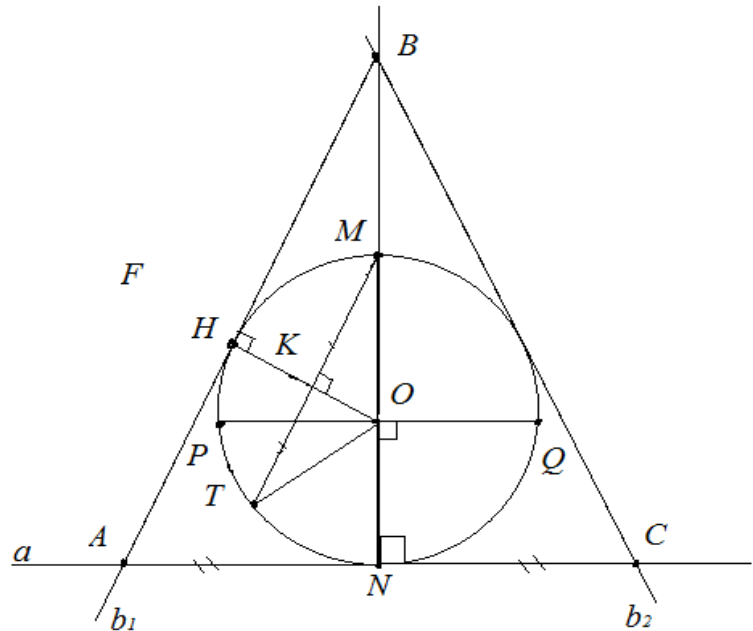


Рис. 197

$\angle BON$ є гострим як половина кута $\angle MOT$ при вершині рівнобедреного трикутника MOT . Звідси випливає, що кут $\angle BON$ є меншим за прямий кут $\angle BOR$, точка H належить тій дузі MP кола F , яка складає 90° і є частиною дуги $M_p N$. Спираючись на цей факт, легко обґрунтувати, що для побудови точки H дотику прямої b_1 до кола F обрання довільної точки T на дузі $M_p N$ є рівносильним до обрання довільної точки P на радіусі OT при попередньому варіанті розв'язання даної задачі (рис. 193).

Позначимо $A = b_1 \cap a$, $B = b_1 \cap MN$. На промені, доповняльному до променя NA , відкладемо відрізок NC , $NC = NA$. Трикутник ABC буде шуканим рівнобедреним трикутником. Дійсно, він буде саме рівнобедреним трикутником з основою AC , тому що, за побудовою, відрізок BN , одночасно, є його медіаною і висотою. Сторона AC дотикається кола F у точці N ($AC \perp ON$), сторона AB дотикається кола F у точці H ($AB \perp OH$) за побудовою. Півколо $M_Q N$ є симетричним до півкола $M_P N$ відносно діаметра MN . Точка C є симетричною до точки A відносно прямої MN за побудовою. Звідси випливає, що відрізок BC є симетричним до відрізка BA відносно прямої MN . А це означає, що у певній точці він дотикається дуги $M_Q N$ кола F , бо симетрія відносно прямої є рухом площини. Отже, трикутник ABC є описаним навколо кола F .

Побудови, аналогічні до вищевказаних, легко виконати і для еліпса F' . Завдяки уже відомим властивостям зображень фігур за методом паралельного проєктування, таким чином ми отримуємо ще один варіант розв'язання задачі 10.8, який не вимагає безпосереднього використання оригінала.

1. Для еліпса F' будуюмо довільну пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$.

2. На дугі $M'_{P'}N'$ еліпса F' обираємо довільну точку H' . Через середину K' хорди $M'T'$ проводимо радіус $O'H'$.

3. Через точку H' еліпса F' , паралельно до хорди $M'T'$, проводимо пряму b'_1 . Вона буде дотичною до еліпса F' у точці H' .

4. Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку N' проводимо пряму a' . Вона буде дотичною до еліпса F' у точці N' .

5. Вводимо позначення: $A' = b'_1 \cap a'$, $B' = b'_1 \cap M'N'$.

6. На промені, доповняльному до променя $N'A'$, відкладаємо відрізок $N'C'$, $N'C' = N'A'$.

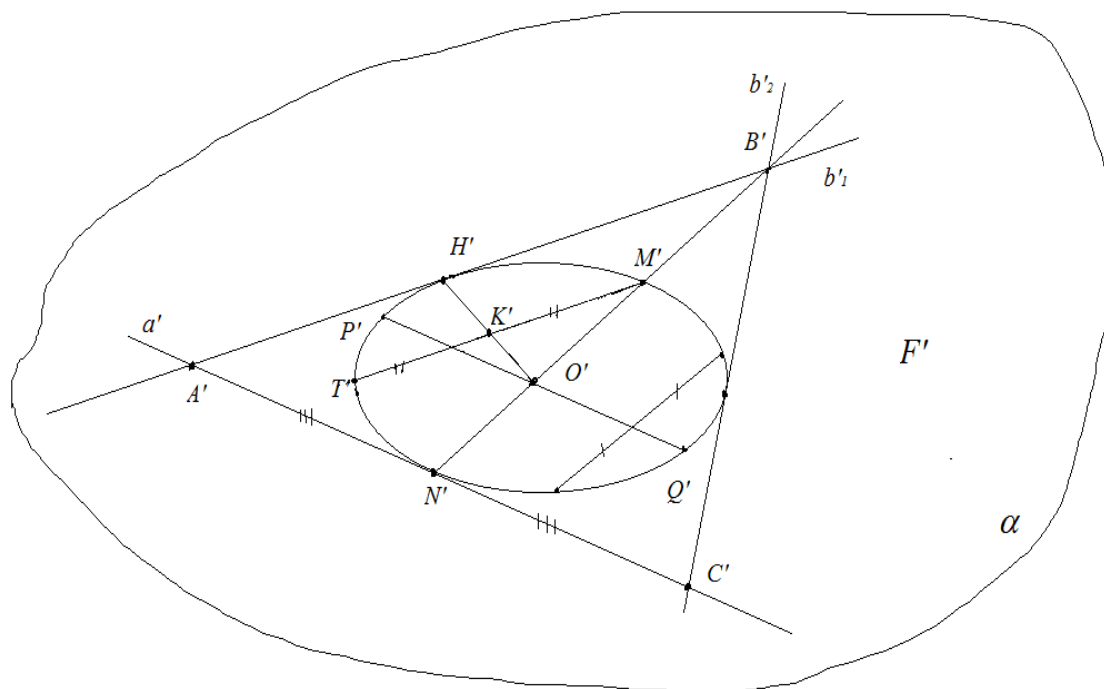


Рис. 198

7. Через точки B' і C' проводимо пряму b'_2 . Вона буде дотичною до еліпса F' у певній точці його дуги $M'_Q N'$. Трикутник $A'B'C'$ буде шуканим (рис. 198). ■

Задача 10.9. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і рівнобедрений трикутник ABC ($AB=BC$). Відомо, що еліпс F' є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала трикутника, подібного до заданого.*

Розв'язання. □ Оскільки форма заданого рівнобедреного трикутника ABC є цілком довільною, при розв'язанні даної задачі безпосереднього використання оригінала уникнути неможливо.

Знайдемо центр O кола, вписаного у трикутник ABC , як точку

перетину його бісектрис BM і AL . Проведемо перпендикуляр OK до

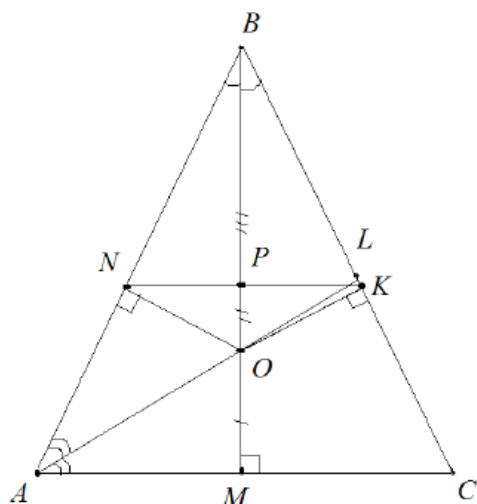


Рис. 199

сторони BC і паралельну до сторони AC пряму KN до перетину зі стороною AB у точці N . Відрізки OM , OK і ON , $OM = ON = OK$, є радіусами кола, вписаного у трикутник ABC , яке при застосованому законі зображення можна прийняти за оригінал F для еліпса F' . Позначимо через P точку перетину відрізків NK і OB (рис. 199). Далі задачу

можна розв'язати так само, як попередню. Тільки тепер точку P' на радіусі $O'T'$ не можна обирати довільним чином. Вона повинна бути зображенням саме точки P відрізка OB при тому законі зображення за методом паралельного проєктування, при якому вписане у трикутник ABC коло F зображується еліпсом F' . Отже, для побудови точки P' треба використати оригінал і застосувати теорему Фалеса.

1. Для заданого еліпса F' з центром у точці O' будуємо довільний діаметр $M'T'$. За наслідком 5 з теореми 8.6, існує паралельне проєктування, при якому еліпс F' з центром у точці O' є зображенням вписаного у трикутник ABC кола F з центром у точці O , а точка M' – зображенням точки M (рис. 200).

2. За допомогою теореми Фалеса будуємо точку P' , яка є зображенням точки P згідно застосованого закону зображення, і точку B' , яка згідно застосованого закону зображення є зображенням точки B .

3. Будуємо діаметр $D'E'$ еліпса F' , спряжений до його діаметра $M'T'$.

4. Паралельно до діаметра $D'E'$, через точку M' проводимо

пряму l' , через точку P' , паралельно до діаметра $D'E'$, проводимо хорду $N'K'$ еліпса F' .

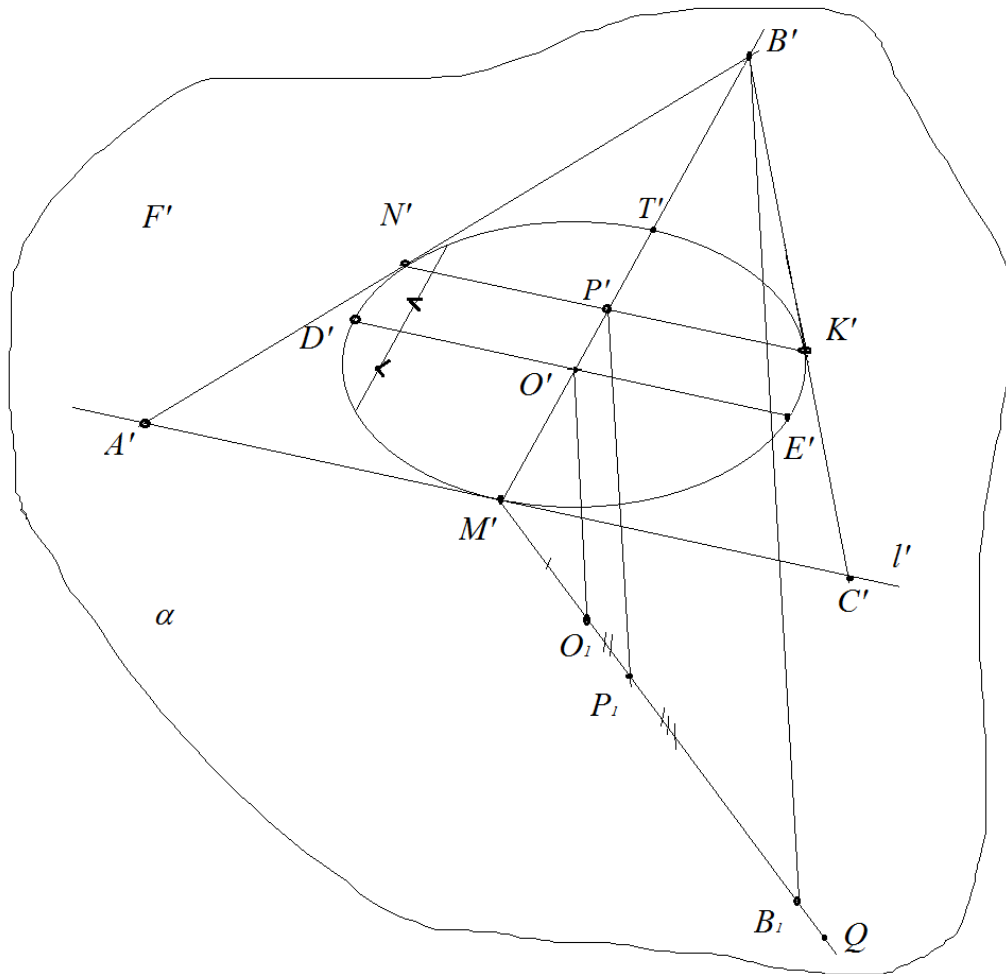


Рис. 200

5. Проводимо пряму $B'N'$ до перетину з прямою l' у точці A' , пряму $B'K'$ до перетину з прямою l' у точці C' . Трикутник $A'B'C'$ є шуканим (рис. 200). ■

Зауважимо, що запропонований спосіб розв'язання, хоча й передбачає безпосереднє використання оригінала, але не вимагає побудови кола F , вписаного у трикутник-оригінал.

Задача 10.10. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення*

згідно застосованого закону зображення правильного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.

Розв’язання. □ Зрозуміло, що можна зобразити правильний трикутник і розв’язати задачу 10.10 таким же чином, що й попередню. Але у даному випадку існує спосіб розв’язання, який не вимагає безпосереднього використання оригінала.

Розглянемо спочатку питання про те, як правильний трикутник можна описати навколо кола. Проведемо у колі F з центром у точці O довільний діаметр TM . Нехай точка P ділить радіус OT навпіл. Через точку P , перпендикулярно до TM , проведемо хорду NK (рис. 201).

Чотирикутник $NTKO$ є ромбом, бо його діагоналі є взаємно перпендикулярними і кожна з них точкою перетину ділиться навпіл. $ON = NT = TK = KO = r$, де r – радіус кола F . Але тоді трикутники ONT і OKT є рівносторонніми, кожний їх кут дорівнює 60° . Через

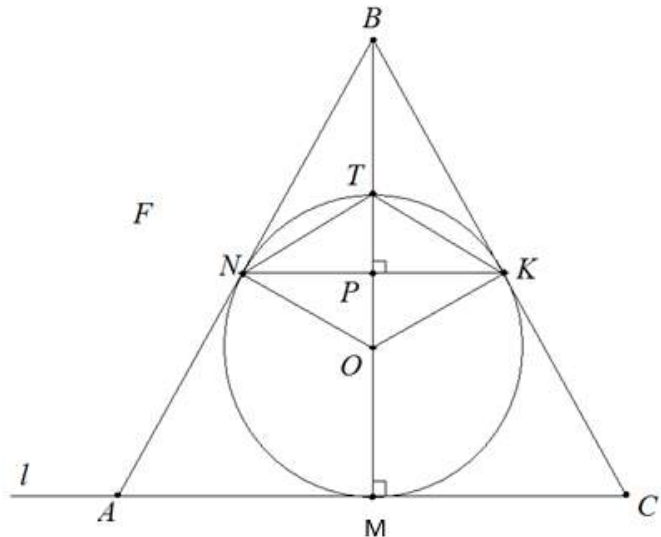


Рис. 201

точку M , перпендикулярно до діаметра TM , проведемо пряму l . Ця пряма буде дотичною до кола F у точці M . Від точки T на промені, доповняльному до променя TO , відкладемо відрізок TB , $TB = r$. Проведемо прямі BN і BK . Позначимо через A точку перетину прямої BN з прямою l , через C – точку перетину прямої BK з прямою l . Утворений трикутник ABC буде правильним трикутником, описаним навколо кола F .

Насправді, згідно проведених побудов, трикутник BTN є рівнобедреним, $BT = TN = r$. $\angle NTO = 60^\circ$ і є зовнішнім кутом при вершині

Т цього трикутника. Отже, $\angle BNT = \angle NBT = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$. Аналогі-

чні міркування приводять до висновку, що $\angle TBK = \angle TKB = 30^\circ$. Але тоді правильними є такі рівності як $\angle NBK = \angle NBT + \angle TBK = 60^\circ$, $\angle ONB = \angle ONT + \angle TNB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $BN \perp ON$. Так само $\angle OKB = \angle OKT + \angle TKB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $BK \perp OK$. Отже, прямі BN і BK є дотичними до кола F , відповідно, у точках N і K , трикутник ABC є описаним навколо кола F . У трикутнику NBK відрізок BP одночасно є медіаною і висотою. Звідси випливає, що трикутник NBK є рівнобедреним і, завдяки тому, що $\angle NBK = 60^\circ$, рівностороннім. $NK \parallel AC$ тому, що ці обидві прямі є перпендикулярними до прямої TM . Звідси випливає, що трикутник ABC є подібним до трикутника NBK і, завдяки цьому, рівностороннім трикутником.

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєкування дозволяють, при наявності еліпса F' , наступним чином виконати побудову зображення трикутника ABC . Застосування оригінала в явному вигляді для цього не є потрібним.

1. У заданому еліпсі F' з центром у точці O' будуємо довільний діаметр $M'T'$ і спряжений до нього діаметр $D'E'$.

2. Через середину P' радіуса $O'T'$, паралельно до діаметра $D'E'$, проводимо хорду $N'K'$.

3. Через точку M' , паралельно до діаметра $D'E'$, проводимо пряму l' .

4. На промені, доповняльному до променя $T'O'$, відкладаємо відрізок $T'B' = O'T'$.

5. Проводимо прямі $B'N'$ і $B'K'$, позначаємо точки їх перетину з прямою l' , відповідно, через A' і C' .

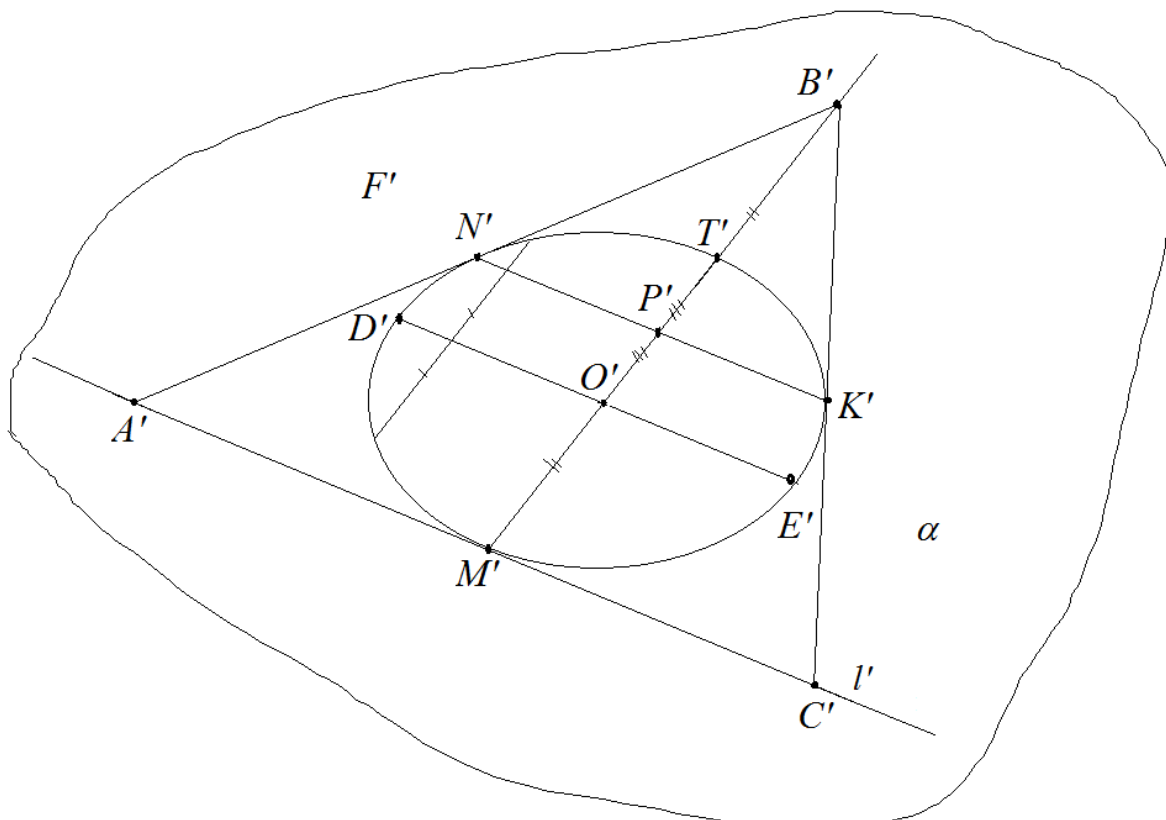


Рис. 202

6. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим зображенням трикутника ABC (рис. 202). ■

Задача 10.11. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола-оригінала, кут при вершині якого дорівнює куту ABC .*

Розв'язання. □ Згідно теореми 8.8, за заданим умовою даної задачі зображенням, з точністю до перетворення подібності, можна відновити оригінал. На площині оригінала можна виконати необхідні побудови, а потім, за допомогою теореми Фалеса, перенести їх на пло-

щину зображень.

Але поставлену задачу можна розв'язати і без явного використання оригінала. Для знаходження шляхів такого розв'язання дослідимо, спочатку, спосіб виконання необхідних побудов на площині оригінала.

Нехай трикутник ABC вписано у коло F (рис. 203). Через середину M сторони AB проведемо діаметр PD . Через середину N сторони BC проведемо діаметр QE (Якщо одна із сторін трикутника ABC є діаметром кола F , то проведемо перпендикулярний до неї діаметр). Через точку P , паралельно до сторони AB , проведемо пряму a_1 . Вона буде дотичною до кола F у точці P . Кути POE і POQ є суміжними. Кожний з них разом з кутом ABC є кутами з відповідно перпендикулярними сторонами. Отже, один з цих кутів дорівнює куту ABC , інший складає з ним у сумі 180° . Нехай, для визначеності, саме кут POQ у сумі з кутом ABC складає 180° . Можна обґрунтувати, що у цьому випадку точки P і Q лежать по різні сторони відносно прямої BO . Через точку Q , паралельно до сторони BC , проведемо пряму a_2 . Вона буде дотичною до кола F у точці Q . Нехай $B_1 = a_1 \cap a_2$. Перпендикулярно до хорди PQ проведемо діаметр HK . Нехай точка K належить іншій півплощині відносно прямої PQ , ніж точка B_1 . Через точку K , паралельно до хорди PQ , проведемо пряму l . Вона буде дотичною до кола F у точці K . Нехай $A_1 = a_1 \cap l$, $C_1 = a_2 \cap l$. Трикутник $A_1B_1C_1$ є шуканим.

Дійсно, згідно виконаних побудов, $a_1 \parallel AB$, $a_2 \parallel BC$, прямі AB і BC перетинаються у точці B , отже, прямі a_1 і a_2 також перетинаються, точка B_1 існує, існує і чотирикутник PB_1QO . У цьому чотирикутнику $\angle B_1PO = \angle B_1QO = 90^\circ$. Отже, $\angle PB_1Q + \angle POQ = 180^\circ$. Але

The diagram illustrates a geometric construction involving a circle with center O . The circle has points $H, B, Q, D, C, A, K, E, P$ on its circumference. A horizontal diameter is shown with center O . A line l passes through point C_1 and intersects the circle at D . A line a_1 passes through point A_1 and intersects the circle at K . A line F passes through point B_1 and intersects the circle at P . Several other points are marked inside the circle: M is on the horizontal diameter; N is near the center; E is between O and P ; H is on the upper left arc. Lines connect O to various points on the circle ($OB, OP, OH, OM, ON, OK, OE$). There are also lines connecting points like B to Q , Q to D , D to C , C to A , A to K , K to E , E to P , and P to H . Right angle symbols are placed at several intersections: where OB meets l at D , where OP meets F at P , where OK meets a_1 at K , and where OM meets BN .

Прямі a_1 і a_2 є дотичними, проведеними з точки B_1 до кола F , точки P і Q є точками дотику. Отже, $B_1P = B_1Q$, трикутник PB_1Q є рівнобедреним. За побудовою, $l \parallel PQ$. Значить, точки A_1 і C_1 перетину прямої l з прямими a_1 і a_2 існують, існує і трикутник $A_1B_1C_1$, описаний навколо кола F . З того, що $A_1C_1 \parallel PQ$ випливає, що трикутник

$A_1B_1C_1$ є подібним до трикутника PB_1Q і тому також є трикутником рівнобедреним. $\angle A_1B_1C_1 \equiv \angle PB_1Q = \angle ABC$.

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєкування дозволяють виконати відповідні аналогічні побудови для еліпса F' і трикутника $A'B'C'$. Використання оригінала у явному вигляді для таких побудов не є потрібним.

1. Розглянемо заданий еліпс F' і вписаний у нього трикутник $A'B'C'$. Через середину M' хорди $A'B'$ проведемо діаметр $P'D'$. Через середину N' хорди $B'C'$ проведемо діаметр $E'Q'$. Якщо одна з хорд ($A'B'$ чи $B'C'$) є діаметром еліпса F' , то проведемо спряжений до нього діаметр.

2. Проведемо пряму $B'O'$. Через точку P' , паралельно до хорди $A'B'$, проведемо пряму a'_1 . Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці P' . Із точок E' і Q' виберемо ту із них, яка з точкою P' лежить по різні сторони відносно прямої $B'O'$ (така точка існує обов'язково, тому що діаметр $E'Q'$, як і діаметр $P'D'$, перетинає пряму $B'O'$ у точці O'). Нехай, для визначеності, це буде точка Q' (рис. 202). Через точку Q' , паралельно до хорди $B'C'$, проведемо пряму a'_2 . Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці Q' . Позначимо через B'_1 точку перетину прямих a'_1 і a'_2 . Така точка буде існувати, тому що у точці B' перетинаються прямі $A'B'$ і $B'C'$, паралельні, відповідно, до прямих a'_1 і a'_2 .

3. Проведемо хорду $P'Q'$. Через її середину L' проведемо діаметр $H'K'$. Нехай саме точка K' належить іншій півплощині відносно прямої $P'Q'$, ніж точка B'_1 . Через точку K' , паралельно до хорди

$P'Q'$, проведемо пряму l' . Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці K' .

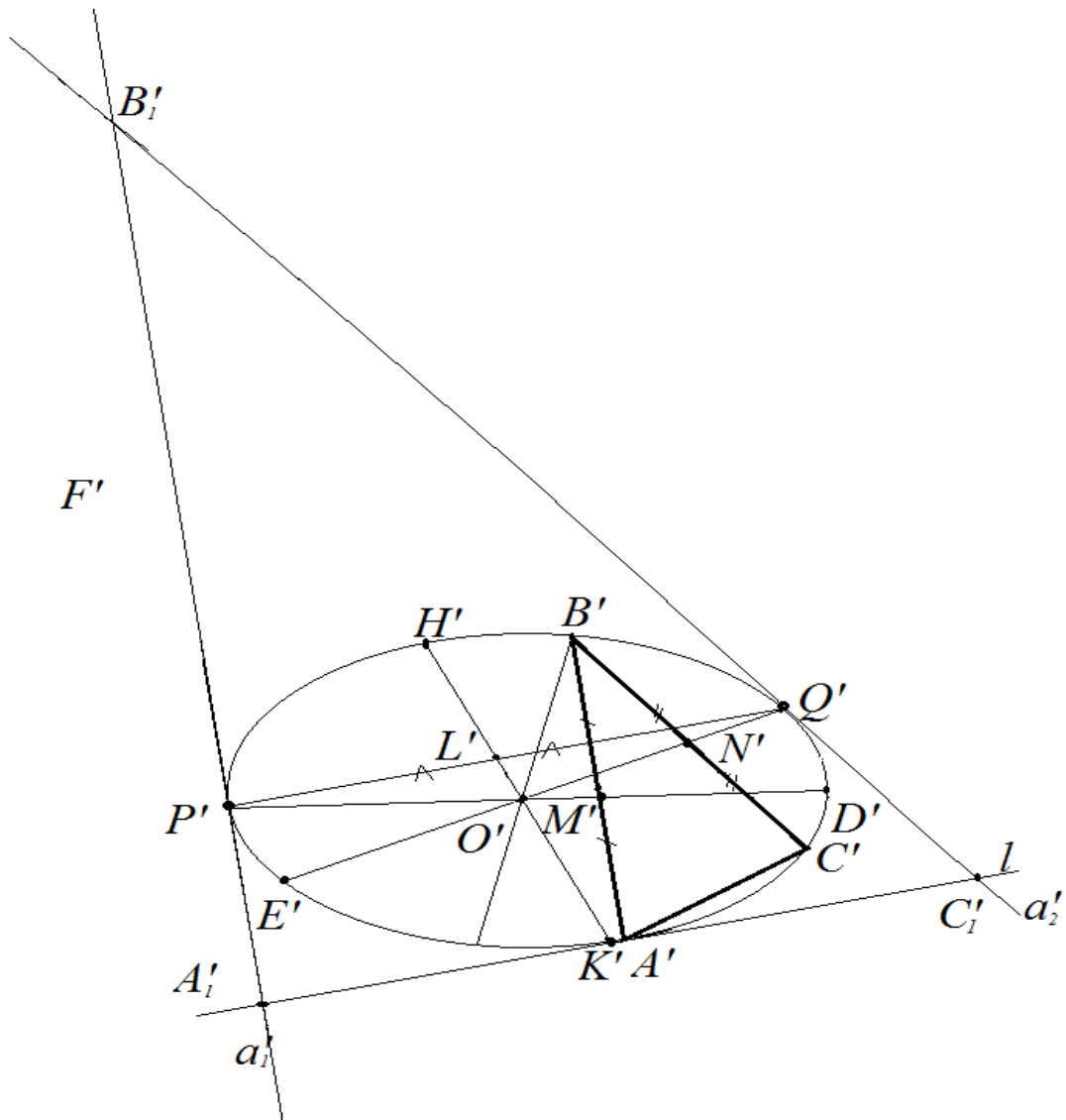


Рис. 204

4. Позначимо $A'_1 = a'_1 \cap l'$, $C'_1 = a'_2 \cap l'$. Трикутник $A'_1 B'_1 C'_1$ є шуканим (рис. 204). ■

Задача 10.12. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення довільного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ Дослідимо, спочатку, питання про те, як можна описати трикутник навколо кола. Якщо коло F з центром у точці O є вписаним у трикутник ABC , то воно дотикається безпосередньо усіх сторін цього трикутника у певних їх внутрішніх точках (рис. 205).

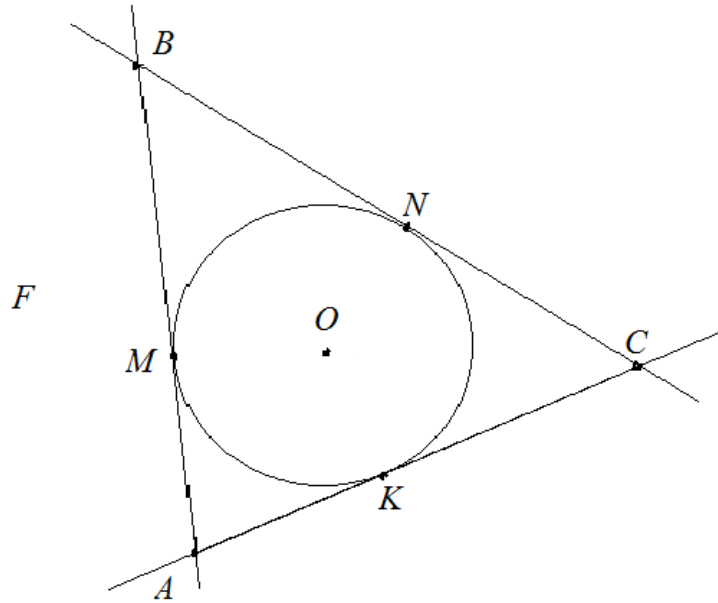


Рис. 205

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O . Проведемо у цьому колі довільний діаметр MP . Через точку M , перпендикулярно до прямої MP , проведемо пряму a_1 . Будемо шукати описаний навколо кола F трикутник так, щоб одна із сторін цього трикутника дотикалася кола F у точці M . Зрозуміло, що інша сторона шуканого трикутника не може дотикатися кола F у точці P . Виберемо на колі F довільну точку N , відмінну від точок M і P . Проведемо діаметр NQ . Через точку N , перпендикулярно до діаметра NQ , проведемо пряму a_2 (рис. 206). Пряма a_2 не є паралельною до прямої a_1 . Нехай точка B є точкою перетину прямих a_1 і a_2 . Зрозуміло, що $B \notin MP$, $B \notin NQ$. Прямі MP і NQ розділяють площину кола F на чотири частини, які є внутрішніми областями кутів NOM , MOQ , QOP і PON , $\angle NOM = \angle QOP$, $\angle MOQ = \angle PON$ як вертикальні. Нехай, для визначеності, точка B належить внутрішній області кута NOM . На дузі кола F , яка лежить всередині кута QOP , вертикального до кута

точці A , пряму a_2 – у точці C . Зрозуміло, що точки A і C належать різним півплощинам відносно прямої OK . Неважко обґрунтувати, що точки A і B належать різним півплощинам відносно прямої MP , точки B і C належать різним півплощинам відносно прямої NQ . Це означає, що коло F є вписаним у трикутник ABC , трикутник ABC , відповідно, описаним навколо кола F .

1. На картинній площині α розглянемо заданий еліпс F' з центром у точці O' . Побудуємо його довільні діаметри $M'P'$ і $N'Q'$. Викон-

ристовуюючи допоміжні хорди, через точку M' проведемо дотичну до еліпса F' пряму a'_1 , через точку N' – дотичну до еліпса F' пряму a'_2 . Позначимо через B' точку перетину прямих a'_1 і a'_2 .

2. Нехай точка B' лежить всередині кута $N'O'M'$. Розглянемо кут

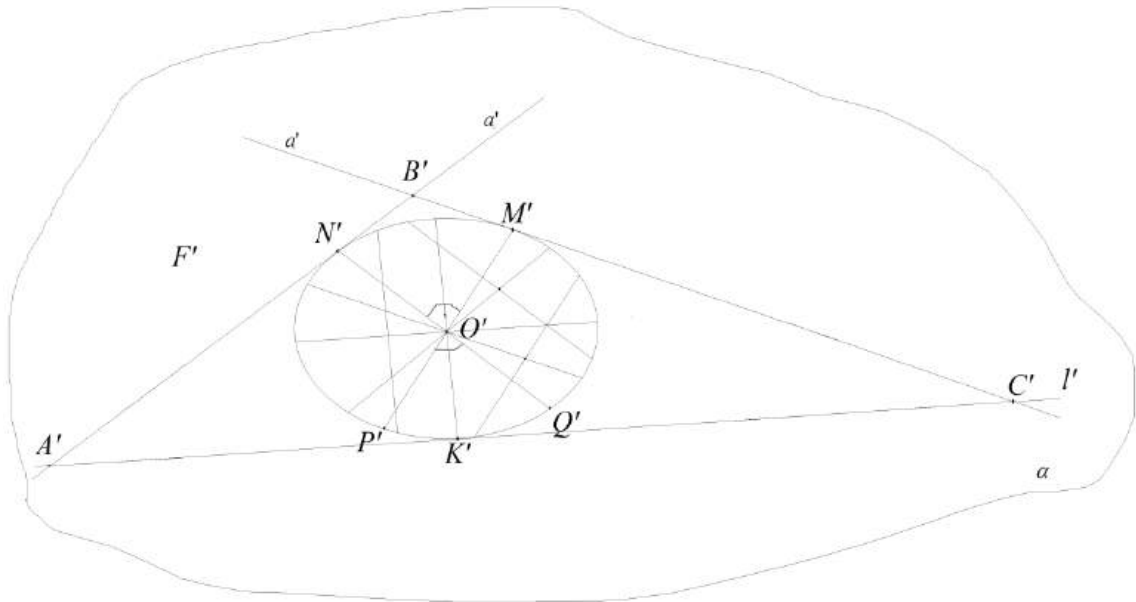


Рис. 207

$P'O'Q'$, вертикальний до кута $N'O'M'$. На дузі еліпса F' , що знаходиться всередині кута $P'O'Q'$, виберемо довільну точку K' . Проведемо через точку K' дотичну до еліпса F' пряму l' . $A' = a'_1 \cap l'$, $C' = a'_2 \cap l'$, трикутник $A'B'C'$ є шуканим.

Зрозуміло, що трикутник $A'B'C'$ на рис. 207 є зображенням якогось трикутника, описаного навколо кола F (за потреби, форму цього трикутника можна відновити однозначно), у загальному випадку не того трикутника ABC , який побудовано на рис. 206.

З технічної точки зору запропонований спосіб розв'язання задачі 10.12 є не дуже простим. В силу того, що при невиродженому для трикутника паралельному проєктуванні довільний трикутник і лише трикутник може бути зображенням трикутника, вимога

задачі 10.12 полягає у тому, щоб описати довільний трикутник навколо еліпса F' . Для цього, зручніше за все, спочатку вписати у еліпс F' довільний трикутник, а уже потім – описати навколо еліпса F' трикутник, подібний до вписаного (рис. 208).

1. Розглянемо заданий еліпс F' з центром у точці O' . Виберемо на ньому довільні точки A'_1, B'_1, C'_1 . Утвориться вписаний у еліпс F' трикутник $A'_1B'_1C'_1$.

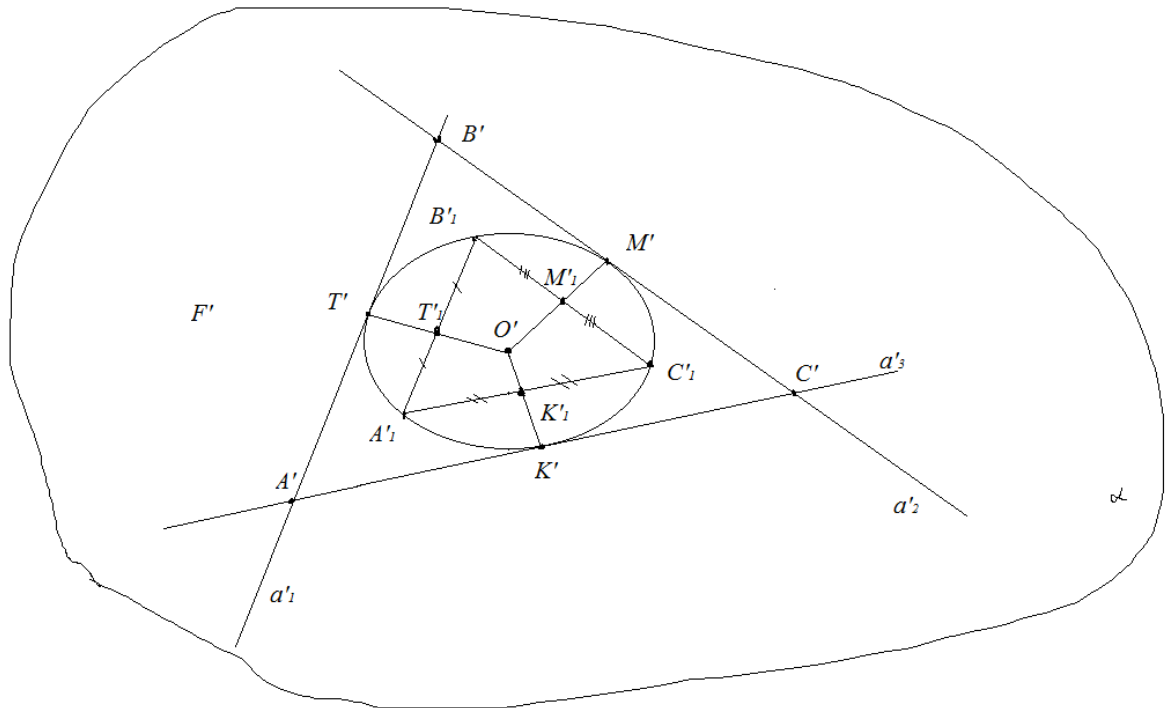


Рис. 208

2. Через відповідні середини T'_1, M'_1, K'_1 хорд $A'_1B'_1, B'_1C'_1, A'_1C'_1$ проведемо радіуси $O'T', O'M', O'K'$.

3. Через точку T' , паралельно до хорди $A'_1B'_1$, проведемо пряму a'_1 . Через точку M' , паралельно до хорди $B'_1C'_1$, проведемо пряму a'_2 . Через точку K' , паралельно до хорди $A'_1C'_1$, проведемо пряму a'_3 .

4. Позначимо $A' = a'_1 \cap a'_3, B' = a'_1 \cap a'_2, C' = a'_2 \cap a'_3$. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим трикутником, описаним навколо еліпса F' . ■

Задача 10.13. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і довільної форми трикутник ABC (не прямокутний і не рівнобедрений). Про еліпс F' відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала трикутника, подібного до заданого.*

Розв'язання. $\square$ В силу того, що форма заданого трикутника ABC є цілком довільною, розв'язання поставленої задачі вимагає

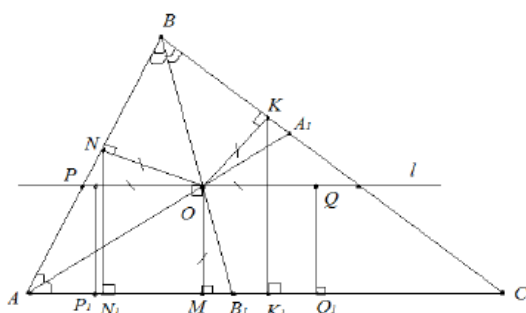


Рис. 209

явного використання трикутника-оригінала.

Проведемо у заданому трикутнику ABC бісектриси AA_1 і BB_1 . Точка O перетину цих бісектрис є центром кола F , вписаного у трикутник

ABC (рис. 209). Проведемо $OM \perp AC$, $ON \perp AB$, $OK \perp BC$. $OM = ON = OK = r$, де r – радіус вписаного у заданий трикутник кола F , точки M , N , K – точки дотику кола F , відповідно, до сторін AC , AB , BC трикутника ABC . Через точку O , перпендикулярно до радіуса OM , проведемо пряму l . Відкладемо на ній, по обидва боки від точки O , відрізки $OP = OQ = r$. Проведемо $PP_1 \perp AC$, $NN_1 \perp AC$, $KK_1 \perp AC$, $QQ_1 \perp AC$. Нехай, для визначеності, $NN_1 > PP_1$ і, одночасно, $KK_1 > QQ_1$. В силу того, що усі кола є подібними між собою, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, отриману фігуру для шуканого зображення можна прийняти за оригінал.

Виберемо на заданому еліпсі F' довільну точку M' . Згідно наслідка 5 з теореми 8.6, існує паралельне проєктування, при якому зображенням кола F є заданий еліпс F' , а зображенням точки M –

точка M' . Розглянемо діаметр $M'T$ еліпса F' . Використовуючи допоміжну хорду, побудуємо спряжений до нього діаметр $P'Q'$. Згідно властивостей паралельного проєктування можна вважати, що при застосованому законі зображення точка P' є зображенням точки P , точка Q' – зображенням точки Q (рис. 210). Через точку M' , паралельно до діаметра $P'Q'$, проведемо пряму l' . Вона буде дотичною до еліпса F' у точці M' , згідно наслідка 1 з теореми 8.6 – зображенням прямої AC при даному законі зображення. Паралельно до діаметра $M'T$ проведемо відрізки $P'P'_1$ і $Q'Q'_1$ до перетину з прямою l' , відповідно, у точках P'_1 і Q'_1 . Точка P'_1 є зображенням точки P_1 , точка Q'_1 – зображенням точки Q_1 . $M'P'_1 = M'Q'_1 = O'P'$.

Розглянемо довільний промінь MD , який не належить прямій l' . Послідовно відкладаємо на цьому промені відрізки $M'N_2$, N_2P_2 , P_2A_2 , $M'N_2 = MN_1$, $N_2P_2 = N_1P_1$, $P_2A_2 = P_1A$. Паралельно до прямої $P_2P'_1$ проведемо прямі $N_2N'_1$ і A_2A' до перетину з прямою l' , відповідно, у точках N'_1 і A' . Згідно теореми Фалеса і властивостей зображень фігур за методом паралельного проєктування, точка A' є зображенням точки A , точка N'_1 – зображенням точки N_1 . Через точку N'_1 , паралельно до діаметра $M'T$, проведемо пряму $N'_1N'_1$ до перетину з еліпсом F' у точці N' , при цьому правильною буде нерівність $N'_1N' > P'_1P'$ ($N_1N > P_1P$, при зображенні фігур за методом паралельного проєктування зберігається відношення довжин відрізків, які належать паралельним прямим). Через точки A' і N' проведемо пряму a_1 . Згідно застосованого закону зображення пряма a_1 є зображенням прямої AN .

Розглянемо довільний промінь ME , який не належить прямій l' .

(Теоретично, це може бути і промінь $M'D$, але, з технічної точки зору, це не дуже зручно). Послідовно відкладемо на промені $M'E$ відрізки $M'K_2 = MK_1$, $K_2Q_2 = K_1Q_1$, $Q_2C_2 = Q_1C_1$. Паралельно до прямої $Q_2Q'_1$,

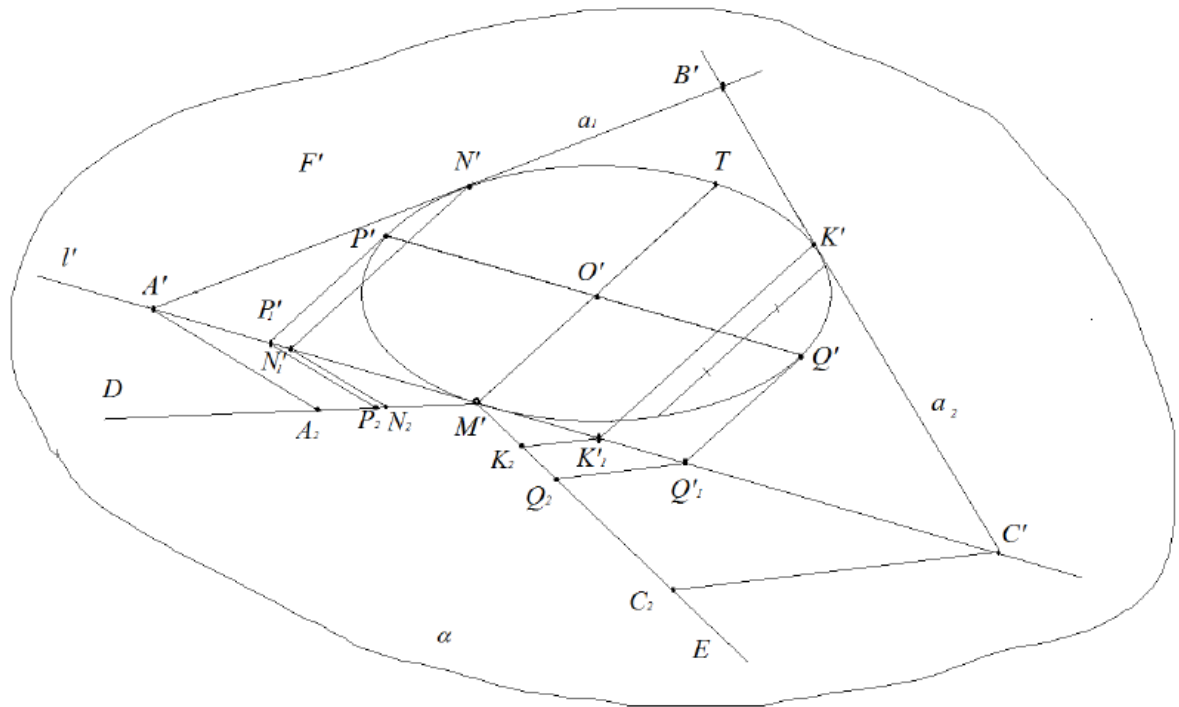


Рис. 210

проведемо прямі $K_2K'_1$ і C_2C' до перетину з прямою l' , відповідно, у точках K'_1 і C' . Згідно теореми Фалеса і властивостей зображень фігур за методом паралельного проєктування, при застосованому законі зображення точка K'_1 є зображення точки K_1 , точка C' – зображення точки C . Через точку K'_1 , паралельно до діаметра $M'T$, проведемо пряму K_1K' до перетину з еліпсом F' у такій точці K' , що $K_1K' > Q'_1Q'$. Через точки K' і C' проведемо пряму a_2 , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням прямої CK . Позначимо через B' точку перетину прямих a_1 і a_2 . Згідно застосованого закону зображення точка B' є зображенням точки B . Трикутник $A'B'C'$ є шуканим (рис. 210). ■

Задача 10.14 *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення довільного ромба, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. $\square$ Відомо, що навколо кола можна описати паралелограм (або коло можна вписати у паралелограм) тоді та тільки тоді, коли цей паралелограм є ромбом. За теоремою 7.1, довільний паралелограм і лише паралелограм може бути зображенням ромба при невідроджену для даного ромба паралельному проєктуванні. За теоремою 8.3, навколо кожного еліпса можна описати паралелограм. Під час доведення теореми 8.3 було вказано конкретний спосіб побудови подібного паралелограма. Такий паралелограм і буде, згідно застосованого закону зображення, шуканим зображенням ромба, описаного навколо кола-оригінала. $\blacksquare$

Задача 10.15. *Задано еліпс F' з центром у точці O' і певний ромб $ABCD$. Про еліпс F' відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала ромба, подібного до заданого.*

Розв'язання. $\square$ Оскільки форма заданого ромба $ABCD$ не є визначеною, уникнути безпосереднього використання оригіналу при розв'язанні даної задачі неможливо.

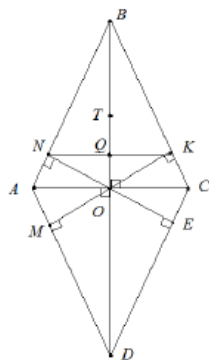


Рис. 211

Розглянемо заданий ромб $ABCD$. Його діагоналі AC і BD , як відомо, є взаємно перпендикулярними (рис. 211). Позначимо через O точку їх перетину, $AO=OC$, $BO=OD$, точка O є центром вписаного у ромб $ABCD$ кола. Проведемо $ON \perp AB$,

$OK \perp BC$. Пряма ON перетинає сторону CD у точці E , пряма OK перетинає сторону AD у точці M , $OE \perp CD$, $OM \perp AD$, $ON = OK = OE = OM$, ці відрізки є радіусами вписаного у ромб $ABCD$ кола, $NK \parallel AC$. На промені OB відкладемо відрізок $OT = ON$.

Усі кола є подібними між собою. Отже, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, коло, вписане у ромб $ABCD$, при застосованому законі зображення можна вважати оригіналом F для еліпса F' . Тоді точка O' є зображенням саме точки O , ромб $ABCD$ для шуканого зображення є оригіналом.

Виберемо у еліпсі F' довільний діаметр $T'H'$. Побудуємо спряжений до нього діаметр $P'L'$. Згідно наслідка 8 з теореми 8.6, при застосованому законі зображення прямі $H'T'$ і $P'L'$ можна вважати зображеннями прямих BD і AC (рис. 212).

Проведемо довільний промінь $O'G$, який не належить прямій

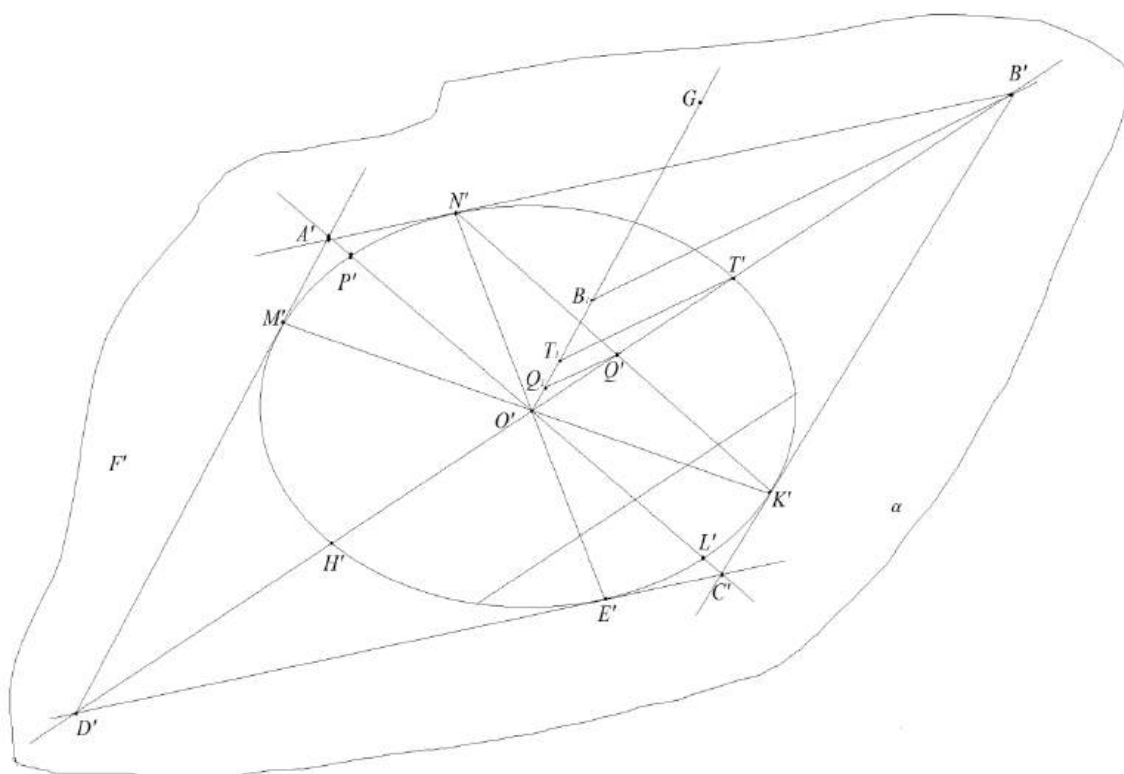


Рис. 212

$H'T'$. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $O'Q_1$, Q_1T_1 , T_1B_1 , $O'Q_1 = OQ$, $Q_1T_1 = QT$, $T_1B_1 = TB$. Паралельно до прямої T_1T' , проведемо пряму Q_1Q' до перетину з променем $O'T'$ у точці Q' . Паралельно до прямої T_1T' , проведемо пряму B_1B' до перетину з променем $O'T'$ у точці B' . Згідно застосованого закону зображення, точка Q' є зображенням точки Q , точка B' – зображенням точки B . Через точку Q' , паралельно до діаметра $P'L'$, проведемо хорду $N'K'$ еліпса F' . Точка N' є зображенням точки N , точка K' – зображенням точки K . Проведемо пряму $B'N'$ до перетину з прямою $P'L'$ у точці A' . Точка A' є зображенням точки A . Проведемо пряму $B'K'$ до перетину з прямою $P'L'$ у точці C' . Точка C' є зображенням точки C . Проведемо діаметри $N'E'$ і $K'M'$ еліпса F' . Точка E' є зображенням точки E , точка M' – зображенням точки M . Прямі $A'M'$ і $C'E'$ перетнуться у точці D' на прямій $H'T'$. Точка D' є зображенням точки D . Згідно застосованого закону зображення, паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням ромба $ABCD$ (рис. 212). ■

Задача 10.16. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєкування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола оригінала ромба з кутом у 60° .*

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O' . Але усі ромби з кутом у 60° є подібними між собою. Отже, будь-який з таких ромбів можна прийняти за оригінал шуканого зображення і розв'язати задачу 10.16 тим же способом, що й задачу 10.15. Але задачу 10.16 можна розв'язати і без явного використання оригінала.

Оскільки усі кола є подібними між собою, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, довільне з них можна обрати у якості оригінала F еліпса F' . Отже, дослідимо, спочатку, питання про те, як ромб з кутом у 60° можна описати навколо довільного кола F . Зауважимо, що, оскільки усі сторони ромба є рівними між собою, менша діагональ даного ромба

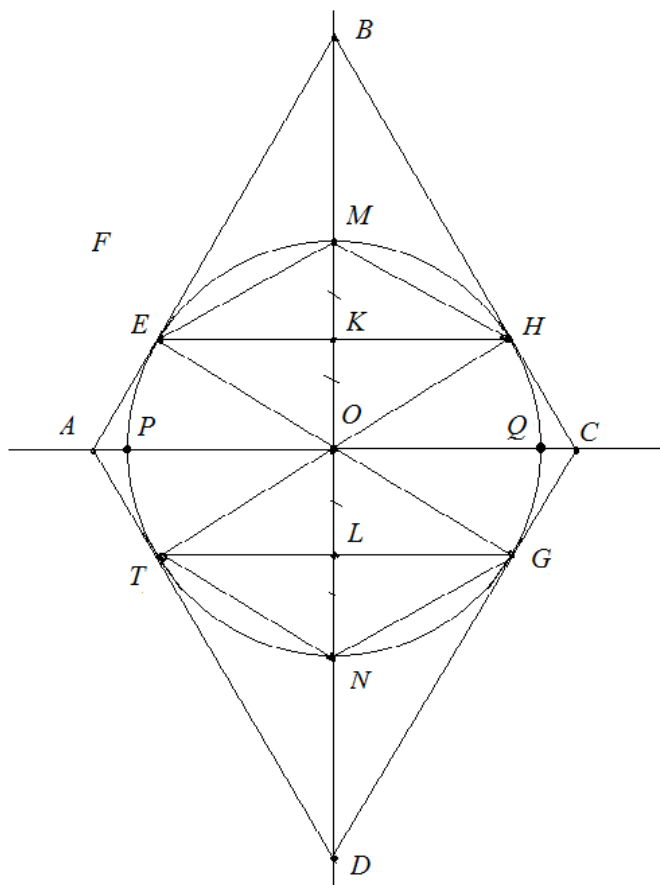


Рис. 213

ділить його на два рівних рівносторонніх трикутника. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ . Через середину K радіуса OM і через середину L радіуса ON , паралельно до діаметра PQ , проведемо, відповідно, хорди EH і TG (рис. 213). На промені, доповняльному до променя MO , відкладемо відрізок $BM = OM$. Проведемо промені BE і BH до перетину з прямою

PQ , відповідно, у точках A і C . Промені AT і CG перетнуться у точці D , яка належить прямій MN . Чотирикутник $ABCD$ і буде описаним навколо кола F ромбом, у якого $\angle ABC = 60^\circ$.

Насправді, з того, що $EH \parallel PQ$ випливає, що $EH \perp OM$. Але радіус кола, перпендикулярний до хорди цього кола, ділить цю хорду навпіл. Тоді відрізок BK , одночасно, є висотою і медіаною

трикутника EBH , трикутник EBH є рівнобедреним, $EB=BH$, $\angle EBK=\angle KBH$.

У чотирикутнику $OEMH$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл і є взаємно перпендикулярними. Отже, це ромб. Але тоді $OE=EM=MH=HO=r$, де r – радіус кола F . І, одночасно, $OM=OE=r$. Тому трикутники OEM і OHM є рівносторонніми, $\angle EMO=\angle HMO=60^\circ$. $\angle EMO$ є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника EMB , $\angle BEM=\angle EBM=\frac{1}{2}\angle EMO=30^\circ$.

Але тоді $\angle EBH=2\cdot\angle EBM=60^\circ$, рівнобедрений трикутник EBH є рівностороннім, $\angle HEB=60^\circ$. З іншого боку, відрізок EK є медіаною рівностороннього трикутника OEM , а тому і його бісектрисою,

$$\angle OEK=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ, \quad \angle OEB=\angle OEK+\angle KEB=30^\circ+60^\circ=90^\circ,$$

$OE\perp AB$, відрізок AB дотикається кола F у точці E . Трикутник ONB дорівнює трикутнику OEB за трьома сторонами. Це означає, що $\angle ONB=90^\circ$, $ON\perp BC$, відрізок BC дотикається кола F у точці H . Трикутник ABC є рівнобедреним, бо в ньому відрізок BO одночасно є бісектрисою і висотою. Але $\angle ABC=60^\circ$, отже, це рівносторонній трикутник, сторони AB і BC якого дотикаються кола F .

Чотирикутник $OTNG$ є ромбом, який дорівнює ромбу $OEMH$, $\angle TON=\angle NOG=60^\circ$. Але тоді $\angle QOG=90^\circ-\angle NOG=30^\circ$, $\angle POT=90^\circ-\angle TON=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. І, одночасно, правильними є рівності: $\angle POE=90^\circ-\angle MOE=30^\circ$, $\angle QOH=90^\circ-\angle MOH=30^\circ$. У цьому випадку трикутники AOE , AOT , COH , COG є рівними за двома сторонами і кутом між ними, $\angle OTA=\angle OEA=90^\circ$,

$\angle OGC = \angle OHC = 90^\circ$, $AD \perp OT$, $CD \perp OG$, усі чотири сторони AB , BC , CD і AD , чотирикутника $ABCD$ дотикаються кола F .
 $\angle OAD \equiv \angle OAT = \angle OAE = 60^\circ$, $\angle OCD \equiv \angle OCG = \angle OCH = 60^\circ$.
 Отже, трикутник ADC є рівнобедреним і, навіть, рівностороннім. $AD = DC$. Останнє означає, що точка D лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AC , тобто, на прямій MN .

Трикутник ABC дорівнює трикутнику ADC - це рівносторонні трикутники, що мають спільну сторону AC . Звідси випливає, що рівними між собою є усі сторони чотирикутника $ABCD$, він є шуканим ромбом, описаним навколо кола F .

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' без явного використання оригінала.

1. Будуємо для еліпса F' з центром у точці O' пару спряжених

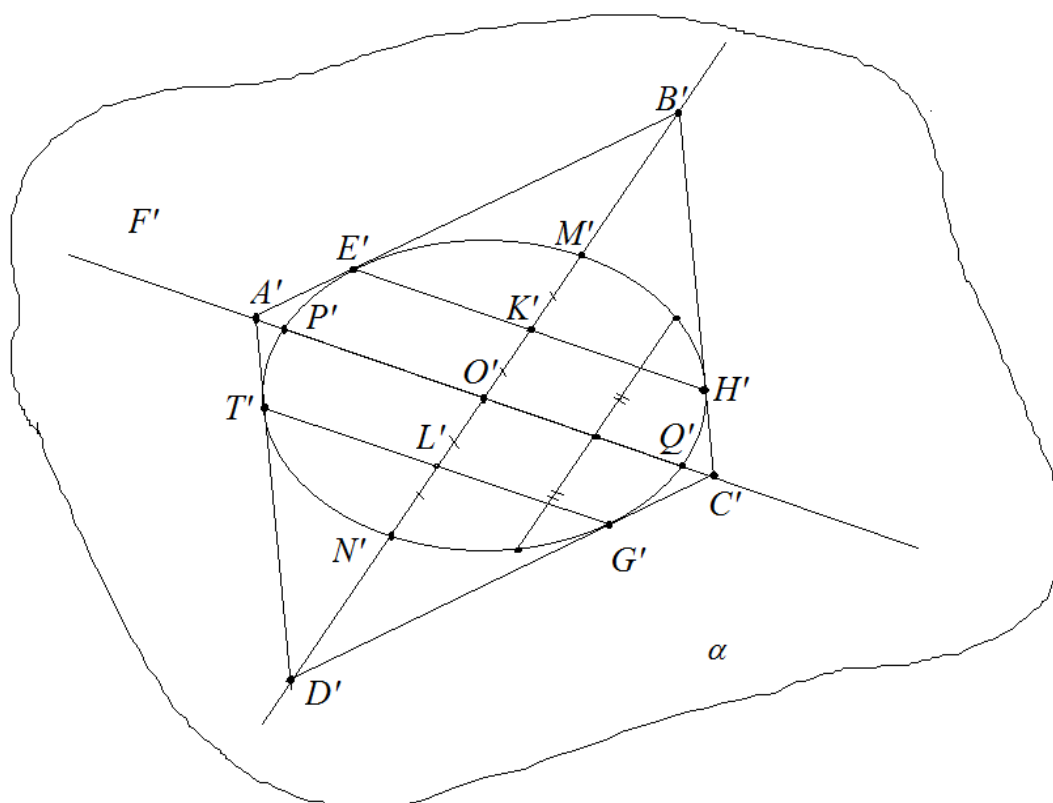


Рис. 214

діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$.

2. Через середину K' радіуса $O'M'$, паралельно до діаметра $P'Q'$, проводимо хорду $E'H'$. Через середину L' радіуса $O'N'$, паралельно до діаметра $P'Q'$, проводимо хорду $T'G'$.

3. На промені, доповняльному до променя $M'O'$, відкладаємо відрізок $M'B' = O'M'$.

4. Проводимо прямі $B'E'$ і $B'H'$, позначаємо, відповідно, через A' і C' точки їх перетину з прямою $P'Q'$.

5. Проводимо прямі $A'T'$ і $C'G'$, позначимо через D' точку їх перетину. Чотирикутник (паралелограм) $A'B'C'D'$ є шуканим (рис. 214). ■

Задача 10.17. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєкування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола оригінала ромба з кутом у 45° .*

Розв'язання. □ Як і у попередній задачі, у задачі 10.17 задано лише еліпс F' з центром у точці O' , умови задачі дозволяють побудувати оригінал з точністю до перетворення подібності і розв'язати дану задачу за зразком розв'язання задачі 10.15. Одночасно, однозначна визначеність умовами даної задачі форми оригінала, так само, як і у попередній задачі, дозволяє знайти такий спосіб її розв'язання, який не вимагає безпосереднього використання оригінала.

Дослідимо, спочатку, питання про те, як шуканий ромб можна описати навколо кола. Розглянемо довільне коло F з центром у точці O . Побудуємо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ . Трикутник MOQ є прямокутним рівнобедреним трикутником, $\angle OMQ = 45^\circ$ (рис. 215). Поставимо перед собою задачу описати нав-

коло кола F ромб, суміжні сторони якого, відповідно, є паралельними до прямих MN і MQ . За необхідністю, такий ромб буде шуканим.

Паралельно до діаметра MN , через точку P проведемо пряму a_1 , через точку Q – пряму a_2 . Ці прямі будуть дотикатися кола F , відповідно, у точках P і Q . Через середину K хорди MQ проведемо діаметр TH . За відомою теоремою евклідової геометрії, $TH \perp MQ$.

Паралельно до хорди MQ , через точку H проведемо пряму b_1 , через точку T – пряму b_2 . Зрозуміло, що $TH \perp b_1$, $TH \perp b_2$, прямі b_1 і b_2 є дотичними до кола F , відповідно, у точках H і T . Введемо такі позначення: $A = a_1 \cap b_2$, $B = a_1 \cap b_1$, $C = a_2 \cap b_1$, $D = a_2 \cap b_2$. Чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, описаним навколо кола F , $\angle ABC = \angle NMQ = 45^\circ$ як гострі

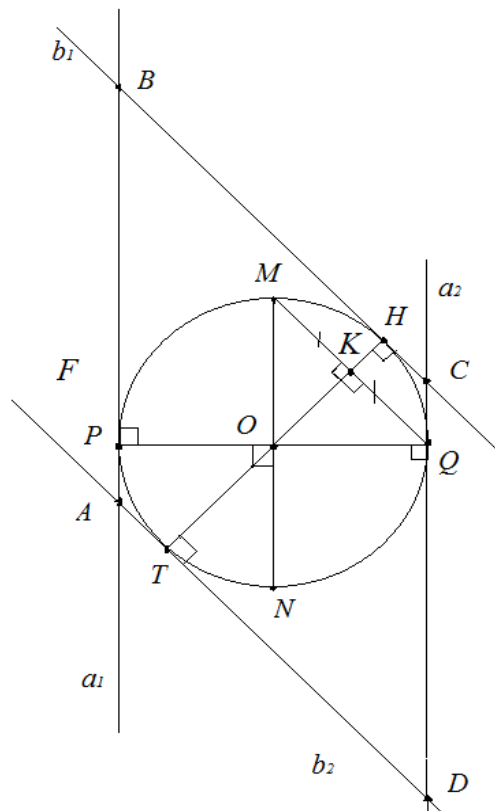


Рис. 215

кути з відповідно паралельними сторонами, тобто, чотирикутник $ABCD$ є шуканим ромбом.

Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' .

1. Будуємо для еліпса F' пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$ (рис. 216).

2. Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку P' проводимо пряму a'_1 , через точку Q' – пряму a'_2 .

3. Через середину K' хорди $M'Q'$ проводимо діаметр $T'H'$.

4. Паралельно до хорди $M'Q'$, через точку H' проводимо пряму b'_1 , через точку T' – пряму b'_2 .

5. Позначаємо $A' = a'_1 \cap b'_2$, $B' = a'_1 \cap b'_1$, $C' = a'_2 \cap b'_1$, $D' = a'_2 \cap b'_2$.

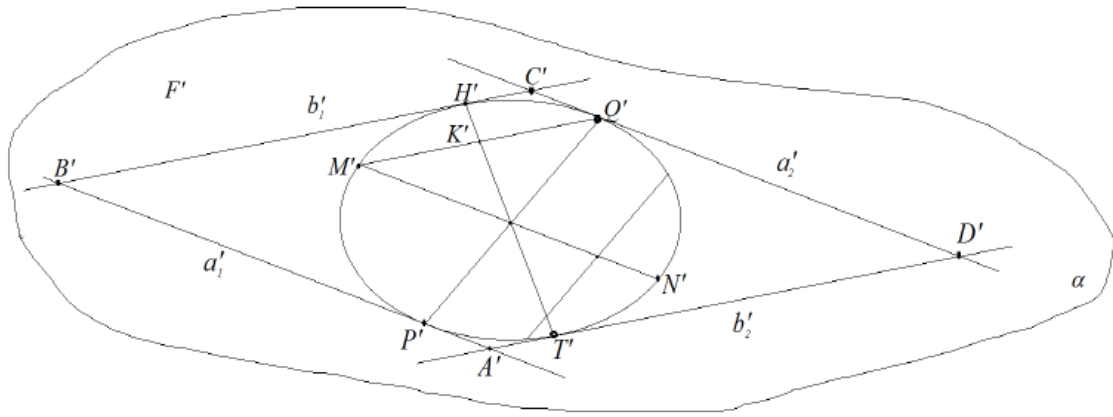


Рис. 216

Чотирикутник (паралелограм) $A'B'C'D'$ є шуканим (рис. 216). ■

Задача 10.18. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення якої-небудь прямокутної трапеції, описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ По-перше, дослідимо питання про те, як прямокутну трапецію можна описати навколо кола. Треба пам'ятати, що не у будь-яку трапецію можна вписати коло, у трапецію можна вписати коло тоді та тільки тоді, коли сума довжин основ цієї трапеції дорівнює сумі довжин її бічних сторін ([14], наприклад). Тому, на відміну, припустимо, від задачі 10.15, технічно зручніше починати пошуки шляхів розв'язання поставленої задачі не з побудови відповідної трапеції, а з побудови кола.

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O (рис. 217). Проведемо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ . Паралельно до діаметра PQ , через точки M і N проведемо, відпо-

відно, прямі a_1 і a_2 . Пряма a_1 буде дотикатися кола F у точці M , пряма a_2 – у точці N . Паралельно до діаметра MN , через точку P проведемо пряму b_1 . Ця пряма буде дотикатися кола F у точці P . Зрозуміло, що $b_1 \perp a_1$, $b_1 \perp a_2$. Позначимо через A точку перетину прямих b_1 і a_2 , через B – точку перетину прямих b_1 і a_1 . Якщо відрізок AB прийняти за бічну сторону шуканої трапеції, то основи такої трапеції будуть належати променям BM і AN , відповідно, прямих a_1 і a_2 . За умови даної задачі треба побудувати довільну прямокутну трапецію, описану навколо ко-

ла F . Отже, для знаходження тієї бічної сторони шуканої трапеції, що не є перпендикулярною до її основ, достатньо довільним чином на дугі M_QN кола F

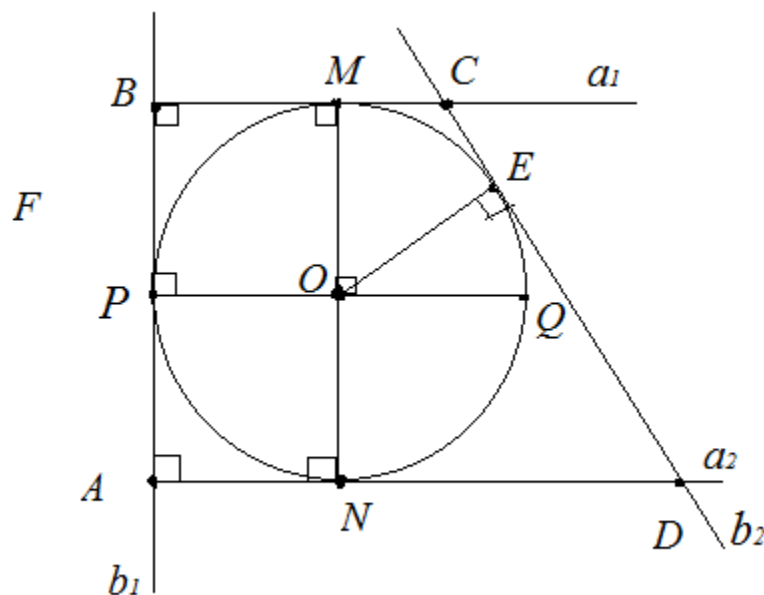


Рис. 217

обрати точку доти-

ку E цієї сторони до кола F . Не можна тільки у якості точки E обирати точку Q , бо утвориться квадрат, а не прямокутна трапеція. Далі треба провести радіус OE , через точку E – пряму b_2 , перпендикулярну до прямої OE . Нехай $C = a_1 \cap b_2$, $D = a_2 \cap b_2$. Трапеція $ABCD$ є шуканою.

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєкування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' .

Оскільки мова йде про побудову зображення довільної прямокутної трапеції, використання оригінала для цього не є потрібним.

1. У заданому еліпсі F' з центром у точці O' будуємо пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$ (рис. 218).
2. Паралельно до діаметра $P'Q'$, через точку M' проводимо

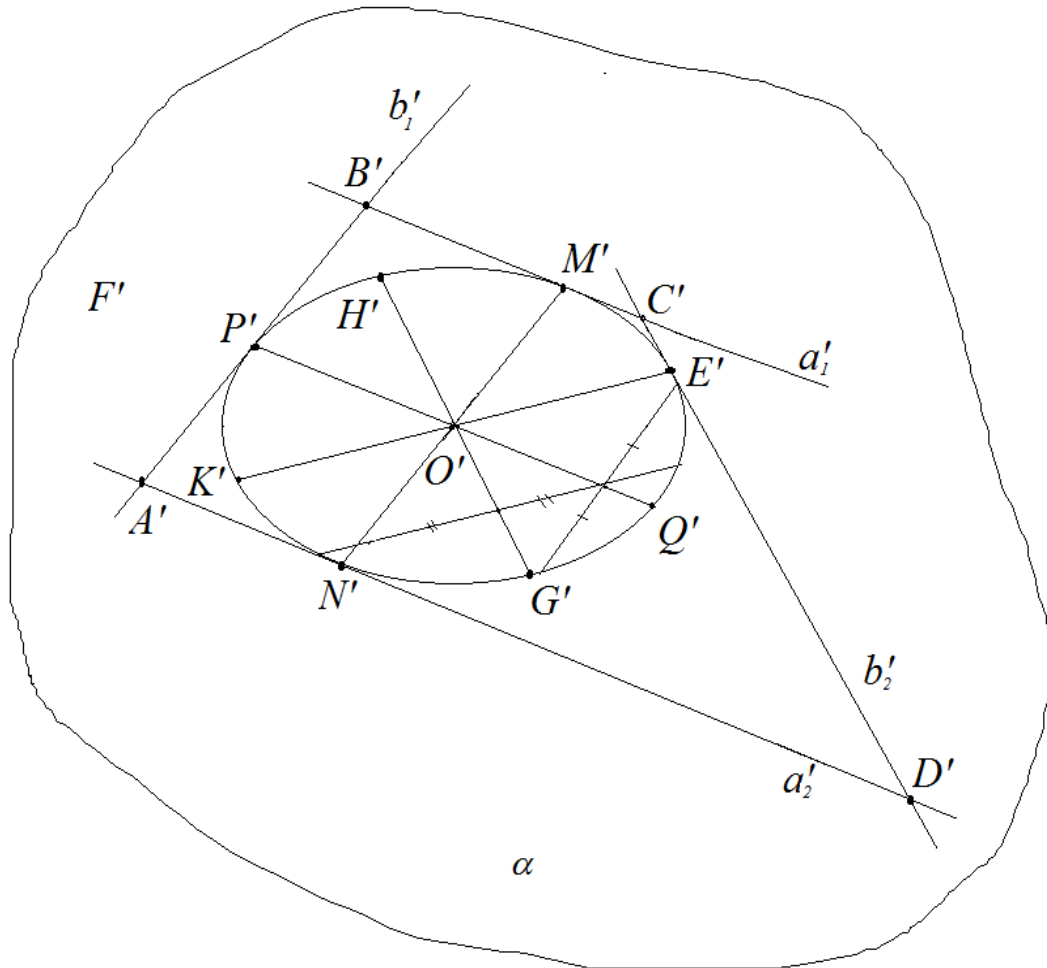


Рис. 218

пряму a'_1 , через точку N' – пряму a'_2 . Пряма a'_1 буде дотикатися еліпса F' у точці M' , пряма a'_2 буде дотикатися еліпса F' у точці N' .

3. Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку P' проводимо пряму b'_1 . Пряма b'_1 буде дотикатися еліпса F' у точці P' .

4. На дузі $M'Q'$ еліпса F' обираємо довільну точку E' , відмінну від точки Q' . Проводимо діаметр $E'K'$. Будуємо спряжений до нього

діаметр $H'G'$.

5. Через точку E' , паралельно до діаметра $H'G'$, проводимо пряму b'_2 . Пряма b'_2 буде дотикатися еліпса F' у точці E' .

6. Позначаємо: $A' = a'_2 \cap b'_1$, $B' = a'_1 \cap b'_1$, $C' = a'_1 \cap b'_2$, $D' = a'_2 \cap b'_2$. Чотирикутник $A'B'C'D'$ є трапецією, шуканою трапецією, описаною навколо еліпса F' . ■

Задача 10.19. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням за методом паралельного проєктування кола F з центром у точці O , вписаного у задану прямокутну трапецію $ABCD$. Побудуйте зображення цієї трапеції згідно застосованого закону зображення.

Розв'язання. □ За умови задачі задано певну прямокутну трапецію $ABCD$, описану навколо кола F з центром у точці O , і еліпс F' з центром у точці O' (рис. 219 (а, б)). Форму трапеції $ABCD$ визначено лише її заданням на рис. 219 (а). Отже, уникнути безпосереднього використання оригінала при розв'язанні даної задачі неможливо.

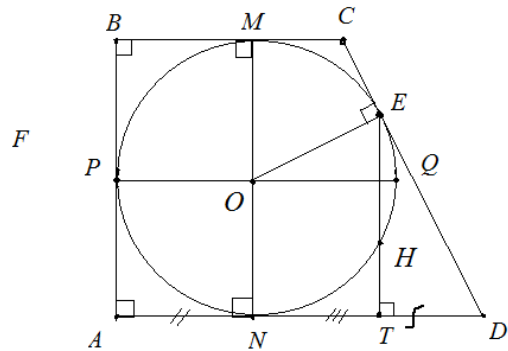


Рис. 219 (а)

Проведемо у колі F діаметр MN , перпендикулярний до основ BC і AD описаної трапеції $ABCD$, і перпендикулярний до нього діаметр PQ . Якщо відрізок AB є бічною стороною заданої трапеції, перпендикулярною до її основ, то $PQ \perp AB$. Нехай бічна сторона CD трапеції $ABCD$ дотикається кола F у точці E . Точка E належить дузі M_QN кола F , але не співпадає з точкою Q . Проведемо $ET \perp AD$. Якщо відрізок AD є більшою основою трапеції $ABCD$ (рис. 218 (а)), то точка T є внутрішньою точкою відрізка ND , пряма

TE , як січна кола F , перетинає його ще й у точці H , яка належить відріzkу TE .

Побудуємо для заданого еліпса F' пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно наслідка 1 з теореми 8.6, при даному законі зображення побудовані діаметри $M'N'$ і $P'Q'$ еліпса F' є зображеннями певних взаємно перпендикулярних діаметрів M_1N_1 і P_1Q_1 кола F так, що точка M' є зображенням точки M_1 , точка P' – зображенням точки P_1 . З іншого боку, у колі F побудовано взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ . Очевидно, існує такий рух g евклідового простору, згідно якого $g(F)=F$, $g(MN)=M_1N_1$, $g(M)=M_1$, $g(PQ)=P_1Q_1$, $g(P)=P_1$. Кожний рух евклідового простору є тривіальним прикладом перетворення подібності цього простору. Отже, у відповідності до наслідка 2 з теореми 3.1, для побудови шуканого зображення можна вважати, що діаметр $M'N'$ є зображенням діаметра MN так, що точка M' є зображенням точки M , спряжений до нього діаметр $P'Q'$ є зображенням діаметра PQ так, що точка P' є зображенням точки P .

Паралельно до діаметра $P'Q'$, через точки M' і N' проведемо, в відповідно, прямі a'_1 і a'_2 . Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку P' проведемо пряму b'_1 . Нехай $A'=a'_2 \cap b'_1$, $B'=a'_1 \cap b'_1$. Згідно властивостей зображення фігур за методом паралельного проєктування, при даному законі зображення точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Проведемо довільний промінь $A'L$ з початком у точці A' , який не належить прямій a'_2 . Послідовно відкладемо на цьому промені відрізки $A'N_1=AN$, $N_1T_1=NT$, $T_1D_1=TD$. Паралельно до прямої $N_1N'_1$ проведемо прямі $T_1T'_1$ і $D_1D'_1$ до перетину з

прямою, відповідно, у точках T' і D' . За властивостями паралельного проєктування, при застосованому законі зображення точка T' є зображенням точки T , точка D' – зображенням точки D . Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку T' проведемо пряму l . Пряма l є зображенням прямої TE . Пряма l буде січною для еліпса F' , перетне його у двох точках: H' і E' . Нехай точка H' лежить між точками T' і E' . Це означає, що точка E' є зображенням точки E , точка H' – зображенням точки H , бо для кола F саме точка H лежить між точками E і

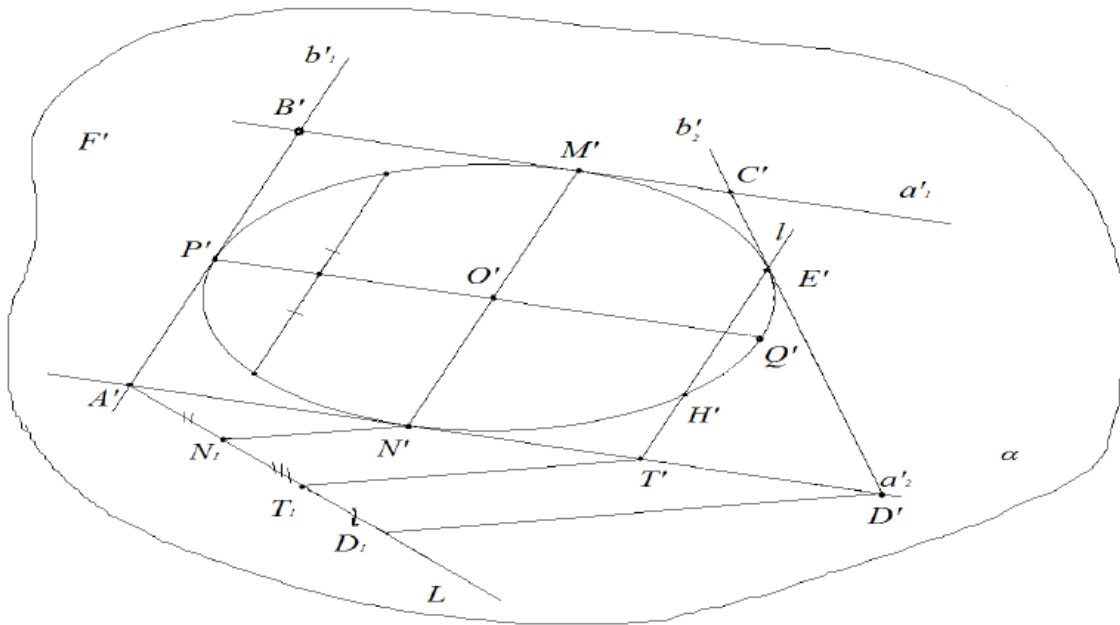


Рис. 219 (б)

T . Через точки D' і E' проведемо пряму b'_2 до перетину з прямою a'_1 у точці C' . Точка C' є зображенням точки C . Отже, чотирикутник $A'B'C'D'$, згідно застосованого закону зображення, є зображенням трапеції $ABCD$ і, у підсумку, він є чотирикутником, точніше, трапецією, шуканою (рис. 219 (б)). ■

Задача 10.20. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутної трапеції з кутом у 30° , описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. $\square$ Умови задачі 10.20 однозначно визначають форму трапеції-оригінала (можна довести, що усі прямокутні трапеції, які мають кут у 30° , і які можна описати навколо кола, є подібними між собою).

Дослідимо, спочатку, питання про те, як подібну трапецію можна описати навколо кола F . Проведемо у колі F з центром у точці O

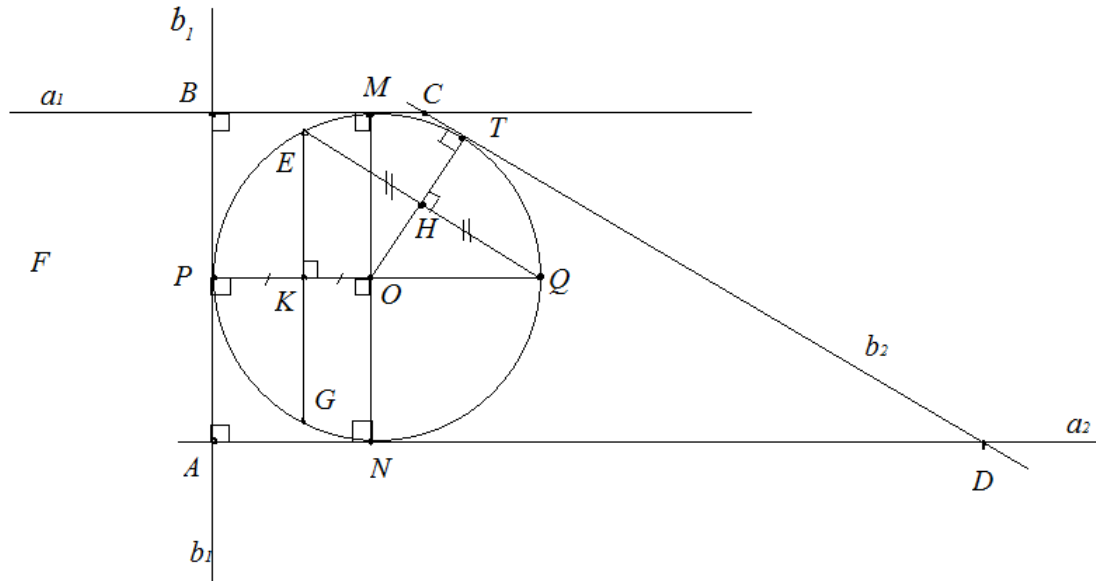


Рис. 220

взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ (рис. 220). Паралельно до діаметра PQ , через точки M і N проведемо, відповідно, прямі a_1 і a_2 . Паралельно до діаметра MN через точку P проведемо пряму b_1 . Нехай $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$. Паралельно до діаметра MN , через середину K радіуса OP , проведемо хорду EG . Доведено (наприклад, при розв'язанні задачі 10.3), що $\angle EQP = 30^\circ$. Через середину H хорди EQ проведемо радіус OT . Паралельно до хорди EQ , через точку T проведемо пряму b_2 . Нехай $C = a_1 \cap b_2$, $D = a_2 \cap b_2$. Чотирикутник $ABCD$ є прямокутною трапецією ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$), описаною навколо кола F . $\angle CDA = \angle EQP$, як гострі кути з відповідно паралеле-

льними сторонами. Отже, $\angle CDA = 30^\circ$, трапецію $ABCD$, разом з колом F , можна прийняти за оригінал шуканого зображення (згідно наслідка 2 з теореми 3.1). Тепер задачу 10.20 можна розв'язати тим же способом, що й задачу 10.19. Але властивості зображень геометричних фігур за методом паралельного проєктування для заданого еліпса F' дозволяють наступним чином виконати усі побудови, аналогічні до проведених на рис. 218 для кола F , і розв'язати задачу 10.20 за виключенням використання оригінала у явному вигляді.

1. У заданому еліпсі F' з центром у точці O' будуюмо пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$ (рис. 221).

2. Паралельно до діаметра $P'Q'$, через точки M' і N' проводимо,

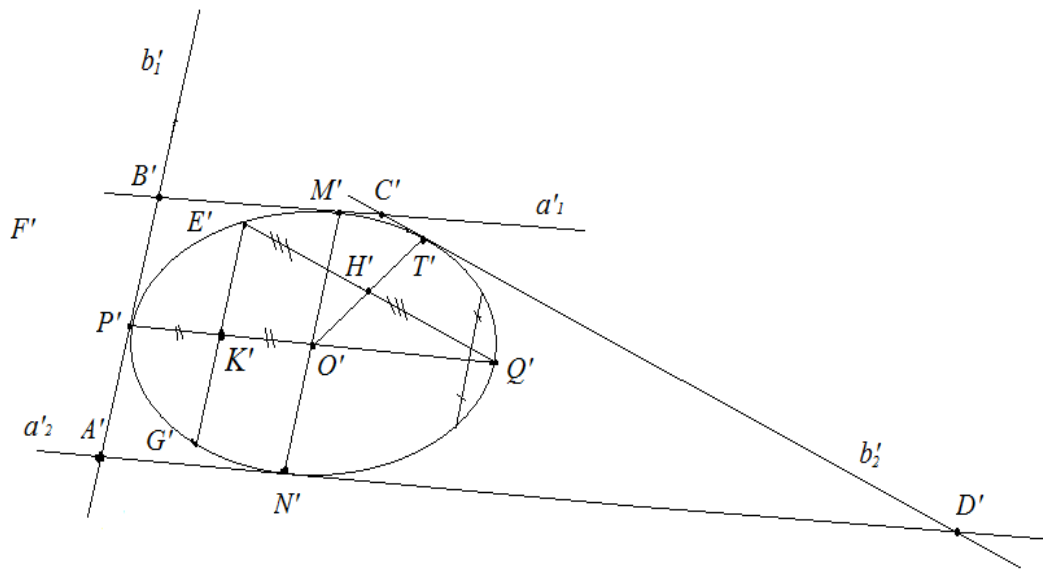


Рис. 221

відповідно, прямі a'_1 і a'_2 . Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку P' проводимо пряму b'_1 . Позначаємо через A' точку перетину прямих a'_2 і b'_1 , через B' – точку перетину прямих a'_1 і b'_1 .

3. Паралельно до діаметра $M'N'$ через середину K' радіуса $O'P'$ проводимо хорду $E'G'$.

4. Через середину H' хорди $E'Q'$ проводимо радіус $O'T'$.

5. Через точку T' , паралельно до хорди $E'Q'$, проводимо пряму b'_2 . Позначаємо через C' точку перетину прямих a'_1 і b'_2 , через D' – точку перетину прямих a'_2 і b'_2 .

Трапеція $A'B'C'D'$ є шуканою. ■

Задача 10.21. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення якої-небудь рівнобічної трапеції, описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ Дослідимо, спочатку, питання про те, як рівнобічну трапецію можна описати навколо кола. У курсі евклідової геометрії доведено, що, якщо рівнобічну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) описано навколо кола F , то хорда кола F , яка сполучає точки M і N дотику кола F , відповідно, до основ BC і AD даної трапеції, є діаметром кола F (зрозуміло, перпендикулярним до BC і AD), точки M і N є, відповідно, серединами основ трапеції $ABCD$ ($BM = MC$,

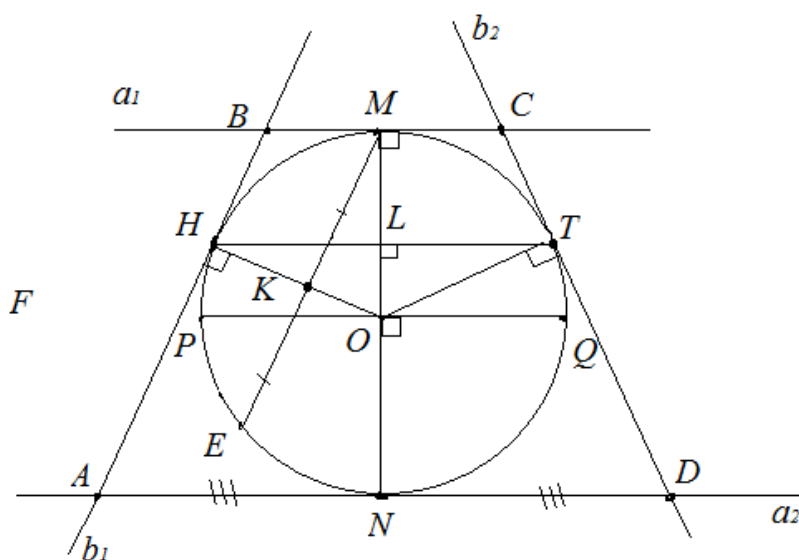


Рис. 222

$AN = ND$), точки H і T дотику кола F , відповідно, до бічних сторін AB і CD є взаємно симетричними точками відносно прямої MN ($HT \perp MN$, $HT \cap MN = L$, $HL = LT$) (рис. 222).

Звідси випливає простий спосіб побудови довільної рівнобічної трапеції, описаної навколо кола F .

Треба провести діаметр MN кола F , обрати на ньому довільну точку L , відмінну від точки O (інакше, утвориться квадрат, а не трапеція), через точку L , перпендикулярно до діаметра MN , провести хорду HT , у точках H і T , відповідно, провести дотичні до кола F прямі b_1 і b_2 , ($b_1 \perp OH$; $b_2 \perp OT$), у точках M і N , відповідно, провести дотичні до кола F прямі a_1 і a_2 ($a_1 \perp MN$, $a_2 \perp MN$, $a_1 \parallel a_2 \parallel HT$). Нехай $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$, $C = a_1 \cap b_2$, $D = a_2 \cap b_2$. $ABCD$ – трапеція, описана навколо кола F , неважко обґрунтувати, що саме рівнобічна трапеція ($AB = CD$). Форма описаної трапеції $ABCD$ повністю визначається місцеположенням точки L на діаметрі MN (точка L не співпадає з точкою O).

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєкування дозволяють виконати аналогічні побудови для заданого еліпса F' за виключенням явного використання оригінала.

Одночасно, з технічної точки зору, особливо стосовно виконання аналогічних побудов для еліпса, простішим (вимагає меншої кількості кроків побудов) виявляється трішки інший шлях знаходження рівнобічної трапеції $ABCD$, описаної навколо кола F (рис. 222).

Можна у колі F з центром у точці O провести взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ . Паралельно до діаметра PQ , через точку M провести пряму a_1 , через точку N – пряму a_2 . Обрати довільну, відмінну від точки P , точку E на дузі $M_P N$ кола F . Через середину K хорди ME провести радіус OH . Через точку H , паралельно до хорди ME , провести пряму b_1 . Позначити $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$. На промені, доповняльному до променя NA , відкласти відрізок ND , який дорівнює відрізку NA . На промені, доповняльному до променя MB ,

відкласти відрізок MC , який дорівнює відрізку MB . Неважко обґрунтувати, що чотирикутник $ABCD$ буде шуканою рівнобічною трапецією.

Виконаємо побудови, аналогічні до запропонованих другим варіантом побудов, для еліпса F' (рис. 223).

1. Проведемо у еліпсі F' з центром у точці O' пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$.

2. Паралельно до діаметра $P'Q'$, через точку M' проведемо пряму a'_1 , через точку N' – пряму a'_2 .

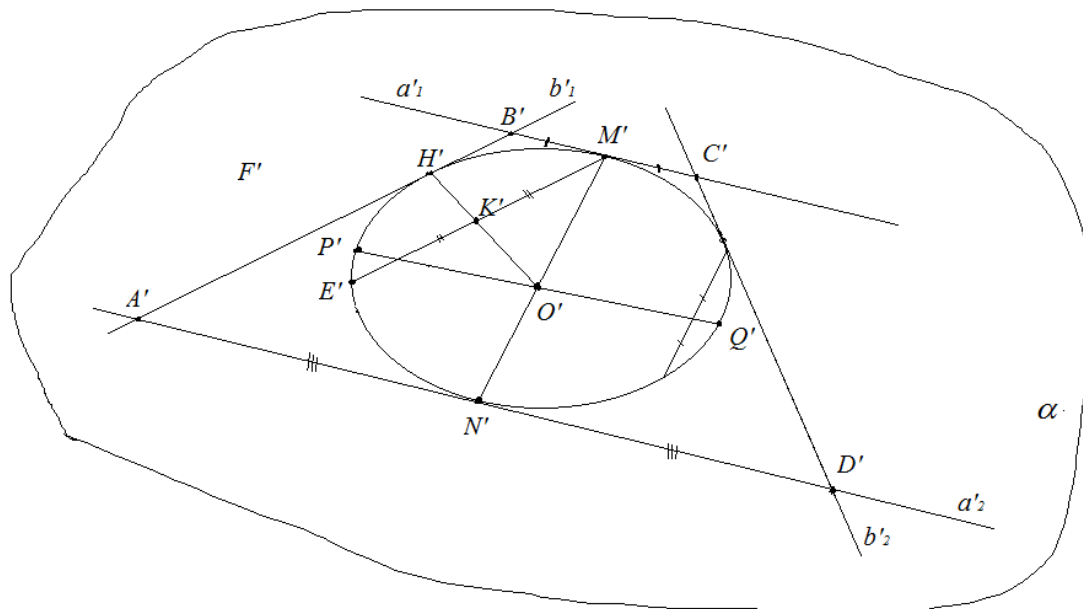


Рис. 223

3. На дугі $M'_P N'$ еліпса F' виберемо довільну точку E' . Через середину K' хорди $E'M'$ проведемо радіус $O'H'$.

4. Через точку H' , паралельно до хорди $E'M'$, проведемо пряму b'_1 . Позначимо $A' = a'_2 \cap b'_1$, $B' = a'_1 \cap b'_1$.

5. На промені, доповняльному до променя $N'A'$, відкладемо відрізок $N'D'$, $N'D' = N'A'$. На промені, доповняльному до променя $M'B'$, відкладемо відрізок $M'C'$, $M'C' = M'B'$.

6. Через точки C' і D' проведемо пряму b'_2 . Чотирикутник $A'B'C'D'$ є шуканим, трапецією, зображенням певної рівнобічної трапеції, описаної навколо кола F , зображеного еліпсом F' . ■

Задача 10.22. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням за методом паралельного проєктування кола F з центром у точці O , вписаного у задану рівнобічну трапецію. Побудуйте зображення цієї трапеції згідно застосованого закону зображення.

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано рівнобічну трапецію $ABCD$, описану навколо кола F з центром у точці O , і еліпс F' з центром у точці O' . Форму оригінала визначено тим, що оригінал задано у явному вигляді. Отже, при розв'язанні поставленої задачі неможливо уникнути безпосереднього використання оригінала.

Розглянемо трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = CD$). Нехай точка M є серединою основи BC ($BM = MC$), точка N – серединою основи AD ($AN = ND$). Відрізок MN є діаметром кола F перпендикулярним до основ заданої трапеції ($MN \perp BC$, $MN \perp AD$). Проведемо

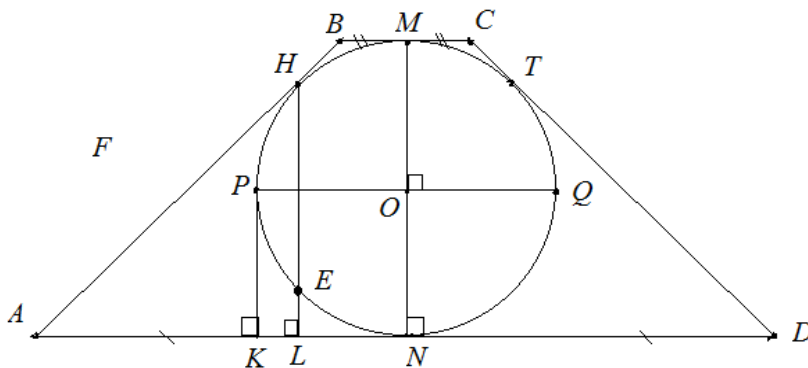


Рис. 224

у колі F діаметр PQ , $PQ \perp MN$.

Нехай бічна сторона AB трапеції $ABCD$ дотикається кола F у точці H , а бічна сторона CD – у

точці T . Нехай саме точка H належить дугі $M_p N$ кола F .

Проведемо $PK \perp AD$, $HL \perp AD$ (рис. 224). Пряма HL буде січною для кола F . Вона перетне його у двох точках H і E . Якщо

основа BC трапеції $ABCD$ є меншою за її основу AD (як на рис. 224), то точка E буде внутрішньою точкою відрізка HL , точки K і L будуть внутрішніми точками відрізка AN , точка L буде належати відрізку NK .

Розглянемо заданий еліпс F' з центром у точці O' (рис. 225). Побудуємо у ньому довільну пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 10.19, для знаходження шуканого зображення можна вважати, що, згідно застосованого закону

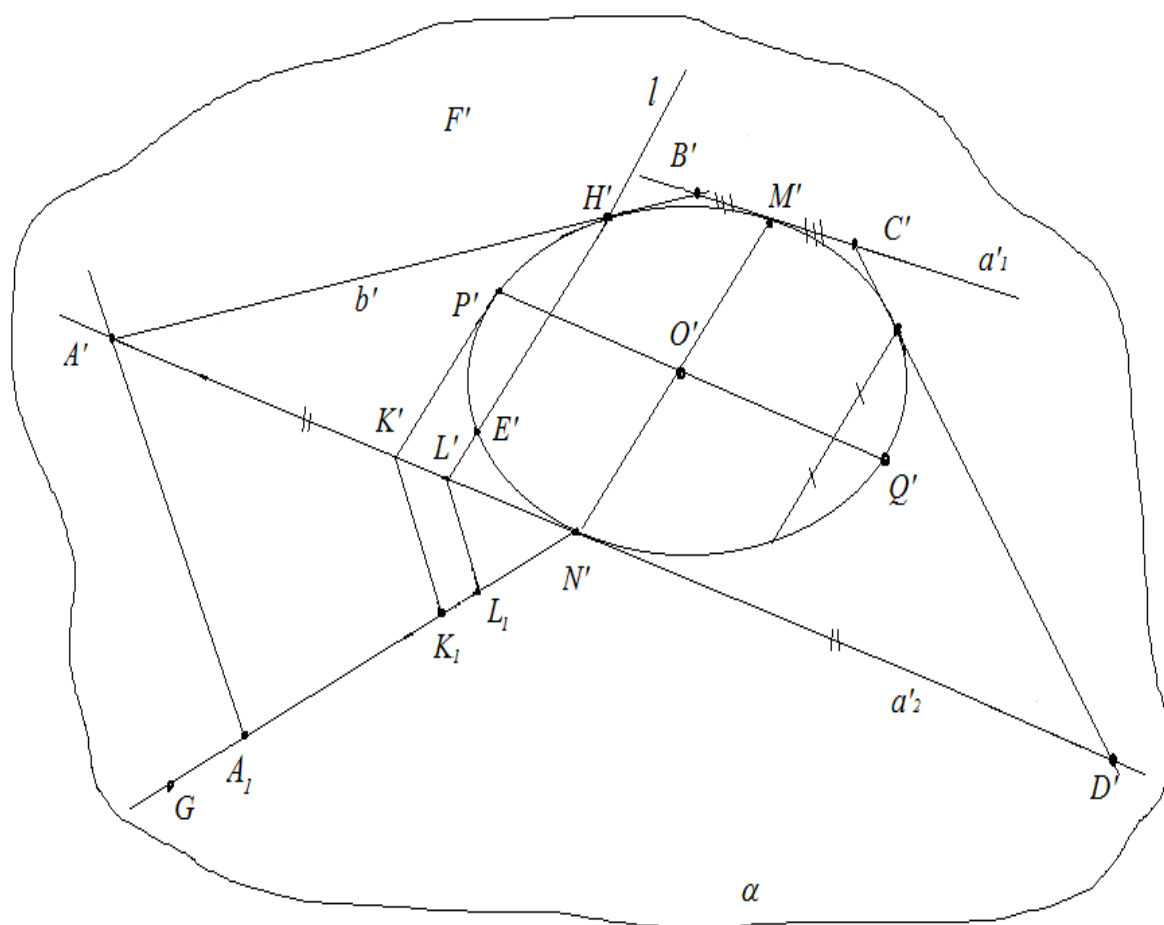


Рис. 225

зображення, точка M' є зображенням точки M , точка N' – зображенням точки N , точка P' – зображенням точки P , точка Q' – зображенням точки Q . Паралельно до діаметра $P'Q'$, через точку M' проведемо пряму a'_1 , через точку N' – пряму a'_2 . При застосованому

законі зображення пряма a'_1 є зображенням прямої BC , пряма a'_2 – зображенням прямої AD . Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку P' проведемо пряму $P'K'$ до перетину з прямою a'_2 у точці K' . Точка K' є зображенням точки K . Побудуємо довільний промінь $N'G$, який не належить прямій a'_2 . Послідовно відкладемо на ньому відрізки $N'L_1$, L_1K_1 , K_1A_1 , $N'L_1 = NL$, $L_1K_1 = LK$, $K_1A_1 = KA$. Паралельно до прямої K_1K' проведемо прямі A_1A' і L_1L' до перетину з прямою a'_2 , відповідно, у точках A' і L' . Згідно властивостей зображень фігур за методом паралельного проєктування при застосованому законі зображення точка A' є зображенням точки A , точка L' – зображенням точки L . Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку L' проведемо пряму l . Для еліпса F' вона буде січною, перетне його у двох точках. Позначимо ці точки через E' і H' таким чином, щоб точка E' була внутрішньою точкою відрізка $L'H'$. Згідно властивостей зображення фігур за методом паралельного проєктування, при застосованому законі зображення точка E' є зображенням точки E , точка H' – зображенням точки H . Через точки A' і H' проведемо пряму b' до перетину з прямою a'_1 у точці B' . Точка B' є зображенням точки B . На промені, доповняльному до променя $M'B'$, відкладемо відрізок $M'C'$, який дорівнює відрізку $M'B'$. Точка C' є зображенням точки C . На промені, доповняльному до променя $N'A'$, відкладемо відрізок $N'D'$, $N'D' = N'A'$. Точка D' є зображенням точки D . Трапеція $A'B'C'D'$ (рис. 225) є шуканим зображенням трапеції $ABCD$ згідно застосованого закону зображення. ■

Задача 10.23. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображен-*

ня згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола оригінала рівнобічної трапеції з кутом у 45° .

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O' . Спочатку треба дослідити, як можна (і чи можна взагалі) описати навколо кола рівнобічну трапецію з кутом у 45° . Потім бажано знайти такий спосіб відповідної побудови, аналог якого, завдяки властивостям зображень фігур за методом паралельного проєктування, при його реалізації для еліпса не вимагає явного використання оригінала.

Розглянемо коло F з центром у точці O (рис. 226). Проведемо у ньому взаємно

перпендикулярні діаметри MN і PQ .

Паралельно до діаметра PQ ,

через точку

M проведе-

мо пряму a_1 , через точку N – пряму a_2 . Ці прямі будуть дотичними

до кола F , відповідно, у точках M і N . Трикутник MOP буде прямокутним рівнобедреним трикутником, $\angle MPO = \angle PMO = 45^\circ$. Через

середину K хорди MP проведемо радіус OH ($OH \perp MP$). Через точ-

ку H , паралельно до хорди MP , проведемо пряму b . Вона буде дотичною прямою до кола F у точці H . Позначимо $A = a_2 \cap b$,

$B = a_1 \cap b$. На промені, доповняльному до променя MB , відкладемо

відрізок MC , $MC = MB$. На промені, доповняльному до променя NA ,

відкладемо відрізок ND , який дорівнює відрізку NA . Чотирикутник

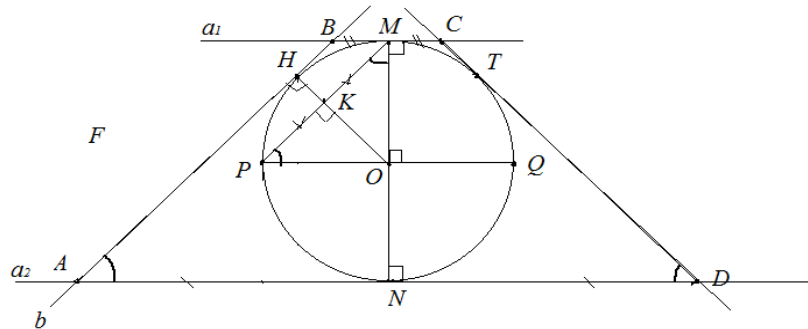


Рис. 226

$ABCD$ буде рівнобічною трапецією з кутом у 45° , описаною навколо кола F . Насправді, $\angle BAN = \angle MPO$ – гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Згідно виконаних побудов, точки C і D , відповідно, є симетричними до точок B і A відносно прямої MN . Отже, трапеція $MCDN$ є симетричною до трапеції $MBAN$ відносно прямої MN . Дуга M_QN кола F також є симетричною до дуги M_PN цього кола відносно прямої MN . Симетрія відносно прямої є рухом. При русі зберігаються форми геометричних фігур, відношення приналежності геометричних фігур, довжини відрізків, величини кутів. Звідси випливає, що $CD = BA$, $\angle CDN = \angle BAN = 45^\circ$, відрізок CD дотикається дуги M_QN кола F так само, як відрізок BA дотикається дуги M_PN цього кола.

Вищевказаним чином навколо будь-якого кола можна описати рівнобічну трапецію з кутом у 45° . Знайдено такий спосіб подібного описання, аналог якого, завдяки властивостям зображень фігур за методом паралельного проєктування, можна реалізувати і для еліпса. Така реалізація не вимагає безпосереднього використання оригінала.

1. Будуємо у еліпсі F' пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно наслідка 8 з теореми 8.6, можна вважати, що, якщо еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проєктуванні, то, згідно застосованого закону зображення, точка M' є зображенням точки M , точка N' – зображенням точки N , точка P' – зображенням точки P , точка Q' – зображенням точки Q (рис. 227).

2. Паралельно до діаметра $P'Q'$, через точку M' проводимо пряму a'_1 , через точку N' – пряму a'_2 . Згідно застосованого закону зображення пряма a'_1 є зображенням прямої a_1 , пряма a'_2 – зображенням прямої a_2 .

3. Через середину K' хорди $P'M'$ (точка K' є зображенням точки K) проводимо радіус $O'H'$ еліпса F' . Точка H' є зображенням точки H . Через точку H' , паралельно до хорди $P'M'$, проводимо пряму b' . Пряма b' є зображенням прямої b .

4. Нехай $A' = a'_2 \cap b'$, $B' = a'_1 \cap b'$. Точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B .

5. На промені, доповняльному до променя $M'B'$, відкладаємо

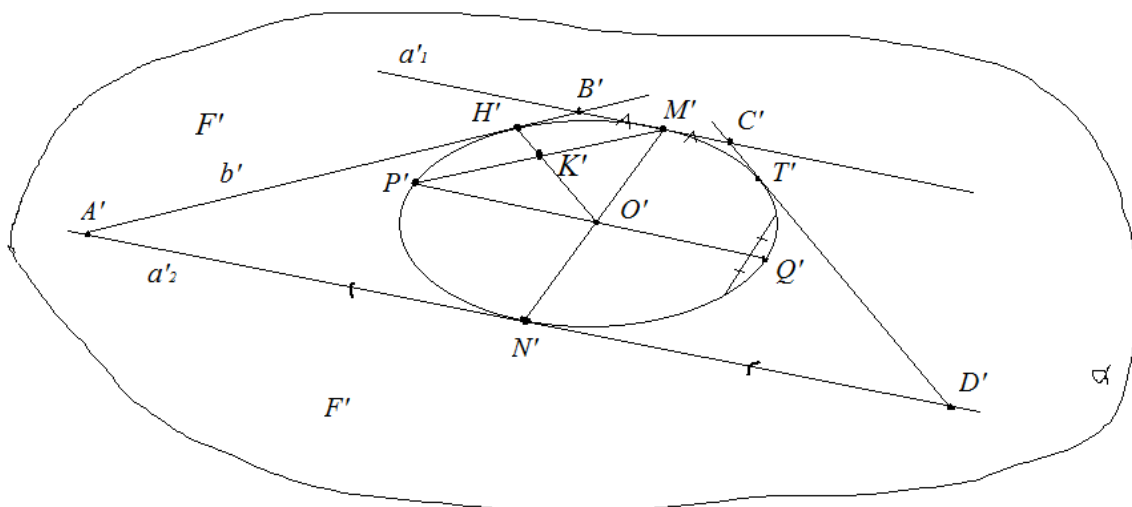


Рис. 227

відрізок $M'C'$, який дорівнює відрізку $M'B'$. На промені, доповняльному до променя $N'A'$, відкладаємо відрізок $N'D'$, який дорівнює відрізку $N'A'$. Точка C' є зображенням точки C , точка D' – зображенням точки D . Чотирикутник $A'B'C'D'$ є шуканим (рис. 227). ■

Задача 10.24. *Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєкування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення якої-небудь трапеції довільної форми (не прямокутної і не рівнобічної), описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ Дослідимо, спочатку, питання про те, як трапецію довільної форми (не прямокутну і не рівнобічну) можна описати

навколо кола.

У колі F з центром у точці O проведемо взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ (рис. 228). Паралельно до діаметра PQ , через точку M проведемо пряму a_1 , через точку N – пряму a_2 . Пряма a_1 дотикається кола F у точці M , пряма a_2 дотикається кола F у точці N , $a_1 \parallel a_2$. Будемо намагатися побудувати трапецію, основи якої, відповідно, належать прямим a_1 і a_2 . Для побудови прямих, що містять бічні сторони шуканої трапеції, достатньо обрати точки дотику цих прямих до кола F . Одну точку, наприклад точку H , – на дузі $M_P N$, іншу точку, наприклад точку G , – на дузі $M_Q N$. За точку H можна

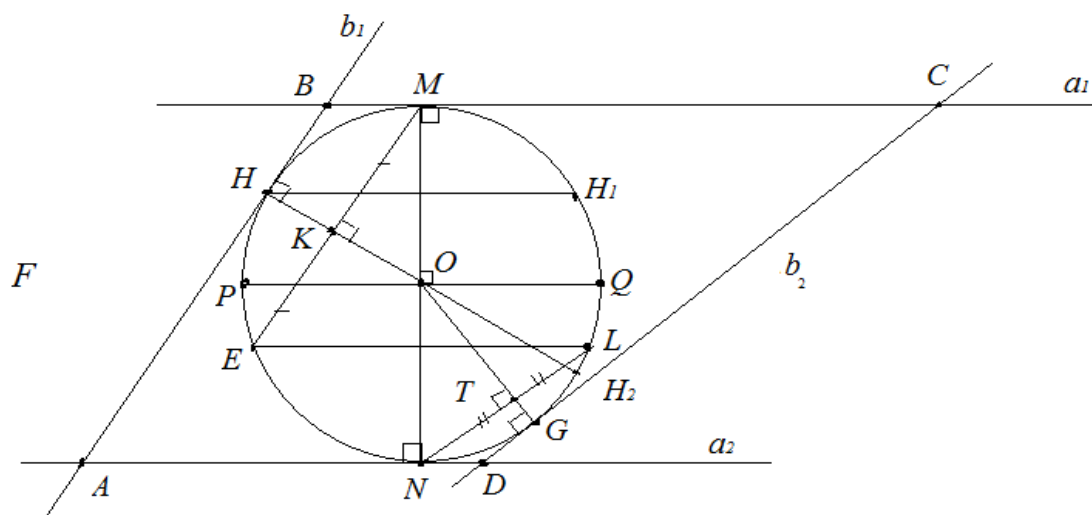


Рис.228

прийняти довільну точку дуги $M_P N$, відмінну від точки P (у випадку обрання точки P мова може йти лише про побудову прямокутної трапеції). За точку G можна прийняти довільну точку дуги $M_Q N$ за виключенням точки Q (буде прямокутна трапеція), точки H_1 , симетричної до точки H відносно прямої MN (буде рівнобічна трапеція), точки H_2 , симетричної до точки H відносно точки O (буде ромб). Потім треба побудувати дотичні прямі до кола F , відповідно, у точках H і G . З технічної точки зору, особливо з метою виконання аналогічних

побудов для еліпса F' , для проведення дотичної прямої зручніше мати пряму, паралельно до якої проходить ця дотична пряма. Отже, зручніше обрати на дузі $M_P N$, довільну точку E , провести хорду ME , a'_1 є зображенням прямої a_1 , пряма a'_2 – зображенням через середину K хорди ME провести радіус OH . Дотична пряма b_1 до кола F у точці H є паралельною до хорди ME (рис. 228). Потім треба так обрати точку L на дузі $M_Q N$, щоб точка L не була симетричною до точки E відносно прямої MN у випадку наступного обрання хорди ML (утвориться рівнобічна трапеція), щоб точка L не була симетричною до точки E відносно точки O у випадку наступного обрання хорди NL (утвориться ромб). На рис. 228 точку L обрано на дузі $N_{H_2} Q$, розглянуто хорду NL .

Далі, через середину T обраної хорди проводимо радіус OG . Дотична до кола F у точці G пряма b_2 буде паралельною до хорди NL . Нехай $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$, $C = a_1 \cap b_2$, $D = a_2 \cap b_2$. Чотирикутник $ABCD$ є трапецією, не прямокутною і не рівнобічною, описаною навколо кола F .

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєкування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' . Такі побудови не вимагають безпосереднього використання оригінала.

1. Проводимо у еліпсі F' з центром у точці O' довільну пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$ (рис. 229).

2. Паралельно до діаметра $P'Q'$, через точку M' проводимо пряму a'_1 , через точку N' – пряму a'_2 . Пряма a'_1 буде дотичною до еліпса F' у точці M' , пряма a'_2 – дотичною до еліпса F' у точці N' .

3. На дузі $M'_P N'$ еліпса F' обираємо довільну точку E' , проводи-

мо хорду $M'E'$.

4. Через середину K' хорди $M'E'$ проводимо радіус $O'H'$. Паралельно до хорди $M'E'$, через точку H' проводимо пряму b'_1 . Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці H' .

5. На дузі $M'_Q N'$ еліпса F' обираємо таку точку L' , що не є симетричною до точки E' відносно центру O' еліпса F' . Проводимо хорду $N'L'$.

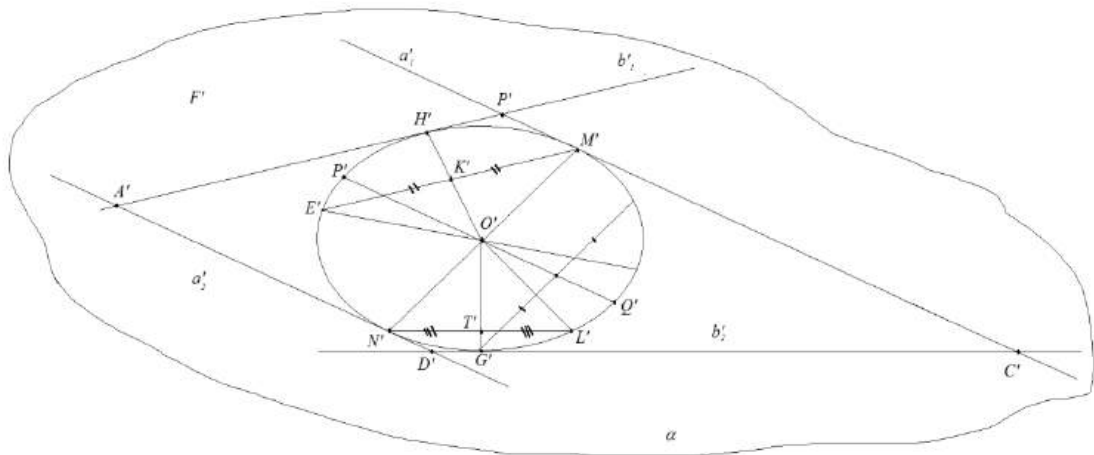


Рис. 229

6. Через середину T' хорди $N'L'$ проводимо радіус $O'G'$. Паралельно до хорди $N'L'$, через точку G' проводимо пряму b'_2 .

7. Позначаємо $A' = a'_2 \cap b'_1$, $B' = a'_1 \cap b'_1$, $C' = a'_1 \cap b'_2$, $D' = a'_2 \cap b'_2$.

Трапеція $A'B'C'D'$ є шуканою. ■

Задача 10.25. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням за методом паралельного проєктування кола F з центром у точці O , вписаного у задану трапецію, яка не є прямокутною або рівнобічною. Побудуйте зображення цієї трапеції згідно застосованого закону зображення.

Розв'язання. □ За умови даної задачі задано коло F з центром у точці O разом з описаною навколо цього кола довільною (не прямо-

кутною і не рівнобічною) трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) і еліпс F' з центром у точці O' (рис. 230 (а, б)).

Проведемо у колі F , паралельно до основ трапеції $ABCD$, діаметр PQ . Проведемо перпендикулярний до нього діаметр MN . Основа BC трапеції $ABCD$ дотикається кола F у точці M , основа AD – у точці N . Нехай бічна сторона AB даної трапеції дотикається кола F у точці H , бічна сторона CD даної трапеції дотикається кола F у точці T (рис. 230 (а)). Проведемо $PK \perp AD$, $HG \perp AD$, $TE \perp AD$, $QL \perp AD$. Прямі HG і TE є січними до кола F . Нехай пряма HG перетинає коло F , ще й у точці H_1 , пряма TE – ще й у точці T_1 . Нехай, для визначеності, як на рис. 230 (а), точка H_1 належить відрізку NG , точка T_1 – відрізку TE .

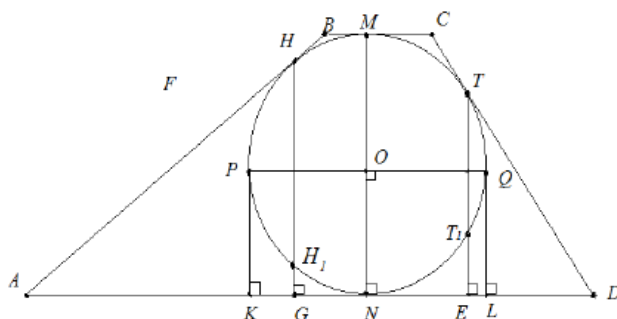


Рис. 230 (а)

Побудуємо у еліпсі F' довільну пару спряжених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 10.19, для знаходження шуканого зображення можна вважати, що, згідно застосованого закону зображення, точка M' є зображенням точки M , точка N' – зображенням точки N , точка P' – зображенням точки P , точка Q' – зображенням точки Q . Через точку M' , паралельно до діаметра $P'Q'$, проведемо пряму a'_1 , через точку N' – пряму a'_2 . Пряма a'_1 буде дотичною до еліпса F' у точці M' , пряма a'_2 буде дотичною до еліпса F' у точці N' . Паралельно до діаметра $M'N'$ проведемо пряму $P'K'$ до перетину з прямою a'_2 у точці K' і пряму $Q'L'$ до перетину з

прямою a'_2 у точці L' . Згідно застосованого закону зображення точка K' є зображенням точки K , точка L' – зображенням точки L . Побудуємо довільний промінь $N'N_1$, який не належить прямій a'_2 . Послідовно відкладемо на ньому відрізки $N'G_1$, G_1K_1 , K_1A_1 , $N'G_1 = NG$, $G_1K_1 = GK$, $K_1A_1 = KA$. Паралельно до прямої K_1K' проведемо прямі G_1G' і A_1A' до перетину з прямою a'_2 , відповідно, у точках G' і A' . Згідно властивостей зображення фігур за методом паралельного проєктування, при застосованому законі зображення точка G' є зображенням точки G , точка A' – зображенням точки A . Паралельно до діаметра $M'N'$, через точку G' проведемо пряму, яка перетне еліпс F' у

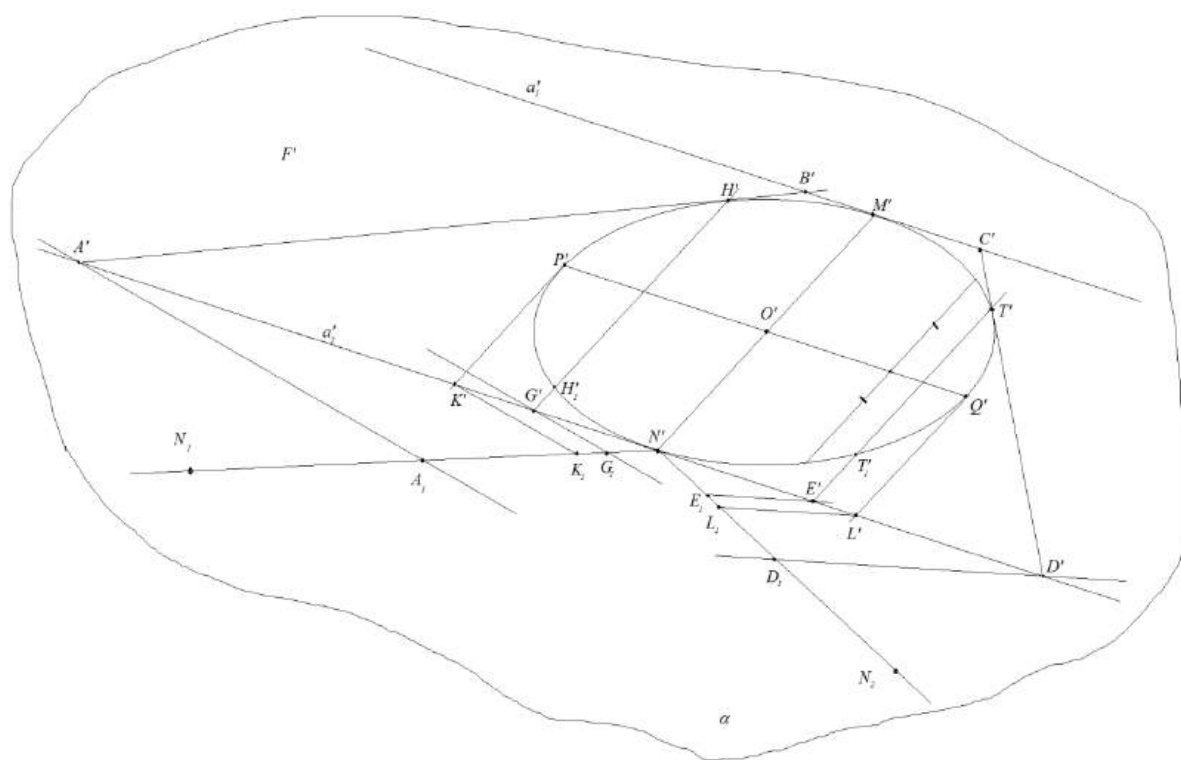


Рис. 230 (б)

двох точках: H'_1 і H' . Нехай саме точка H'_1 буде належати відрізку $G'H'$. Тоді, при застосованому законі зображення точка H'_1 є зображенням точки H_1 , точка H' – зображенням точки H . Через точки

A' і H' проведемо пряму b'_1 до перетину з прямою a'_1 у точці B' . Пряма b'_1 є зображенням прямої AB і дотичною прямою до еліпса F' у точці H' . Точка B' є зображенням точки B . Проведемо довільний промінь $N'N_2$, який не належить прямій a'_2 і не співпадає (для уникнення плутанини) з променем $N'N_1$. Послідовно відкладемо на промені $N'N_2$ відрізки $N'E_1$, E_1L_1 , L_1D_1 , $N'E_1 = NE$, $E_1L_1 = EL$, $L_1D_1 = LD$. Паралельно до прямої L_1L' , проведемо прямі E_1E' і D_1D' до перетину з прямою a'_2 , відповідно, у точках E' і D' . Згідно застосованого закону зображення, точка E' є зображенням точки E , точка D' – зображенням точки D . Паралельно до діаметра $M'N'$, проведемо пряму $E'T'$. Ця пряма для еліпса F' буде січною, перетне його у двох точках – T'_1 і T' . Нехай саме точка T'_1 належить відрізку $E'T'$. Тоді точка T' є зображенням точки T , точка T'_1 – зображенням точки T_1 . Через точки D' і T' проведемо пряму b'_2 до перетину з прямою a'_1 у точці C' . Пряма b'_2 є зображенням прямої CD , пряма b'_2 є дотичною до еліпса F' у точці T' , точка C' є зображенням точки C (рис. 230 (б)).

Отже, трапеція $A'B'C'D'$, згідно застосованого закону зображення, є шуканим зображенням трапеції $ABCD$. Уникнути безпосереднього використання оригінала при побудові такого зображення неможливо. ■

Аналіз розв'язків задач, представлених у §10, дозволяє зробити той висновок, що для більшості задач на побудову зображень за методом паралельного проєктування описаних навколо кола n -кутників, $n \in N$, $n \geq 3$, загальна ідея знаходження шляхів розв'язання співпадає з тією, яку було сформульовано наприкінці §9 як результат аналізу задач на побудову зображень за методом паралельного проєктування вписа-

них у коло n -кутників. Цей факт пояснюється обґрунтованим у теоремах 8.7 і 8.8 характером повноти зображень, що містять еліпс, про який відомо, що він є зображенням кола при певному паралельному проєктуванні.

Питання і завдання для самоконтролю до §10

10.1. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.2. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.3. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення квадрата, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.4. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного ромба, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.5. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом пара-

лельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.6. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення правильного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.7. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення довільного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.8. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення прямокутної трапеції, описаної навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.9. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення рівнобічної трапеції, описаної навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.10. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням деякого кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Як побудувати зображення згідно застосованого закону зображення трапеції загального виду (яка не є прямокут-

ною або рівнобічною), описаної навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.11. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням за методом паралельного проєктування кола F з центром у точці O , вписаного у задану трапецію $ABCD$, яка не є прямокутною або рівнобічною. Як побудувати зображення трапеції $ABCD$ згідно застосованого закону зображення? Відповідь обґрунтуйте.

10.12. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням кола F з центром у точці O за методом паралельного проєктування. Які загальні пропозиції є доцільними щодо визначення шляхів розв'язання задач на побудову зображень згідно застосованого закону зображення многокутників, описаних навколо кола F ? Відповідь обґрунтуйте.

Практичні завдання для самостійного розв'язання до розділу II

41. Відомо, що заданий на рис. 231 (б) трикутник $A'B'C'$ картин-

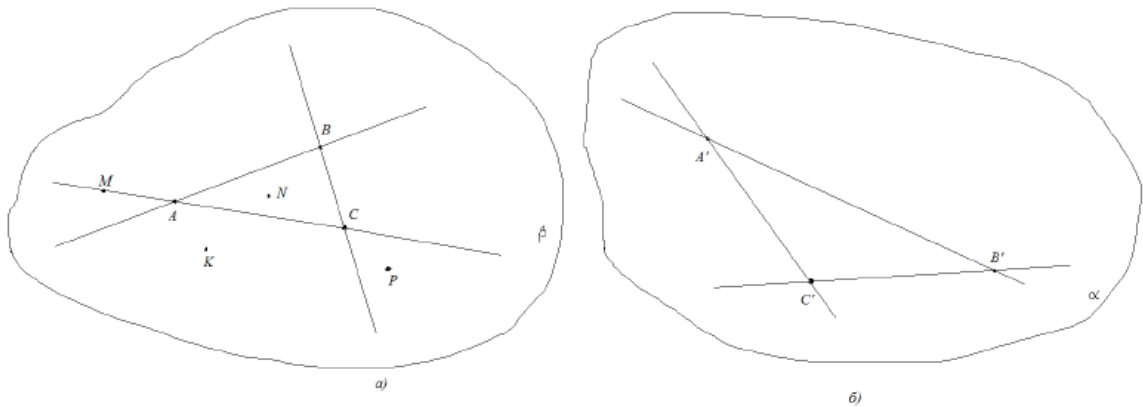


Рис.231

ної площини α є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на рис. 231 (а) трикутника ABC площини β так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Для заданих на рис. 231 (а) точок M , N , P і K на рис. 231 (б) побудуйте їх зображення згідно застосованого закону зображення.

42. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC площини β так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Обґрунтуйте, що для побудови точки M' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням довільним чином обраної точки M площини β достатньо використати теорему Фалеса не більше, ніж два рази.

43. Відомо, що заданий на рис. 231 (б) трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на рис. 231 (а) трикутника ABC площини β так, що

при цьому точка A' є зображенням точки C , точка B' – зображенням точки A . Для заданих на рис. 231 (а) точок M , N , P і K на рис. 231 (б) побудуйте їх зображення згідно застосованого закону зображення.

44. Відомо, що заданий на рис. 231 (б) трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на рис. 231 (а) трикутника ABC площини β так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Для заданих на рис. 231 (б) точок M' , N' , P' і K' на рис. 231 (а) відновіть оригінали – побудуйте такі точки M , N , P і K площини β , що, згідно застосованого закону зображення, точка M' є зображенням точки M , точка N' – зображенням точки N , точка P' – зображенням точки P , точка K' – зображенням точки K .

45. Відомо, що заданий на рис. 231 (б) трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на рис. 231 (а) трикутника ABC площини β так, що при цьому точка A' є зображенням точки C , точка B' – зображенням точки A . Для заданих на рис. 231 (б) точок M' , N' , P' , K' на рис. 231 (а) відновіть оригінали – побудуйте такі точки M , N , P , K площини β , що, згідно застосованого закону зображення, точка M' є зображенням точки M , точка N' – зображенням точки N , точка P' – зображенням точки P , точка K' – зображенням точки K .

46. Відомо, що заданий на рис. 232 трикутник $AB'C$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на тому ж рисунку трикутника ABC так, що при цьому точка A є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Для заданих на рис. 232 точок M , N , K побудуйте їх зображення згідно застосованого закону

зображення, точки M' , N' , K' , відповідно. Відомо, що точка M не лежить на прямій BB' , пряма BM не є паралельною до прямої AC , пряма BN є паралельною до прямої AC , точка K лежить на прямій BB' .

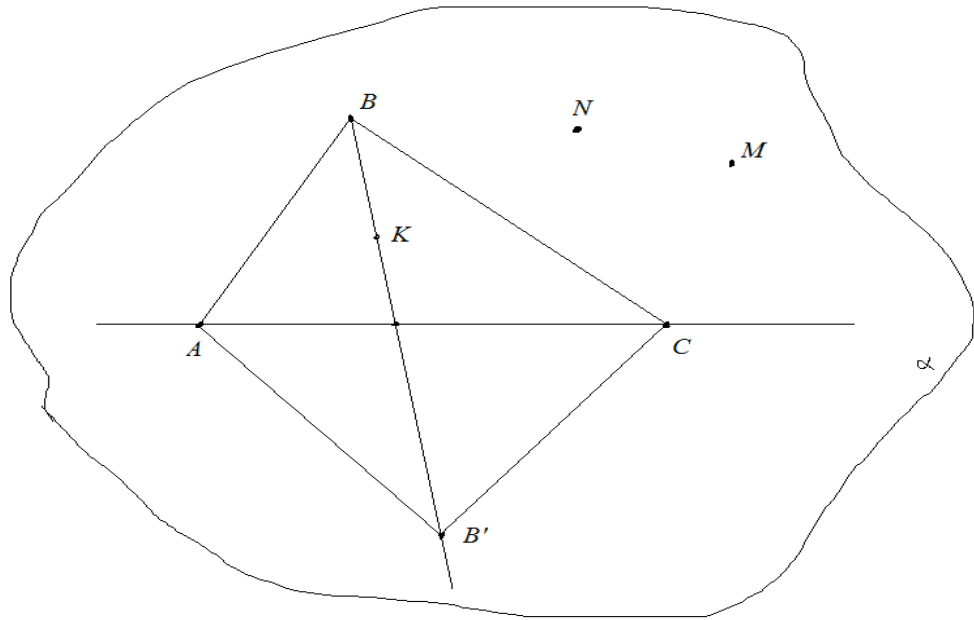


Рис.232

47. Відомо, що заданий на рисунку трикутник $AB'C$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на тому ж рисунку трикутника ABC так, що при цьому точка A є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . На даному рисунку точки B і B' розташовані по одну сторону відносно прямої AC . Для заданих на тому ж рисунку точок M , N , K , P побудуйте їх зображення згідно застосованого закону зображення, точки M' , N' , K' , P' , відповідно. Відомо, що $M \notin BB'$, пряма BM не є паралельною до прямої AC , $BN \parallel AC$, $K \in BB'$, точка P лежить по іншу сторону відносно прямої AC , ніж точка B .

48. Відомо, що заданий на рис. 233 трикутник $AB'C$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на тому ж рисунку трикутника ABC так, що при цьому точка A є зображенням

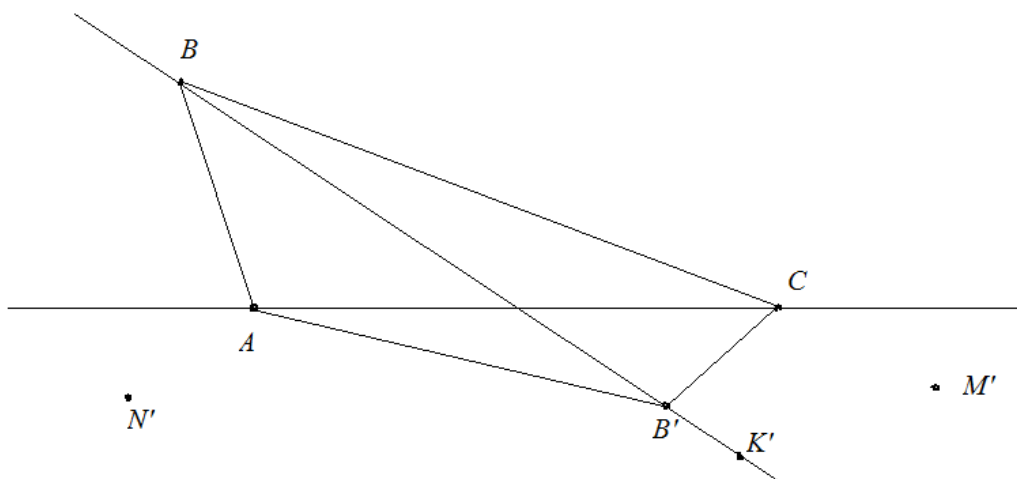


Рис.233

точки A , точка B' – зображенням точки B . Для заданих на рис. 233 точок M' , N' , K' побудуйте їх оригінали, тобто, такі точки M , N і K , що, згідно застосованого закону зображення, точка M' є зображенням точки M , точка N' – зображенням точки N , точка K' – зображенням точки K . Відомо, що $M' \notin BB'$, пряма $B'M'$ не є паралельною до прямої AC , $B'N' \parallel AC$, $K' \in BB'$.

49. Відомо, що заданий на рисунку трикутник $AB'C$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого на тому ж рисунку трикутника ABC так, що при цьому точка A є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . На даному рисунку точки B і B' розташовані по одну сторону відносно прямої AC . Для заданих на тому ж рисунку точок M' , N' , K' , P' побудуйте їх оригінали згідно застосованого закону зображення, тобто, такі точки M , N , K і P , що точка M' є зображенням точки M , точка N' – зображенням точки N , точка P' – зображенням точки P , точка K' – зображенням точки K . Відомо, що $M' \notin BB'$, пряма $B'M'$ не є паралельною до

прямої AC , $B'N' \parallel AC$, $K' \in BB'$, точка P' лежить по іншу сторону відносно прямої AC , ніж точка B' .

50. На картинній площині α задано пряму a' і точку A' , $A' \notin a'$, про які відомо, що вони є зображеннями за методом паралельного проєктування деяких прямої a і точки A . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямої b , яка проходить через точку A паралельно до прямої a .

51. На картинній площині α задано прямі a' і b' , які не є паралельними між собою, і точку A' , що не належить жодній з цих прямих. Обґрунтуйте, що у евклідовому просторі існує площина β , яка містить взаємно перпендикулярні прямі a і b ($a \perp b$) і точку A , зображеннями яких при певному паралельному проєктуванні є, відповідно, прямі a' , b' і точка A' . Згідно такого закону зображення побудуйте зображення прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до прямої a .

52. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) так, що при цьому точка B' є зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси зовнішнього кута KBC при вершині B трикутника ABC .

53. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC , у якого $AB > BC$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси зовнішнього кута KBC при вершині B трикутника ABC .

54. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC , у якого

$AB > BC$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси зовнішнього кута PBA при вершині B трикутника ABC .

55. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування трикутника ABC , у якого $AB = 2BC$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси зовнішнього кута KBC при вершині B трикутника ABC .

56. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутного трикутника ABC , у якого $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси зовнішнього кута KBC при вершині B трикутника ABC .

57. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування трикутника ABC , для якого $AB:BC:AC = m:n:k$, $m, n, k \in \mathbb{N}$ ($m \leq n \leq k, k < m + n$), так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектрис усіх зовнішніх кутів даного трикутника.

58. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування трикутника ABC , для якого $AB:BC:AC = m:n:k$, $m, n, k \in \mathbb{N}$ ($m \leq n \leq k, k < m + n$), так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центрів вписаних кіл для трикутника ABC .

59. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центрів зовнівписаних кіл для трикутника ABC .

60. На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$ і відрізок $C'H'$, де H' – певна точка прямої $A'B'$. Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , відрізок $C'H'$ при цьому є зображенням висоти CH трикутника ABC . Трикутник-оригінал загублено. Визначте характер повноти заданого зображення. Відповідь обґрунтуйте.

61. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, пряму l' і точку P' , про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування правильного трикутника ABC , прямої l і точки P . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямої a , яка проходить через точку P перпендикулярно до прямої l .

62. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, пряму l' і точку P' , про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$), прямої l і точки P , при цьому точка C' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямої a , яка проходить через точку P перпендикулярно до прямої l .

63. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так,

що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . У площині трикутника $A'B'C'$ задано певну пряму l' і точку P' . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямої a , яка проходить через оригінал P точки P' перпендикулярно до оригінала l прямої l' (точка P і пряма l розташовані у площині трикутника ABC).

64. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$ і точку P' на прямій $A'B'$. Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($AB=BC$) так, що при цьому точка B' є зображенням точки B , точка P' – зображенням певної точки P прямої AB . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення перпендикуляра, проведеного з точки P до прямої AC .

65. На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$ і точку T' . Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC , точка T' при цьому є зображенням ортоцентра T даного трикутника. Трикутник-оригінал загублено. Визначте характер повноти заданого зображення. Відповідь обґрунтуйте.

66. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, точку T' всередині кута, вертикального до кута $B'A'C'$, пряму l' і точку P' . Відомо, що задані геометричні фігури є зображеннями за методом паралельного проєктування, відповідно, деякого трикутника ABC , його ортоцентра T , прямої l і точки P , розташованих на певній площині β . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямої a , яка проходить через точку P перпендикулярно до прямої l .

67. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$ і пряму m' , яка проходить через середину M' його сторони $A'B'$ і перетинає

його сторону $A'C'$ у певній внутрішній точці K' . Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , пряма m' є зображенням серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC . Трикутник-оригінал загублено. Визначте характер повноти заданого зображення. Відповідь обґрунтуйте.

68. На картинній площині α задано зображення за методом паралельного проєктування деякого трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центра кола, описаного навколо трикутника-оригінала.

69. На картинній площині α задано зображення за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC і центра Q кола, описаного навколо даного трикутника. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти трикутника ABC , проведеної до сторони BC .

70. На картинній площині α задано зображення за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC і центра кола, описаного навколо цього трикутника. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ортоцентра трикутника ABC .

71. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$ і точку Q' . Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка Q' є зображенням центра Q кола, описаного навколо трикутника ABC . Трикутник-оригінал загублено. Визначте характер повноти заданого зображення. Відповідь обґрунтуйте.

72. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$ і трикутник $M'N'K'$. Відомо, що ці трикутники, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування правильного трикутника ABC і

деякого трикутника MNK , які належать одній площині. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти MH трикутника MNK , ортоцентра трикутника MNK , центра кола, описаного навколо трикутника MNK .

73. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, пряму l' і точку P' , про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування прямокутного рівнобедреного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$), прямої l і точки P , які належать одній площині, так, що при цьому точка A' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямої a , що проходить через точку P перпендикулярно до прямої l .

74. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$ і трикутник $M'N'K'$. Відомо, що ці трикутники є зображеннями за методом паралельного проєктування, відповідно, прямокутного рівнобедреного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) і деякого трикутника MNK , які належать одній площині, так, що при цьому точка C' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти MH трикутника MNK , ортоцентра трикутника MNK , центра кола, описаного навколо трикутника MNK .

75. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування правильного трикутника ABC , так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення рівнобедреного трикутника ADC , у якого $\angle ADC=120^\circ$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

76. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування

рівнобедреного трикутника ABC , у якого $\angle ABC = 120^\circ$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного трикутника ADC , розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

77. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC , ($\angle ACB = 90^\circ$), так, що при цьому точка C' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного трикутника ADB , розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

78. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного трикутника ABC , у якого $\angle ABC = 120^\circ$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного трикутника BDC , розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

79. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного трикутника ABC , у якого $\angle ABC = 120^\circ$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутного трикутника ACD ($\angle ACD = 90^\circ$), у якого $\angle DAC = 30^\circ$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

80. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування правильного трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутного трикутника BCD ($\angle BCD=90^\circ$), у якого $\angle BDC=60^\circ$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

81. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення квадрата $AMNC$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

82. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутника $AMNC$, у якого $AM:AC=1:2$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

83. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) так, що при цьому точка C' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення квадрата $AMNB$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

84. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) так, що при цьому точка C' є

зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутника $AMNB$, у якого $AM:AB=1:2$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

85. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення квадрата $AMNC$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

86. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) так, що при цьому точка C' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у трикутник-оригінал квадрата, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

87. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) так, що при цьому точка C' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у трикутник-оригінал прямокутника, сторони якого відносяться як $3:1$, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

88. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) так, що при цьому точка C' є зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у трикутник-оригінал квадрата, одна сторона якого належить гіпотенузі трикутника-оригінала.

89. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$) так, що при цьому точка C' є зображенням точки C , але оригінал загублено. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у трикутник-оригінал квадрата, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

90. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$), у якого $BC:CA=m:n$, $m, n \in N$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у трикутник-оригінал квадрата, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

91. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB=90^\circ$), у якого $BC:CA=m:n$, $m, n \in N$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення рівнобедреного трикутника AQB ($AQ=QB$), у якого кут $\angle QBA$ дорівнює куту $\angle CBA$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC .

92. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , але оригінал загублено. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення паралелограма $ABCD$.

93. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування правильного трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного шестикутника $ADBECH$.

94. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного трикутника ABC , у якого $\angle ABC = 120^\circ$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $AMBN$, у якого $\angle AMB = 60^\circ$.

95. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутника $ABCD$, для якого $AB:BC = 1:2$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси кута BAD .

96. На картинній площині α задано паралелограм $A'B'C'D'$, пряму l' і точку P' , про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування квадрата $ABCD$, прямої l і точки P , які належать одній площині. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямої a , що проходить через точку P перпендикулярно до прямої l .

97. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування ромба $ABCD$ з гострим кутом ABC у 60° так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C .

Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти BH ромба $ABCD$, проведеної до сторони AD .

98. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування ромба $ABCD$ з гострим кутом ABC у 45° так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти AH ромба $ABCD$, проведеної до сторони BC .

99. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування ромба $ABCD$ з гострим кутом ABC у 30° так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висоти AH ромба $ABCD$, проведеної до сторони BC .

100. Кут ABC ромба $ABCD$ складає 60° . У даному ромбі до сторони BC проведено висоту AH . На картинній площині α задано трикутник $A'B'H'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування трикутника ABH так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $ABCD$.

101. Кут ABC ромба $ABCD$ складає 45° . У даному ромбі до сторони BC проведено висоту AH . На картинній площині α задано трикутник $A'B'H'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування трикутника ABH так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $ABCD$.

102. Кут ABC ромба $ABCD$ складає 30° . У даному ромбі до сторони BC проведено висоту AN . На картинній площині α задано трикутник $A'B'H'$, про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування трикутника ABH так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $ABCD$.

103. Побудуйте можливе зображення правильного восьмикутника при невиродженому для даного восьмикутника паралельному проєктуванні.

104. Побудуйте можливе зображення правильного п'ятикутника при невиродженому для даного п'ятикутника паралельному проєктуванні.

105. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування деякої рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення висот трапеції $ABCD$, проведених з кінців її меншої основи.

106. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням методом паралельного проєктування деякої рівнобічної трапеції $ABCD$ з кутом у 45° . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

107. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобічної трапеції $ABCD$ з кутом у 60° . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

108. Основи заданої трапеції $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) відносяться як 1:2. Відомо, що вона є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобічної трапеції $ABCD$ з кутом α 60° . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

109. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобічної трапеції $ABCD$ з кутом α 30° . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

110. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування заданої рівнобічної трапеції $ABCD$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

111. Побудуйте можливе зображення прямокутної трапеції з кутом α 60° , в яку можна вписати коло, і центра даного кола при неvierродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

112. Побудуйте можливе зображення прямокутної трапеції з кутом α 30° , в яку можна вписати коло, і центра даного кола при неvierродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

113. Побудуйте можливе зображення прямокутної трапеції з кутом α 45° , в яку можна вписати коло, і центра даного кола при неvierродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

114. Побудуйте можливе зображення прямокутної трапеції з гострим кутом, що дорівнює заданому, в яку можна вписати коло, і

центра даного кола при невиродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

115. Побудуйте можливе зображення рівнобічної трапеції з кутом у 60° , в яку можна вписати коло, і центра даного кола при невиродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

116. Побудуйте можливе зображення рівнобічної трапеції з кутом у 30° , в яку можна вписати коло, і центра даного кола при невиродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

117. Побудуйте можливе зображення рівнобічної трапеції з кутом у 45° , в яку можна вписати коло, і центра даного кола при невиродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

118. Побудуйте можливе зображення рівнобічної трапеції з гострим кутом, що дорівнює заданому, в яку можна вписати коло, і центра даного кола при невиродженому для такої трапеції паралельному проєктуванні.

119. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданої трапеції $ABCD$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення перпендикуляра, проведеного з вершини B трапеції $ABCD$ до прямої CD .

120. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутної трапеції $ABCD$ з кутом ADC , що дорівнює 45° , основи якої відносяться як 1:2, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зобра-

ження перпендикуляра, проведеного з вершини A трапеції $ABCD$ до прямої CD .

121. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування заданої рівнобічної трапеції $ABCD$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $BPCQ$, у якого $\angle BPC = 60^\circ$, розташованого у площині трапеції $ABCD$.

122. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобічної трапеції $ABCD$ з кутом у 60° , у якої висота дорівнює меншій з основ, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення, розташованого у площині трапеції $ABCD$, ромба $BPCQ$, у якого $\angle BPC = 60^\circ$. Для визначеності, вважатимемо, що точки A і P лежать по різні сторони відносно прямої BC .

123. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобічної трапеції $ABCD$, у якій висота дорівнює меншій із основ, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення, розташованого у площині трапеції $ABCD$, квадрата $BPCQ$. Для визначеності, вважатимемо, що точки A і P лежать по різні сторони відносно прямої BC .

124. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобічної трапеції $ABCD$, у якій висота дорівнює меншій з основ, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення, розташованого у площині трапеції $ABCD$ ромба $BPCQ$, діагоналі якого відносяться як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

125. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування квадрата $ABCD$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення квадрата $BDPQ$, розташованого у площині квадрата $ABCD$.

126. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого прямокутника $ABCD$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутника $ACQP$, розташованого у площині прямокутника $ABCD$ і подібного до прямокутника $ABCD$ з коефіцієнтом подібності $k = \frac{AC}{BC}$.

127. Діагональ AC прямокутника $ABCD$ утворює з його стороною AB кут у 60° . Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутника $ABCD$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C .

Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутника $ACQP$, розташованого у площині прямокутника $ABCD$ і подібного до прямокутника $ABCD$ з коефіцієнтом подібності $k = \frac{AC}{BC}$.

128. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутника $ABCD$, для якого $AB:AD=1:2$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення квадрата $AQBP$, розташованого у площині прямокутника $ABCD$.

129. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутника $ABCD$, для якого $AB:AD=2:3$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $AQBP$, діагоналі AB і QP якого відносяться як $1:2$, розташованого у площині прямокутника $ABCD$.

130. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування прямокутника $ABCD$, для якого $AB:AD=m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $AQBP$, діагоналі AB і QP якого відносяться як $p:q$, $p, q \in \mathbb{N}$, розташованого у площині прямокутника $ABCD$.

131. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування рівнобедреного трикутника ABC ,

у якого $\angle ABC = 120^\circ$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення ромба $AMBN$, у якого $\angle AMB = 60^\circ$, розташованого у площині трикутника ABC .

132. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого паралелограма $ABCD$, який не є ромбом, так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення прямокутника, утвореного при перетині бісектрис кутів паралелограма $ABCD$.

133. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$, $B'C' < A'D'$) є зображенням за методом паралельного проєктування заданої трапеції $ABCD$ так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення точки Q перетину бісектрис кутів ABC і BAD трапеції $ABCD$.

134. На картинній площині задано еліпс F' з центром у точці O' , пряму a' і точку M' , про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O та деякої прямої a і точки M , що належать площині цього кола. Згідно застосованого закону зображення побудуйте зображення b' прямої b , що проходить через точку M перпендикулярно до прямої a .

135. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого

закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

136. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника, катети якого відносяться як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

137. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника, у якого катет відноситься до гіпотенузи як $3:5$.

138. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника з кутом у 60° .

139. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) з кутом у 30° , висоти CH цього трикутника і бісектрис кутів CHA і CHB .

140. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого

закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника з кутом у 15° .

141. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутного трикутника з кутом у $22,5^\circ$.

142. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого вписаного у це коло трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло F прямокутного трикутника MNK , $\angle MNK = 90^\circ$, у якого $\angle MNK$ складає половину кута ABC .

143. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного дванадцятикутника, вписаного у коло-оригінал.

144. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення квадрата, вписаного у коло-оригінал.

145. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного восьмикутника, вписаного у коло-

оригінал.

146. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного десятикутника, вписаного у коло-оригінал.

147. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного п'ятикутника, вписаного у коло-оригінал.

148. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у 30° .

149. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутника, сторони якого відносяться як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

150. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом у 45° .

151. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого

закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом у 60° .

152. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло-оригінал прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом у 30° .

153. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого вписаного у це коло трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаного у коло F прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом, що складає половину кута ABC .

154. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O , і деяку рівнобічну трапецію з кутом у 60° . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції, подібної до заданої.

155. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції з кутом у 60° , основи якої відносяться як 1:2.

156. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого

закону зображення рівнобічної трапеції з кутом у 45° , вписаної у коло-оригінал.

157. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції з кутом у 45° , основи якої відносяться як 1:3.

158. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції з кутом у $22,5^\circ$.

159. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції з кутом у 30° .

160. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого, вписаного у це коло, трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' — зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції, один з кутів якої складає половину кута ABC .

161. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого

закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції, основи якої видно із центра даного кола, відповідно, під кутами у 60° і 120° .

162. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції, основи якої видно із центра даного кола, відповідно, під кутами у 45° і 90° .

163. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого вписаного у це коло трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції, основи якої видно із центра даного кола під кутами, один з яких дорівнює куту ABC , а інший – половині кута ABC .

164. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення вписаної у коло-оригінал рівнобічної трапеції, основи якої видно із центра даного кола, відповідно, під кутами у 120° і 90° .

165. Задано еліпс F' з центром у точці O' і хордою $M'N'$ ($O' \notin M'N'$). Побудуйте дотичні прямі до еліпса F' , які є паралельними до хорди $M'N'$.

166. Задано еліпс F' з центром у точці O' і описаний навколо цьо-

го еліпса трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого, описаного навколо цього кола, трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення бісектриси кута BAC трикутника ABC .

167. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала прямокутного трикутника, катети якого відносяться як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

168. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного восьмикутника, описаного навколо кола-оригінала.

169. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного шестикутника, описаного навколо кола-оригінала.

170. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного дванадцятикутника, описаного навколо кола-оригінала.

171. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого

закону зображення правильного п'ятикутника, описаного навколо кола-оригінала.

172. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення правильного десятикутника, описаного навколо кола-оригінала.

173. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у 120° .

174. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у 135° .

175. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого, вписаного у це коло, трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала рівнобедреного трикутника, кут при вершині якого складає половину кута ABC .

176. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого

закону зображення описаного навколо кола-оригінала рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у 30° .

177. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала рівнобедреного трикутника, у якого основа відноситься до висоти як 4:5.

178. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала рівнобедреного трикутника, у якого основа відноситься до висоти як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

179. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала ромба з кутом при вершині у 30° .

180. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала ромба, у якого сторона відноситься до висоти як 5:4.

181. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаного навколо кола-оригінала ромба, у якого сторона відноситься до висоти як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$. $m > n$.

182. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F

з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала прямокутної трапеції з кутом у 60° .

183. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала прямокутної трапеції з кутом у 45° .

184. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого, вписаного у це коло, трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала прямокутної трапеції з кутом, що дорівнює куту ABC ($\angle ABC \neq 90^\circ$).

185. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого, вписаного у це коло, трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала прямокутної трапеції, з кутом, що дорівнює половині кута ABC .

186. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O , і деякий $\angle MNK$ ($\angle MNK \neq 90^\circ$). Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо

кола-оригінала прямокутної трапеції, з кутом, що дорівнює куту MNK .

187. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала прямокутної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як $3:2$.

188. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала прямокутної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, $m > \frac{n}{2}$.

189. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала рівнобічної трапеції з кутом у 60° .

190. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала рівнобічної трапеції з кутом у 30° .

191. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого вписаного у це коло трикутника ABC

($\angle ABC \neq 90^\circ$) так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала рівнобічної трапеції з кутом, що дорівнює куту ABC .

192. Задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O і деякого, вписаного у це коло, трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала рівнобічної трапеції з кутом, що дорівнює половині кута ABC .

193. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Задано також деякий $\angle MNK$ ($\angle MNK \neq 90^\circ$). Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала рівнобічної трапеції з кутом, що дорівнює куту MNK .

194. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала рівнобічної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як 3:2.

195. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала рівнобічної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як $m:n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

196. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала трапеції, у якої кути, прилеглі до більшої основи, відповідно, дорівнюють 60° і 45° .

197. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала трапеції, у якої кути, прилеглі до більшої основи, відповідно, дорівнюють 60° і 30° .

198. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала трапеції, у якої кути, прилеглі до більшої основи, відповідно, дорівнюють 45° і $22,5^\circ$.

199. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала трапеції, два протилежних кута якої, відповідно, дорівнюють 60° і 45° .

200. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Побудуйте зображення згідно застосованого закону зображення описаної навколо кола-оригінала трапеції, два протилежних кута якої, відповідно, дорівнюють 60° і 30° .

Тестові завдання для самоконтролю до розділу II

1. Фігуру F евклідової геометрії називають **лінійною**, якщо ...

А	Б	В	Г
усі точки цієї фігури належать певній площині.	ця фігура є ламаною	усі точки цієї фігури належать певній прямій	ця фігура має своєю підмножиною певний відрізок.

2. Фігуру F евклідової геометрії називають **плоскою**, якщо ...

А	Б	В	Г
усі точки цієї фігури належать певній площині	усі точки цієї фігури належать певній прямій	ця фігура є простою замкненою ламаною	ця фігура має своєю підмножиною певний трикутник

3. Фігуру F евклідової геометрії називають **нелінійною плоскою**, якщо

А	Б	В	Г
ця фігура є лінійною	ця фігура є плоскою, але не є лінійною	ця фігура містить три точки, що не належать одній прямій	ця фігура містить принаймні три точки, що не належать одній прямій

4. Встановіть відповідність між початком речення і **правильним** його закінченням.

I. Для лінійної геометричної фігури паралельне проєктування вважають виродженням ... А. ... якщо воно є виродженням для площини, що цю фігуру містить.

II. Для нелінійної плоскої геометричної фігури паралельне проєктування вважають виродженням ... Б. ... підмножина прямої.

III. При виродженому для лінійної геометричної фігури паралельному проєктуванні проєкцією цієї фігури є ... В. ... якщо воно є виродженням для прямої, що цю фігуру містить.

IV. При виродженому для нелінійної плоскої геометричної фігури паралельному проєктуванні проєкцією цієї фігури є... Г. ... пряма.
Д. ... точка.

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

5. При паралельному проєктуванні проєкцією трикутника-каркаса не може бути ...

А	Б	В	Г
відрізок	точка	трикутник-каркас, що дорівнює оригіналу	відрізок з виділеною точкою

6. При паралельному проєктуванні проєкцією плоского трикутника не може бути ...

А	Б	В	Г
плоский трикутник	відрізок з виділеною точкою	відрізок	трикутник-каркас

7. Зображенням трикутника-каркаса при невиродженому паралельному проєктуванні може бути ...

А	Б	В	Г
довільний плоский трикутник	довільний відрізок	довільний трикутник-каркас	лише трикутник-каркас, що є подібним оригіналу

8. Зображенням плоского трикутника при невиродженому паралельному проєктуванні може бути ...

А	Б	В	Г
довільний плоский трикутник	лише рівнобедрений плоский трикутник	довільний трикутник-каркас	лише плоский трикутник, подібний оригіналу

9. Якщо відомо, що заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника-каркаса ABC площини β , то, згідно застосованого закону зображення, для побудови зображення точки M площини β , яка не належить жодній з прямих AB , AC , BC , теорему Фалеса доведеться використати принаймні ...

А	Б	В	Г
один раз	два рази	три рази	чотири рази

10. Якщо плоска геометрична фігура F' є зображенням плоскої геометричної фігури F при певному, невиродженому для фігури F паралельному проєктуванні, то фігури F і F' **обов'язково** є ...

А	Б	В	Г
рівними	афінно еквівалентними	подібними	не рівними

11. Будь-яке зображення нелінійної плоскої геометричної фігури при невиродженому для цієї фігури паралельному проєктуванні є ...

А	Б	В	Г
метрично повним	подібно повним	афінно повним	афінно неповним

12. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Згідно застосованого закону зображення, за умови довільної форми трикутника ABC , безпосереднє використання цього трикутника **не є обов'язковим** для побудови зображення ...

А	Б	В	Г
бісектриси BL трикутника ABC	висоти CH трикутника ABC	серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC	медіани AM трикутника ABC

13. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування заданого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Згідно застосованого закону зображення, за умови довільної форми трикутника ABC , безпосереднє використання цього трикутника **не є обов'язковим** для побудови зображення ...

А	Б	В	Г
центроїда трикутника ABC	ортоцентра трикутника ABC	центра кола, описаного навколо трикутника ABC	інцентра трикутника ABC

14. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал загублено. Згідно застосованого закону зображення за зображення бісектриси BL трикутника ABC **можна прийняти ...**

А	Б	В	Г
промінь $B'L'$, де L' – довільна внутрішня точка відрізка $A'C'$.	відрізок $B'L'$, де L' – довільна точка прямої $A'C'$.	відрізок $B'L'$, де L' – довільна внутрішня точка відрізка $A'C'$.	промінь $B'L'$, де L' – довільна точка прямої $A'C'$.

15. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал загублено. Згідно застосованого закону зображення, за зображення інцентра трикутника ABC **можна прийняти ...**

А	Б	В	Г
довільну точку всередині трикутника $A'B'C'$	довільну точку всередині трикутника, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$	довільну точку, яка належить плоскому трикутнику, утвореному середніми лініями трикутника $A'B'C'$	вершину A' трикутника $A'B'C'$

16. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал загублено. Згідно застосованого закону зображення, за зображення висоти CH трикутника ABC **не можна прийняти ...**

А	Б	В	Г
відрізок $C'H'$, де H' – певна внутрішня точка відрізка $A'B'$.	відрізок $C'B'$	відрізок $C'H'$, де H' – певна, зовнішня для відрізка $A'B'$, точка прямої $A'B'$.	відрізок $A'H'$, де H' – певна внутрішня точка відрізка $B'C'$.

17. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал загублено. Згідно застосованого закону зображення, за зображення ортоцентра трикутника ABC **не можна прийняти ...**

А	Б	В	Г
вершину трикутника $A'B'C'$	точку, що знаходиться всередині трикутника $A'B'C'$	внутрішню точку сторони $A'B'$ трикутника $A'B'C'$	точку, що знаходиться всередині кута, вертикального до кута $A'B'C'$

18. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал загублено. Точка M' є серединою сторони $A'B'$ трикутника $A'B'C'$. Згідно застосованого закону зображення, за зображення серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC **не можна прийняти ...**

А	Б	В	Г
пряму $T'M'$, де T' – довільна внутрішня точка відрізка $A'C'$.	пряму $T'M'$, де T' – довільна внутрішня точка відрізка $B'C'$.	пряму $C'M'$	відрізок $C'M'$

19. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням за методом паралельного проєктування деякого трикутника ABC так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B . Трикутник-оригінал загублено. Згідно застосованого закону зображення, за зображення центра кола, описаного навколо трикутника ABC , **можна прийняти ...**

А	Б	В	Г
центроїд трикутника $A'B'C'$	вершину B' трикутника $A'B'C'$	точку, що ділить медіану $C'M'$ трикутника $A'B'C'$ у відношенні 1:2, якщо рахувати від точки C'	точку, що розташована всередині кута, вертикального до кута $B'A'C'$

20. Зображенням паралелограма за методом паралельного проєктування **не може бути ...**

А	Б	В	Г
відрізок	трапеція	прямокутник	ромб

21. Зображенням квадрата при невиродженому для нього паралельному проєктуванні **не може бути ...**

А	Б	В	Г
квадрат	довільний ромб	відрізок	довільний прямокутник

22. Серед наведених тверджень вкажіть **правильне ...**

А. Зображенням трапеції при паралельному проєктуванні може бути лише трапеція.

Б. Зображенням трапеції при паралельному проєктуванні може бути паралелограм.

В. Зображенням трапеції при паралельному проєктуванні може бути трапеція.

Г. Зображенням довільної трапеції при паралельному проєктуванні може бути довільна трапеція.

23. Встановіть відповідність між початком речення і **правильним** його закінченням.

- | | |
|--|---|
| I. Радіус кола, перпендикулярний до хорди цього кола ... | А. ... є перпендикуляром, проведеним з центра кола до даної дотичної. |
| II. Радіус кола, проведений до точки дотику дотичної до кола ... | Б. ... належать одному колу. |
| III. Середини паралельних між собою хорд кола ... | В. ... є його взаємно перпендикулярними діаметрами. |
| IV. Взаємно спряжені діаметри кола ... | Г. ... ділить дану хорду навпіл. |
| | Д. ... належать одному діаметру даного кола. |

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

24. На евклідовій площині пряма і круг **не можуть** ...

А	Б	В	Г
мати лише дві спільні точки	мати лише одну спільну точку	не мати спільних точок	мати безліч спільних точок

25. Встановіть відповідність між початком речення і **правильним** його закінченням.

I. Радіусом еліпса називається А. ... який сполучає дві відрізок... точки даного еліпса.

Б. ... він є перпенди-

II. Хордою еліпса називається кулярним до діаметра CD . відрізок...

В. ... який сполучає центр

III. Середини усіх паралельних між даного еліпса з його певною собою хорд еліпса належать ... точкою.

Г. ...він ділить навпіл усі

IV. Якщо діаметр AB еліпса є спря- хорди даного еліпса, паралельним до його діаметра CD , то ... лельні до діаметра CD .

Д. ... певному діаметру даного еліпса .

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

26. На евклідовій площині пряма і еліпс **не можуть** ...

А	Б	В	Г
не мати спільних точок	мати дві спільні точки	мати одну спільну точку	мати три спільні точки

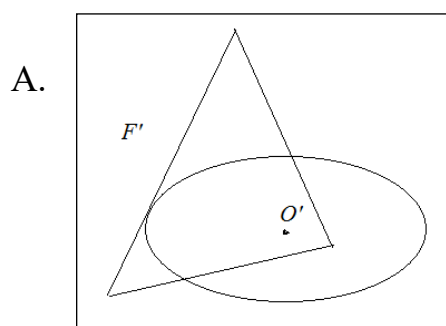
27. Зображенням кола при паралельному проєктуванні **не може бути ...**

А	Б	В	Г
еліпс	парабола	коло	відрізок

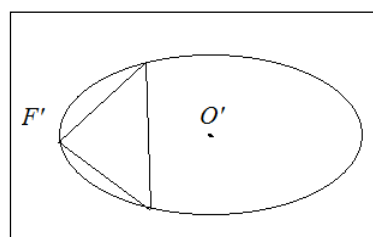
28. Якщо через точку A , яка знаходиться у площині еліпса, до даного еліпса проходять дві дотичні, то ...

А	Б	В	Г
точка A належить даному еліпсу	точка A лежить у внутрішній відносно даного еліпса області	точка A є центром даного еліпса	точка A лежить у зовнішній відносно даного еліпса області

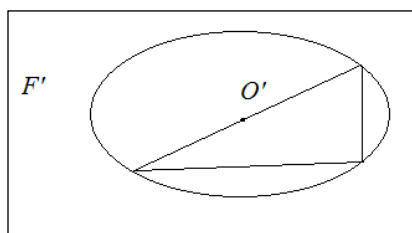
29. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Вкажіть, на якому з наведених рисунків згідно застосованого закону зображення побудовано зображення **прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал**.



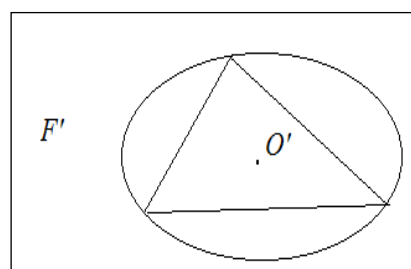
Б.



В.

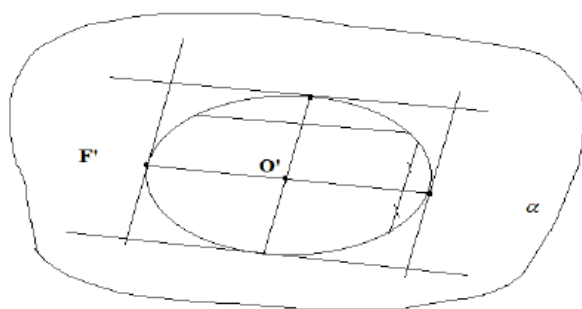


Г.

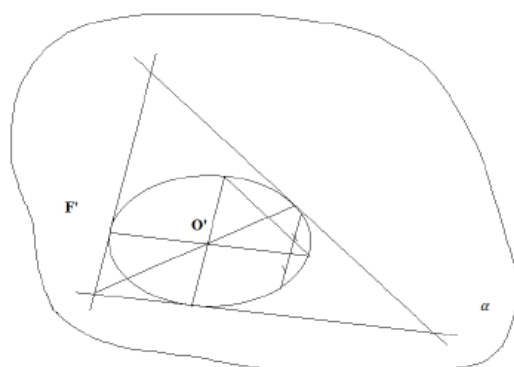


30. Задано еліпс F' з центром у точці O' , про який відомо, що він є зображенням за методом паралельного проєктування деякого кола F з центром у точці O . Вкажіть, на якому з наведених рисунків згідно застосованого закону зображення побудовано зображення **рівнобедреного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала**.

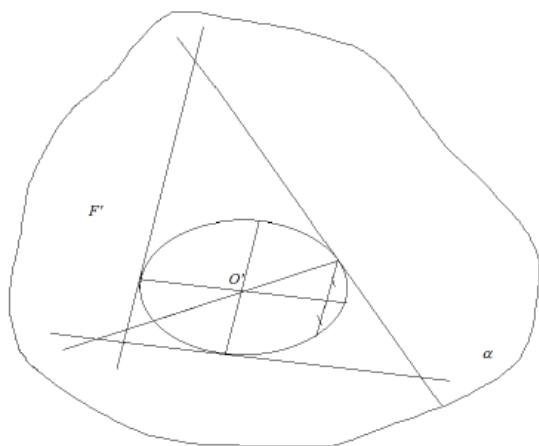
А.



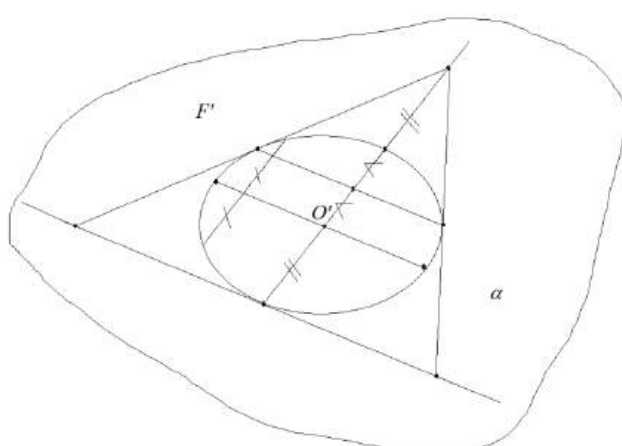
Б.



В.



Г.



Відповіді, розв'язки або вказівки

до розв'язання практичних завдань до розділу I

1. 1) Для побудови точок M_1 і M_2 проводять $MM_1 \perp \alpha$, $MM_2 \perp \beta$. $MM_1 \parallel \gamma$, $MM_2 \parallel \gamma$ і тому $(M_1MM_2) \parallel \gamma$. $\alpha \cap \beta = BC$, $\gamma \cap BC = B$. Отже, існує точка $N = (M_1MM_2) \cap BC$. Паралельні площини перетинають будь-яку площину за паралельними прямими. Отже, $\alpha \cap \gamma = AB$, $(M_1MM_2) \cap \alpha = M_1N$, $M_1N \parallel AB$, $M_1N \perp BC$. Аналогічно, $M_2N \perp BC$ (рис. 69). Після відповідного «розрізання» і «розгортання», які є рухами геометричних фігур у просторі, на картинній площині отримуємо фігуру, яку зображено на рис. 68, де $M_1N \perp BC$ і $M_2N \perp BC$. Але на площині через точку N проходить єдина пряма, перпендикулярна до прямої BC . Отже, точки M_1 , N , M_2 лежать на одній прямій, $M_1M_2 \perp BC$. Одночасно, $AB \perp BC$. Тому $M_1M_2 \parallel AB$.

2) Аналогічним чином доводиться, що пряма M_1M_3 картинної площини є перпендикулярною до прямої AB . У оригіналі (до «розрізання» і «розгортання») прямі BD_1 і BD_2 співпадають, точка K співпадає з точкою Q , $M_3K \perp BD_2$, $M_2K \perp BD_2$ (рис. 69). Тому на картинній площині $M_2Q \perp BD_1$, $M_3K \perp BD_2$, $BQ = BK$ (рис. 74).

4. Оригінал – точку M – можна відновити навіть лише за множиною точок $\{M_1; M_2\}$.

Якщо за рис. 74 через пряму AB і через пряму BC , провести, відповідно, площини γ' і β' , перпендикулярні до площини α , утвориться тригранний кут з плоскими прямими кутами ABC , ABD'_2 ,

The diagram shows a rectangular prism (box) situated within a curved, irregular surface. The vertices of the prism are labeled as follows: M_1 (top-left-back), M_2 (bottom-right-front), M_3 (top-right-back), M (top-right-front), N (bottom-left-front), B (bottom-left-back), P (top-left-front), and C (bottom-left-back, slightly offset from B). The surface is labeled with Greek letters: α (top-left), β' (bottom-left), and γ (top-right). A vertical line segment is labeled A . A point on the right edge is labeled $K \equiv Q$. A line segment at the bottom right is labeled $D'_1 \equiv D'_2$. Right-angle symbols are shown at several vertices of the prism.

5. 1) Точки M , N , M' , N' належать площині β , тій площині, яка містить прямі AM і AN . Отже, прямі MN і $M'N'$ належать площині β , при цьому пряма $M'N'$ лежить у площині α . Якщо припустити, що прямі MN і $M'N'$ перетинаються у певній точці, то ця точка

ника AMN , коефіцієнт подібності $k = \frac{AM'}{AM} < 1$. Отже, $M'N' = k \cdot MN$,

$$\frac{M'N'}{MN} < 1, M'N' < MN.$$

6. Згідно методу лінійної перспективи, основа картини – пряма h – це пряма перетину картинної площини α і площини другорядних проєкцій β , $\alpha \perp \beta$, точка M' – центральна проєкція точки M на площину α із точки зору A , точка M'_1 – центральна проєкція на площину α із точки зору A точки M_1 – ортогональної проєкції точки M на площину β : $MM_1 \perp \beta$ (див. рис. 22). Звідси випливає, що $MM_1 \parallel \alpha$. Площина (MAM_1) перетинає площину α за прямою $M'M'_1$. Отже, згідно розв'язку завдання 5, $M'M'_1 \parallel MM_1$. Звідси випливає, що $M'M'_1 \perp \beta$ і тому $M'M'_1 \perp h$, бо пряма h належить площині β .

7. На картинній площині α розглянемо проєкцію $\{M'; M'_1\}$ точки M евклідового простору за методом лінійної перспективи (див. рис. 23). Площина α містить також пряму h , що є основою картини, лінію горизонту h' і головну точку B' картини, $M'M'_1 \perp h$, $h' \parallel h$, $B' \notin h'$, $M'_1 \notin h'$. Через пряму h , перпендикулярно до площини α проведемо площину β , у площині α проведемо $B'B \perp h'$. Через точку B' , перпендикулярно до площини α , проведемо пряму a , відкладемо на прямій a відрізок AB , $AB = B'B$ (рис. 22). Зрозуміло, що $a \parallel \beta$, $A \notin \beta$, точка A належить одному з півпросторів, визначених площиною α . Проведемо пряму AM'_1 . Оскільки $M'_1 \notin h'$, пряма AM'_1 перетне площину β у певній точці M_1 . Через точку M_1 проведемо пряму b , $b \perp \beta$. $M = AM' \cap b$. Для обґрунтування існування точки M достатньо довести, що прямі AM' і b належать одній площині і не є паралельними. Другий розв'язок сформульованої задачі – точку,

симетричну до точки M відносно площини α – отримаємо, якщо побудуємо точку A у іншому півпросторі відносно площини α . Легко переконатися у тому, що інших оригіналів у заданій проєкції бути не може.

8. Якщо при проєктуванні за методом Федорова проєкцією точки є точка, то для цієї точки оригінал співпадає з її проєкцією. Нехай, при проєктуванні за методом Федорова, проєкцією точки на картинній площині α є орієнтоване коло з центром у точці M_1 (рис. 27). Через точку M_1 проведемо пряму l , $l \perp \alpha$. Площина α розділяє евклідов простір на два півпростора, треба, щоб один з них було визначено, як додатній, а другий – як від’ємний. У залежності від орієнтації даного кола, на прямій l , по той чи інший бік відносно площини α , відкладемо відрізок M_1M , який дорівнює радіусу даного кола. Точка M є шуканим оригіналом. Легко переконатися у тому, що іншого оригінала у заданій проєкції бути не може.

9. 1) Нескінченна сукупність однаково орієнтованих кіл однакових

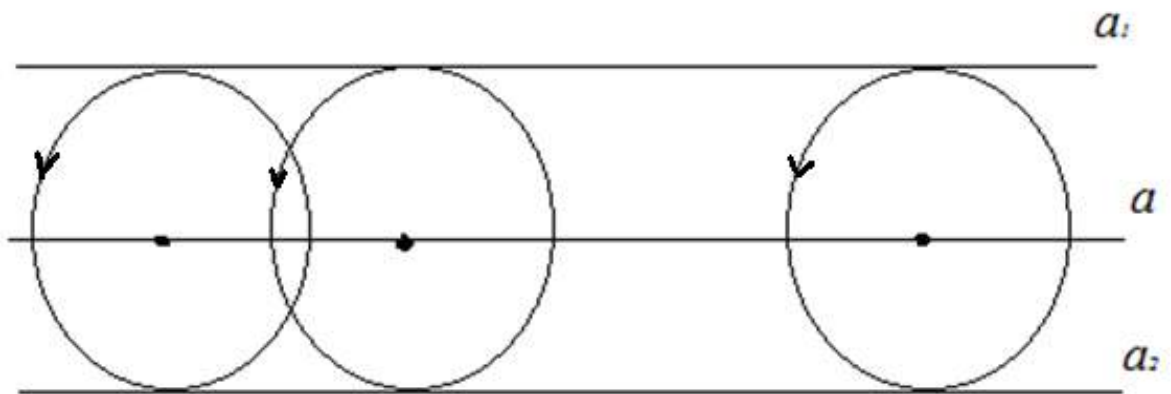


Рис. 235

радіусів, які дотикаються до прямих a_1 і a_2 картинної площини, $a_1 \parallel a_2$. Зрозуміло, що центри цих кіл розташовані на прямій a , що є рівновіддаленою від прямих a_1 і a_2 , ($a \parallel a_1$), радіуси кіл дорівнюють

відстані прямої-оригінала від картинної площини (дивись рис. 235).

2) Нескінченна сукупність орієнтованих кіл, вписаних у пару вертикальних кутів, утворених прямими a_1 і a_2 картинної площини, які перетинаються у точці A , разом з точкою A . Кола, вписані у один кут,

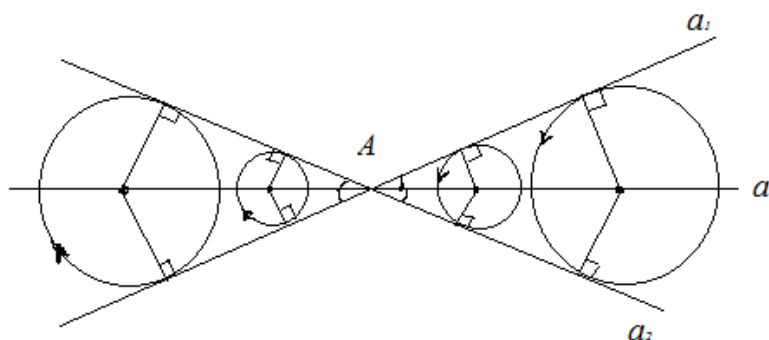


Рис. 236

мають однакову орієнтацію, у різні кути – різну орієнтацію (дивись рис. 236). Точка A – це точка перетину заданої прямої з картинною площиною

ною, вищевказані вертикальні кути між прямими a_1 і a_2 , дорівнюють 2ψ , де ψ – кут нахилу заданої прямої до картинної площини.

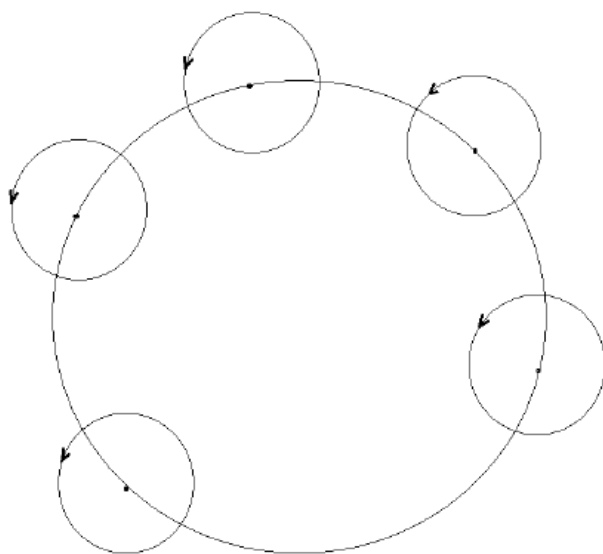


Рис. 237

3) Безліч кіл однакових радіусів однакої орієнтації, центри яких розташовані на колі, що є ортогональною проєкцією даного кола на картинну площину (рис. 237).

10. Ні. У випадку, коли точки M і M' належать картинній площині і є різними, точка M' не може бути паралельною проєкцією точки

M на дану площину при жодному паралельному проєктуванні.

11. Так.

12. Так.

13. Нехай пряма l задає напрямок паралельного проєктування. Па-

паралельною проєкцією пари точок A і B буде пара точок, якщо пряма AB не є паралельною до прямої l , і одна точка, якщо $AB \parallel l$ або $AB \equiv l$.

14. Нехай пряма l задає напрямок паралельного проєктування.

1) Якщо точки A, B, C належать одній прямій m , то їх паралельними проєкціями на картинну площину будуть три різні точки, які лежать на одній прямій, якщо пряма m не є паралельною до прямої l , і одна точка, якщо $m \parallel l$ або $m \equiv l$.

2) Якщо точки A, B, C разом не належать до жодної прямої, то паралельною проєкцією на картинну площину геометричної фігури $\{A, B, C\}$ буде геометрична фігура, утворена трьома точками, які не належать до жодної однієї прямої, якщо пряма l не є паралельною до площини (ABC) і пряма l не лежить у цій площині; геометрична фігура, утворена трьома різними точками однієї прямої, якщо $l \parallel (ABC)$ або $l \subset (ABC)$, але пряма l не є паралельною і не співпадає з жодною із прямих AB, AC чи BC ; геометрична фігура, утворена парою точок, якщо пряма l є паралельною або співпадає з однією із прямих AB, AC чи BC .

15. Ні.

16. Ні. Точка не може бути зображенням жодної прямої, яка є паралельною до картинної площини або лежить у картинній площині.

17. Множина точок прямої, яка проходить через точку M' паралельно до прямої l , що задає напрямок паралельного проєктування, або множина точок самої прямої l , якщо $M' \in l$.

18. Про прямі, які є паралельними до картинної площини, або належать картинній площині.

19. Прямі a і a' не повинні бути мимобіжними. Якщо це різні прямі, то площина, якій вони належать, повинна бути паралельною до

прямої l , що задає напрямок паралельного проєктування, або містити цю пряму. Одночасно, пряма a не повинна бути паралельною до прямої l чи співпадати з прямою l .

20. Так.

21. Зрозуміло, що прямі a і a' належать одній площині β , $l \parallel \beta$ або $l \subset \beta$. Отже, у якості картинної площини можна обрати будь-яку площину, що містить пряму a і є відмінною від площини β . У якості прямої, що задає напрямок проєктування, можна обрати довільну пряму l' , $l' \parallel \beta$, пряма l' не є паралельною ані до прямої a , ані до прямої a' .

22. Точку A' на прямій a' можна обрати довільним чином.

23. Нехай точка O є початком променя h , а точка O' – початком променя h' . При фіксованому апараті паралельного проєктування промінь h' є паралельною проєкцією променя h тоді та тільки тоді, коли прямі, що містять промені h і h' , належать одній площині β , яка є паралельною до прямої l , що задає напрямок проєктування, або містить пряму l ; якщо точка O' не співпадає з точкою O , то пряма OO' повинна бути паралельною до прямої l або співпадати з нею, промені h і h' у площині β повинні лежати по одну сторону відносно прямої OO' , якщо точки O і O' співпадають, то промені h і h' у площині β повинні лежати по одну сторону відносно прямої, яка проходить через точку O паралельно до прямої l (або відносно самої прямої l , якщо $O \in l$).

24. Так.

25. Ні. Наприклад, це є неможливим для променя, який належить картинній площині.

26. Це відбувається тоді та тільки тоді, коли 1) ці два різних променя належать одній площині β , яка є паралельною до прямої l ,

що задає напрямок паралельного проєктування, або містить пряму l ,
2) початки променів співпадають і обидва променя лежать у площині β по одну сторону відносно прямої, що проходить через їх спільний початок паралельно до прямої l ; або початки променів не співпадають, пряма, що проходить через початки цих променів, є паралельною до прямої l чи співпадає з прямою l , у площині β задані промені лежать по одну сторону відносно прямої, що містить їх початки.

27. За промінь h' можна прийняти довільний промінь прямої a' .

28. Треба, щоб прямі AA' і BB' були паралельними. Тому, якщо положення відрізків AB і $A'B'$ у просторі фіксовано, то, у загальному випадку, – ні. Якщо за допомогою рухів відрізки AB і $A'B'$ можна переміщати у просторі, то – так.

29. Так.

30. За точку B' можна прийняти довільну точку прямої a' , відмінну від точки A' .

31. Довжина відрізка $A'B'$ є не меншою ніж відстань між прямими, що проходять через точки A і B паралельно до прямої l , яка задає напрямок паралельного проєктування.

32. Довжина відрізка AB може бути довільною, прямі AA' і BB' є паралельними, або $A \equiv A'$ чи $B \equiv B'$.

33. Відстань між прямими a' і b' по відношенню до відстані між прямими a і b може бути довільною. Див. розв'язання задачі 32.

34. Нехай площина α і пряма l утворюють апарат паралельного проєктування, прямі a і b перетинаються у певній точці. Існує єдина площина β , що містить прямі a і b . Проекцією прямих a і b на площину α у напрямку прямої l буде пара прямих a' і b' площини α , які перетинаються, у випадку, коли пряма l не є паралельною до площини β . Проекцією прямих a і b буде одна пряма у випадку, коли

пряма l є паралельною до площини β , але пряма l не є паралельною ані до прямої a , ані до прямої b . Проекцією прямих a і b буде пряма з виділеною на ній точкою у випадках, коли $l \parallel a$ або $l \parallel b$.

35. Нехай площина α і пряма l утворюють апарат паралельного проєктування, прямі a і b є мимобіжними. У просторі існує така площина β , що є паралельною як до прямої a , так і до прямої b . (Таких площин безліч, усі вони є паралельними між собою). Проекцією прямих a і b на площину α у напрямку прямої l буде 1) пара прямих a' і b' площини α , які перетинаються, у випадку, коли пряма l не є паралельною до площини β , 2) пара паралельних прямих у випадку, коли пряма l є паралельною до площини β , але пряма l не є паралельною ані до прямої a , ані до прямої b , 3) пряма і точка, що цій прямій не належить, у випадках, коли $l \parallel a$ або $l \parallel b$.

36. Так. За площину α можна прийняти будь-яку площину, яка є одночасно паралельною до прямих a і b .

37. Якщо пряма a' є зображенням прямої a за методом паралельного проєктування, то при цьому між прямими a і a' встановлено взаємно однозначну відповідність f (теорема 3.4). Нехай точки $A, B \in a$, точка A не співпадає з точкою B , $f(A) = A'$, $f(B) = B'$,

($A', B' \in a'$, точка A' не співпадає з точкою B'). Позначимо $k = \frac{A'B'}{AB}$.

Якщо точки $P, Q \in a$, точка P не співпадає з точкою Q , $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'$, ($P', Q' \in a'$, точка P' не співпадає з точкою Q'), то, за

теоремою 3.10, $\frac{P'Q'}{A'B'} = \frac{PQ}{AB}$ або $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{A'B'}{AB}$, $\frac{P'Q'}{PQ} = k$, $P'Q' = k \cdot PQ$.

Отже, при відображенні $f: a \rightarrow a'$ відстань між будь-якими двома

точками прямої a змінюється у k разів, відображення f є відображенням подібності прямої a на пряму a' з коефіцієнтом k .

38. У евклідовому просторі виберемо довільні прямі a і a' , пряма a не співпадає з прямою a' , і довільні точки $A, B \in a$, точка A не співпадає з точкою B , $A', B' \in a'$, точка A' не співпадає з точкою B' . Розглянемо довільне паралельне проєктування h прямої a на площину α , що містить пряму a' , яке для прямої a є не виродженим. Тоді $h(a) = b$, де b – певна пряма площини α , $h(A) = P$, $h(B) = Q$, $P, Q \in b$, точка P не співпадає з точкою Q . Із теорії перетворень подібності відомо, що існує таке перетворення подібності φ площини α , що $\varphi(b) = a'$, $\varphi(P) = A'$, $\varphi(Q) = B'$. Тоді $(\varphi \circ h)(a) = a'$, пряма a' є зображенням прямої a при паралельному проєктуванні h , при цьому проєктуванні відрізок $A'B'$ є зображенням відрізка AB , але довжину відрізка AB за довжиною відрізка $A'B'$ визначити неможливо (згідно вибору точок A, B, A', B' відрізки AB і $A'B'$ є цілком довільними).

39. За теоремою 3.5, згідно застосованого закону зображення, зображенням відрізка AB є відрізок $A'B'$, шукана точка M' лежить між точками A' і B' . За теоремою 3.10, при зображенні фігур за методом паралельного проєктування зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій. Тому

$$\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM}{MB}.$$

$\frac{A'M'}{M'B'}$ однозначно визначає положення точки M' на відрізку $A'B'$. На

картинній площині α проведемо довільний промінь h з початком у точці A' , який не лежить на прямій a' (рис. 238). Послідовно відкладемо на промені h відрізки $A'M_1$ і M_1B_1 , $A'M_1 = AM$ і $M_1B_1 = MB$.

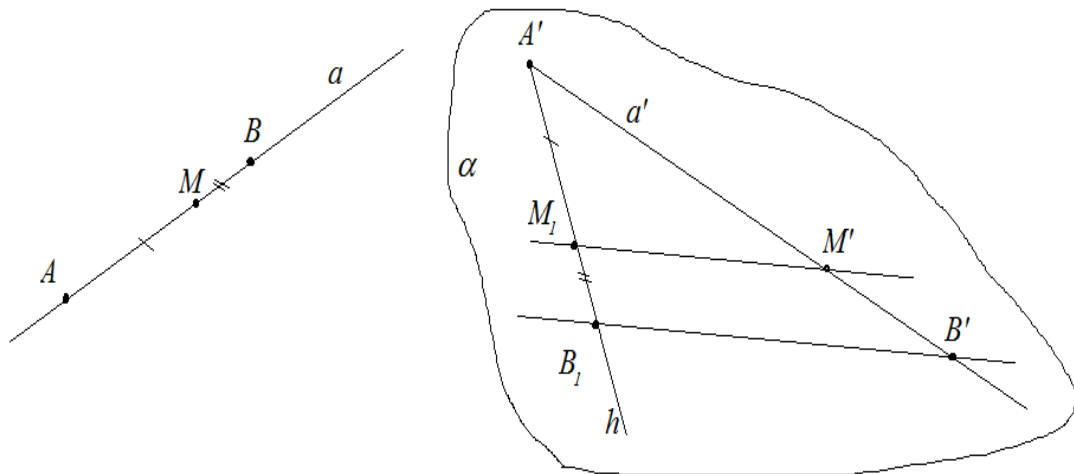


Рис. 238

Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну прямій B_1B' до перетину з прямою a' у точці M' . За теоремою Фалеса $\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM_1}{M_1B_1}$. Але,

за побудовою, $\frac{AM_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB}$. Отже, точка M' є шуканою.

40. На картинній площині α проведемо довільний промінь h з

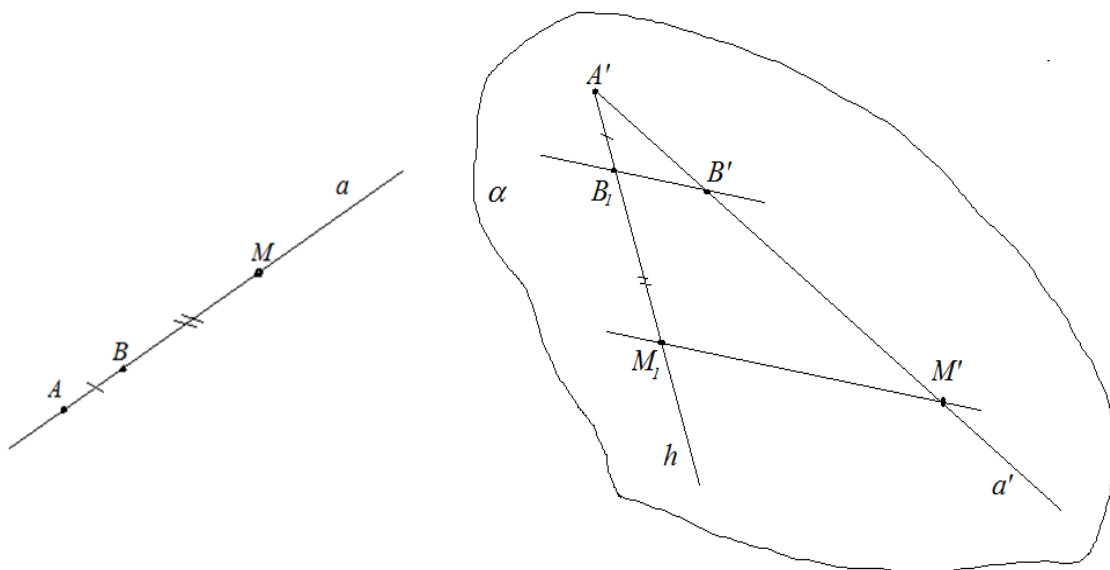


Рис. 239

початком у точці A' , який не належить прямій a' . Послідовно

відкладемо на промені h відрізки $A'B_1 = AB$, $B_1M_1 = BM$. Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну прямій B_1B' , до перетину з прямою a' у точці M' . Точка M' є шуканою (рис. 239).

Відповіді до тестових завдань для самоконтролю до розділу I

1. В, 2. Б, 3. А, 4. А, 5. А,

6.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
I		×						
II			×					
III						×		
IV							×	

7. Г, 8. Б,

9.

	А	Б	В	Г	Д
I					×
II		×			
III				×	
IV	×				

10.

	A	Б	В	Г
I		✗		
II				✗
III	✗			
IV			✗	

11. А, 12. Б, 13. Г, 14. В, 15. А,

16.

	A	Б	В	Г	Д	Е
I	✗					
II			✗			
III						✗
IV				✗		
V					✗	

17. Б, 18. Г, 19. А, 20. В, 21. Б, 22. А, 23. В, 24. Б, 25. Г,

26. Б, 27. А,

28.

	A	Б	В	Г	Д
I			✗		
II	✗				
III					✗
IV				✗	

29. В, 30. Г.

Відповіді, розв'язки або вказівки до розв'язання практичних завдань до розділу II

41. Для розв'язання даної задачі треба застосувати прийоми, які використовувалися при розв'язанні задачі 39, і міркування, аналогічні до проведених під час доведення теореми 5.1.

42. Достатньо обґрунтувати, що, якщо точка M площини β не належить жодній з прямих AB , AC , BC , то правильним є принаймні одне з наступних тверджень: пряма MA не є паралельною до прямої BC , пряма MB не є паралельною до прямої AC , пряма MC не є паралельною до прямої AB .

43. Див. вказівки до розв'язання задачі 41.

44. Див. вказівки до розв'язання задачі 41 і наслідок 1 з теореми 5.1.

45. Див. коментарі до розв'язання задачі 44.

46. І трикутник-оригінал, і трикутник-зображення задані на одному рисунку, трикутники мають спільну основу AC . Це означає (див. зауваження до наслідка 2 з теореми 5.2), що зображення M' ,

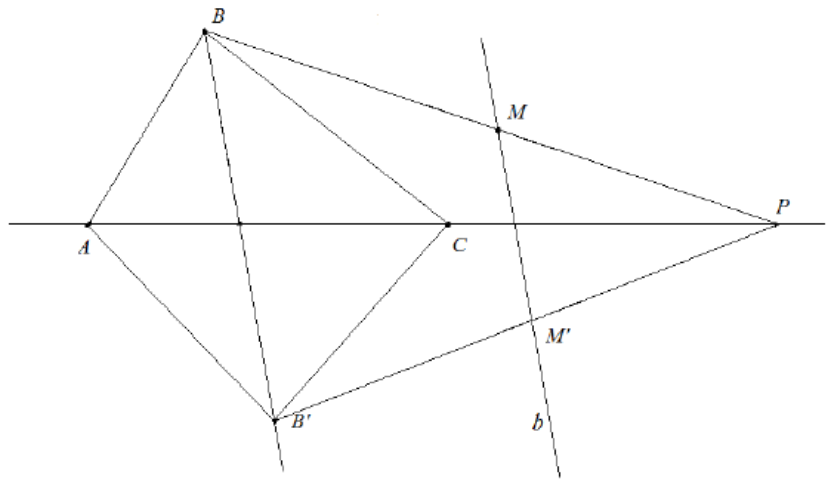


Рис. 240

N' , K' точок
 M , N , K згід-

но застосованого закону зображення співпадають з образами цих точок при косому стиску h до прямої AC у напрямку прямої BB' .

Розглянемо точку M . За умови задачі, пряма BM не співпадає з прямою BB' і не є паралельною до прямої AC . Проведемо пряму

BM до перетину з прямою AC у точці P (див. рис. 240). $h(P)=P$, бо пряма AC є прямою нерухомих точок косого стиску h . Косий стиск є окремим випадком афінного перетворення площини, отже, при косому стиску образом кожної прямої є пряма, $h(BP)=B'P$. Точка M' , яка є образом точки M при косому стиску h , по-перше, належить прямій $B'P$, по-друге, лежить на прямій b , що проходить через точку M , паралельно до прямої BB' : $M'=b \cap B'P$, $M'=h(M)$, при застосованому законі зображення точка M' є зображенням точки M .

Розглянемо точку N . За умови задачі, пряма BN є паралельною до прямої AC . $h(AC)=AC$, $h(B)=B'$, при косому стиску, як і при будь-якому афінному перетворенні площини, образом пари паралельних прямих є пара паралельних прямих. Тому $h(BN)=a$, пряма a проходить через точку B' паралельно до прямої AC (рис. 241),

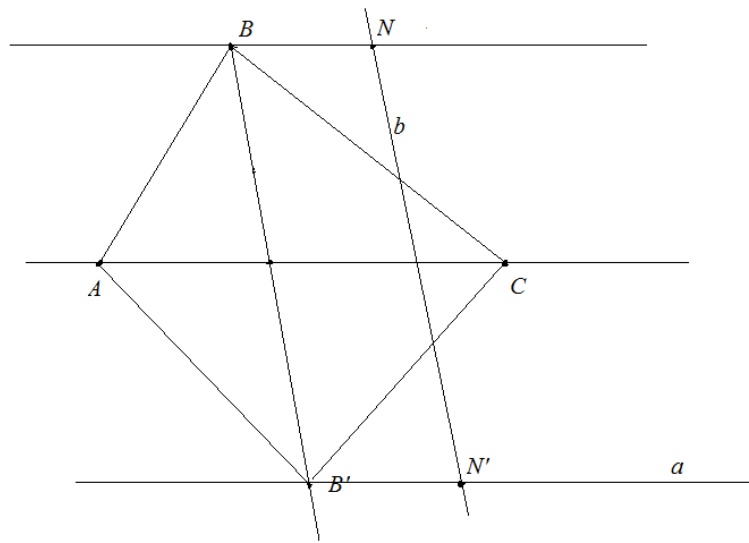


Рис. 241

$N' \in a$. З іншого боку, точка N' лежить на прямій b , яка проходить через точку N паралельно до прямої BB' . Отже, $N'=a \cap b$, $N'=h(N)$, при застосованому законі зображення точка N' є зображенням точки N .

Розглянемо точку K . За умови задачі, точка K лежить на прямій BB' . При косому стиску h до прямої AC у напрямку прямої BB'

прямої. Але, з технічної точки зору, зручніше обрати певну точку M , яка не належить прямій BB' , для якої пряма BM не є паралельною до прямої AC , побудувати точку $M' = h(M)$ так само, як було запропоновано при побудові точки M' , а потім, скориставшись тим фактом, що точка K не лежить на прямій MM' , побудувати точку K' , $K' = h(K)$, у той же спосіб, що і точки M' чи N' (рис. 242). Згідно застосованого закону зображення точка K' є зображенням точки K .

48. Розв'язання задачі можна провести аналогічно до розв'язання задачі 46. Справедливим є той факт, що перетворення площини, обер-

нене до косого стиску до певної прямої, є косим стиском до тієї ж самої прямої.

49. Розв'язання задачі можна провести аналогічно до розв'язання задачі 48.

50. Шукана пряма проходить через точку A' паралельно до прямої a' . Побудова не вимагає явного використання оригінала.

51. Шукана пряма є прямою, яка проходить через точку A' паралельно до прямої b' .

52. Відомо, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника є паралельною до основи цього трикутника. При невиродженому паралельному проєктуванні паралельні прямі зображуються паралельними прямими.

53. Відомо, що бісектриса зовнішнього кута KBC трикутника ABC , для якого $AB > BC$, перетинає промінь, доповняльний до променя CA , у такій точці L , що $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$. Треба використати цей

факт і застосувати теорему Фалеса. Можна запропонувати й інші варіанти розв'язання, але уникнути явного використання оригінала неможливо.

54. Треба спочатку побудувати, так само, як і при розв'язанні задачі 53, зображення бісектриси кута, вертикального до кута PBA .

55. На промені, доповняльному до променя CA , треба відкласти відрізок CL , $CL = CA$. Промінь BL буде шуканим зображенням. Правильність такої побудови обґрунтовується так само, як і при розв'язанні задачі 53.

56. Див. вказівки до розв'язання задачі 55.

57. Див. вказівки до розв'язання задачі 55.

58. Для кожного трикутника існують три зовнівписаних кола. Кожне з них дотикається певної сторони заданого трикутника та

продовжень двох інших його сторін. Центр кожного з таких кіл є точкою перетину бісектрис відповідних зовнішніх кутів заданого трикутника.

59. Див. вказівки до розв'язання задач 52 і 53.

60. Згідно задачі 6.14 задане зображення є афінно повним. У той же час, воно не є подібно повним. Як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 6.14, за заданим зображенням можна однозначно визначити відношення довжин відрізків AB і AN та міру кута ANC ($\angle ANC = 90^\circ$), але не можна встановити, наприклад, відношення довжин відрізків AN і CH . У той же час, якщо відношення довжин відрізків AN і CH стає відомим, оригінал вже можна відновити з точністю до перетворення подібності. Отже, задане зображення має коефіцієнт подібної неповноти, що дорівнює одиниці. Відповідно, задане зображення не є метрично повним, коефіцієнт метричної неповноти дорівнює двом.

61. Згідно наслідка 8 з теореми 5.1, задане умовою задачі зображення є подібно повним, бо містить зображення правильного трикутника. Отже, поставлену задачу можна розв'язати однозначно.

Розглянемо правильний трикутник ABC . Проведемо його медіани AA_1 , BB_1 , CC_1 . Вони одночасно є і його висотами: $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$. Якщо пряма l площини трикутника ABC є паралельною, припустимо, до прямої AC , то для побудови прямої a , яка проходить через точку P перпендикулярно до прямої l , достатньо через точку P провести пряму, паралельну до прямої BB_1 . (Аналогічні міркування, зрозуміло, є справедливими і у кожному з тих випадків, коли $l \parallel AB$, $l \parallel BC$, $l \parallel AA_1$, $l \parallel BB_1$, $l \parallel CC_1$).

Нехай на площині трикутника ABC пряма l не є паралельною до жодної з прямих AB , AC , BC . Через точку A , паралельно до прямої

l , проведемо пряму b . Ця пряма перетне пряму BC у точці D , яка не співпадає ані з точкою B , ані з точкою C . Утвориться трикутник

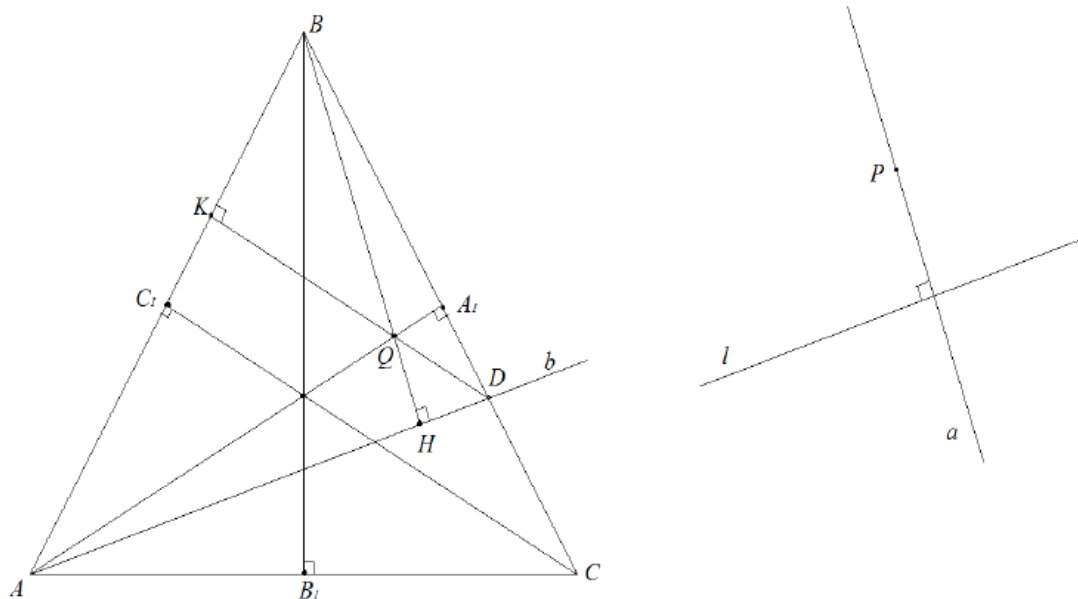


Рис. 243

ABD , одна з висот якого буде належати прямій AA_1 . Друга висота цього трикутника буде належати прямій DK , яка проходить через точку D паралельно до прямої CC_1 . Нехай точка Q є точкою перетину прямих AA_1 і DK . Тоді точка Q є ортоцентром трикутника ABD , пряма BQ є прямою, що містить висоту цього трикутника, проведену до сторони AD , $BQ \perp b$. Тепер зрозуміло, що пряма a , яка проходить через точку P перпендикулярно до прямої l , є паралельною до прямої BQ (рис. 243).

Властивості зображень геометричних фігур за методом паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови на картинній площині α . Безпосереднє використання оригінала для цього не є потрібним. Розглянемо лише той випадок, коли задана пряма l' не є паралельною до жодної з прямих $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, які містять сторони заданого трикутника $A'B'C'$ (рис. 244).

1. Побудуємо медіани $A'A'_1$ і $C'C'_1$ трикутника $A'B'C'$.

2. Через точку A' , паралельно до заданої прямої l' , проведемо пряму b' . Нехай $D' = b' \cap B'C'$.

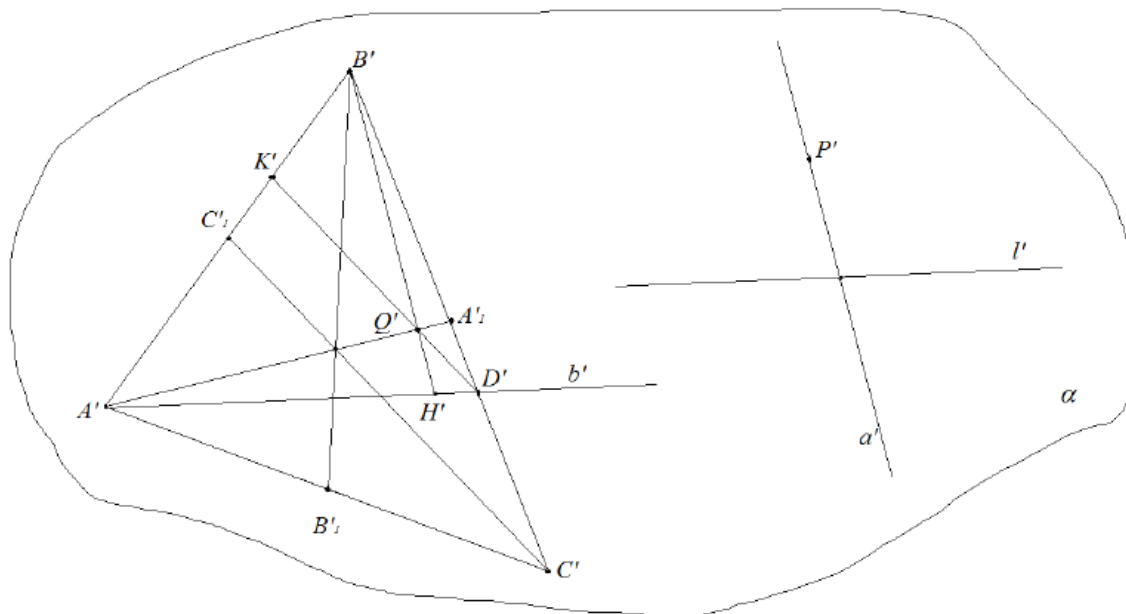


Рис. 244

3. Через точку D' , паралельно до прямої $C'C_1'$, проведемо пряму $D'K'$. Позначимо через Q' точку перетину прямих $A'A_1'$ і $D'K'$.

4. Проведемо пряму $B'Q'$.

5. Через точку P' , паралельно до прямої $B'Q'$, проведемо пряму a' , яка і є шуканим зображенням прямої a .

62. Усі рівнобедрені прямокутні трикутники є подібними між собою. Отже, згідно наслідка 8 з теореми 5.1, задане умовою задачі зображення є подібно повним, поставлену задачу можна розв'язати однозначно, за зразком розв'язання задачі 61. При цьому треба мати на увазі, що висота, проведена до гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника, є і його медіаною.

63. Задане зображення, згідно наслідка 6 з теореми 5.1, є метрично повним, отже, сформульована задача має єдиний розв'язок. Для знаходження такого розв'язка можна на площині трикутника ABC відновити точку P і пряму l , перпендикулярно до прямої l , через

точку P провести пряму a , а потім побудувати зображення a' прямої a . Задачу можна розв'язати і за зразком розв'язання задачі 61.

64. Треба побудувати медіану $B'B'_1$ трикутника $A'B'C'$. Шукане зображення перпендикуляра є відрізком $P'H'$, який є паралельним до прямої $B'B'_1$, точка H' належить прямій $A'C'$.

65. Задане умовою задачі зображення складається з трикутника-каркаса $A'B'C'$ і точки T' на площині $(A'B'C')$. За умови задачі це – зображення певного трикутника-каркаса ABC і його ортоцентра T . Отже, задане зображення є невиродженим зображенням нелінійної плоскої геометричної фігури. Під час розв'язання задачі 6.16 було обґрунтовано, що, при невиродженому для трикутників паралельному проєктуванні, зображенням ортоцентра даного трикутника може бути лише точка, яка належить заштрихованій на рис. 100 області, точки A' , B' , C' включно. Отже, якщо задана точка T' не належить вищевказаній множині, то задане зображення не є правильним, про характер його повноти взагалі не може йти мови.

Якщо ж точка T' належить вказаній множині точок, згідно задачі 6.16, задане зображення є правильним. Як правильне невироджене зображення нелінійної плоскої геометричної фігури, воно є афінно повним. Як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 6.16, за таким зображенням трикутник-каркас ABC можна відновити з точністю до відношення довжин його сторін, наприклад, $AC:AB$ і $AC:BC$. Значить, задане зображення є подібно повним. У той же час, воно не є метрично повним. Коефіцієнт метричної неповноти дорівнює одиниці.

66. Наявність зображень трикутника і його ортоцентра дозволяє побудувати зображення прямих, що містять висоти даного трикутника. Далі задачу можна розв'язати за зразком розв'язання задачі 61.

67. Задане зображення є афінно повним, подібно неповним і, зрозуміло,

міло, метрично неповним. Коефіцієнт подібної неповноти дорівнює одиниці. Коефіцієнт метричної неповноти дорівнює двом. Обґрунтування можна провести за зразком розв'язання задачі 6.9.

68. Наявність правильних зображень двох висот трикутника дозволяє побудувати зображення серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника.

69. Див. розв'язання задачі 68. Справедливими є й обернені міркування.

70. Див. розв'язання задачі 68. Справедливими є й обернені міркування.

71. Якщо задане зображення є правильним (точка Q' належить множині точок, яку визначено при розв'язанні задачі 6.20), то воно є подібно повним. Метрично повним воно не є. Коефіцієнт метричної неповноти дорівнює одиниці. Обґрунтування можна провести за зразком розв'язання задачі 6.12.

72. Див. розв'язання задачі 61.

73. Див. розв'язання задач 61, 62

74. Див. розв'язання задач 61, 62

75. Застосування трикутника-оригінала не є обов'язковим. Достатньо провести медіани $A'A'_1$ і $B'B'_1$ заданого трикутника $A'B'C'$. $O' = A'A'_1 \cap B'B'_1$. На промені, доповняльному до променя B'_1B' треба відкласти відрізок B_1D' , $B_1D' = B'_1O'$. Трикутник $A'D'C'$ є шуканим.

76. Див. розв'язання задачі 71.

77. Можна побудувати оригінал зображення, для побудови точки D' , що є зображенням точки D , використати теорему Фалеса.

Можна обмежитися лише побудовами на картинній площині. Але уникнути допоміжних побудов неможливо. Треба побудувати медіану $C'K'$ заданого трикутника $A'B'C'$. На промені, доповняльному до променя $C'K'$, відкласти відрізок $C'P'$, який дорівнює відрізку $C'K'$, і

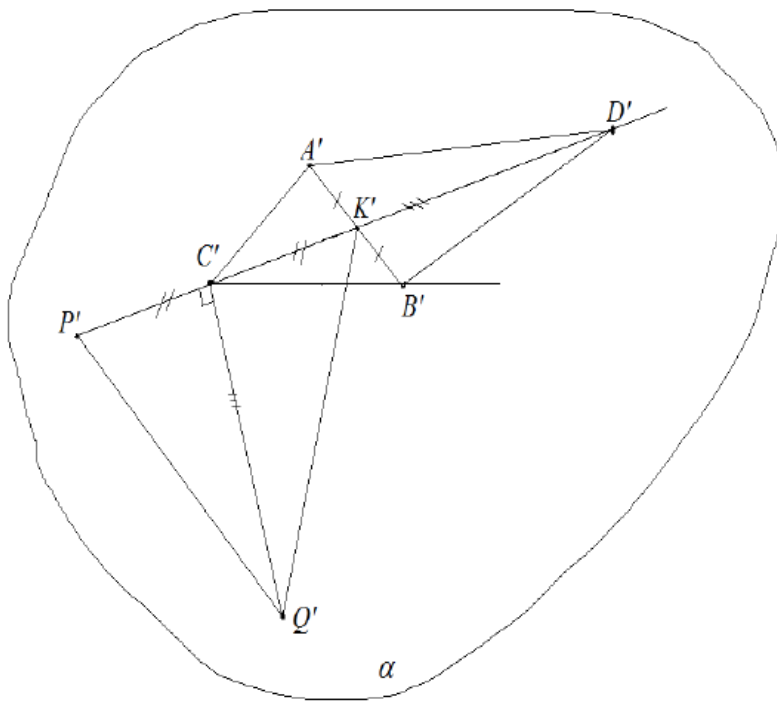


Рис. 245

побудувати рівносторонній трикутник $P'Q'K'$. На промені, доповняльному до променя $K'C'$, треба відкласти відрізок $K'D'$, який дорівнює відрізку $Q'C'$. Трикутник $A'D'B'$ є шуканим (рис. 245).

78. Можна не будувати можливий

оригінал у явному вигляді. На промені, доповняльному до променя $B'A'$, достатньо відкласти відрізок $B'D'$, який дорівнює відрізку $B'A'$. Трикутник $B'D'C'$ є шуканим (рис. 246).

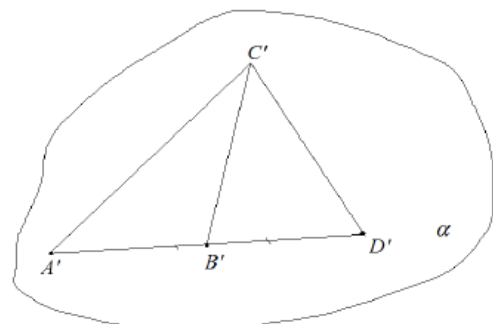


Рис. 246

79. Можна уникнути побудови і явного використання оригінала. У трикутнику $A'B'C'$ проведемо медіану $B'B_1'$. Через точку C' , паралельно до

прямої $B'B_1'$, проведемо пряму c . Через точку A' , паралельно до прямої $B'C'$, проведемо пряму a . Позначимо через D' точку перетину прямих a і c . Трикутник $A'C'D'$ є шуканим (рис. 247).

80. Можна уникнути побудови і явного використання оригінала. У трикутнику $A'B'C'$ достатньо провести медіани $A'A_1'$ і $C'C_1'$, через точку C' , паралельно до прямої $A'A_1'$, провести пряму a' , через точку

B' , паралельно до прямої $C'C'_1$, провести пряму b' . $D' = a' \cap b'$, трикутник $B'C'D'$ є шуканим.

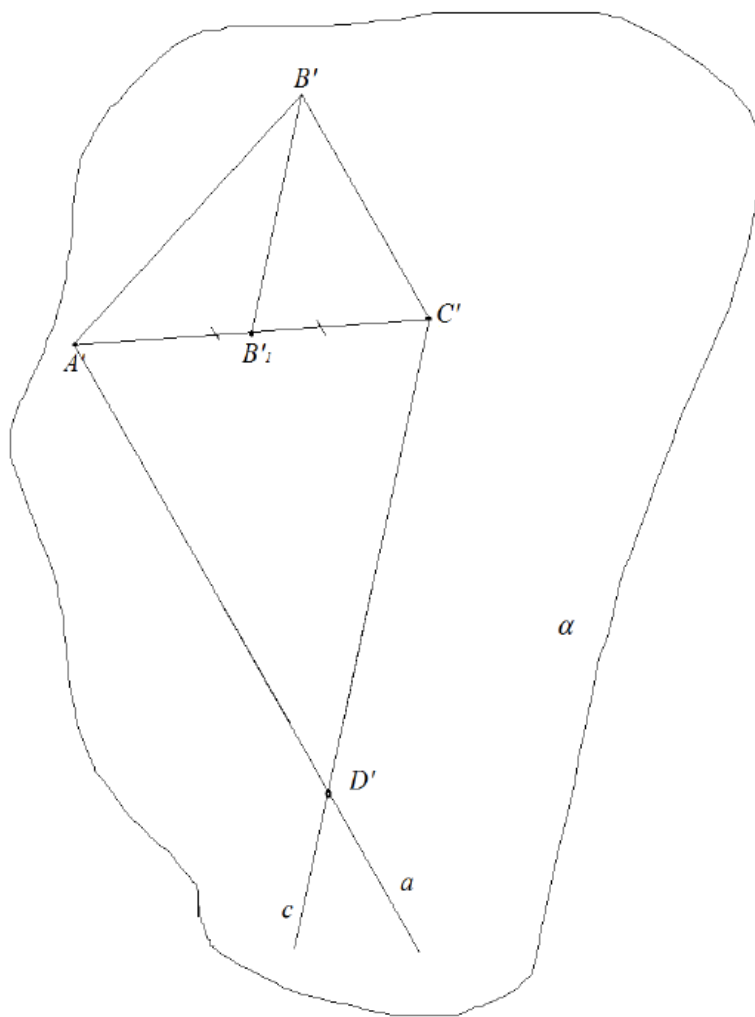


Рис. 247

81. Безпосереднє використання трикутника-оригінала є обов'язковим. Можна побудувати квадрат-оригінал $AMNC$, провести висоту BH заданого трикутника ABC , знайти точку P перетину прямої BH з прямою MN . Потім, використовуючи теорему Фалеса, побудувати точку H' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням точки H , як точку

прямої $A'C'$. Після цього побудувати точку P' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням точки P , як точку прямої $B'H'$. Далі, через точку P' , паралельно до прямої $A'C'$, провести пряму a , через точку A' , паралельно до прямої $B'H'$, провести пряму b , через точку C' , паралельно до прямої $B'H'$, провести пряму c . Нехай $M' = a \cap b$, $N' = a \cap c$. При застосованому законі зображення точка M' буде зображенням точки M , точка N' — зображенням точки N . Паралелограм $A'M'N'C'$ буде шуканим зображенням квадрата $AMNC$.

82. Безпосереднє використання трикутника-оригінала є обов'язковим. Задачу можна розв'язати за зразком розв'язання задачі 81.

Якщо у заданому трикутнику ABC сторони AB і BC не є рівними, можна запропонувати інший шлях розв'язання, технічно, можливо, більш зручний. (У випадку, коли $AB \neq BC$, він є придатним і для розв'язання задачі 8.1).

1. У зовнішній відносно трикутника ABC області будуємо прямокутник $AMNC$, у якого $AM:AC=1:2$.

2. Проводимо висоту BH трикутника ABC .

3. Через середину K сторони AC , паралельно до прямої BH , проводимо пряму a до перетину з прямою MN у точці Q .

4. Будуємо відрізок BQ . Він перетинає пряму AC у точці T , яка не співпадає з точкою H .

5. За допомогою теореми Фалеса на прямій $A'C'$ будуємо точки H' і T' , які, згідно застосованого закону зображення, є, відповідно, зображеннями точок H і T .

6. Через середину K' відрізка $A'C'$, паралельно до прямої $B'H'$, проводимо пряму a' .

7. Нехай $Q' = B'T' \cap a'$. Згідно застосованого закону зображення, точка Q' є зображенням точки Q .

8. Через точку Q' , паралельно до прямої $A'C'$, проводимо пряму b .

9. Через точки A' і C' відповідно, паралельно до прямої $B'H'$, проводимо прямі c і d , $M' = b \cap c$, $N' = b \cap d$. Згідно застосованого закону зображення точка M' є зображенням точки M , точка N' — зображенням точки N . Паралелограм $A'M'N'C'$ є шуканим зображенням прямокутника $AMNC$.

83. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє викорис-

тання оригінала не є необхідним. Можна провести медіану $C'Q'$ заданого трикутника $A'B'C'$, через точки A' і B' , паралельно до прямої $C'Q'$, відповідно, провести прямі a і b . У тій півплощині відносно прямої $A'B'$, яка не містить точку C' , на прямій a відкласти відрізок $A'M' = 2 \cdot C'Q'$, на прямій b відкласти відрізок $B'N' = A'M'$, Згідно застосованого закону зображення, точка M' є зображенням точки M , точка N' — зображенням точки N , паралелограм $A'M'N'B'$ є шуканим зображенням квадрата $AMNB$.

84. Див. вказівки до розв'язання задачі 83.

85. Див. вказівки до розв'язання задачі 83.

86. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригінала не є необхідним. Достатньо через середину M' сторони $A'B'$ заданого трикутника $A'B'C'$, паралельно до прямої $B'C'$, провести пряму a до перетину з прямою $A'C'$ у точці N' і, паралельно до прямої $A'C'$, провести пряму b до перетину з прямою $B'C'$ у точці K' . Паралелограм $C'K'M'N'$ є шуканим зображенням квадрата-оригінала.

87. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригінала не є необхідним. На стороні $A'B'$ заданого трикутника $A'B'C'$ достатньо побудувати таку точку T' , що $A'T':T'B' = 3:1$.

88. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригінала не є необхідним. Достатньо провести у заданому трикутнику $A'B'C'$ медіану $C'M'$, на відрізку $A'M'$ обрати точку K' так, щоб $A'K':K'M' = 2:1$, на відрізку $M'B'$ обрати точку N' так, щоб $M'N':N'B' = 1:2$, через точки N' і K' відповідно, паралельно до прямої $C'M'$, провести прямі b і a . $Q' = b \cap B'C'$, $P' = a \cap A'C'$, паралелограм $Q'N'K'P'$ є шуканим зображенням квадрата-оригінала.

89. Задача має безліч розв'язків. Зрозуміло, що, якщо точка L є тією вершиною квадрата-оригінала, яка належить гіпотенузі AB трикутника-оригінала, то відрізок CL є бісектрисою трикутника ABC , проведеною з вершини прямого кута. Треба обґрунтувати, що за умови даної задачі у якості зображення L' точки L можна прийняти довільну внутрішню точку відрізка $A'B'$.

90. Див. вказівки до розв'язання задачі 89. За допомогою теореми Фалеса треба побудувати на відрізку $B'A'$ таку точку L' , що $B'L':L'A'=m:n$.

91. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригінала не є необхідним. Неважко обґрунтувати, що, якщо відрізок CH є висотою, проведеною до гіпотенузи AB прямокутного трикутника-оригінала ABC , то $BH:HA=m^2:n^2$. Отже, за допомогою теореми Фалеса, на відрізку $B'A'$ можна побудувати таку точку H' , що $B'H':H'A'=m^2:n^2$. Згідно застосованого закону зображення, точка H' є зображенням точки H . Через середину M' відрізка $A'B'$, паралельно до прямої $C'H'$, треба провести пряму a до перетину з прямою $B'C'$ у певній точці T' . На промені, доповняльному до променя $M'T'$, треба відкласти відрізок $M'Q'$, що дорівнює відрізку $M'T'$. Згідно застосованого закону зображення точка Q' є зображенням точки Q , трикутник $A'Q'B'$ є шуканим.

92. Задача має єдиний розв'язок. З технічної точки зору зручніше за все побудувати медіану $B'P'$ трикутника $A'B'C'$, на промені, доповняльному до променя $P'B'$, відкласти відрізок $P'D'$, $P'D'=B'P'$. Згідно застосованого закону зображення, паралелограм $A'B'C'D'$ буде шуканим зображенням паралелограма $ABCD$.

93. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригінала не є необхідним. У заданому трикутнику $A'B'C'$

достатньо провести медіани $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$, які перетинаються у певній точці O' , і продовжити кожен з них, відповідно, на відрізки A_1E' , B_1H' , C_1D' , $A_1E'=O'A_1$, $B_1H'=O'B_1$, $C_1D'=O'C_1$. Згідно застосованого закону зображення, шестикутник $A'D'B'E'C'H'$ буде шуканим зображенням правильного шестикутника $ADBECN$.

94. Розглянемо довільний рівнобедрений трикутник ABC , у якому $\angle ABC=120^\circ$. Усі рівнобедрені трикутники з однаковими кутами при вершинах є подібними між собою, отже, згідно наслідка 2 з

теорема 3.1, обраний трикутник ABC для заданого трикутника $A'B'C'$ можна вважати оригіналом. Зрозуміло, що у трикутнику ABC саме $AB=BC$ (рис. 248). Проведемо медіану BK трикутника ABC . Вона, одночасно, є і бісектрисою, і висотою цього трикутника, $\angle ABK=60^\circ$,

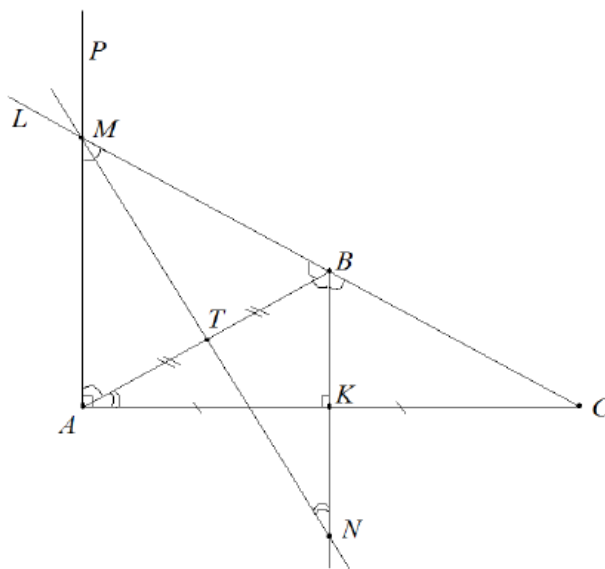


Рис. 248

$\angle AKB=90^\circ$. Проведемо промінь BL , доповняльний до променя BC . $\angle LBA=180^\circ - \angle ABC=180^\circ - 120^\circ=60^\circ$. Паралельно до прямої BK , у ту півплощину відносно прямої AC , що містить точку B , проведемо промінь AP . $\angle PAB=90^\circ - \angle BAC=90^\circ - 30^\circ=60^\circ$. Позначимо через M точку перетину променів AP і BL . Утворений трикутник AMB є правильним. Через середину T відрізка AB проведемо пряму MT до перетину з прямою BK у точці N . Чотирикутник $AMBN$ є ромбом, зображення якого треба побудувати.

Властивості зображень геометричних фігур за методом паралель-

ного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови на підставі трикутника $A'B'C'$. Безпосереднє використання трикутника-оригінала ABC для цього не є потрібним.

95. Через середину P' відрізка $B'C'$ треба провести промінь $A'P'$. Безпосереднє використання оригінала не є потрібним.

96. Див. вказівки до розв'язання задачі 62.

97. Умови задачі однозначно визначають форму ромба-оригінала. Отже, задачу можна розв'язати за допомогою теореми Фалеса при явному використанні оригінала. Але зрозуміло, що менша діагональ AC ромба-оригінала $ABCD$ ділить цей ромб на два правильних трикутника, кожна висота правильного трикутника, одночасно, є і його медіаною. Тому, для розв'язання даної задачі достатньо знайти середину K' відрізка $A'D'$ і на промені, доповняльному до променя $A'D'$, відкласти відрізок $A'H' = A'K'$. Відрізок $B'H'$ буде шуканим зображенням висоти BH .

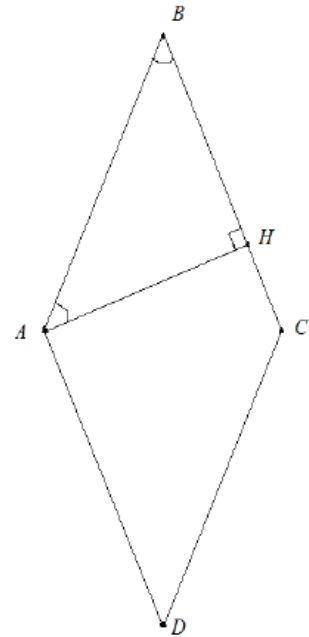


Рис. 249

98. Умови задачі визначають форму ромба-оригінала однозначно. Отже, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, задачу можна розв'язати за допомогою теореми Фалеса при явному використанні прийнятого за оригінал ромба, який задовольняє умови даної задачі. Але властивості оригінала дозволяють обмежитися побудовами лише на картинній площині.

Дійсно, розглянемо ромб $ABCD$, у якого $\angle ABC = 45^\circ$ (рис. 249). Проведемо його висоту AH ($AH \perp BC$). Трикутник ABH є рівнобедреним прямокутним трикутником. Нехай $AH = BH = a$. Тоді $AB = a\sqrt{2}$. Але чотирикутник $ABCD$ є ромбом.

Отже, і $BC = a\sqrt{2}$, $BH:BC = a:a\sqrt{2} = 1:\sqrt{2}$. Під час зображення фігур за методом паралельного проєктування зберігається відношення довжин відрізків, які належать одній прямій. Значить, на стороні $B'C'$ заданого паралелограма $A'B'C'D'$ достатньо побудувати точку H' , для якої $B'H':B'C' = 1:\sqrt{2}$. Такі побудови можна виконати, наприклад, наступним чином (див. рис. 250).

1. У точці M' , що є серединою сторони $B'C'$ заданого паралелограма $A'B'C'D'$, побудувати перпендикуляр $M'N'$ до сторони $B'C'$, який дорівнює відрізку $B'M'$.

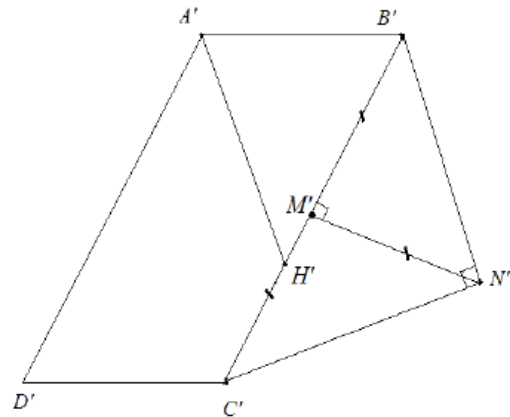


Рис. 250

2. Трикутник $B'N'C'$ є рівнобедреним прямокутним трикутником з гіпотенузою $B'C'$. Якщо $B'N' = N'C' = b$, то $B'C' = b\sqrt{2}$,

$$B'N':B'C' = b:b\sqrt{2} = 1:\sqrt{2}.$$

3. Для побудови точки H' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням точки H , достатньо на відрізку $B'C'$ відкласти відрізок $B'H' = B'N'$. Згідно застосованого закону зображення, відрізок $A'H'$ є шуканим зображенням висоти AH ромба $ABCD$.

99. Див. вказівки до розв'язання задачі 98.

100. Задача є у повному сенсі оберненою до задачі 97.

101. Задача є у повному сенсі оберненою до задачі 98.

102. Задача є у повному сенсі оберненою до задачі 99.

103. Для розв'язання даної задачі можна побудувати правильний восьмикутник-оригінал і використати загальну методику побудови

зображень заданих n -кутників, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ (див. §7). Також, можна

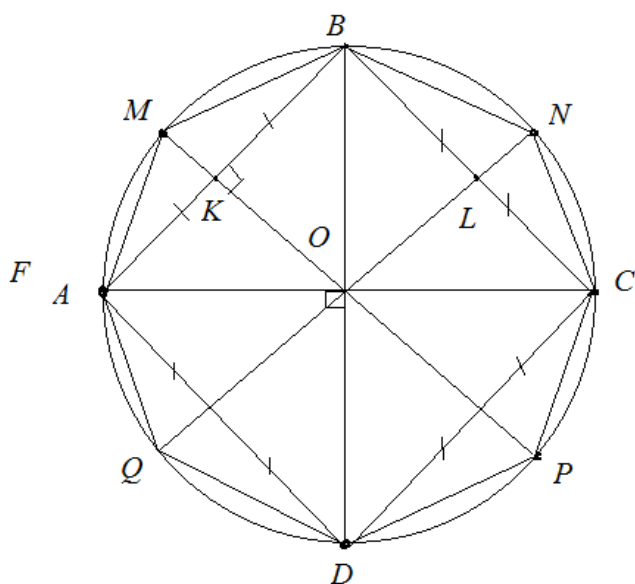


Рис. 251

розв'язати дану задачу за зразком розв'язання задачі 98. Для останнього, перш за все, з'ясуємо певні особливості оригінала. Зручніше за все, будувати правильний восьмикутник вписаним у коло. Розглянемо довільне коло F з центром у точці O (рис. 251).

Проведемо у даному колі взаємно перпендикулярні діаметри AC і BD . Чотирикутник $ABCD$ є вписаним у коло F квадратом. Через середину K відрізка AB проведемо діаметр MP кола F . Через середину L відрізка BC проведемо діаметр QN . Восьмикутник $AMBNCPDQ$ є правильним.

Нехай відрізок $AK = a$. Тоді і $OK = a$, $OM = OA = a\sqrt{2}$, $OM : OK = a\sqrt{2} : a = \sqrt{2} : 1$.

Зображенням квадрата $ABCD$ при невиродженому паралельному проєктуванні, згідно теореми 7.1, може бути довільний паралелограм. Розглянемо який-небудь паралелограм $A'B'C'D'$. Будемо вважати, що він є зображенням квадрата $ABCD$ згідно паралельного проєктування так, що при цьому точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C . Зрозуміло, що тоді, при застосованому законі зображення, точка D' є зображенням точки D . Через середину K' сторони $A'B'$ (згідно застосованого закону зображення точка K' є зображенням точки K) і

через середину H' сторони $D'C'$ проведемо пряму b (рис. 252). Аналогічну пряму d проведемо через середини відрізків $B'C'$ і $A'D'$. $O' = b \cap d$. Згідно застосованого закону зображення, точка O' є зображенням точки O . На відрізку $O'K'$, як на катеті, побудуємо рівнобедрений прямокутний трикутник $O'K'T'$ ($O'K' = K'T'$). Тоді

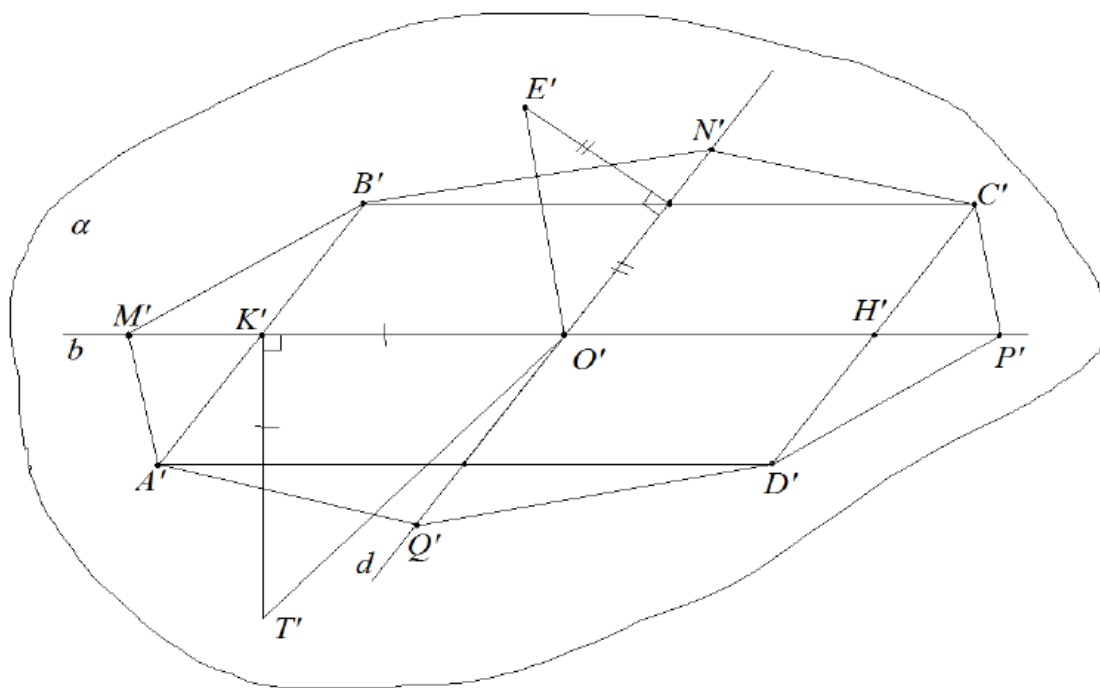


Рис. 252

$O'T' = O'K'\sqrt{2}$. На промені $O'K'$ відкладемо відрізок $O'M'$, $O'M' = O'T'$. Зрозуміло, що $O'M':O'K' = O'K'\sqrt{2}:O'K' = \sqrt{2}:1$. Це означає, що при застосованому законі зображення точка M' є зображенням точки M . На промені $O'H'$ побудуємо відрізок $O'P'$, $O'P' = O'M'$, точка P' є зображенням точки P . Аналогічні побудови виконаємо і на прямій d (див. рис. 252). $O'N' = O'Q' = O'E'$. Згідно застосованого закону зображення точка Q' є зображенням точки Q , точка N' – зображенням точки N , восьмикутник $A'M'B'N'C'P'D'Q'$

$T'N'$ відкладають відрізок $T'K' = B'N'$. $K'N' = (\sqrt{5} - 1)B'N'$. Якщо точка M' є серединою відрізка $K'N'$, то $M'N' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}B'N'$. На промені, доповняльному до променя $N'B'$, відкладають відрізок $N'D'$, який дорівнює відрізку $M'N'$.

$$N'D':B'N' = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}B'N' \right) : B'N' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Отже, згідно застосованого закону зображення точка D' є зображенням точки D . Точку C' знаходять як точку перетину прямої $E'N'$ і прямої, що проходить через точку A' паралельно до прямої $E'D'$. При застосованому законі зображення точка C' є зображенням точки C , п'ятикутник $A'B'C'D'E'$ – шуканим зображенням правильного п'ятикутника. Проведені побудови не вимагають явного використання оригінала.

105. За умови задачі зрозуміло, що меншу основу трапеції-оригінала зображено відрізком $B'C'$. Для розв'язання задачі треба побудувати відрізок $M'N'$, який сполучає середини основ $B'C'$ і $A'D'$ трапеції $A'B'C'D'$, через точки B' і C' , паралельно до прямої $M'N'$ провести, відповідно, прямі a і b до перетину з відрізком $A'D'$ у точках N' і P' . Відрізки $B'N'$ і $C'P'$ є шуканими зображеннями висот трапеції $ABCD$. За умови задачі відновлення форми трапеції-оригінала $ABCD$ не є можливим, та й потреби у цьому немає. Умова задачі визначає розв'язок задачі однозначно.

106. Згідно умови задачі, основами даної трапеції $A'B'C'D'$ є її сторони $B'C'$ і $A'D'$, $B'C' < A'D'$. У всьому іншому вона може бути цілком довільною. Задана трапеція $A'B'C'D'$ при застосованому законі зображення однозначно визначає форму оригінала. Отже, можна

побудувати оригінал і розв'язати дану задачу за допомогою теореми Фалеса.

Але дану задачу можна розв'язати і без явного використання оригінала (рис. 255). У трапеції $A'B'C'D'$ треба провести пряму $M'N'$, яка проходить через середини її основ ($B'M' = M'C'$ і $A'N' = N'D'$).

Через вершину C' , паралельно до прямої $M'N'$, треба провести

пряму, яка перетне основу $A'D'$ трапеції $A'B'C'D'$ у точці P' . Якщо точка Q' є серединою бічної сторони $C'D'$, то шукане зображення O' центра O кола, описаного навколо трапеції-оригінала $ABCD$, є точкою перетину прямих $M'N'$ і $Q'P'$.

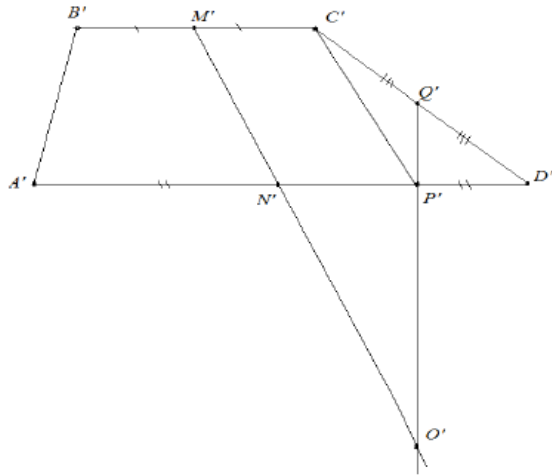


Рис. 255

107. Задачу можна розв'язати за зразком розв'язання попередньої

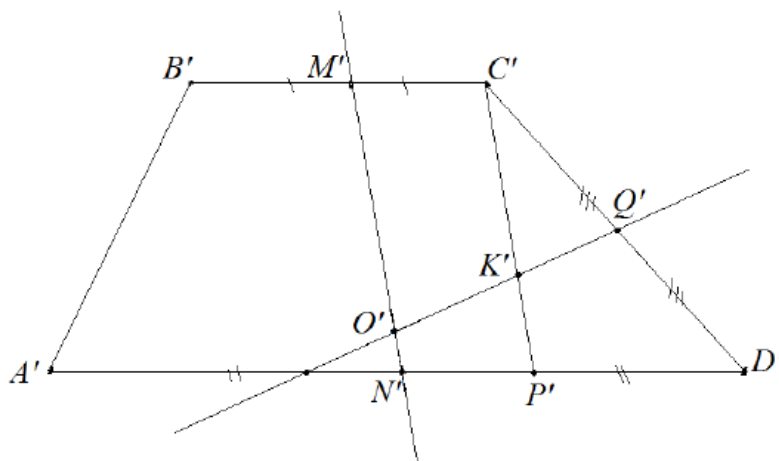


Рис. 256

задачі, без побудови і явного використання оригінала. Насправді, згідно умов задачі, у заданій трапеції $A'B'C'D'$ основами є сторони $B'C'$ і $A'D'$, $B'C' < A'D'$.

В усьому іншому вона може бути цілком довільною. Треба провести пряму $M'N'$, що сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$ ($B'M' = M'C'$, $A'N' = N'D'$). (рис. 256). Через вершину C' ,

паралельно до прямої $M'N'$, треба провести пряму, яка перетне основу $A'D'$ даної трапеції у точці P' . Нехай точка K' ділить відрізок $C'P'$ у відношенні 2:1, рахуючи від точки C' . Якщо точка Q' є серединою бічної сторони $C'D'$, то шукане зображення O' центра O кола, описаного навколо трапеції-оригінала $ABCD$, є точкою перетину прямих $M'N'$ і $Q'K'$.

108. Шукане зображення співпадає з серединою відрізка $A'D'$.

109. Задачу можна розв'язати без явного використання оригінала.

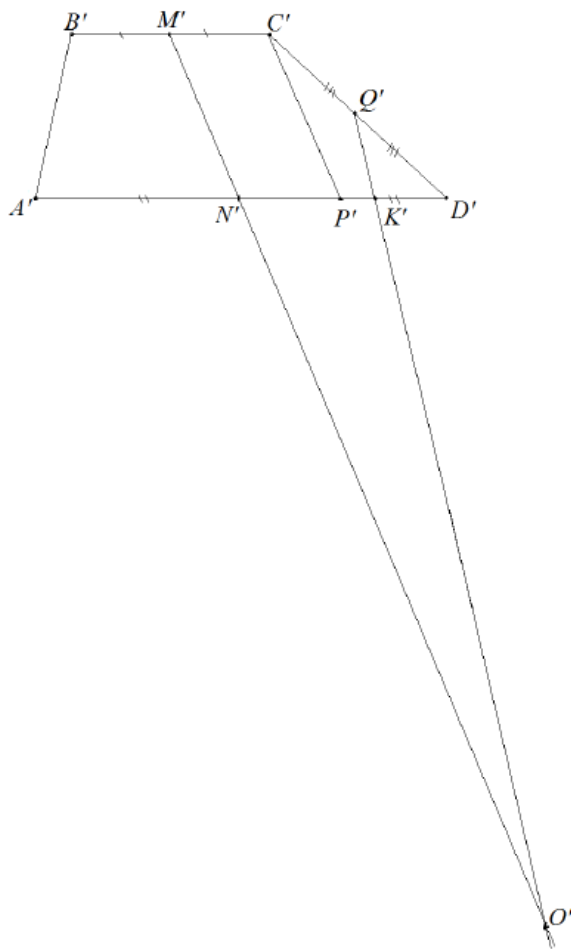


Рис. 257

Треба провести пряму $M'N'$, що сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$, ($B'M' = M'C'$, $A'N' = N'D'$). Через вершину C' , паралельно до прямої $M'N'$, треба провести пряму, яка перетне основу $A'D'$ трапеції $A'B'C'D'$ у точці P' . Нехай точка K' ділить відрізок $P'D'$ у відношенні 1:2 (рис. 257), рахуючи від точки P' . Якщо точка Q' є серединою бічної сторони $C'D'$ трапеції $A'B'C'D'$, то шукане зображення O' центра O кола, описаного навколо трапеції-оригіна-

ла $ABCD$, є точкою перетину прямих $M'N'$ і $Q'K'$.

110. Зрозуміло, що у трапеції $ABCD$ основами є сторони BC і AD , $BC:AD = B'C':A'D'$. Розв'язання даної задачі вимагає безпосереднього використання трапеції-оригінала. Для трапеції $ABCD$ треба

побудувати серединний перпендикуляр до бічної сторони CD і знайти точку K його перетину з прямою AD . Зображення K' точки K згідно застосованого закону зображення на картинній площині треба побудувати за допомогою теореми Фалеса. Шукане зображення центра описаного навколо трапеції $ABCD$ кола є точкою перетину прямої, що сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$, з прямою $K'Q'$, де точка Q' є серединою відрізка $C'D'$.

111. Усі прямокутні трапеції з кутом у 60° , описані навколо кола, є подібними між собою. Тому умова даної задачі однозначно визначає форму оригінала. Отже, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, будь-яку з таких трапецій можна прийняти за оригінал шуканого зображення, а потім побудувати можливе зображення такої трапеції згідно

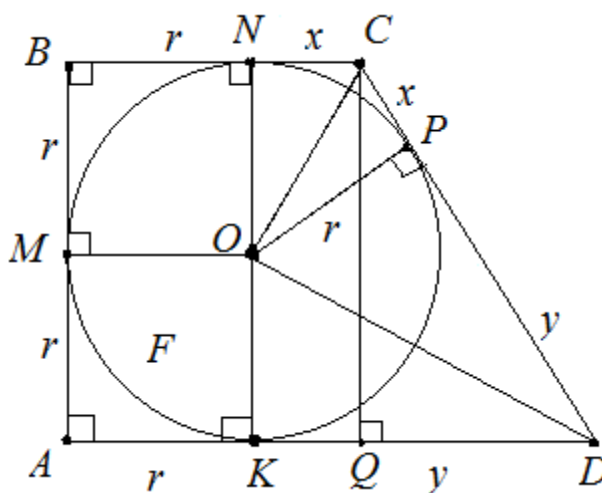


Рис. 258

загальної теорії побудови зображень плоских n -кутників, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, за методом паралельного проєктування (див. §7). У той же час, за умови даної задачі, мають місце певні співвідношення, які дозволяють, її розв'язати і за виключенням побудови оригінала.

Розглянемо прямокутну трапецію $ABCD$ з кутом у 60° , описану навколо кола F з центром у точці O (рис. 258). Нехай $BC \parallel AD$, $BC < AD$, $AB \perp AD$, $\angle CDA = 60^\circ$, коло F дотикається сторін AB , BC , CD , AD , відповідно, у точках M , N , P , K . Позначимо радіус кола F через r , відрізок CN – через x , відрізок DK – через y . Тоді $CN = CP = x$, $PD = KD = y$, $OM = ON = OP = AK = AM = MB$,

$MB=BN=r$. Проведемо $CQ \perp AD$. $CQ=AB=2r$, $QD=KD-KQ$, $KQ=NC=x$, $QD=y-x$. У трикутнику QCD , $\angle QCD=30^\circ$. Отже, $CD=2QD$, або $x+y=2(y-x)$, $y=3x$.

З іншого боку, промені CO і DO є, відповідно, бісектрисами кутів BCD і CDA . Тому $\angle COD=90^\circ$, відрізок OP є висотою прямокутного трикутника COD , проведеною до його гіпотенузи. Тому $OP^2=CP \cdot PD$ або $r^2=xy$. Тоді $r^2=3x^2$, $r=x\sqrt{3}$. Остання рівність, разом із рівністю $y=3x$, дозволяє визначити шукану побудову.

Зручніше за все, спочатку, у вигляді довільного паралелограма

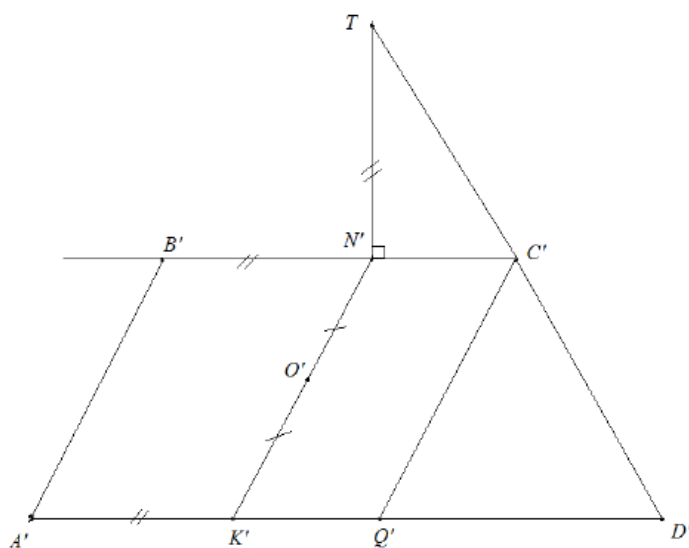


Рис. 259

$K'N'C'Q'$ представити зображення згідно закону зображення певного паралельного проєктування, паралелограма $KNCQ$ так, щоб при цьому точка K' вважалася зображенням точки K , точка N' – зображенням точки N , точка

C' – зображенням точки C , точка Q' – зображенням точки Q (рис. 259). Нехай точка O' є серединою відрізка $K'N'$. Тоді, згідно даного закону зображення, точка O' є зображенням точки O . На промені, доповняльному до променя $Q'K'$, побудуємо відрізок $Q'D'$, $Q'D'=2K'Q'$. Згідно застосованого закону зображення точка D' є зображенням точки D . На відрізку $N'C'$, як на катеті, побудуємо прямокутний трикутник $TN'C'$ ($\angle TN'C'=90^\circ$), у якого $TC'=2N'C'$.

Зрозуміло, що при цьому $TN' = \sqrt{3} N'C'$. На промені, доповняльному до променя $N'C'$, відкладемо відрізок $N'B'$, $N'B' = N'T$. Згідно застосованого закону зображення, точка B' є зображенням точки B . На промені, доповняльному до променя $K'Q'$, відкладемо відрізок $K'A'$, $K'A' = N'T$. Побудована точка A' при застосованому законі зображення є зображенням точки A . Трапеція $A'B'C'D'$ є шуканою.

112. Див. розв'язання задачі 111.

113. Див. розв'язання задачі 111.

114. За умови даної задачі задано певний гострий кут. Треба побудувати оригінал, форма якого умовою задачі є визначеною однозначно.

115. Див. схему розв'язання задачі 111.

116. Див. схему розв'язання задачі 111.

117. Див. схему розв'язання задачі 111.

118. За умови даної задачі задано певний гострий кут. Треба побудувати оригінал шуканого зображення, форма якого умовою задачі є визначеною однозначно.

119. Треба перевірити, що для заданих трапецій $ABCD$, і $A'B'C'D'$ виконано умову $BC:AD = B'C':A'D'$. На площині трапеції-оригінала треба провести перпендикуляр BP до прямої CD . Для побудови зображення P' точки P згідно застосованого закону зображення треба використати теорему Фалеса.

120. Треба з'єднати точки A' і C' .

121. Безпосереднє використання трапеції-оригінала є неминучим. Треба побудувати ромб $BPCQ$, у якого $\angle BPC = 60^\circ$, а потім, на прямій, що сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$, за допомогою теореми Фалеса — точки P' і Q' , які, згідно даного закону зображен-

ня, є, відповідно, зображеннями точок P і Q . Паралелограм $B'P'C'Q'$ є шуканим зображенням ромба $BPCQ$.

122. Задачу можна розв'язати без явного використання оригінала. Точка P' , яка при даному законі зображення є зображенням вершини P ромба $BPCQ$, є точкою перетину прямих $A'B'$ і $C'D'$. Точка Q' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням точки Q , симетрична до точки P' відносно середини відрізка $B'C'$.

123. Для трапеції $A'B'C'D'$ достатньо побудувати відрізок $M'N'$, який сполучає середини її основ. ($M' \in B'C'$, $B'M' = M'C'$, $N' \in A'D'$, $A'N' = N'D'$). Точка Q' є серединою відрізка $M'N'$, точка P' є симетричною до точки Q' відносно точки M' . Паралелограм $B'P'C'Q'$ є шуканим зображенням згідно застосованого закону зображення квадрата $BPCQ$ (точка P' є зображенням точки P , точка Q' – зображенням точки Q).

124. Треба побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$, і, за допомогою теореми Фалеса, поділити відрізок $M'N'$ на необхідну кількість однакових частин.

125. Треба побудувати паралелограм $B'D'P'Q'$, у якого $D'P' = A'C'$, $D'P' \parallel A'C'$.

126. У заданому прямокутнику $ABCD$ треба провести перпендикуляр DH до гіпотенузи AC (рис. 260). На картинній площині α , за допомогою теореми Фалеса, на промені $A'D'$ тре-

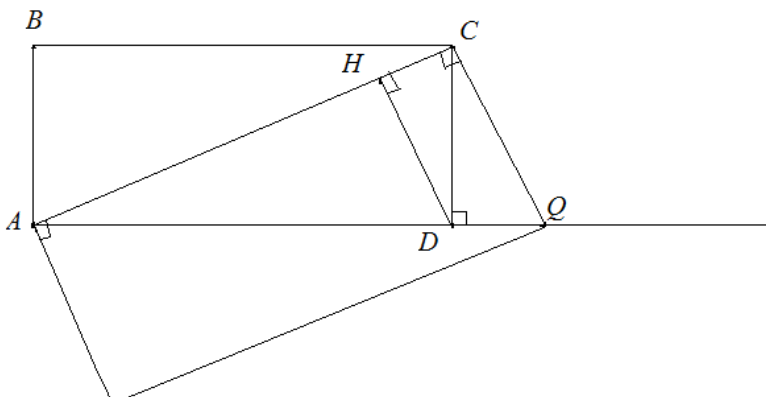


Рис. 260

ба побудувати таку точку Q' , що $A'D':D'Q' = AH:HC$. На відрізках $A'C'$ і $C'Q'$, як на сторонах, треба побудувати паралелограм $A'C'Q'P'$, який і буде шуканим зображенням згідно застосованого закону зображення, прямокутника $ACQP$.

127. Умовою задачі форма прямокутника-оригінала є визначеною однозначно. Отже, задачу можна розв'язати за зразком розв'язання задачі 126. Але у даному випадку побудова і безпосереднє використання оригінала не є необхідним. Можна легко обґрунтувати, що $AH:HC = 3:1$.

128. Умовою задачі форма прямокутника-оригінала є визначеною однозначно. Але задачу можна розв'язати і без відновлення форми оригінала. Треба знайти середину M' відрізка $B'C'$ і середину N' відрізка $A'D'$. Точка P' є точкою перетину відрізків $A'M'$ і $B'N'$. Точка Q' є четвертою вершиною паралелограма, побудованого на відрізках $B'P'$ і $A'P'$, як на сторонах. Паралелограм $A'Q'B'P'$ є шуканим зображенням квадрата $AQBP$.

129. Умовою задачі форма прямокутника-оригінала є визначеною однозначно. Але задачу можна розв'язати і без відновлення форми оригінала. Треба побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини сторін $A'B'$ і $C'D'$ паралелограма $A'B'C'D'$, за допомогою теореми Фалеса поділити відрізок $M'N'$ на необхідну кількість однакових частин, унаслідок цього визначити положення точки P' , шуканий паралелограм $A'Q'B'P'$ побудувати на відрізках $A'P'$ і $B'P'$ як на сторонах.

130. Умовою задачі форма прямокутника-оригінала є визначеною однозначно. Але задачу можна розв'язати і без відновлення форми оригінала. Треба побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини сторін $A'B'$ і $C'D'$ паралелограма $A'B'C'D'$, за допомогою теореми

Фалеса, поділити відрізок $M'N'$ на необхідну кількість однакових частин, унаслідок цього визначити положення точки P' , шуканий паралелограм $A'Q'B'P'$ побудувати на відрізках $A'P'$ і $B'P'$ як на сторонах.

131. Умовою задачі форма трикутника-оригінала є визначеною однозначно. Але задачу можна розв'язати і без відновлення форми оригінала. Треба провести медіану $B'P'$ заданого трикутника $A'B'C'$, продовжити її за точку P' на відрізок $P'N'$, $P'N' = B'P'$. Через середину K' сторони $A'B'$ провести промінь $N'K'$ до перетину з прямою $B'C'$ у точці M' . Паралелограм $A'M'B'N'$ є шуканим зображенням ромба $AMBN$ згідно застосованого закону зображення.

132. Для розв'язання даної задачі використання оригінала є неминучим. Бісектриси протилежних кутів паралелограма, який не є ромбом, паралельні між собою. Тому у заданому паралелограмі $ABCD$ достатньо побудувати бісектриси кутів ABC і BCD , знайти точки K і L перетину цих бісектрис, відповідно, з прямою AD , за допомогою теореми Фалеса побудувати зображення K' і L' цих точок згідно застосованого закону зображення. Подальші побудови є очевидними.

133. Використання оригінала для розв'язання даної задачі є необхідним. Треба побудувати одну з бісектрис, наприклад, бісектрису кута ABC , знайти точку M її перетину з прямою AD , за допомогою теореми Фалеса на картинній площині побудувати зображення M' цієї точки згідно застосованого закону зображення. Шукана точка Q' , яка, згідно застосованого закону зображення, є зображенням точки Q , буде серединою відрізка $B'M'$.

134. Згідно теореми 8.8, зображення площини кола F у вигляді картинної площини є подібно повним. Отже, сформульована задача має єдиний розв'язок. Для його знаходження треба паралельно до прямої

a' провести відмінну від діаметра хорду PQ заданого еліпса F' (рис. 261), через середину T хорди PQ провести пряму $O'T$. Шукана

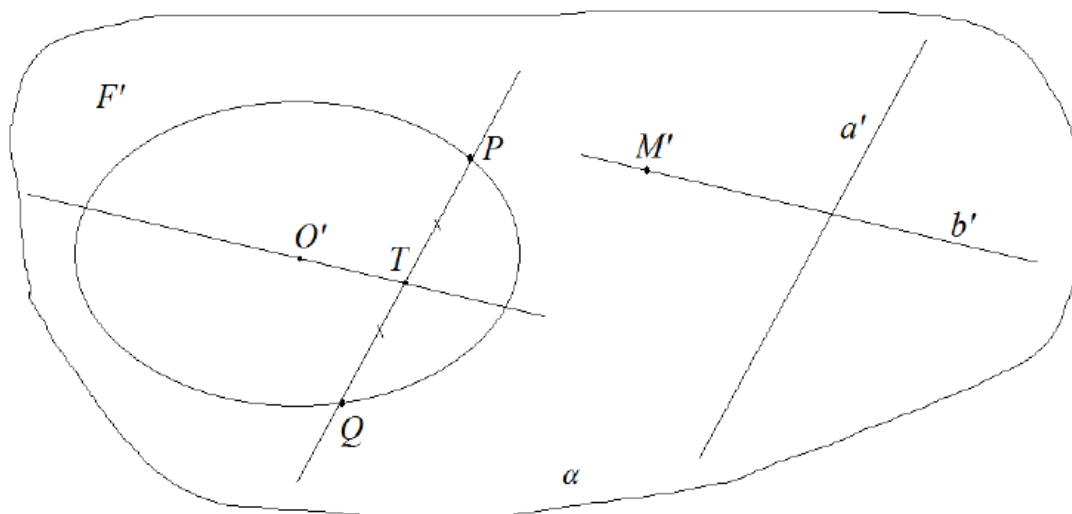


Рис. 261

пряма b' проходить через точку M' паралельно до прямої $O'T$.

135. Див. розв'язання задачі 9.5.

136. Див. розв'язання задачі 9.6.

137. Див. розв'язання задачі 9.6. Якщо у прямокутному трикутнику катет відноситься до гіпотенузи як 3:5, то, згідно теореми Піфагора, катети цього трикутника відносяться як 3:4.

138. Див. розв'язання задачі 9.7.

139. Див. розв'язання задач 9.7 і 9.3.

140. Див. розв'язання задач 9.14 і 9.7.

141. Див. розв'язання задач 9.14 і 9.7.

142. Див. розв'язання задач 9.14 і 9.7.

143. Див. розв'язання задачі 9.11.

144. Див. розв'язання задачі 9.3.

145. Див. розв'язання задачі 9.11 і 143.

146. Усі правильні десятикутники є подібними між собою. Отже, згідно наслідка 2 з теореми 3.1, будь-який з них можна прийняти за оригінал шуканого зображення. Для розв'язання даної задачі, мабуть,

зручніше за все побудувати оригінал, для знаходження шуканого зображення використати теорему Фалеса.

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O . Нагадаємо стандартний спосіб побудови вписаного у коло правильного десятикутника. Побудуємо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD . Нехай точка K є серединою радіуса OB . На промені KC відкладемо відрізок KH , $KH = OK$. Довжина відрізка CH (рис. 262 (a))

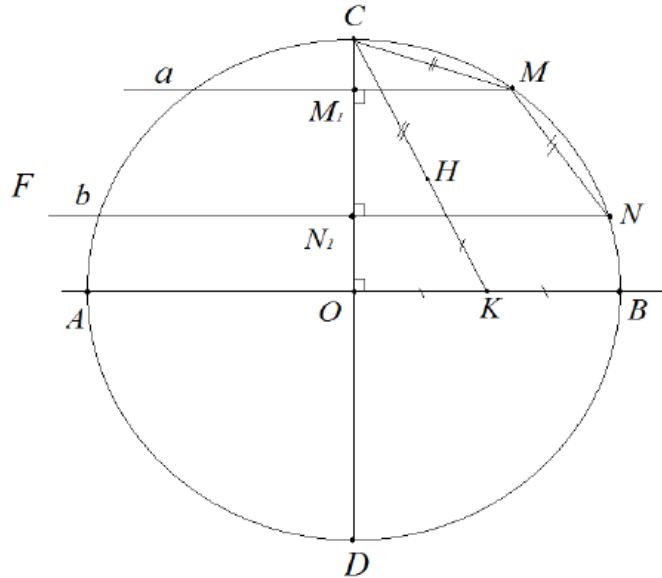


Рис. 262 (a)

дорівнює довжині сторони правильного десятикутника, вписаного у коло F ([14], наприклад). На дузі CB кола F послідовно побудуємо такі точки M і N , що відрізки CM , MN і CH є рівними. Через точки M і N , паралельно до діаметра AB , проведемо, відповідно, прямі a і b . $M_1 = a \cap CD$, $N_1 = b \cap CD$.

Для заданого еліпса F' побудуємо пару спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$. Згідно наслідка 8 з теореми 8.6, існує таке паралельне проєктування, що, при відповідному законі зображення, еліпс F' є зображенням кола F , точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C , точка D' – зображенням точки D . За допомогою теореми Фалеса, на діаметрі $C'D'$ побудуємо точки M'_1 і N'_1 , які, згідно застосованого закону зображення, відповідно, є зображенням точок M_1 і N_1 . На промені $O'D'$ послідовно відкладемо відрізки $O'N'_3$ і $N'_3M'_3$,

$O'N_3 = O'N_1$, $N_3M_3 = N_1M_1$. Паралельно до діаметра $A'B'$, через точки M_1' , N_1' , N_3 , M_3 , проведемо прямі, які перетнуть еліпс F' , відповідно, у точках T' і M' , G' і N' , E' і P' , L' і Q' (рис. 262 (б)). Згідно застосованого закону зображення точка M' є зображенням

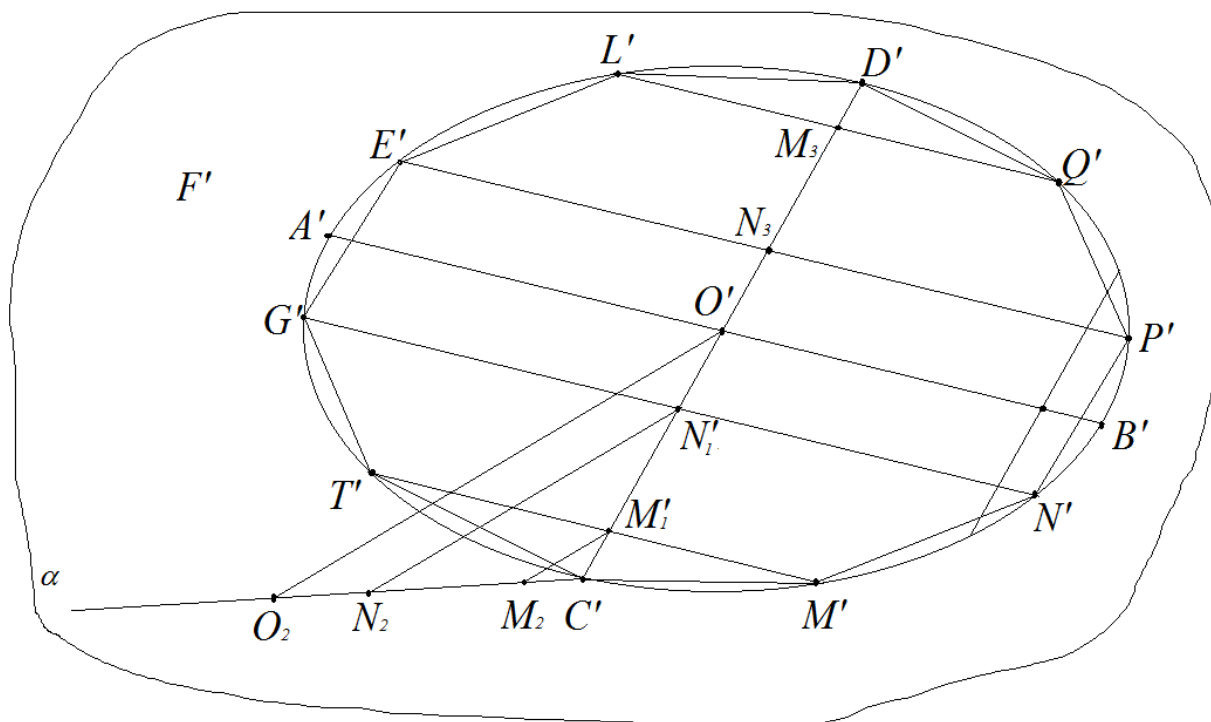


Рис. 262 (б)

точки M , точка N' – зображенням точки N , десятикутник $E'L'D'Q'P'N'M'C'T'G'$ є шуканим зображенням правильного десятикутника, вписаного у коло F .

147. Можна, спочатку, так, як було показано у вказівках до розв'язання задачі 146, побудувати зображення $E'L'D'Q'P'N'M'C'T'G'$ правильного десятикутника, вписаного у коло-оригінал. П'ятикутник $E'D'P'M'T'$ буде шуканим зображенням правильного п'ятикутника, вписаного у коло-оригінал.

Одночасно, можна застосувати такий спосіб побудови вписаного у коло правильного п'ятикутника, який не вимагає попереднього знаходження сторін вписаного у дане коло правильного десятикутника.

Побудуємо у колі F з центром у точці O пару взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD . Нехай точка K є серединою радіуса OD . На промені KC побудуємо відрізок KT , $KT = AK$. Довжина відрізка AT дорівнює довжині сторони правильного п'ятикутника, вписаного у коло F ([14], наприклад). На дугі AB кола F послідовно побудуємо такі точки P і Q , що $AP = PQ = AT$ (рис. 263). Точки A , P і Q є послідовними вершинами правильного п'ятикутника, вписаного у коло F . Якщо мова йде про правильний п'ятикутник $APQMN$, то вершина M є симетричною до вершини Q відносно прямої AB , вершина N – симетричною до вершини P відносно прямої AB . Для побудови точок M і N та створення передумов для подальшого застосування теореми Фалеса, перпендикулярно до діаметра AB , проведемо промені PP_1 і QQ_1 , $P_1 \in AB$, $Q_1 \in AB$.

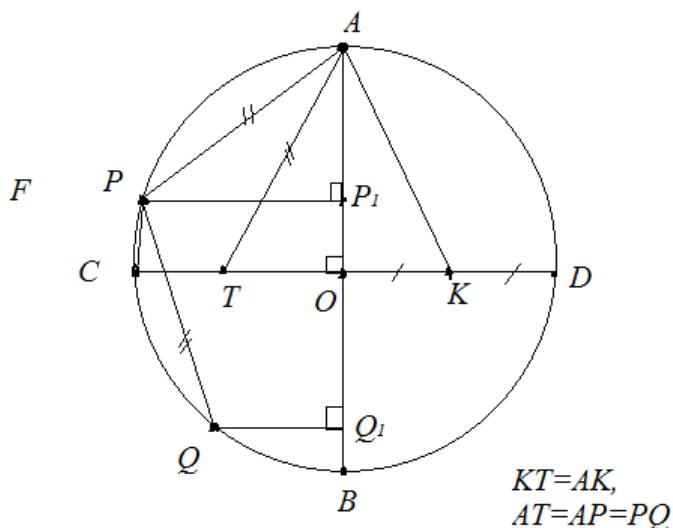


Рис. 263

У заданому еліпсі F' треба побудувати пару спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$. Як і при розв'язанні попередньої задачі, можна стверджувати, що існує таке паралельне проєктування, при якому еліпс F' є зображенням кола F , точка A' є зображенням точки A , точка B' – зображенням точки B , точка C' – зображенням точки C , точка D' – зображенням точки D . Використовуючи теорему Фалеса, можна побудувати точки P'_1 і Q'_1 , які, згідно застосованого закону зображення, є зображеннями, відповідно, точок P_1 і Q_1 . За їх допо-

могою неважко знайти і вершини P' , Q' , M' , N' шуканого п'ятикутника $A'P'Q'M'N'$.

148. Див. розв'язання задач 9.10 і 9.14.

149. Див. розв'язання задачі 9.17.

150. Усвідомимо, як можна побудувати прямокутник-оригінал.

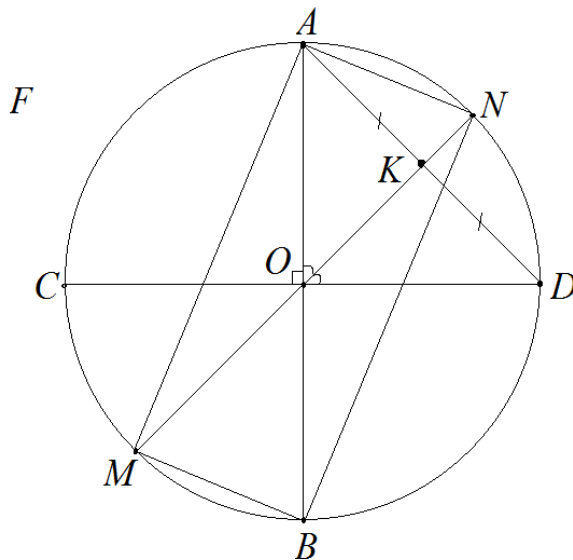


Рис. 264

Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD . Через середину K хорди AD проведемо діаметр MN .

$$\angle AON = \frac{1}{2} \angle AOD = 45^\circ, \text{ пря-}$$

мокутник $ANBM$ є шуканим (рис. 264). Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні по-

будови і для еліпса F' . Безпосереднє використання оригінала для цього не є потрібним.

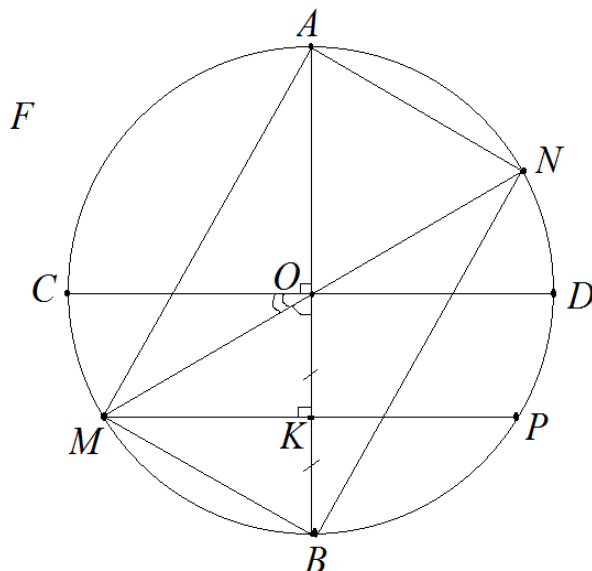


Рис. 265

151. Достатньо усвідомити, як можна побудувати прямокутник-оригінал. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD . Через середину K радіуса OB , паралельно до діаметра CD , проведемо хорду MP . Зрозуміло, що

$$\angle MOB = 60^\circ. \text{ Проведемо діа-}$$

метр MN Прямокутник $MANB$ є шуканим (рис. 265). Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови і

для еліпса F' . Безпосереднє використання оригінала для цього не є потрібним.

152. Див. вказівки до розв'язання задачі 151. На відміну від задачі 151, тут треба розглянути прямокутник $CNDM$.

153. Див. розв'язання задачі 9.14 і вказівки до розв'язання задачі 150.

154. Див. розв'язання задач 9.19, 9.20.

155. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з кутом у 60° , основи якої відносяться як 1:2, знаходиться посередині більшої з основ даної трапеції, основи висот даної трапеції, проведених з вершин тупих кутів, і точка O ділять більшу основу трапеції на чотири однакові частини. Розв'язання задачі не вимагає безпосереднього використання оригінала.

156. Див. розв'язання задачі 9.20.

157. Для розв'язання задачі важливо усвідомити, як можна вписати у коло рівнобічну трапецію з

кутом у 45° , основи якої відносяться як 1:3. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD . Точками M , E і N поділимо хорду AD на чотири однакові частини: $AM = ME = EN = ND$ (рис. 266).

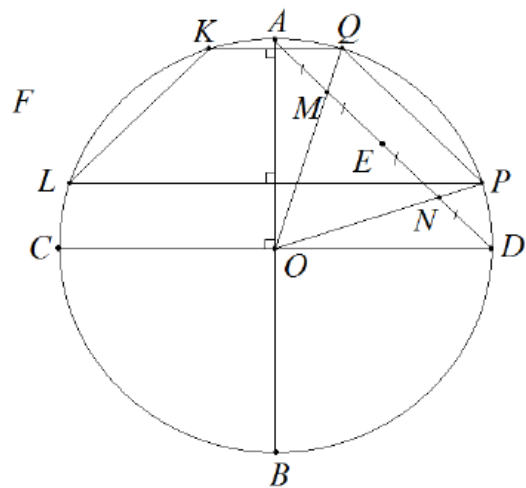


Рис. 266

Через точки M і N проведемо, відповідно, радіуси OQ і OP . Паралельно до діаметра CD проведемо хорди KQ і LP . Можна довести, що $KQ:LP=1:3$, $\angle LPQ=45^\circ$, трапеція $LKQP$ є шуканою.

Аналогічні побудови можна виконати і для еліпса F' . Вони повністю відповідають властивостям зображень фігур за методом

паралельного проєктування.

158. Див. розв'язання задач 9.14 і 9.20.

159. Див. розв'язання задач 9.14 і 9.20.

160. Див. розв'язання задач 9.14 і 9.20.

161. Усвідомимо, як можна побудувати трапецію-оригінал. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD . Через

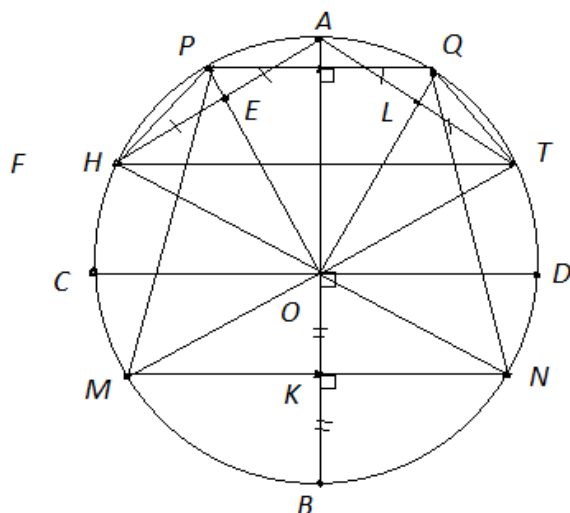


Рис. 267

середину K радіуса OB , паралельно до діаметра CD , проведемо хорду MN . Неважко довести, що $\angle MON = 120^\circ$.

Отже, хорду MN із центра O кола F видно під кутом у 120° . Проведемо діаметри MT і NH . Кут HOT дорівнює куту NOM і дорівнює 120° .

Хорду HT також видно із

центра O під кутом у 120° , $HT \parallel MN$. Проведемо хорди HA і AT .

Через середини E і L цих хорд ($HE = EA = AL = LT$) проведемо

радіуси OP і OQ , $\angle POQ = \frac{1}{2} \angle HOT = 60^\circ$, хорду PQ із центра O

видно під кутом у 60° , $PQ \parallel HT$. У підсумку, знайдені дві рівнобічні

трапеції, вписані у коло F , основи яких із центра O цього кола,

відповідно, видно під кутами у 60° і 120° . Це трапеції $HPQT$ і

$MPQN$ (рис. 267). Отже, для кола задача має два розв'язки.

Властивості зображень фігур за методом паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови і для еліпса F' . Для

розв'язання даної задачі безпосереднє використання оригінала не є потрібним.

162. Див. вказівки до розв'язання задачі 161.

163. Див. розв'язання задачі 9.14 і вказівки до розв'язання задачі 161.

164. Див. вказівки до розв'язання задачі 161.

165. Через середину P' хорди $M'N'$ проведемо діаметр $A'B'$

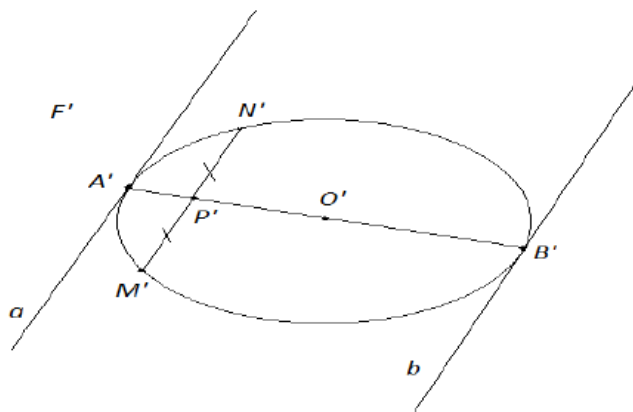


Рис. 268

еліпса F' (рис. 268).

Шукані дотичні прямі до еліпса F' – це прямі a і b , які, відповідно, проходять через точки A' і B' паралельно до прямої $M'N'$.

166. Треба провести промінь $A'O'$ до перетину з відрізком $B'C'$.

167. Див. розв'язання задачі 10.6.

168. Див. розв'язання задач 10.4, 10.12, 145. Мабуть, зручніше за все, спочатку побудувати зображення вписаного у коло правильного восьмикутника.

169. Див. розв'язання задач 10.10, 10.12, 9.11. Мабуть, зручніше за все, спочатку побудувати зображення вписаного у коло правильного шестикутника.

170. Спочатку можна побудувати зображення правильного шестикутника, описаного навколо кола-оригінала (див. задачу 169), або зображення правильного шестикутника, вписаного у коло-оригінал (див. задачу 9.11).

171. Спочатку можна побудувати зображення правильного п'ятикутника, вписаного у коло-оригінал. Див. розв'язання задач 147 і 165.

172. Спочатку можна побудувати зображення правильного десятикутника, вписаного у коло-оригінал. Див. розв'язання задач 146 і 165.

173. Див. розв'язання задачі 10.10

174. Спочатку можна побудувати зображення рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у 135° , вписаного у коло-оригінал. Див. розв'язання задач 9.13 і 165.

175. Спочатку можна побудувати зображення кута, що складає половину кута ABC , вписаного у коло F . Див. розв'язання задач 9.14 і 10.11.

176. Див. вказівку до розв'язання задачі 175 і задачу 10.10.

177. Дослідимо питання про те, як можна навколо кола F описати трикутник-оригінал. Проведемо у колі F пару взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD . Паралельно до діаметра CD , через точку B проведемо пряму a . До прямої a проведемо перпендикуляр CM .

На промені, доповняльному до променя AO , відкладемо від-

різок $AN = \frac{1}{2}AO$. Побудуємо

такий трикутник MBN , що $MB:BN = 2:5$, $\angle MBN = 90^\circ$.

Пряма MN перетне коло F у точках P і Q . Через середину

T хорди PQ проведемо радіус OK . Через точку K , паралельно до прямої MN , прове-

демо пряму b_1 . $E = a \cap b_1$,

$L = AB \cap b_1$. Трикутник EBL є подібним до трикутника MBN , його сторона EL дотикається кола F у точці K , $EB:BL = 2:5$. На промені,

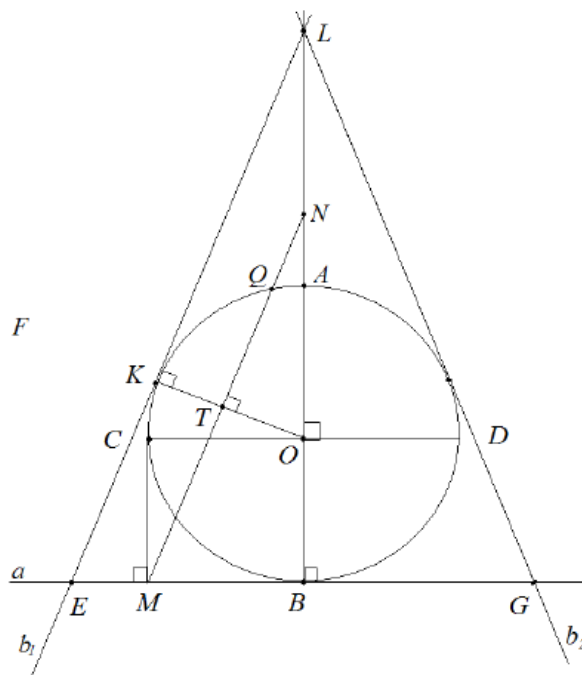


Рис. 269

доповняльному до променя BE , відкладемо відрізок $BG = BE$. Трикутник LBG дорівнює трикутнику LBE , $BG:BL = 2:5$, гіпотенуза LG трикутника LBG дотикається кола F . Отже, трикутник ELG є рівнобедреним трикутником, описаним навколо кола F , LB є висотою даного трикутника, проведеною до його основи, $EG:LB = 4:5$ (рис. 269).

Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' за виключенням явного використання оригінала.

1. У еліпсі F' проводимо пару спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$.
2. Паралельно до діаметра $C'D'$, через точку B' проводимо пряму a' .
3. Через точку C' , паралельно до діаметра $A'B'$, проводимо пряму $C'M'$ до перетину з прямою a' у точці M' .

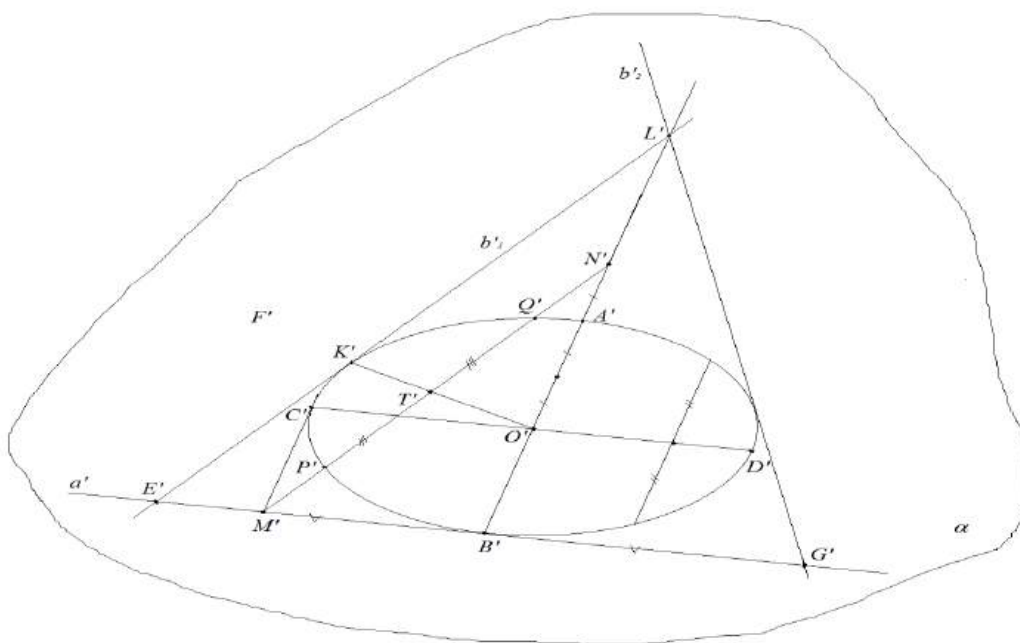


Рис. 270

4. На промені, доповняльному до променя $A'O'$, відкладаємо відрізок $A'N'$, який дорівнює половині відрізка $A'O'$.

5. Проводимо пряму $M'N'$, яка перетинає еліпс F' у точках P' і Q' .

6. Через середину T' хорди $P'Q'$ проводимо радіус $O'K'$.

7. Через точку K' , паралельно до прямої $M'N'$, проводимо пряму b'_1 .

8. $E' = a' \cap b'_1$, $L' = A'B' \cap b'_1$.

9. На промені, доповняльному до променя $B'E'$, відкладаємо відрізок $B'G'$, $B'G' = E'B'$.

10. Трикутник $E'L'G'$ є шуканим (рис. 269).

178. Див. розв'язання задачі 177.

179. Див. розв'язання задач 10.16, 10.17.

180. Розглянемо ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються у точці O (рис. 271). Проведемо $OK \perp AB$, $ON \perp BC$, $OL \perp CD$,

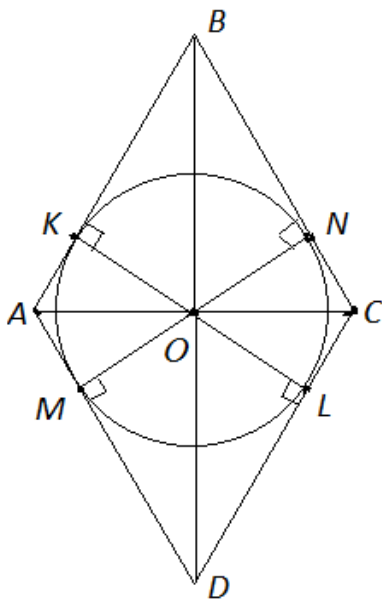


Рис. 271

$OM \perp AD$. $OK = ON = OL = OM$ – це радіуси кола, вписаного у ромб $ABCD$.

Відрізки ON і OM лежать на одній прямій як перпендикуляри, проведені з однієї точки до паралельних між собою прямих, у сумі їх довжини дорівнюють довжині висоти ромба. Те ж саме має місце й для відрізків OK і OL . Якщо сторона даного ромба відноситься до його висоти як $5:4$,

то $BC:MN = 5:4$, $BC:ON = 5:2$. Відрізок

ON є висотою, проведеною до гіпотенузи

прямокутного трикутника BOC . Отже, $ON^2 = BN \cdot NC$. З іншого бо-

ку, $BN + NC = BC$. Якщо $BC = 5p$, $ON = 2p$, то
$$\begin{cases} BN \cdot NC = 4p^2 \\ BN + NC = 5p \end{cases}$$

Звідси $BN = 4p$, $NC = p$ (якщо припустити, що саме $BN > NC$). Тоді $ON:NC:BN = 2:1:4$. Останні співвідношення дозволяють наступним чином описати навколо кола F ромб-оригінал.

1. Проводимо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD .

2. Паралельно до діаметра CD , через точку A проводимо пряму a_1 , через точку B – пряму a_2 (рис. 272).

3. Через середину T радіуса OC проводимо перпендикуляр TM до прямої a_2 ($TM \parallel AB$).

4. На промені, доповняльному до променя BM , відкладаємо відрізок $BL = 2CO$. $OB:BM:BL = 2:1:4$.

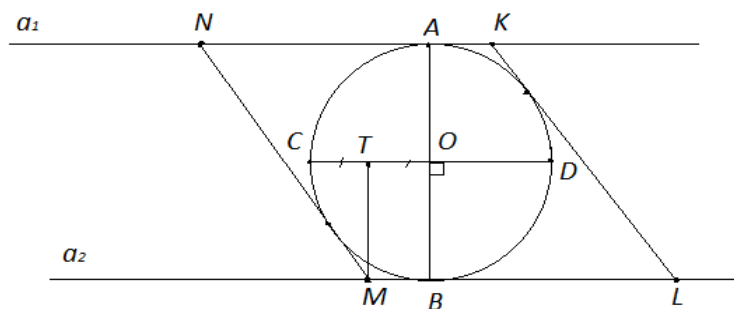


Рис. 272

5. На тому промені з початком у точці A прямої a_1 , який є протилежно спрямованим до променя BM , відкладаємо відрізок $AK = BM$.

6. На промені, доповняльному до променя AK , відкладаємо відрізок $AN = BL$.

7. Паралелограм $MNKL$ є шуканим ромбом.

Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' за виключенням явного використання побудованого оригіналу.

181. Див. розв'язання задачі 180.

182. Див. розв'язання задачі 10.20.

183. Див. розв'язання задачі 10.20.

184. Див. розв'язання задачі 10.20.

185. Див. розв'язання задачі 9.14, 10.20.

186. Треба побудувати трапецію-оригінал і застосувати теорему Фалеса. (див. розв'язання задачі 10.19). Для побудови оригінала можна знайти бісектрису заданого кута MNK .

187. Дослідимо, по-перше, питання про те, як можна побудувати трапецію-оригінал. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD . Паралельно до діаметра CD , через точку A проведемо пряму a_1 , через точку B – пряму a_2 . Паралельно до діаметра AB , через точку C проведемо пряму b_1 , через точку D – пряму b_2 . $N = a_1 \cap b_1$, $M = a_2 \cap b_1$, $T = a_2 \cap b_2$. Висота описаної навколо кола прямокутної трапеції, співпадає з її бічною стороною, перпендикулярною до основ, і дорівнює подвоєному радіусу вписаного кола. Отже, $MN = NC + CM = MB + BT = MT$, $NC = CM = MB = BT$. На промені, доповняльному до променя TM , відкладемо відрізок TQ , $TQ = TB$, $MQ : MN = 3 : 2$. Пряма QM є дотичною, проведеною з

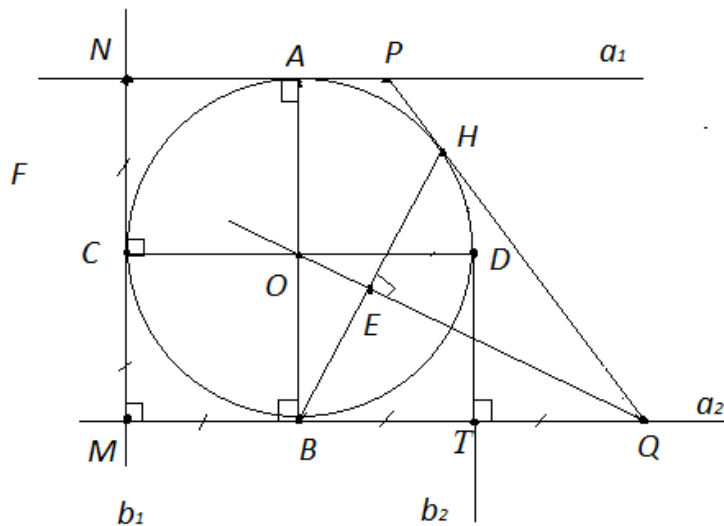


Рис. 273

точки Q до кола F (рис. 273). Для побудови шуканої трапеції достатньо через точку Q провести іншу дотичну до кола F . Обидві дотичні є симетричними відносно прямої QO . Перпендикулярно до прямої

QO , проводимо хорду BH . Точка H є точкою дотику другої дотичної до кола F . Проводимо пряму QH . Нехай $P = QH \cap a_2$. Трапеція $MNPQ$ є шуканою.

Властивості паралельного проєктування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' за виключенням явного використання побудованого оригінала.

1. Проводимо у еліпсі F' пару спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$ (рис. 274).

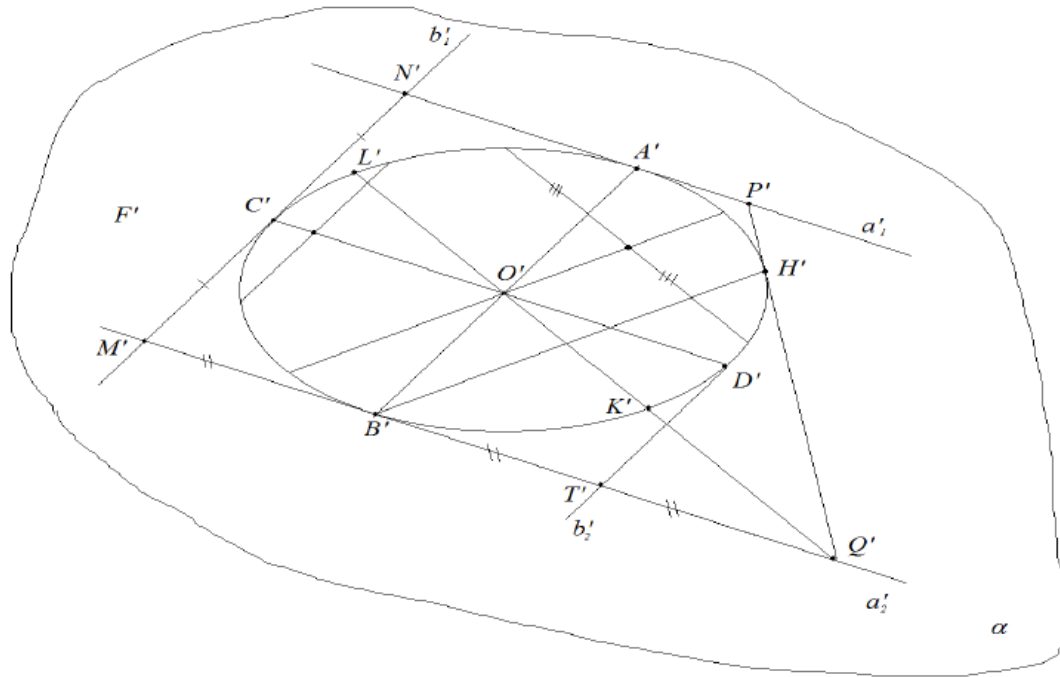


Рис. 274

2. Паралельно до діаметра $C'D'$, через точку A' проводимо пряму a'_1 , через точку B' – пряму a'_2 .

3. Паралельно до діаметра $A'B'$, через точку C' проводимо пряму b'_1 , через точку D' – пряму b'_2 .

4. $N' = a'_1 \cap b'_1$, $M' = a'_1 \cap b'_2$, $T' = a'_2 \cap b'_2$.

5. На промені, доповняльному до променя $T'M'$, відкладаємо відрізок $T'Q'$, $T'Q' = B'T'$.

6. Проводимо пряму $Q'O'$, яка перетинає еліпс F' у точках K' і L' .

7. Будуємо діаметр, спряжений до діаметра $K'L'$. Паралельно до цього спряженого діаметра проводимо хорду $B'H'$.

8. Проводимо пряму $Q'H'$.

9. $P' = Q'H' \cap a'_1$, трапеція $M'N'P'Q'$ є шуканим зображенням.

188. Див. розв'язання задачі 187.

189. Див. розв'язання задачі 10.23.

190. Див. розв'язання задачі 10.23.

191. Див. розв'язання задач 184, 10.23.

192. Див. розв'язання задач 185, 10.23.

193. Див. розв'язання задач 186, 10.23.

194. Див. розв'язання задачі 187.

195. Див. розв'язання задачі 188.

196. Див. розв'язання задач 10.23 і 189.

197. Див. розв'язання задачі 196.

198. Див. розв'язання задачі 195.

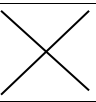
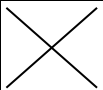
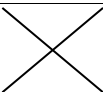
199. Див. розв'язання задач 10.23 і 189.

200. Див. розв'язання задачі 199.

Відповіді до тестових завдань для самоконтролю до розділу II

1. В, 2. А, 3. Б,

4.

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

5. Б, 6. Г, 7. В, 8. А, 9. Б, 10. Б, 11. В, 12. Г, 13. А,
 14. В, 15. Б, 16. Г, 17. В, 18. Г, 19. А, 20. Б, 21. В, 22. В,
 23.

	А	Б	В	Г	Д
I				X	
II	X				
III					X
IV			X		

24. А,

25.

	А	Б	В	Г	Д
I			X		
II	X				
III					X
IV				X	

26. Г, 27. Б, 28. Г, 29. В, 30. Б.

Предметний покажчик

Апарат методу лінійної перспективи 29

- – Монжа 24
- – паралельного проєктування 42
- – проєктування 15
- – Федорова 32
- – центрального проєктування 27

Відношення між фігурами евклідового простору афінні 16, 17

- – – – метричні 16, 17
- – – – подібності 16, 17
- – – – проєктивні 16, 17

Відображення афінне евклідової площини 89, 149, 150

- ізометричне евклідової площини 151
- лінійне евклідового простору 89
- – евклідової площини 89
- – – прямої 89
- перспективно-афінне евклідової площини 152, 157
- подібності евклідового простору 43
- – евклідової площини 151, 154
- – – прямої 58, 124

Геометрична фігура 14

- – лінійна 124
- – нелінійна плоска 130
- – плоска 130

Гомотетія евклідової площини 85

- евклідового простору 84

Евклідов простір 13

Евклідова геометрія 13

Задача теорії зображень геометричних фігур евклідового простору

афінна 17

– евклідова 17

– метрична 17

– подібності 17

– позиційна 17

Закон відображення, притаманний певному методу проєктування 15

Зображення точки 16

– – за методом паралельного проєктування 43, 52

Зображення фігури 15

– – афінно повне 18, 161

– – евклідово повне 18, 128

– – за допомогою ортогонального проєктування 46

– – – за методом паралельного проєктування 43

– – інформативне 37

– – метрично повне 18, 129, 165

– – наочне 36

– – повне 17

– – подібно повне 18, 166, 167

– – позиційно повне 17

– – правильне 34

Інформативність зображення 37

Коефіцієнт метричної неповноти зображення лінійної геометричної

фігури 129

– – – – нелінійної плоскої геометричної фігури 166

- подібної неповноти зображення нелінійної плоскої геометричної фігури 168

Лінія горизонту (згідно методу лінійної перспективи) 29

Мета проєктування 15

Метод проєктування 15

- зображення 16
- лінійної перспективи 29
- Монжа 24
- паралельного проєктування 37, 42
- Федорова 32
- центрального проєктування 27

Наочність зображення 36

Напрямок паралельного проєктування 42

Обрис зображення фігури 47

- проєкції фігури 47

Оригінал зображення фігури 16

- проєкції фігури 15

Основа картини (згідно методу лінійної перспективи) 29

Основна теорема теорії зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проєктування 146

Основні вимоги до зображень просторових фігур при викладанні евклідової геометрії 34

Паралельне проєктування, вироджене для відрізка 61

- – – – лінійної геометричної фігури 124
- – – – нелінійної плоскої геометричної фігури 130

- – – – пари паралельних прямих 80
- – – – півплощини 76
- – – – площини 70
- – – – променя 64
- – – – прямої 56

Паралельне проєктування, невироджене для відрізка 61

- – – – лінійної геометричної фігури 124
- – – – нелінійної плоскої геометричної фігури 130
- – – – пари паралельних прямих 80
- – – – півплощини 76
- – – – площини 70
- – – – променя 64
- – – – прямої 56
- – ортогональне 42

Перетворення евклідового простору афінні 18

- – – метричні 19
- – – подібності 19
- – – проєктивні 18

Площина вертикальна (при проєктуванні за методом Монжа) 24

- горизонтальна (при проєктуванні за методом Монжа) 24
- другорядних проєкцій (за методом лінійної перспективи) 29
- зображень 15
- картинна 15
- проєкцій 14
- профільна (при проєктуванні за методом проєктування Монжа) 24

Правильність зображення 34

Проєкція точки 14, 15

- – за методом лінійної перспективи 30
- – – – Монжа 25
- – – – паралельного проєктування 42, 51

- – – – Федорова 32, 33
- – – – центрального проєктування 27
- – ортогональна 42, 43
- фігури 15

Простота зображення 37

Процес зображення точки 16

- – фігури 16
- проєктування точки 14
- – фігури 14

Рух евклідового простору 19

- геометричної фігури евклідового простору 19

Точка видна (за методом паралельного проєктування) 47, 48

- головна картини (за методом лінійної перспективи) 30
- зору (за методами центрального проєктування і лінійної перспективи 27, 29
- невидна (за методом паралельного проєктування) 47, 49

Іменний покажчик

Бурато Сергіо 36
Буш Моніка 36
Гільберт Давід 13
Джос де Мей 36
Евклід 13
Ешер Мауріц Корнеліус 35
Леонардо да Вінчі 29
Монж Гаспар 24
Пенроуз Роджер 35, 36
Піфагор Самосський 12
Погорелов Олексій Васильович 14
Рутерсвард Оскар 35
Федоров Євграф Степанович 32

Інформаційні джерела

1. Боровик В. Р., Зайченко І. В., Мурач М. М., Яковець В. П. Геометричні перетворення площини: навчальний посібник. ТОВ. ВТД Університетська книга». 2003. 510 с.
2. Державний стандарт базової середньої освіти: постанова КМУ від 30.09.2020 р. № 898 <https://zakon.rada.gov.ua>
3. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: постанова КМУ від 23.11.2011 р. № 1392 <https://zakon.rada.gov.ua>
4. Державний стандарт профільної середньої освіти: постанова КМУ від 25.07.2024 р. № 851 <https://zakon.rada.gov.ua>Є
5. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Київ-Харків. Ранок, 2024. 288 с.
6. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія: підручн. для 8 класу закл. загал. серед. освіти, 2-ге вид., перероб. Харків. Ранок, 2021. 256 с.
7. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків. Ранок, 2018. 288 с.
8. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ. Генеза, 2024. 224 с.
9. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ. Генеза, 2021. 240 с.
10. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. Генеза, 2017. 240 с.
11. Кириленко А. Л., Григор'єва В. Б. Застосування перетворень евклідової площини до розв'язання задач. Херсон. ХДУ, 2020. 114 с.
12. Конет І. М., Сорич В. А. Лекції з аналітичної геометрії. Кам'янець-Подільський. Аксіома, 2013. 200 с.

13. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Геометрія. Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Харків. Гімназія, 2024. 272 с.
14. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Геометрія. Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. Харків. Гімназія, 2025. 240 с.
15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків. Гімназія, 2017. 304 с.
16. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків. Гімназія, 2018. 272 с.
17. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 204 с.
18. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень. Міністерство освіти і науки України, URL: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html>
19. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. Міністерство освіти і науки України, URL: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html>
20. Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень для поглибленого вивчення Міністерство освіти і науки України, URL: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html>
21. Нелін Є. П. Геометрія (профільна школа): підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків. Ранок, 2018. 240 с.
22. Никифорчин О. Р. Основи геометрії. Івано-Франківськ: ПНУ, 2016. 155 с.

23. Погорелов О. В. Геометрія: підручн. для 7–11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Київ. Освіта, 1990. 348 с.
24. Працьовитий М. В. Геометричні перетворення. Афінні перетворення площини. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. 40 с.
25. Працьовитий М. В. Геометричні перетворення. Рухи площини. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. 44 с.
26. Працьовитий М. В. Геометричні перетворення. Перетворення подібності площини. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. 39 с.
27. Романовський Б. В. Задачі на побудову в стереометрії. Київ. Радянська школа, 1936. 120с.
28. Семенович О. Ф. Геометрія. Групи перетворень. Київ: Вища школа, 1971. 279 с.
29. Сидоренко В. К. Креслення: (проф. рівень): підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням укр. мовою. Київ. Освіта, 2011. 240 с.
30. Синюкова О. М. Конструктивні аспекти евклідової геометрії: тексти лекцій. Одеса. Фенікс, 2022. 147 с.
31. Синюкова О. М., Ладиненко Л. П. Зображення просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії. Частина І. Одеса, Фенікс, 2019. 488 с.
32. Тадеєв В. О. Основи стереометрії. 10 кл.: дворівн. підруч. для проф. навчання математиці у загальноосвіт. навч. закл. / За ред. професора В. І. Михайловського. 4-те вид. Тернопіль, Навч. книга – Богдан. 2010. 400 с.
33. Тадеєв В. О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів /За ред. М. Й. Ядренка. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. 480 с.
34. Теплінський Ю. В. Елементи конструктивної геометрії: навч. посіб. Кам'янець–Подільськ. Кам'янець–Поділ. держ. ун-т, 2005. 152 с.

35. Четверухін М. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії. Київ. Радянська школа, 1953. 188 с.
36. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович А. В. Аналітична геометрія: навчальний посібник. Київ. Університетська книга, 2024. 296 с.
37. Arora Raman. A Guide to The World of High School Geometry: Volume 1 & 2 (High School Math Series). Independently publisher, 2022. 247 p.
38. Euclid's Elements. Green Pharmacy Lion Press, 2002. 526 p.
39. Hilbert, David. The Foundations of Geometry. Authorized translation E. J. Townsend. University of Illinois. The Open Court Publishing Company LA-SALLE. Illinois, 1950. 86 p.
40. Serovajsky, Simon. Architecture of Mathematics. USA, Chapman & Hall, 2022. 394 p.
41. Бібліотека Університету Ушинського: офіційний сайт. URL : <https://library.pdpu.edu.ua/>
42. Електронний архів наукових публікацій Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. URL: <https://lib.npu.edu.ua/>
43. Електронний архів Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди. URL: <https://dspace.hnpu.edu.ua/>
44. Міністерство освіти і науки України: офіційний сайт. URL: <http://www.mon.gov.ua/>
45. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського: офіційний сайт. URL : <http://www.nbuv.gov.ua/>
46. Одеська національна наукова бібліотека: офіційний сайт. URL : <http://odnb.odessa.ua/>
47. Наскельні рельєфи в Танумі URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=229816>
48. Червонофігурний вазопис. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D1%84%D1%96%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%B2%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%BF%D0%B8%D1%81

49. Піфагор Самосський, Джон Август Кнапп. URL: https://www.prs.org/store/p3008/Pythagoras_of_Crotona_by_John_Augustus_Knapp.html?utm_source=chatgpt.com
50. Декоративний розпис на склі. URL: <http://home-sweet.ru/hand-made/rospis-po-steklu-keramike/page/4>
51. Евклід URL: https://www.gettyimages.fr/photos/euclid-mathematician?utm_source=chatgpt.com
52. Гільберт Д. URL: https://www.alamy.com/stock-photo/david-hilbert.html?blackwhite=1&sortBy=relevant&utm_source=chatgpt.com
53. Погорєлов О. В. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B%D0%B3%D0%BE%D1%80%D1%94%D0%BB%D0%BE%D0%B2_%D0%9E%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D1%96%D0%B9_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87
54. Зображення та об'єкт мають різні розміри. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=foahTqz7On4>.
55. Гаспар Монж URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%81%D0%BF%D0%B0%D1%80_%D0%9C%D0%BE%D0%BD%D0%B6
56. Наочність зображення змінюється при зміні точки зору. URL: http://www.focus.de/kultur/kunst/kunst-dresdner-gemaeldegalerie-zeigt-fruehen-vermeer_aid_548454.html
57. Леонардо да Вінчі, URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%82_\(%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%BE\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%82_(%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%BE))
58. Федоров Є. С. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2_%D0%84%D0%B2%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84_%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87
59. Зображення «неможливих» фігур. URL: <https://violity.com/ua/new/5793-nevozmozhnnye-figury-mauric-esher-i-ego-litografii-paradoksy>