

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. ДУШИНСЬКОГО»

Факультет початкового навчання
Кафедра математики і методики її навчання

Катерина НЄДЯЛКОВА
Світлана ІВАНОВА
Алла ТУМБРУКАКІ

Навчальний посібник

Методика навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження

з дисципліни

«Методика навчання математики»

змістовий модуль

«Начала систематичного курсу планіметрії»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
спеціальностей

Середня освіта (Математика. Інформатика),
Середня освіта (Математика. Англійська мова),
Середня освіта (Фізика. Математика)

Одеса
2025

УДК: 37.016: 51 (075.8)

*Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»*

протокол №13 від 24 квітня 2025 року

Рецензенти:

Галина Василівна Налева, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і фізики Національного університету “Одеська морська академія”

Марія Георгіївна Волкова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри фізико-математичних наук Державного університету інтелектуальних технологій і зв’язку

Недялкова К. В., Іванова С. В., Тумбрукакі А. В. Методика навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження: навчальний посібник з дисципліни «Методика навчання математики» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальностей: А4 Середня освіта (Математика. Інформатика), А4 Середня освіта (Математика. Англійська мова), А4 Середня освіта (Фізика. Математика). Одеса: Університет Ушинського, 2025. 152 с.

Навчальний посібник розроблено відповідно специфіки підготовки майбутніх учителів за спеціальностями А4. Середня освіта (Математика. Інформатика), А4. Середня освіта (Математика. Англійська мова), А4. Середня освіта (Фізика. Математика). Матеріал посібника покликаний ґрунтовно розкрити розділ методики навчання математики – Начала систематичного курсу планіметрії у синтезі теоретичних підходів, завдань для практичної та самостійної роботи студентів. Висвітлено методологію, логіку та функціонал методики навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження як параметра методичної компетентності вчителя.

© Недялкова К. В., Іванова С.В., Тумбрукакі А. В., 2025

ВСТУП	6
РОЗДІЛ I. Лекційний матеріал з методики навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження	9
Лекція 1. <i>Логічні основи шкільного курсу математики</i>	9
Лекція 2. <i>Методи доведень математичних тверджень</i>	16
2.1. Сутність поняття «доведення»	16
2.2. Методи доведень теорем ШКМ	19
Лекція 3. <i>Методичні рекомендації щодо навчання учнів доводити математичні твердження</i>	30
3.1. Вступні зауваження	30
3.2. Пропедевтика навчання учнів доведень	31
3.3. Навчання школярів готових доведень	33
3.4. Навчання учнів самостійного пошуку доведень	35
Лекція 4. <i>Основні етапи роботи над теоремою та їх реалізація на прикладі теорем шкільного курсу математики</i>	46
4.1. Вступні зауваження	46
4.2. Реалізація основних етапів роботи з теоремою на прикладі теореми про середню лінію трапеції	54
4.3. Ілюстрація основних етапів роботи з теоремою під час вивчення теореми про три перпендикуляри	58
4.4. Демонстрація основних етапів роботи з теоремою при навчанні теореми про рівносильність рівнянь	65

4.5. Організаційні форми на кожному етапі роботи з теоремою	69
4.6. Аналіз етапів формування у здобувачів середньої освіти компетентності доводити математичні твердження	72
<i>Лекція 5. Різні способи доведення теорем: методичний аспект</i>	74
5.1. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про площу чотирикутника	74
5.2. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми косинусів	77
5.3. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про суму кутів трикутника	80
5.4. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про середню лінію трапеції	82
5.5. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про властивість бісектриси трикутника	85
РОЗДІЛ II. Дидактико-методичні матеріали до проведення практичних занять	90
Практичне заняття № 1. <i>Методи доведення теорем</i>	90
Практичне заняття № 2. <i>Методика навчання школярів доведень теорем</i>	98
Практичне заняття № 3. <i>Методика роботи з твердженнями шкільного курсу геометрії</i>	106
Практичне заняття № 4. <i>Методика організації та проведення «уроку однієї задачі»</i>	117
Завдання для самостійної роботи студентів	124
Завдання в тестовій формі щодо підготовки майбутніх учителів математики до навчання учнів доводити математичні твердження	129

Ключ до розв'язання тестових завдань	139
ВИСНОВКИ	140
Список використаних джерел	142
Додаток. QR – словник понятійного апарату досліджуваної теми	149

Вступ

Концептуалізація векторів підготовки майбутніх учителів природничо-математичних спеціальностей на сучасному етапі розвитку системи вищої освіти України детермінована актуалізацією вимог до рівня системно-логічного мислення педагогів, його здатності впроваджувати освітні інновації на коректних методологічних засадах за умов дотримання логіки та системотвірної варіативності математичної галузі знань.

Видання репрезентує алгоритми розв'язання вкрай актуальної для методичної підготовки сучасного вчителя проблеми: навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження сучасного шкільного курсу математики.

Методологічна проєкція навчального видання увиразнює: концептуальний аналіз ключових позицій методики навчання математики, дидактичний арсенал для вирішення практичних завдань, системний досвід авторів з проєктування параметрів сучасної методики математики, перспективні стратегії розроблення подальших кроків удосконалення системи методичної підготовки вчителів природничо-математичних спеціальностей.

Професійно-педагогічна діяльність сучасного вчителя математики покликана сформувати системно-цілісний погляд учнів на математику як науку і навчальну дисципліну, репрезентувати різні розділи математики в синергії системи замкненої математичної теорії, сформувати науковий світогляд учнів, озброїти їх інструментарієм пізнання довколишньої дійсності, засобами розв'язання суто математичних та практичних, життєво важливих задач. Системна та якісна професійна підготовка майбутніх учителів математики передбачає систематизацію та упорядкування знань з методології шкільного курсу математики, методики навчання математики в розрізі сучасних тенденцій інноватизації освіти.

Вивчення теорем та їх доведень є одним з ключових завдань шкільного курсу математики і, водночас, важливою методичною проблемою. Дійсно, аналіз досвіду роботи вчителів-математиків у сучасній загальноосвітній школі засвідчує зменшення інтересу здобувачів середньої освіти до доказових міркувань, розв'язування задач на доведення, самостійного пошуку доведень, різних способів доведення тверджень шкільного курсу математики тощо. У значній кількості учнів помічається несформованість або недостатня сформованість компетенцій щодо доведень тверджень як курсу геометрії, так і курсу алгебри сучасної школи. Водночас, при навчанні учнів доводити математичні твердження відбувається розвиток логічного мислення учнів, просторових уявлень та уяви; учні вчаться методам доведень, засвоюють евристичні прийоми розумової діяльності; у школярів формуються позитивні якості особистості: наполегливість, посидючість, кмітливість та ін. Отже, вивчення теорем та їх доведень у шкільному курсі математики важко переоцінити.

Відтак, постає проблема підвищення інтересу здобувачів середньої освіти до доказових міркувань – з одного боку; а з іншого – вдосконалення фахової підготовки майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження і формування відповідного складника їхньої методичної компетентності.

Репрезентований навчальний посібник має на меті сприяти вирішенню зазначеної методичної проблеми і підтримати курс фахової дисципліни «Методика навчання математики» у педагогічному ЗВО для студентів – майбутніх учителів математики. Посібник спрямований на формування у майбутніх учителів математики інтегральної компетентності, тобто здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми в галузі середньої освіти, що передбачає застосування теорій та методів педагогіки та математики і характеризується комплексністю та невизначеністю педагогічних умов організації освітнього процесу загальноосвітньої школи. Крім того, залучення матеріалів представленого навчального посібника у

процес професійної підготовки мабутьних учителів математики сприятиме формуванню фахових компетентностей.

Подані матеріали навчального посібника структуровано у три розділи, перший із яких представляє собою лекційний матеріал щодо зазначеної тематики; у другому представлено дидактико-методичні матеріали, що сприяють формуванню у студентів практичних навичок щодо навчання учнів доводити математичні твердження, включаючи завдання для самостійної роботи студентів; третій розділ подає завдання у тестовій формі, спрямовані на формування у бакалаврів математичної і методичної культури в контексті проблеми, що розглядається.

У навчальному посібнику розглянуто методи доведень теорем, їхня класифікація; основні принципи і прийоми навчання учнів як розуміти і відтворювати готові доведення, так і самостійного пошуку доведень; етапи роботи над теоремою та їх реалізація на прикладі теореми про середню лінію трапеції, теореми про три перпендикуляри, теореми про рівносильність рівнянь; різні способи доведень теорем та можливості їх презентації з методичної точки зору та інші питання. Матеріали подано в контексті компетентнісного підходу до навчання учнів математики: надано основні етапи формування складових компетентності учнів доводити математичні твердження і шляхи їх реалізації.

Автори сподіваються, що розроблений навчальний посібник буде актуальним і корисним для здобувачів вищої освіти, аспірантів, викладачів закладів вищої освіти, методистів, учителів-практиків.

РОЗДІЛ І

Лекційний матеріал з методики навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження

ЛЕКЦІЯ 1

Тема: *Логічні основи шкільного курсу математики*

Як відомо, існує декілька видів математичних речень, що складають логічну основу математики: означення (включає в себе характеристичні властивості предмета), аксіоми (твердження, що приймаються без доведень) і теореми (твердження, справедливість якого встановлюється шляхом доведення); при цьому розрізняють теореми-властивості, теореми-ознаки, теореми існування (та єдиності).

- Наведіть приклади з ШКГ означень різних видів, аксіом, теорем-властивостей, теорем-ознак, теорем існування.

Як відомо, основу будь-якої науки, в тому числі і математики, складають поняття. Але не всі математичні поняття визначають. Для деяких понять не можна дати чіткого з точки зору логіки означення, адже дати означення поняттю означає з'ясувати його зміст за допомогою вже відомих понять та їх особливостей. Але на початку розвитку тієї чи іншої науки ще не буває визначених понять, тому перші поняття вводяться без означень. Їх називають *первинними, основними або неозначуваними поняттями*. Наприклад, на початку вивчення геометрії першими вводяться поняття „точка” і „пряма”. Розкрити їх зміст, тобто дати означення за допомогою вже відомих понять неможливо, оскільки не про які геометричні поняття мова ще не йшла. Отже, „точка” і „пряма” – первинні поняття. Але це не означає, що

нам невідомий їх зміст: ми розуміємо його інтуїтивно, із життєвого досвіду. Так, в ШКГ зміст первинних понять розкривається за допомогою опису і системи аксіом, а в наукових курсах – за допомогою системи аксіом.

Отже, опис відношень між первинними поняттями дається за допомогою аксіом. Аксіоми непрямо визначають первинні поняття настільки, що після цього їх можна використовувати у доведеннях. Тому можна говорити про непряме визначення основних понять через аксіоми. Іноді навіть говорять про аксіоматичні означення - **означення понять через систему аксіом.**

Так, наприклад, в „Основаниях геометрии” Гілберта під „точками”, „прямими”, „площинами” і під відношеннями „належить”, „між”, „дорівнює” розуміються деякі речі і відношення, відносно яких нам відомо тільки те, що ці речі і відношення задовольняють деяким аксіомам. Для перелічених речей і відношень не дається прямих означень, але можна стверджувати, що система аксіом непрямо їх визначає. Наприклад, перша група аксіом геометрії Гілберта (аксіоми приналежності) слугують непрямим означенням поняття „належить”.

Цілком зрозуміло, що ШКГ не може бути аксіоматичним, строго логічним. В ШКГ не перелічуються всі основні поняття, не формулюються деякі аксіоми (хоча в неявному вигляді ми ними користуємося), не всі поняття визначаються.

Яке ж походження первинних понять?

Ці поняття введені шляхом абстракції. Натягнута струна дає уявлення про пряму. Відволікаючись від розмірів, поперечного перетину струни, неминучих нерівностей ребра лінійки, ширини та довжини отриманої лінії на папері одержуємо геометричний образ - пряму. Тому говорять, що пряма **визначена через абстракцію.**

Наприклад, ввести *поняття геометричного тіла означенням через абстракцію* можна було б так: розглянув з учнями різні предмети (шкаф, кузов вантажного автомобіля, сірникову коробку, м'яч, глобус, біл'ярдну

кулю) і вказав на їх різні фізичні, хімічні ті ін. властивості, відзначаємо, що спільним для всіх цих предметів є форма (паралелепіпед і куля). Демонструючи інші предмети, утворюємо в учнів поняття про форму взагалі: звертаємо увагу на те, що різні предмети можуть мати різні розміри, займати різне положення у просторі. Після цього повідомляється, що реальні предмети, які розглядаються тільки з точки зору їх форми, розмірів та положення, називаються геометричними тілами. При цьому від учнів не слід вимагати механічного заучування означень через абстракцію.

При різних способах викладання *можливі різні системи первинних понять*. Так, поняття „пряма” вважається первинним. Але можна замінити послідовність викладення матеріалу, ввести інші первинні поняття так, щоб для поняття «пряма» можна було б дати строге означення.

- Які, на Вашу думку, поняття вважаються первинними у шкільному курсі геометрії?

Кожне означення – це деяке погодження. Ми могли б, взагалі кажучи, вільно створювати класи предметів і називати їх. Тому коли вчений вводить перші означення, немає сенсу з’ясовувати, чи вірно воно, чи ні. Можна ставити питання: чи розумно воно, доцільно обрано?

Таким чином, будь-яке математичне означення не є висловленням (відносно означення не можна сказати, істинно воно чи хибно), воно лише розумно обрано з декількох можливих означень.

А от помилки в формулюваннях означень можуть припускатися, і тоді ми говоримо, що означення неправильне (хоча коректніше було б говорити – неправильно сформульоване означення).

- Пригадайте найпоширеніші помилки, що припускаються учнями при означенні понять і шляхи їх запобігання і виправлення.

- Чи будуть вірними такі означення: „Прямі називаються паралельними в просторі, якщо вони належать одній площині і не перетинаються, скільки б ми їх не продовжували”; „Ромбом називають паралелограм, у якого дві сторони, що утворюють кут, рівні”.

Розглянемо відоме означення паралелограма: „Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні”. Виходячи з цього визначення, можна сформулювати декілька висловлень, які виражають властивості паралелограма:

1. Паралелограм має чотири кута;
2. Паралелограм має чотири вершини;
3. Паралелограм має дві пари паралельних друг другу сторін.

Відмітимо, що перші дві властивості притаманні не тільки паралелограму, а й іншим видам чотирикутника. Третя ж властивість характеризує саме цю фігуру, виділяє її з множини всіх інших чотирикутників, повністю визначає паралелограм і дозволяє його побудувати. Саме таку властивість математичного об’єкта називають його *характеристичною властивістю*.

Зазвичай в означенні поняття (об’єкта) відображені необхідні та достатні умови для того, щоб даний об’єкт належав деякій множині. Тому при формулюванні означень часто використовуються зв’язки „необхідно і достатньо”, „тоді і тільки тоді” і т.п. В розглядуваному випадку можна сказати: „Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом необхідно і достатньо, щоб його протилежні сторони були попарно паралельні”.

- Сформулюйте це означення за допомогою слів „тоді і тільки тоді”.

Властивість мати чотири сторони і властивість попарної паралельності сторін такі, що кожна з них необхідна для характеристики паралелограма, а

перелічена множина цих властивостей достатня, щоб повністю охарактеризувати саме це поняття.

Разом з тим, із всієї множини властивостей, притаманних даному поняттю, відбір властивостей, які здатні повністю охарактеризувати це поняття, може бути здійснений декількома способами. Тобто не треба думати, що для визначення поняття існує тільки одна єдина група істотних ознак: *вибір істотних ознак для утворення визначення із всієї сукупності ознак не є однозначним. Якщо один набір таких ознак поняття покладений в основу його визначення, то інші подібні набори характеристичних властивостей зазвичай виступають в ролі теорем.*

Отже, будь-яка характеристична властивість даного математичного об'єкта може бути прийнята в якості означення цього об'єкта. Наприклад, теорема „В паралелограмі діагоналі перетинаються і точкою перетину поділяються навпіл” виражає лише одну із властивостей паралелограма, тоді як обернена теорема „Якщо в чотирикутнику діагоналі перетинаються і точкою перетину поділяються навпіл, то цей чотирикутник - паралелограм” показує, що вказана властивість цілком визначає паралелограм, тобто є його характеристичною властивістю. Знаючи, що така властивість притаманна деякому чотирикутнику, можна не тільки стверджувати, що він – паралелограм, але й побудувати його.

- Побудуйте паралелограм за таким планом:
 1. AB – довільний відрізок; $O \in AB$; $OA=OB$;
 2. $\angle BOC$ – довільний; OC – довільний відрізок;
 3. $OD=OC$; т. $D \in$ пр. OC ;
 4. $ADBC$ – паралелограм.

Тому теореми, що виражають характеристичні властивості, називають теоремами-ознаками об'єкта (в даному випадку – ознака паралелограма).

Зрозуміло, що якщо за означення паралелограма обрати указану властивість, то відоме означення (основу якого складає властивість попарної паралельності сторін) стане висловленням-теоремою.

- Доведіть таку теорему.
- Наведіть приклад означення рівнобедреного трикутника, в основу якого покладено іншу характеристичну властивість. Які теореми випливають з такого означення? Доведіть їх.
- Наведіть приклади еквівалентних означень.

Визначаючи будь-яке математичне поняття, ми повинні довести існування класу об'єктів, які відповідають даному поняттю. Теореми, в яких доводиться існування об'єкту, що визначається, називаються теоремами існування. Доводячи теорему існування, ми встановлюємо, що включені в означення ознаки не суперечать як один одному, так і прийнятим раніше аксіомам.

В деяких випадках існування об'єкта, що визначається, здається очевидним, і вчителі не звертають уваги на доведення теореми існування. Це крупний недолік у викладанні математики.

Теореми існування не повинні розглядатися лише в тих випадках, коли існування об'єкта, що визначається, безпосередньо впливає з означення (в цьому випадку визначення найчастіше генетичне (конструктивне) - тобто в самому означенні вказаний спосіб утворення об'єкта).

Теореми існування не розглядаються і в тих випадках, коли існування даного об'єкта настільки очевидно, що ніякого спеціального доведення не потрібно. Поняття ілюструється малюнком (означення вписаного кута, вписаного многокутника та ін.).

Доведення теорем існування повинно бути конструктивним, тобто містити в собі спосіб отримання предмета. Таким конструктивним доведенням теорем існування в геометрії є побудова фігур, які визначаються. Тому слід за означенням повинна завжди розглядатися задача на побудову. Можливий і такий варіант, коли спочатку дається теорема існування (задача на побудову), а вже потім означення поняття.

Необхідно відзначити роль ознак поняття при доведенні теорем існування.

Послідовність розглядання означення, теореми існування і теореми-ознаки може бути різною. Ця різниця визначається прийнятим порядком викладення матеріалу, вибором означення і міркуваннями методичного характеру.

Отже, можливі такі варіанти:

1. Означення, теорема існування, теорема-ознака.

Теоретичний матеріал, яким вже володіють учні, дає можливість довести теорему існування без використання ознаки.

2. Означення, теорема-ознака, теорема існування.

Тут в теоремі існування - задачі на побудову – як раз і показується, як умова теореми - ознаки реально може бути виконана. Тобто при доведенні теореми існування використовується ознака поняття.

3. Теорема існування, означення, теорема-ознака.

4. Означення, теорема-ознака (теорема існування відсутня).

Умова ознаки настільки проста, що існування не викликає сумнівів (при бажанні відповідні побудови легко можуть бути виконані). Тому відпадає необхідність в спеціальному розгляданні теореми існування.

- Наведіть приклади з ШКГ вивчення означень, теорем-ознак і теорем існування за кожним з наведених варіантів.

Із всіх задач на побудову задачам, які є теоремами існування в геометрії повинна відводиться особлива увага. Вони повинні бути твердо засвоєні учнями, адже знання тільки означень і властивостей геометричних фігур недостатньо, необхідно ще й вміння будувати ці фігури. При відсутності цього вміння не можна вважати, що поняття засвоєно, хоча б з тієї причини, що воно вже не може бути використано при розв'язанні задач на побудову.

ЛЕКЦІЯ 2

Тема: *Методи доведень математичних тверджень.*

ПЛАН

- 1.1. Сутність поняття доведення.
- 1.2. Методи доведень теорем ШКМ:
 - 1.2.1. Синтетичний і аналітичний методи;
 - 1.2.2. Пряме і косвене доведення;
 - 1.2.3. Цільне доведення і доведення по частинах;
 - 1.2.4. Індуктивне і дедуктивне доведення.

1.1. Сутність поняття доведення.

Терміни „доведення”, „міркування”, „обґрунтування” застосовуються у побутовій мові досить широко. В шкільній математиці ми користуємося терміном „доведення” в розумінні „доведення математичних речень (тверджень)”. Розглянемо сутність основних понять теми з точки зору математики як науки.

Судженнями прийнято називати речення, в яких виражена думка про предмет, об'єкти, явища. Існують дві основні властивості суджень: щось заперечувати чи стверджувати, бути істинним або хибним. Судження складається з логічного підмета, логічного присудка і логічної зв'язки.

Математичним реченням називають оповідальне речення, що виражає судження про математичні об'єкти. Безліч математичних речень, що описує якусь структуру або якийсь клас структур, який аксіоматизується, утворює *математичну теорію*. У школі учнів знайомлять з таким методом побудови наукових теорій, як аксіоматичний метод.

Дати визначення всім поняттям неможливо. Визначаючи поняття через інші, приходять до вихідних понять - «цеглинці» теорії. У математичній теорії ці поняття називають невизначеними, а описуються вони аксіомами.

Аксіома - математичне речення, яке приймається без доведення в рамках даної теорії. Побудова наукової математичної теорії припускає виділення скінченної системи аксіом, що володіє властивостями несуперечності, повноти та незалежності. Нові математичні поняття вводяться через означення, що включають лише логічно незалежні властивості поняття (основний зміст). Решта властивостей логічно залежні від основного змісту і виводяться з нього. Відношення між поняттями висловлюють математичні речення. Крім аксіом, всі інші речення теорії виводяться логічним шляхом з використанням законів логіки, правил виведення, положень теорії множин.

Доведення - сукупність логічних прийомів обґрунтування істинності якого-небудь твердження за допомогою інших істинних і пов'язаних з даними суджень.

Отже, під доведенням будемо розуміти скінчену послідовність тверджень, кожне з яких є аксіомою чи правильним реченням на основі означення, раніше проведеного доведення чи заданої умови або випливає з попередніх членів цієї послідовності за допомогою логічних правил виведення (дедуктивних схем).

Відтак, термін “*доведення*” будемо вживати у двох значеннях: перше – *процес обґрунтування* математичного твердження, а друге – *деяка логічна конструкція*, яка є результатом такого обґрунтування.

Виділяють наступну структуру доведення: *теза* (судження, істинність якого треба довести), *аргументи* (істинні судження, які використовуються при доведенні тези), *демонстрація*, або форма доведення (спосіб логічного зв'язку між тезою і аргументами).

В якості аргументів виступають:

- засвідчені поодинокі факти, тобто статистичні дані, результати експерименту або спостереження та ін.;
- означення понять;

- аксіоми (судження, які приймаються в якості аргументів без доведення) і постулати (судження, прийняті в рамках наукової теорії за істинні);

- закони науки і теореми.

При доведенні необхідно дотримуватися таких правил доказового міркування: теза має бути логічно визначеною, ясною, точною і залишатися тотожною протягом усього доведення або спростування; аргументи повинні бути істинними, що не суперечать один одному і бути достатньою підставою для підтвердження тези; істинність аргументів повинна бути доведена самостійно, незалежно від тези. Необхідно, щоб теза була висновком, який логічно випливає з аргументів за загальними правилами умовиводів, або був би отриманий відповідно до правил непрямого доведення. Доведення є обов'язковим етапом в процесі аргументації.

*Під **теоремою** прийнято вважати математичне речення (твердження), істинність якого встановлюється за допомогою доведення в рамках даної теорії.*

З точки зору логіки теорема є висловлення, часто у формі імплікації. Також в шкільному курсі математики зустрічаються теореми-тотожності і теореми-формули (виражені мовою математичних символів), теореми існування (відсутні умова і висновок, але стверджується існування об'єкта, який володіє певними властивостями). Серед теорем, які подаються у вигляді імплікації, виділяють такі частинні види, як наслідок (доводиться за допомогою однієї теореми), лема (важлива як щабель до доведення іншої теореми), необхідна і достатня умова (критерій) (істинно і пряме, і обернене твердження, форма - еквіваленція).

Теореми можуть бути сформульованими в умовній або категоричній формі, за допомогою понять „необхідно”, „достатньо” або „необхідно і достатньо”. Наприклад:

„Вертикальні кути рівні” – категорична форма теореми.

„Якщо кути вертикальні, то вони рівні” – умовна форма.

„Для того, щоб кути були вертикальними, необхідно, (але не достатньо) щоб вони були рівні”.

„Для того, щоб кути були рівні, достатньо, (але не необхідно) щоб вони були вертикальними”.

До кожної теореми можна скласти три твердження, зв'язок між якими збумовлюється законами контрапозиції, наприклад:

„Якщо кути вертикальні, то вони рівні” – пряма теорема.

„Якщо кути рівні, то вони вертикальні” – обернене твердження, яке не є істинним.

„Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні” – протилежне твердження до даної теореми, яке також не є істинним.

„Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні” – твердження, протилежне до оберненого, яке є теоремою, тобто істинним твердженням.

Нагадаємо, що за законами контрапозиції істинність (або хибність) прямого та протилежного до оберненого тверджень, оберненого та протилежного до даного тверджень співпадають.

Оскільки шкільний курс математики складається з окремих початкових фрагментів деяких змістовних математичних теорій (алгебри, геометрії, тригонометрії, математичного аналізу), то доведення тут будуються як змістовні доведення, тобто в них використовуються звичайні міркування, а правила логічного виведення не фіксуються. Найчастіше під час прямого доведення теорем шкільної математики неявно використовується правило висновку.

1.2. Методи доведення теорем ШКМ.

Одну і ту саму теорему можна довести по-різному. Різні доведення можуть відрізнятися як *аргументами*, так і *логікою* (тобто правилами висновку). Аргументи і логіка характеризують метод доведення.

Класифікують математичні доведення за різними основами:

- 1) *за послідовністю міркувань*: синтетичне й аналітичне доведення;

- 2) за загальнологічною основою: пряме і непряме доведення, цільне і по частинах;
- 3) за формою умовиводу (в якій здійснюються доведення): індуктивне і дедуктивне доведення;
- 4) в залежності від використання математичних теорій: координатний метод доведення, векторний метод доведення, доведення на основі геометричних перетворень, доведення за допомогою рівності трикутників та ін.

1.2.1. Синтетичний і аналітичний методи.

Логічною основою *синтетичного методу* доведення є аксіома: “З істинного твердження завжди випливає наслідок”.

Сутність методу: синтетичне доведення починається з виведення деякого наслідку B_1 з умови A (або його частини) з використанням певних, пов’язаних з умовою, речень теорії T , істинність яких вже була встановлена. Потім, аналогічно, з B_1 отримують речення-наслідок B_2 і так до тих пір, поки в якості наслідку не отримують висновок - речення B , що доводиться.

Логічна схема:

Теорема $A \Rightarrow B$. Доведення: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$.

Наприклад. Розглянемо доведення такого твердження:

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доведення: Якщо $\overbrace{a \geq 0, b \geq 0}^A$, то $\overbrace{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0}^{B_1}$ або $\overbrace{a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0}^{B_2}$, звідки $\overbrace{a + b \geq 2\sqrt{ab}}^{B_3}$; поділивши обидві частини на 2, отримаємо: $\overbrace{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}^B$.

Що і необхідно було довести.

При доведенні синтетичним методом існує велика міра невизначеності і багатозначності при виборі шляху доведення (як здогадатися, що починати треба з нерівності $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$?).

Отже, для школярів мотиви кроків, які здійснюються, при синтетичному доведенні залишаються скритими практично до завершення доведення. Ця обставина утруднює навчання школярів самостійно доводити теореми. Однак, у цього методу є і переваги: переконливість, лаконізм, простота з логічної точки зору.

Аналітичне доведення - це доведення, при якому відправляються не від умови, а від висновку; реалізується методами нисхідного і висхідного аналізів.

Висхідний аналіз.

Логічна схема: $B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \dots \Leftarrow B_n \Leftarrow A$.

$$B_1 \Rightarrow B$$

$$B_2 \Rightarrow B_1$$

$$\text{Або: } B_3 \Rightarrow B_2$$

.....

$$A \Rightarrow B_n$$

- 1) Логічна основа висхідного аналізу така сама, як і у синтетичного методу: з правильного твердження випливає правильний наслідок.
- 2) Сутність методу: шукають таке твердження або достатню умову, з якого (якої) випливає те, що необхідно довести, потім відшуковують таке твердження або достатню умову, з якого (якої) випливає раніше знайдене і т.д., поки не приходять до вже відомого твердження (або умови).

Наприклад: Дано: $a \geq 0, b \geq 0$; Довести $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: щоб показати, що для $a \geq 0, b \geq 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, достатньо показати, що $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (оскільки з цього випливає те, що необхідно довести). А це, у свою чергу, випливає з нерівності $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ або $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

А ця нерівність вірна для будь-яких $a \geq 0, b \geq 0$, оскільки квадрат числа не може бути від'ємним.

Отже, висхідний аналіз полегшує *пошук* доведення теореми, яке можна потім представити синтетичним методом.

Нисхідний аналіз (аналіз Евкліда).

Логічна схема: $B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow A$.

Цей метод відрізняється від синтетичного методу спрямованістю міркувань. Його сутність: шукане (теза) приймають за істинне твердження і на основі виведених з нього наслідків отримують відому істину.

Наприклад:

Дано: $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$. Довести: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: Нехай $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ істинно, для $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$, тоді помножив обидві частини на 2, отримаємо: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, тобто $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ - істинно. Отже, вірно і вихідне твердження.

Аналіз Евкліда не є строгим доведенням. Тут показано, що з припущення істинності твердження випливає правильний наслідок. Але правильний наслідок можна отримати і з невірного твердження: $-2=2$ - невірно, але $4=4$ вірно. Тобто аналіз Евкліда може лише полегшувати пошук доведення, спрямовувати хід думки.

1.2.2. Пряме і непряме доведення.

Пряме доведення – доводиться істинність судження, що безпосередньо міститься у висновку теореми.

Непряме доведення – доводиться хибність судження, що суперечить висновку теореми, тим самим непрямо, а опосередковано доводиться істинність висновку теореми.

Непряме доведення проводиться *методом від супротивного* (інші назви цього методу – доведення суперечністю, зведення до абсурду). Логічною основою цього методу є закон виключеного третього: з двох тверджень, які суперечать одне одному, одне істинне, інше хибне, а третього бути не може.

Наприклад: Дано: $a \geq 0, b \geq 0$. Довести: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: припустимо, що $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$, для $a \geq 0, b \geq 0$. Тоді $a+b < 2\sqrt{ab}$, тобто $a - 2\sqrt{ab} + b < 0$ або $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$. Але ця нерівність не може бути істинною ні при яких $a \geq 0, b \geq 0$. Отже, істинно супротивне: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Поняття про метод від супротивного вводиться у курсі геометрії 7 класу. Учням варто знати *алгоритм* застосування цього методу: щоб довести твердження методом від супротивного, треба:

- 1) припустити супротивне тому, що треба довести;
- 2) користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше твердженнями, шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить або умові твердження, що доводиться, або відомій аксіомі, або доведеному раніше твердженню, або припущенню;
- 3) зробити висновок, що припущення невірне; отже вірне те, що треба було довести.

1.2.3. Цільне доведення і доведення по частинах.

Слід відрізняти цільне доведення від доведення по частинах (роздільне доведення).

Цільне доведення – це доведення твердження для загального випадку.

Доведення по частинах – це доведення всіх можливих частинних випадків. Воно проводиться **методом повної індукції**, який заснований на аксіомі логіки: якщо деякою властивістю володіють всі елементи множини A і всі елементи множини B , то цією ж властивістю володіють і всі елементи множини $A \cup B$.

При доведенні методом повної індукції теорему розчленовують на скінчену кількість тверджень, які відображують всі можливі частинні випадки. Коли теорема доведена окремо для кожного з частинних випадків, роблять висновок про істинність загального твердження.

Наприклад: довести, що для кожного натурального a число $(a^3 - a) : 3$.

Доведення: $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$. Достатньо показати, що $a : 3$, або $(a - 1) : 3$, або $(a + 1) : 3$ при $a \in N$. При діленні на 3 натуральне число a може давати остачу 0, 1 або 2, тобто $a = 3k$, $a = 3k + 1$, $a = 3k + 2$, де $k \in N$.

Якщо $a = 3k$, то $a : 3$ і твердження вірне.

Якщо $a = 3k + 1$, то $a - 1 = 3k + 1 - 1 = 3k : 3$ і твердження вірне.

Якщо $a = 3k + 2$, то $a + 1 = 3k + 2 + 1 = (3k + 3) : 3$ і твердження вірне.

Отже, твердження вірне для будь-якого натурального a .

Варто дати учням *правило-орієнтир застосування методу повної індукції*:

а) якщо в алгебрі необхідно довести деяке твердження для всіх натуральних чисел, то можна розглянути це твердження для всіх парних чисел, для всіх непарних чисел, для 1.

б) в геометрії метод повної індукції застосовується тоді, коли, вивчаючи властивості фігур, необхідно розглянути всі можливі випадки їх розташування або можливі їх види; коли теорема доведена для кожного окремого випадку, роблять загальний висновок (наприклад, теорема про вписаний кут).

Якщо розглядати не всі частинні випадки, а деякі, то отримаємо *метод неповної індукції*, який не є строгим доведенням.

Наприклад: складаючи формулу для отримання простих чисел, Ейлер з'ясував, що при $n \in N$ формула $f(n) = 2n^2 + 29$ дає 28 простих чисел при $n \leq 28$, а при $n = 29$ дає вже складене число 2959.

Аналогічно, формула $f(n) = n^2 + n + 41$ дає прості числа при $n \leq 39$, але при $n = 40$ - отримаємо складене число.

Подібні приклади допомагають переконати учнів у тому, що неповній індукції не можна довіряти, і отримані за її допомогою висновки потребують доведення. Адже у будь-якому з двох наведених прикладів після отримання простих чисел, наприклад, для перших 10 або 20 натуральних значень n по неповній індукції можна заключити, що ці формули дають прості числа при всіх натуральних значеннях n .

Метод неповної індукції доволі часто застосовується у молодших класах, у 5-6 класах. Наприклад, вивчаючи у 6 класі елементи теорії подільності, наводять факти:

$28 : 7$	$36 : 9$
$\underline{21 : 7}$	$\underline{54 : 9}$
$(28 + 21) : 7$	$(36 + 54) : 9$

Навівши приклади ще декількох подібних частинних випадків, роблять загальний висновок: якщо кожний доданок суми ділиться на деяке число, то і вся сума ділиться на це число – висновок за неповною індукцією.

1.2.4. Індуктивне і дедуктивне доведення.

За формою умовиводів, у якій відбуваються доведення, розрізняють дедуктивне й індуктивне доведення.

Дедуктивне доведення – доведення загального положення на основі застосування дедуктивних схем (правил виведення).

Індуктивне доведення - поєднання всіх частинних випадків, які стосуються даної ситуації – метод повної індукції.

З терміном „індукція” пов’язаний *метод математичної індукції*, проте міркування, що проводяться за цим методом – дедуктивні міркування. Справді, на першому кроці в методі математичної індукції виконується індуктивне міркування, але завдяки посилянню на загальне, раніше відоме твердження – аксіому індукції (яка є логічною основою цього методу) – в третьому кроці, виявляється, що в цілому міркування дедуктивні.

Розглянемо деякі теореми шкільного курсу планіметрії і охарактеризуємо їх доведення.

Теорема 1 (ознака паралелограма): Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину поділяються навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм (рис. 1).

Доведення:

- 1) $\triangle AOD = \triangle COB \Rightarrow \angle CBO = \angle ODA \Rightarrow BC \parallel AD$;
- 2) $\triangle AOB = \triangle COD \Rightarrow \angle BAO = \angle OCD \Rightarrow AB \parallel CD$;
- 3) з 1) і 2) $\Rightarrow ABCD$ - паралелограм за означенням.

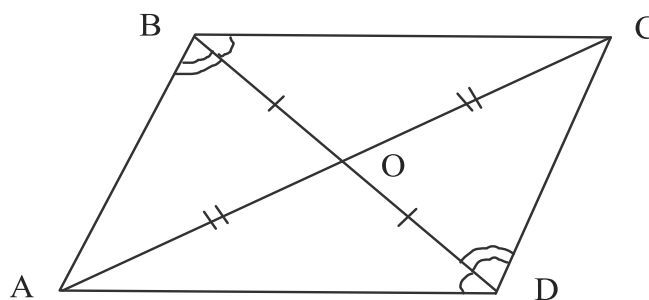


Рис. 1

Проведемо аналіз доведення:

- 1) за послідовністю міркувань: синтетичне;
- 2) за загальнологічною основою: пряме, цільне;
- 3) за формою умовиводу: дедуктивне доведення;
- 4) в залежності від використання математичних теорій:
за допомогою рівності трикутників.

Теорема 2 (про вписаний кут). Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри відповідного центрального кута.

Доведення.

1 випадок: одна зі сторін кута проходить через центр кола (рис. 2 а)).
 $\triangle AOB$ - рівнобедрений, у нього сторони AO і OB рівні як радіуси. Тому кути A і B трикутника рівні. А так як їх сума дорівнює зовнішньому куту трикутника при вершині O , то кут B трикутника дорівнює половині кута AOC , що і необхідно довести.

2 випадок: представлений на рис. 2 б).

Проведемо допоміжний діаметр BD .

$$\text{Тоді } \angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \frac{1}{2} \angle COD + \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOC.$$

3 випадок: представлений на рис. 2 в).

Також скористаємося допоміжним діаметром BD .

$$\text{Тоді } \angle ABC = \angle CBD - \angle ABD = \frac{1}{2} \angle COD - \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOC.$$

Теорему доведено повністю.

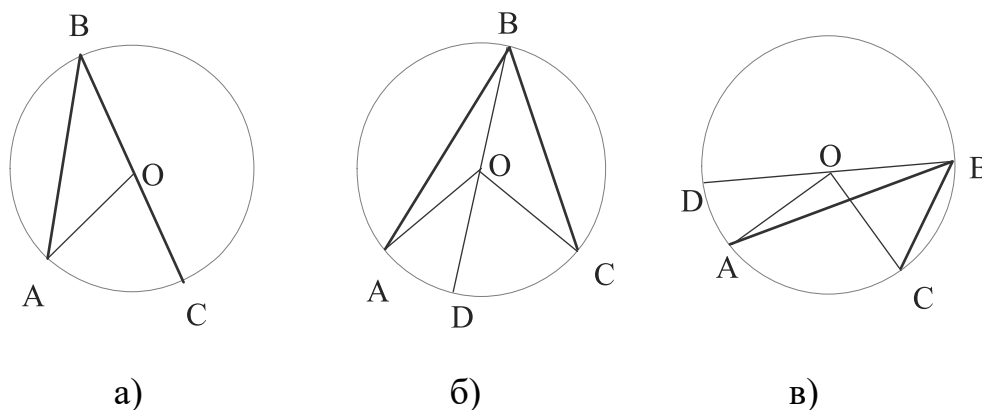


Рис. 2

Проведемо аналіз доведення:

- 1) за послідовністю міркувань: синтетичне;
- 2) за загальнологічною основою: пряме, по частинах;
- 3) за формою умовиводу: індуктивне доведення (розглянуто три випадки, що вичерпують усю множину можливих випадків щодо даної ситуації – метод повної індукції; всередині кожного випадку застосовано дедуктивні міркування, оскільки посилаємося на доведені факти - теореми);
- 4) в залежності від використання математичних теорій:
за допомогою властивостей кутів рівнобедреного трикутника і зовнішнього кута.

Теорема 3 (ознака вписаного чотирикутника). Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло.

Доведення. Нехай в чотирикутнику ABCD $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Опишемо коло навколо трикутника ABC і доведемо, що вершина D не може лежати ні всередині цього кола, ні поза нього.

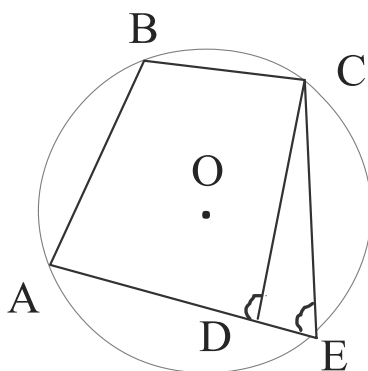


Рис. 3

1) Нехай точка D лежить всередині кола, а точка E – точка перетину променя AD з дугою AC (рис. 3). Тоді чотирикутник ABCE – вписаний. За умовою $\angle B + \angle D = 180^\circ$, а за властивістю вписаного чотирикутника (ця теорема доводиться раніше) $\angle B + \angle E = 180^\circ$, тобто $\angle D = \angle E$. Проте кут D

чотирикутника $ABCD$ – зовнішній кут трикутника CDE і, за теоремою про зовнішній кут трикутника, має бути більше кута E . Отже, ми прийшли до суперечності, тобто т. D не може лежати всередині кола.

2) Аналогічними міркуваннями можна довести, що т. D не може лежати поза колом.

Отже, т. D лежить на колі, тобто навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло.

Теорема доведена.

Проведемо аналіз доведення:

- 1) за послідовністю міркувань: синтетичне;
- 2) за загальнологічною основою: непряме (застосовано метод від супротивного), по частинах;
- 3) за формою умовиводу: індуктивне доведення (розглянуто два випадки, що вичерпують усю множину можливих випадків щодо даної ситуації – метод повної індукції; всередині кожного випадку застосовано дедуктивні міркування, оскільки посилаємося на доведені факти - теореми);
- 4) в залежності від використання математичних теорій:
за допомогою властивості зовнішнього кута трикутника; за властивістю вписаного чотирикутника.

ЛЕКЦІЯ 3

Тема: *Методичні рекомендації щодо навчання учнів доводити математичні твердження.*

План

1. Вступні зауваження.
2. Пропедевтика навчання учнів доведень.
3. Навчання школярів готових доведень.
4. Навчання учнів самостійного пошуку доведень.

1. Вступні зауваження.

Вивчення теорем та їх доведень в ШКМ важко переоцінити: вони розвивають логіку мислення учнів, просторові уявлення та уяву, вчать методам доведень, дають змогу засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості та ін.

Під навчанням учнів доводити математичні твердження ми будемо розуміти навчання готових доведень, які пропонуються вчителем або авторами підручників, а також навчання самостійному пошуку доведень тверджень [49, с. 75].

Проблему навчання доведень доцільно розчленувати на декілька методичних завдань, які розв'язуються послідовно:

- 1) вивчення готових доведень, уміння відтворювати їх;
- 2) самостійна побудова доведень за аналогією з вивченим;
- 3) пошук і виклад доведень способом, указаним учителем;
- 4) самостійний пошук і проведення учнями доведень математичних тверджень.

Для успішного навчання учнів доведень необхідно, щоб вони оволоділи достатньо повною системою теоретичних знань і умінь (поняття та їх означення, аксіоми, теореми, уміння виконувати основні побудови та ін.).

Бажаємо, щоб учні володіли елементами математичної логіки (правила висновку, необхідні та достатні умови та ін). Необхідно також оволодіння загальними методами і прийомами розумової діяльності, від яких залежить успішність доведення:

- ✓ *аналізом (аналіз формулювання (умови) теореми, рисунка);*
- ✓ *синтезом (співставлення вимог з умовою, переосмислення елементів задачі та включення їх у нові зв'язки (аналіз через синтез), в процесі виконання яких використовуються порівняння, абстрагування (відволікання від несуттєвих умов);*
- ✓ *узагальненням (застосування доведеної теореми до всіх можливих випадків).*

Додамо, що успішність навчання доведенню учнями теорем залежить від сформованості специфічних, суто математичних методів і прийомів розумової діяльності: підведення під поняття, виведення наслідків, а також від уміння вибирати достатні ознаки поняття.

2. Пропедевтика навчання учнів доведень.

Підготовка до навчання учнів доведень теорем починається вже в початковій школі, в 5-6 класах, коли, не використовуючи термінів “теорема”, “доведення”, учні знайомляться з першими твердженнями і роблять перші кроки у виконанні дедуктивних умовиводів.

Курс математики 1-6 класів містить достатньо матеріалу для формування логічної культури учнів, їх уявлення про доведення на досить простих прикладах, але вчителі не завжди ним користуються.

Наприклад:

a	8	9	10	11	12
$2a + 5$	21	23	25		

Учні просто рахують і заповняють таблицю. Але можна зробити і по-іншому: помітити, що якщо a збільшити на 1, то результат збільшиться на 2 і не рахуючи все, заповнити таблицю.

Підготовча робота починається з виховання звички все пояснювати, обґрунтовувати, доводити.

Наприклад.

У ч и т е л ь: Чому ти вважаєш, що число 2001 ділиться на 3?

У ч е н ь: Оскільки сума цифр цього числа дорівнює 3. А якщо сума цифр числа ділиться на 3, то і саме число ділиться на 3.

У ч и т е л ь: Чому дріб $4/7$ – правильний?

У ч е н ь: Тому що чисельник цього дробу менше знаменника, тому за означенням дріб правильний.

Ці обґрунтування, хоча і найпростіші, але корисні. Крім питань “Чому?” у подібних випадках учитель може сказати: “Поясни, чому це так”, “Обґрунтуй свої твердження”, “Доведи, що це вірно”. Якщо вчитель постійно ставить перед учнями 5-6 класів подібні запитання, то 7-класникам буде легше засвоїти доведення перших теорем із курсу геометрії.

Автори сучасних підручників 5-6 класів активно залучають у задачний матеріал завдання, спрямовані на формування в учнів культури доказових міркувань.

Наприклад, у підручнику з математики для 6 класу [8] зустрічаємо такі завдання:

937. (с. 177) (Усно) Чи є правильним твердження? Чому?

- 1) Якщо два числа рівні, то їх модулі теж рівні;
- 2) якщо модулі двох чисел рівні, то ці числа рівні.

938. (с. 177) Чи є правильним твердження:

- 1) модулі протилежних чисел рівні;
- 2) якщо модулі двох чисел рівні, то ці числа протилежні?

987. (с. 183) Чи є правильними твердження:

- 1) якщо $x > 2$, то x — додатне число;

2) якщо $x > -1$, то x — додатне число;

3) якщо $y < -1$, то y — від’ємне число;

4) якщо $y < 2$, то y — від’ємне число?

1272. (с. 228) Доведи, що значення виразу $(2x - 3) \cdot 0,2 - (3x - 4) \cdot 0,5 - (2,6 - 1,1x)$ не залежить від значення змінної.

1273.(с. 228) Доведи, що значення виразу $(3y - 0,8) \cdot 0,4 - 0,2(5 - 2y) - (1,6y - 0,8)$ не залежить від значення змінної.

1275. (с. 229) Доведи, що значення виразу $4(0,3x - 5,1) - 0,3(4x - 2,5)$ при будь-якому значенні змінної набуває від’ємного значення.

1276. (с. 229) Доведи, що значення виразу $0,6(18x - 7) - 1,8(6x - 4)$ при будь-якому значенні змінної набуває додатного значення.

1277. (с. 229) Доведи, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $4(6n - 4,5) - 9\left(\frac{1}{3}n - 2\right)$ кратне числу 7.

1278. (с. 229) Доведи, що при будь-якому натуральному значенні m значення виразу $9(3m - 8) + 2(25 - 11m) + 23$ не ділиться на 5.

3. Навчання школярів готових доведень.

Цілеспрямоване навчання доведень теорем починається в 7 класі, коли на перших уроках геометрії вводяться поняття “теорема”, “доведення теореми”. Доведення перших теорем учитель проводить сам. Основна мета цих уроків – показати учням конкретні приклади теорем і їх доведень, засвоїти сутність понять “теорема”, “доведення”. Пізніше необхідно звертати увагу учнів на те, що рисунки до теорем можна дати й інші: по-іншому розміщені, з іншими буквеними позначеннями. Вже на цьому етапі навчання можна запропоновувати учням неважкі задачі на доведення, але не треба дивуватись, якщо деякі учні не впораються з ними.

Зазначимо, що *сутність поняття “знати доведення теореми”* складається з двох взаємопов’язаних компонентів – *знати* головну ідею

доведення і *уміти* на її основі, думаючи, розмірковуючи, а не пригадуючи, відтворювати конкретне доведення [49].

Розуміння учнями доведень, що пропонуються на уроці вчителем і представлені у підручнику, вміння відтворювати готові доведення теореми або формули – тільки перший, але важливий рівень навчання доведень.

Головними моментами у цій роботі є такі:

1. Усвідомлення вихідних положень (даних) і вимог теореми (задачі). Увагу 7-класників треба звертати на те, що в кожній теоремі щось дано, і щось треба довести; при цьому зручно виділяти умову і висновок теореми, якщо вона сформульована в умовній формі. Коротку умову записують у формі “дано - довести”.

2. Розуміння основної ідеї і системи розгортання доведення. Ідея виступає в доведенні при його запам'ятовуванні, відтворюванні як деякий стрижень, “ключик”, як дуже згорнуте доведення. Запам'ятати його легше, але треба при необхідності вміти його розгорнути, щоб отримати докладне доведення теореми. Для усвідомлення основної ідеї можна ставити класу запитання: “Як краще запам'ятати доведення?”, “Що в ньому головне?”, “Як його знайти?”, “У чому сутність доведення?” та ін. Таким чином складається проблемна ситуація в діяльності учнів.

3. Розуміння методу, яким здійснюється доведення. Ця робота відбувається впродовж багатьох наступних уроків.

4. Виділення основних етапів доведення, чітке усвідомлення всіх аргументів доведення.

Щоб учні краще усвідомлювали структуру доведення теорем або розв'язання задачі на доведення і вчилися обґрунтовувати кожний крок, корисно складати доведення у вигляді таблиці, де в першій колонці міститься ланцюжок тверджень, а в другій – обґрунтування кожного з них.

Деякі доведення вчитель може пояснювати два і три рази, особливо доведення тих теорем, які повинні засвоїти всі учні. Перший раз – дати доведення у загальних рисах, другий – з повною аргументацією кожного

кроку, третій – ще раз повторити хід доведення з акцентом на окремих місцях.

Отже, головним, суттєвим при заучуванні теорем є її формулювання, ідея доведення, у більш складних теоремах – план або схема доведення. Можна віднести до головного і метод доведення, якщо він чимось примітний і може слугувати опорним сигналом для розгортання доведення (наприклад, метод від супротивного).

4. Навчання учнів самостійного пошуку доведень.

Другий, найважливіший рівень навчання доведенням – це навчання учнів доводити твердження самостійно. Можна виділити наступні компоненти, що входять в уміння самостійно доводити теореми і задачі на доведення:

- 1) *підведення об'єктів під поняття;*
- 2) *знання необхідних і достатніх ознак понять, про які йде мова у висновку теореми;*
- 3) *вибір ознак понять, що відповідають даним теореми (умові);*
- 4) *дія розгортання умови.*

Другий і третій компоненти є необхідними для виконання дії підведення під поняття. Крім того, учні повинні навчитися розгортати умову теореми (або задачі на доведення), тобто виводити із умови всі можливі наслідки, отримувати ознаки шуканого поняття.

Щоб навчити учнів дії розгортання умови, варто пропонувати їм такі усні вправи:

1. Дано два суміжні кути COB і BOD . Який висновок можна зробити з цього факту?
2. З точки M виходять два промені MA і MB . Пряма CD перетинає промені в точках E і F . Кути AEC і BFD , які при цьому утворилися рівні. Який з цього можна зробити висновок?
3. Відрізки A_1B_1 і A_2B_2 мають спільну середину O . Що нам відомо про пари відрізків A_1A_2 і B_1B_2 , A_2B_1 і A_1B_2 ?

Розгортаючи умови, часто доходять висновку, що треба переформулювати висновок теореми або задачі (наприклад, довести, що відрізок є бісектрисою кута трикутника, означає довести, що утворені за допомогою цього відрізка кути рівні). *Прийом переформулювання висновку теореми або задачі сприяє формуванню вміння доводити твердження.*

Для того, щоб здійснювати вибір ознак понять, що відповідають даним теоремам (умові), треба вміти складати набори достатніх умов поняття.

Наприклад, перелічимо *достатні умови доведення рівності відрізків*:

- 1) підведення під означення – показати, що довжини відрізків рівні. Це можна довести координатним методом, або за допомогою скалярного добутку обчислити довжини відповідних векторів;
- 2) пошук трикутників, куди входять відрізки, що порівнюються, і доведення їх рівності.
- 3) знаходження руху, який переводить один відрізок у другий;
- 4) використання властивостей рівності відрізків в деяких фігурах: протилежні сторони паралелограма рівні; діагоналі прямокутника рівні; бічні ребра призми рівні та ін.

Систематизуємо, наприклад, *способи, якими можна довести, що прямі паралельні (набір достатніх умов поняття «паралельні прямі»)*:

- 1) застосовуючи метод від супротивного;
- 2) за допомогою ознак паралельності прямих (пов'язаних із відповідними, односторонніми і різносторонніми кутами);
- 3) за допомогою ознаки: дві прямі, паралельні третій, паралельні;
- 4) за допомогою ознаки: дві прямі перпендикулярні третій, паралельні (на площині);
- 5) використовуючи умову колінеарності векторів: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$;
- 6) застосовуючи властивості деяких фігур мати паралельні відрізки: протилежні сторони паралелограма, середня лінія трикутника і його сторона, середня лінія і основи трапеції, бічні ребра призми та ін.;

7) використовуючи алгебраїчні умови паралельності прямих: $l_1 \parallel l_2$, якщо:

а) система їх рівнянь немає розв'язків, або

б) система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ така, що $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, або

в) рівняння цих прямих $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$, причому $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$.

Такі набори достатніх умов для підведення під найважливіші поняття накопичуються і систематизуються по мірі вивчення геометрії. Треба записувати їх в зошити і постійно використовувати ці орієнтири під час доведення конкретних теорем. Враховуючи, що достатні умови для визначення деяких понять вивчаються в різних розділах і навіть в різних класах, корисно до однієї і тієї ж самої задачі повертатися декілька разів по мірі вивчення достатніх ознак відповідного поняття. Наприклад, властивість медіани, проведеної з вершини рівнобедреного трикутника до основи, бути висотою, в 7 класі доводиться шляхом підведення під означення перпендикуляра. Після вивчення скалярного добутку векторів до цієї задачі можна повернутися, але підвести вже під умову перпендикулярності векторів. Такий підхід дозволяє співставити різні способи розв'язання, повторити і систематизувати матеріал.

Необхідною умовою правильного вибору потрібної ознаки поняття, під яке підводиться об'єкт, є усвідомлення всіх суттєвих властивостей і ознак. Тому так важливо під час вивчення основних понять та їх відношень з іншими поняттями привести в систему ці властивості та показати можливість їх застосування.

Часто учні не знають, з чого почати розв'язання задачі на підведення під поняття, підбирають не всі достатні умови поняття. Розв'язавши задачу одним способом, вони не можуть запропонувати інший, тобто підібрати інші достатні умови поняття, під яке підводиться об'єкт. Учні не можуть

розпізнавати задачі такого типу (тобто на підведення під поняття або задачі на розпізнавання) і самостійно знаходити їх розв'язання, оскільки не знають принципа розв'язання таких задач. Наприклад, якщо учнів запитати, чи є щось спільне в способах розв'язання таких задач:

“Доведіть, що функція $y = x^3 + 3$ є зростаючою”;

“Доведіть, що бісектриса, проведена із вершини на основу рівнобедреного трикутника, є медіана і висота”,

навіть чи хтось із школярів відповість, що так, є, хоча це задачі одного типу і розв'язуються принципово однаково.

Отже, учням треба дати розпізнавальні ознаки таких задач:

- 1) в умові задачі дається об'єкт (поняття);
- 2) даний об'єкт володіє деякими властивостями (це наслідки з умови, які можна використовувати, тобто це дія розгортання умови);
- 3) вимагається віднести цей об'єкт (поняття) до іншого поняття;
- 4) в переважній більшості це задачі на доведення.

Далі необхідно, щоб учні усвідомили основні етапи розв'язання задач на підведення під поняття. Для цього спочатку вчитель повинен фіксувати увагу учнів на кожному етапі розв'язання:

- 1) проаналізували умову і зробили рисунок;
- 2) із вимоги виділили те поняття, до якого необхідно віднести даний об'єкт;
- 3) пригадали всі істотні властивості того поняття, під яке підводиться об'єкт (дія виведення наслідків) або скористувалися готовим систематизованим набором достатніх умов поняття;
- 4) склали набір достатніх умов поняття, відібрали ознаку, яка відповідає умові теореми;
- 5) довели наявність в об'єкті, що підводиться під поняття, достатньої умови;
- 6) зробили висновок.

Для полегшення застосування схеми до розв'язання однакових за структурою задач на розпізнавання слід узагальнити несуттєве в таких задачах: який об'єкт (поняття) дано в умові задачі, якими конкретними властивостями він володіє. Але суттєво те, що цих властивостей достатньо, щоб виділити основні достатні ознаки поняття.

Усі теореми-ознаки і теореми-властивості – це, по суті, задачі на підведення під поняття. Тому при їх доведенні треба виділяти дві головні ідеї: які достатні умови відповідного поняття і як перевірити виконання достатніх умов.

Приклад: нехай треба довести, що діагоналі ромба є бісектрисами його кутів. Проаналізували умови, зробили рисунок.

У ч и т е л ь: Яке головне поняття міститься у висновку теореми?

У ч е н ь: Бісектриса кута.

У ч и т е л ь: Чи відомі достатні умови поняття “бісектриса кута”?

У ч е н ь: Ні.

У ч и т е л ь: Яка істотна властивість бісектриси кута?

У ч е н ь: Поділяє кут навпіл.

У ч и т е л ь: Тобто утворює два рівних кута. Чи ми знаємо достатні умови рівності кутів?

У ч е н ь: Так (Перелічує).

У ч и т е л ь: Які умову тут зручно обрати?

У ч е н ь: Заклучимо кути в трикутники і доведемо рівність трикутників.

У ч и т е л ь: Скільки пар трикутників можна виділити?

І т.д.

В теоремах існування та єдиності доцільно виділяти не ідею, а етапи доведення: на першому етапі доводиться існування фігури шляхом її побудови, на другому доводиться єдиність побудови методом від супротивного. Також недоцільно виділяти одну ідею при доведення деяких

інших теорем, наприклад, теореми Фалеса, коли головним є схема, план міркувань.

Окрім головного в доведеннях теорем, можна виділити головні теореми в кожному розділі, параграфі. Між тим, деякі учні вважають, що всі теореми головні. Проте, головними теоремами в розділах, присвячених вивченню поняття, треба вважати ознаки поняття, що доводяться. Їх доведення зводиться до підведення під означення відповідного поняття. При доведенні інших теорем розділу використовуються означення поняття і ознака поняття, яка була доведена.

Наприклад, в темі “Перпендикулярність у просторі” основними теоремами є теорема-ознака перпендикулярності прямої і площини і теорема-ознака перпендикулярності площин. Широко застосовується теорема про три перпендикуляри.

На уроках узагальнення і систематизації знань необхідно перевіряти знання учнями узагальнених орієнтирів, ідей, схем, планів доведення, а також уміння розгорнути на їх основі конкретне доведення даної теореми; виділяються головні теореми розділу.

Також на уроках узагальнення і систематизації знань важливо з точки зору розвитку логічного мислення учнів ознайомити їх з прикладами **софізмів** - заздалегідь хибних тверджень, доведення яких на перший погляд здаються вірними, проте насправді такими не є.

Наприклад, розглянемо твердження: *Коло має два центри*.

«Доведення»:

Позначимо на сторонах довільного кута В точки А і С і проведемо через ці точки перпендикуляри к сторонам ВА і ВС відповідно (рис. 4).

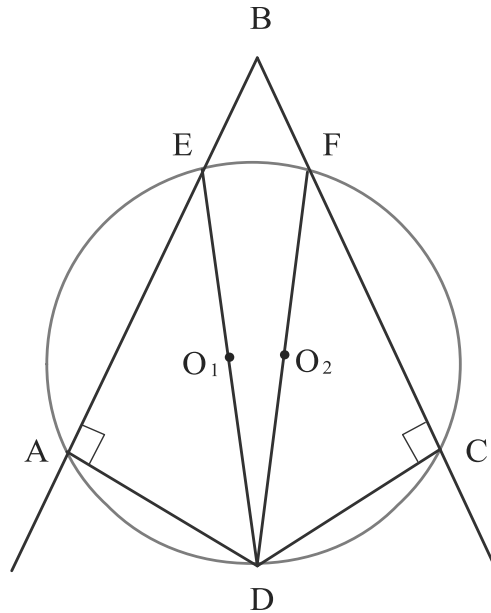


Рис. 4

Ці перпендикуляри повинні перетинатися (якщо б вони були паралельні, то паралельними були би і сторони даного кута). Позначимо т. D – точку перетину перпендикулярів.

Через точки A, D і C, які не лежать на одній прямій, проведемо коло (це коло існує, і тільки єдине). Позначимо точки E і F - точки перетину цього кола зі сторонами кута B. Прямі кути EAD і FCD є вписаними в коло. Отже, за наслідком теореми про вписані кути, відрізки DE і DF є діаметрами кола, що мають спільний кінець D, але не співпадають. Тоді середини цих відрізків O_1 і O_2 є двома різними центрами одного кола, тобто коло має два центри.

Твердження доведено.

Помилка цього «доведення» складається в невірності побудов на рисунку 4: в чотирикутнику ABCD $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, тобто за ознакою вписаного чотирикутника він є вписаним у коло. Це означає, що в ході побудов коло, проведене через точки A, D, і C, обов'язково пройде через т. B. У такому разі відрізки DE і DF співпадуть з відрізком DB, середина якого і є єдиним центром побудованого кола.

При вивченні у 8 класі властивостей арифметичного квадратного кореня, для формування відповідної мотивації, збудження зацікавленості учнів у навчанні математики, формуванні їхнього логічного мислення можна запропонувати до розгляду наступний *софізм*: $2+2=5$.

Щоб «довести» цей «факт», достатньо показати, що $4=5$.

Почнемо з рівності: $16-36=25-45$;

додамо до обох частин цієї рівності число 20,25;

маємо: $16-36+20,25=25-45+20,25$;

помітимо, що в обох частинах рівності можна виділити повні квадрат:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4,5 + 4,5^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4,5 + 4,5^2;$$

$$\text{тобто } (4 - 4,5)^2 = (5 - 4,5)^2;$$

здобуваючи корінь із обох частин рівності, одержимо:

$$4 - 4,5 = 5 - 4,5;$$

звідки дістаємо рівність $4=5$, що і необхідно було довести.

Учні мають помітити помилку в ході «доведення», пов'язану з некоректним застосуванням властивості арифметичного квадратного кореня:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Примітка. Інший спосіб «доведення» твердження $4=5$ наведено у завданнях для самостійної роботи студентів цього посібника.

Автори сучасних підручників активно залучають софізми з метою ефективного розвитку логічного мислення учнів (іноді навіть не вводячи відповідного терміну), наприклад:

402*. Знайдіть помилку в міркуваннях:

«Розглянемо правильну числову рівність: $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$.

Застосуємо розподільний закон: $5 \cdot (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9)$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на множник $(7 + 2 - 9)$.

Одержимо: $5 = 6$ » [51, с. 82].

№ 429*. Знайдіть помилку в міркуваннях: «Розглянемо правильну рівність: $4 : 4 = 5 : 5$. Застосуємо розподільну властивість: $4 \cdot (1 : 1) = 5 \cdot (1 : 1)$; $(1 : 1) = (1 : 1)$, тому $4 = 5$ » [51, с. 89].

У підручнику Єршової А. П. та співаторів [6] зустрічаємо такий софізм (рис. 5).

276. Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму:
зовнішній кут трикутника дорівнює внутрішньому куту, не суміжному з ним.

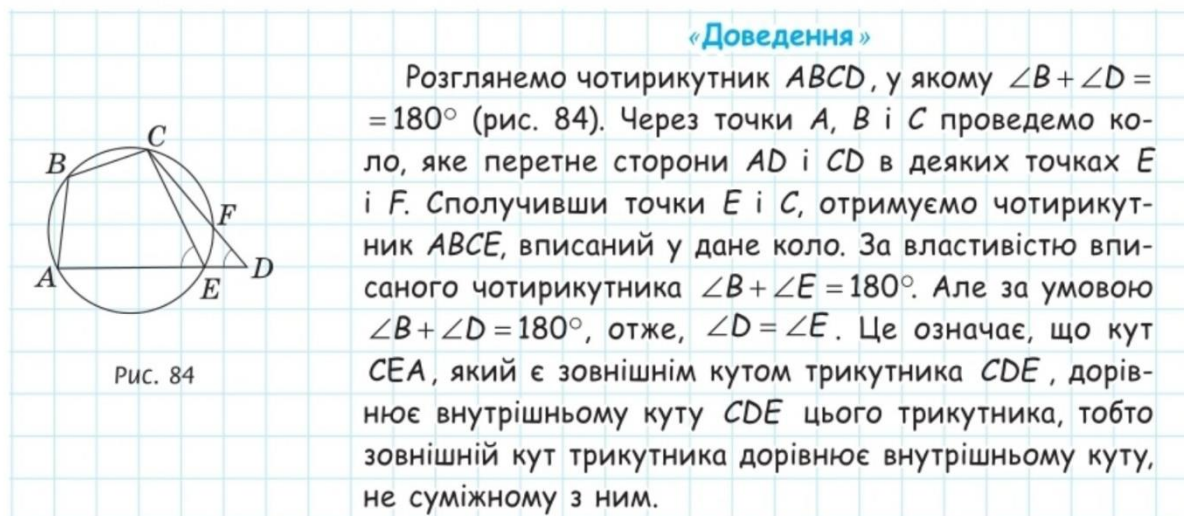


Рис. 5

Володіння методами доведення і вміння вибирати потрібний метод – важлива умова для забезпечення самостійного виконання доведення. Щодо навчання учнів самостійному пошуку доведень, то найважливішим є аналітичний метод, навчання якому доцільно проводити у вигляді евристичної бесіди. Бажано надати учням правило-орієнтир застосування аналітичного методу.

По мірі формування в учнів основних компонентів уміння доводити і набуття досвіду виконання доведень можна запропонувати *евристичну схему пошуку доведення*:

1. Виділити те, що дано в умові і що вимагається довести.
2. Увести всі потрібні позначення. У геометричних теоремах (задачах) насамперед виконати рисунок.
3. Записати умову і висновок теореми (задачі) у символічній формі.
4. Назвати ознаки поняття, під яке треба підвести у висновку.
5. Розгорнути умову, тобто, з того, що дано, вивести можливі наслідки.

6. Зіставити з умовами і їхніми наслідками кожен з ознак, за якими можна довести те, що вимагається. Вибрати ознаку, зручну для доведення.
7. Якщо безпосередньо вибрати відповідну ознаку не вдається, подумати, які ще ознаки, потрібні для доведення, можуть бути задані в умові.
8. Постійно пам'ятати, що коли пошук доведення утруднений, треба звертатися до даних і до того, що впливає з даних.

Загалом, при навчанні школярів доведень необхідно звертати увагу на такі методичні аспекти:

- Актуалізація, повторення опорних знань (перед доведенням або у процесі доведення). Мотивація, яку можна реалізувати через проблемну ситуацію.
- Аналіз формулювання з метою виділення умови і висновку теореми і запису “дано - довести”.
- Поступове ознайомлення із сутністю дедуктивної системи: аргументи повинні бути істинними, тобто взятими: а) з умови теореми; б) з означення; в) з аксіоми; г) з раніше доведеної теореми (наслідка).
- Усвідомлення ролі рисунка для пошуку доведення: рисунок нічого не доводить, тільки полегшує розуміння і проведення доведення (зорова опора).
- Навчання виділяти головне в доведеннях теорем.
- Закріплення теорем.
- Навчання доведенню через навчання методам доведення; з цією метою введення правил-орієнтирів застосування методів.
- Навчання вмінню складати набори достатніх умов поняття.
- Навчання доведенню у процесі розв'язання задач на доведення.

Наприкінці лекції зазначимо, що не можна із уроку в урок вивчати тільки теореми та їх доведення, оскільки не менш важливими є формування понять, геометричні побудови, розвиток просторового уявлення та ін. Тому

не всі теореми, особливо у старших класах, треба пропонувати з доведенням, деякі – розглянути тільки з частиною учнів. Так, наприклад, не треба вимагати від усіх учнів доведення таких теорем, як похідна добутку і частки, теорему про бічну поверхню конуса тощо.

ЛЕКЦІЯ 4

Тема: *Основні етапи роботи над теоремою та їх реалізація на прикладі теорем шкільного курсу математики*

План

1. Вступні зауваження.
2. Реалізація основних етапів роботи над теоремою на прикладі теореми про середню лінію трапеції
3. Ілюстрація основних етапів роботи з теоремою при вивченні теореми про три перпендикуляри
4. Демонстрація основних етапів роботи над теоремою при навчанні теореми про рівносильність рівнянь
5. Організаційні форми на кожному етапі роботи з теоремою.
6. Аналіз етапів формування у здобувачів середньої освіти компетентності доводити математичні твердження.

1. Вступні зауваження.

У методиці навчання математики існують різні підходи до визначення етапів організації роботи над вивченням теорем.

Більшість методистів виділяє такі етапи:

- 1) мотивація вивчення теореми;
- 2) ознайомлення з теоремою;
- 3) засвоєння змісту теореми;
- 4) запам'ятовування формулювання теореми;
- 5) ознайомлення із способом доведення;
- 6) доведення теореми;
- 7) застосування теореми;
- 8) встановлення зв'язків теореми з раніше вивченими теоремами.

Можна запропонувати інший підхід щодо етапів вивчення теореми та шляхів їх реалізації (див. табл. 1).

Таблиця 1

Етапи роботи над теоремою

<i>Назва етапу</i>	<i>Зміст етапу</i>
<i>1. Актуалізація опорних знань і умінь учнів</i>	Повторення основних відомостей (означень понять, математичних фактів, ідеї та етапів застосування окремих методів доведень), які використовуються у формулюванні та доведенні теореми
<i>2. Мотивація вивчення теореми</i>	Забезпечення свідомого розуміння необхідності вивчення теореми
<i>3. Робота над засвоєнням формулювання теореми</i>	Забезпечення усвідомлення формулювання теореми
<i>4. Побудова рисунка та запис короткої умови теореми</i>	Зображення наочного рисунка, введення зручних позначень, виділення частин умови та висновку теореми
<i>5. Робота над доведенням теореми</i>	Використання трикратного доведення: 1) ознайомлення учнів з ідеєю доведення; 2) виділення окремих кроків доведення і детальне їх обґрунтування; 3) повторення послідовності кроків доведення
<i>6. Первісне закріплення</i>	1. Розв'язування найпростіших задач на застосування доведеної теореми (як правило усно або за готовим рисунком із коротким записом розв'язання). 2. Доведення теореми за зміненим рисунком.
<i>7. Застосування теореми,</i>	Розв'язування складних задач на застосування

визначення її місця у шкільному курсі математики	доведеної теореми. Встановлення зв'язків теореми з вивченими раніше теоремами. Робота щодо узагальнень даної теореми.
---	--

Розглянемо прийоми, які дозволяють ефективно провести кожний з виділених етапів.

1. Для здійснення етапу **актуалізації опорних знань і умінь учнів** доцільно підготувати задачі (вправи) на застосування раніше вивчених понять і теорем, які будуть використані у формулюванні та доведенні теореми.

Інколи необхідно повторити ідею та етапи застосування конкретного методу доведення (від супротивного, векторного, координатного тощо) або прийому доведення (використання допоміжної побудови, введення допоміжних елементів та ін.).

Можна обмежитися повторенням формулювань означень математичних понять та теорем, які є властивостями або ознаками цих понять, але даний спосіб є мало ефективним. Він використовується, як правило, у випадку, коли доведення теореми нескладне для засвоєння або у випадку, коли на вивчення теореми відводиться обмаль часу.

2. Для **мотивації вивчення теореми** доцільно використовувати:

- 1) відомості з історії математики про виникнення даної теореми;
- 2) цікаві історичні відомості, пов'язані з даною теоремою;
- 3) спостереження за наочним матеріалом (рухомими моделями, кресленнями, комп'ютерною графікою);
- 4) необхідність вивчення даного твердження для використання його при доведенні інших теорем або розв'язування задач (особливо корисні при цьому задачі практичного змісту).

3. На наступному етапі - *робота над формулюванням теореми*, як правило користуємося двома методами: конкретно-індуктивним або абстрактно-дедуктивним. У першому випадку вчитель створює проблемну ситуацію на основі виконання побудов, проведення вимірювань, розв'язування задач на обчислення або відшукування певних залежностей, яка вирішується учнями самостійно або з частковою допомогою вчителя; як підсумок - висунування гіпотези і формулювання теореми. У другому випадку вчитель самостійно формулює теорему, а завдання учнів - зрозуміти її зміст.

Відомі вчені Дж. Пойа, М. І. Бурда, З. І. Слєпкань, О. І. Скафа та ін. віддають перевагу конкретно-індуктивному методу, оскільки він сприяє свідомому вивченню теореми, кращому її запам'ятовуванню. Проте даний метод потребує значних часових витрат.

Розглянемо приклади використання конкретно-індуктивного методу.

1) При роботі над *теоремою про суму кутів трикутника* доцільно запропонувати учням виміряти внутрішні кути кількох різних трикутників (гострокутного, тупокутного і прямокутного) за допомогою транспортира та обчислити їх суму. Результати обчислень будуть близькі до 180^0 . Це дозволяє учням сформулювати теорему: сума кутів трикутника дорівнює 180^0 .

Зауваження. Для того, щоб у даному випадку застосування конкретно-індуктивного методу було ефективним потрібно спочатку впевнитися щодо сформованості в учнів умінь вимірювати кути за допомогою транспортира. Доцільно також, щоб вимірювання кутів, хоча б одного трикутника, проводилося для трикутника, нарисованого на дошці під контролем вчителя. Дійсно, вимірювання, проведені з похибками, не дадуть підстави для правильного формулювання теореми про суму кутів трикутника і, навпаки, можуть завадити учням висунути правильну гіпотезу.

2) При роботі над **теоремою про властивість середньої лінії трикутника** доцільно запропонувати учням виміряти середні лінії довільних трикутників та їх основи, а потім порівняти отримані результати.

3) При роботі над **теоремою про властивість медіани рівнобедреного трикутника** доцільно запропонувати учням побудувати медіану, бісектрису і висоту до однієї зі сторін гострокутного трикутника і порівняти рисунок з аналогічним, на якому медіана, бісектриса і висота проведені до основи рівнобедреного трикутника. Після такого порівняння є підстави для висновку: медіана, бісектриса і висота, проведені до основи рівнобедреного трикутника, співпадають.

4. Четвертий етап передбачає **побудову рисунка та запис короткої умови теореми**. При виконанні цього етапу дуже важливо, щоб вчитель постійно вимагав від учнів дотримання вимог щодо наочності рисунка, правильного застосування типових позначень, однакового оформлення короткої умови і висновку (дано: ..., довести : ...).

5. На наступному етапі - **робота над доведенням теореми** - рекомендуємо проводити трикратне повторення доведення, тобто прогін доведення у три рази з відповідними для кожного разу варіаціями. Так, при першому прогоні акцентуємо увагу учнів на їх ознайомленні з ідеєю доведення; для другого прогону головне - виділення окремих кроків доведення, детальне їх обґрунтування та оформлення відповідних зразків-записів на дошці; мета третього прогону - повторення послідовності кроків доведення і формування в учнів цільного уявлення про доведення теореми.

Для ефективного ознайомлення учнів з ідеєю доведення деяких теорем доцільно використовувати раніше розв'язану задачу.

Наприклад, перед доведенням **теорему косинусів** корисно розв'язати задачу на знаходження сторони трикутника за двома його заданими сторонами і кутом між ними з використанням допоміжного елемента – висоти, проведеної до однієї із заданих сторін.

При третьому прогоні дуже корисні наочні схеми доведень теорем.

6. Шостий етап - **первісне закріплення** - передбачає роботу в двох напрямках:

1) Перевірку засвоєння учнями доведення теореми.

Таку перевірку доцільно проводити за змінним рисунком: змінюємо зображення, розташування, розміри геометричної фігури, про яку йшлося у теоремі та позначення її елементів. Наприклад, замінюємо буквені позначення вершин трикутника на інші.

2) Демонстрацію використання теореми при розв'язуванні задач.

На даному етапі передбачається розв'язування найпростіших задач на застосування доведеної теореми, яке реалізується, як правило, усно або за готовим рисунком з коротким записом розв'язання.

7. Останній сьомий етап - **застосування теореми, визначення її місця у шкільному курсі математики** - також передбачає роботу у двох напрямках:

1) розв'язування складних задач на застосування доведеної теореми та

2) встановлення зв'язків теореми з вивченими раніше теоремами.

Якщо можливо на даному етапі проводиться робота щодо *узагальнень теореми*. Наприклад, після доведення формули Герона (профільний, поглиблений рівень навчання математики) доцільно вказати на її узагальнення. Нагадаємо, що формула Герона дає змогу обчислити площу трикутника, якщо відомі довжини його сторін a , b , c :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ де } p = \frac{1}{2}(a+b+c) - \text{півпериметр}$$

трикутника.

Природним узагальненням формули Герона має бути аналогічна формула для обчислення площі чотирикутника. Однак площа чотирикутника

не залежить лише від довжин його сторін, бо на відміну від трикутника, він не є жорсткою геометричною фігурою. Тому формулу Герона вдається узагальнити лише для чотирикутників, навколо яких можна описати коло, — такі чотирикутники жорсткі, тобто однозначно будуються, якщо задано радіус описаного кола і довжини сторін чотирикутника (рис. 6).

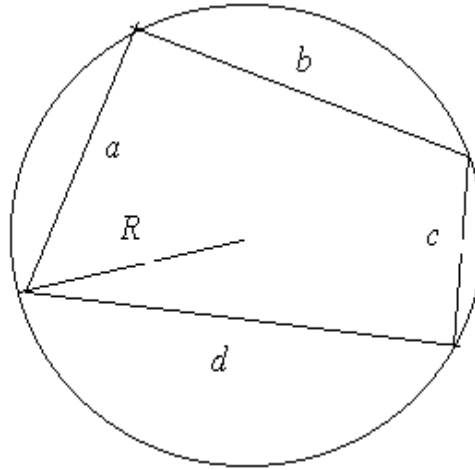


Рис. 6

Таке узагальнення формули Герона у математичній літературі називають теоремою Брахмагупти: якщо навколо чотирикутника зі сторонами a , b , c , d можна описати коло, то його площа обчислюється за формулою:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \quad \text{де} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c+d) - \text{півпериметр}$$

чотирикутника.

Отже, в даному прикладі має місце *неповне узагальнення*: лише для частини об'єктів вірна узагальнена формула Герона; і хоча аналогія і не підтвердилася в цілому, вона слугує джерелом нових ідей: суттєвою ознакою, що поєднує трикутник і чотирикутник (в смислі схожості формул для обчислення площ), є можливість вписати їх у коло; трикутник можна розглядати як вироджений вписаний чотирикутник. Дійсно, нехай вершина D вписаного чотирикутника ABCD наближається як завгодно близько до вершини A (рис. 7).

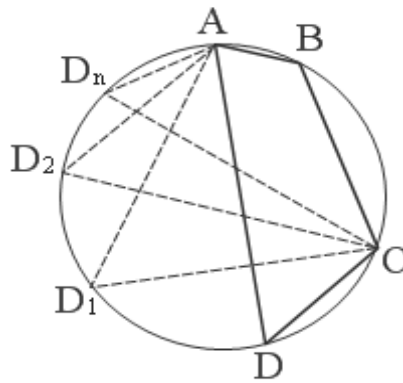


Рис. 7

Тоді довжина сторони $AD=d$ стає як завгодно близькою до нуля, і узагальнена формула перетворюється у звичну формулу Герона:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-0)} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}.$$

Наведемо ще приклад узагальнення теорем. Відомо, що теорема косинусів – узагальнення теореми Піфагора. В класах з поглибленим навчанням математики можна запропонувати узагальнення *теореми косинусів для чотирикутників*.

Теорема. Для довільного чотирикутника $ABCD$, в якому $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCD=\gamma$ справедливо:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \gamma - 2ab \cdot \cos \beta + 2ac \cdot \cos(\beta + \gamma).$$

Доведення. Нехай дано довільний чотирикутник $ABCD$. Введемо вектори так, як позначено на рисунку 8.

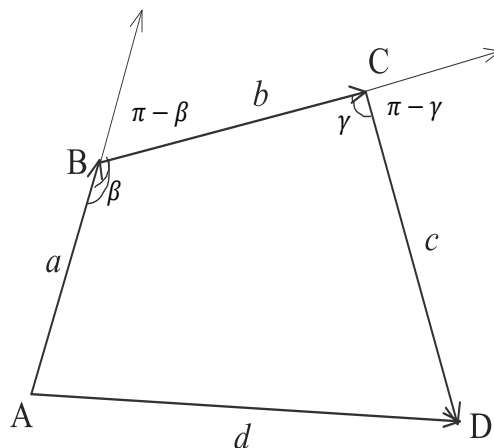


Рис. 8

$$\text{Тоді: } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

$$\text{Далі: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot b \cdot \cos(\pi - \beta) = -ab \cdot \cos \beta ;$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = b \cdot c \cdot \cos(\pi - \gamma) = -bc \cdot \cos \gamma ;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a \cdot c \cdot \cos(\pi - \varphi), \text{ де}$$

$$\varphi = \pi - (\pi - \beta) - (\pi - \gamma) = \pi - \pi + \beta - \pi + \gamma = \beta + \gamma - \pi.$$

$$\text{Тому } a \cdot c \cdot \cos(\pi - \varphi) =$$

$$= a \cdot c \cdot \cos(\pi - \beta - \gamma + \pi) = a \cdot c \cdot \cos(2\pi - (\beta + \gamma)) = ac \cdot \cos(\beta + \gamma)$$

$$\text{Отже, } d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \gamma - 2ab \cdot \cos \beta + 2ac \cdot \cos(\beta + \gamma).$$

Що і необхідно було довести.

(Охарактеризуйте представлене доведення за різними ознаками).

2. Реалізація основних етапів роботи над теоремою на прикладі теореми про середню лінію трапеції

Проілюструємо реалізацію представлених в таблиці 1 етапів роботи над теоремою на прикладі *теореми про властивість середньої лінії трапеції*.

1) Актуалізація опорних знань та умінь учнів.

1. Розв'язати задачу за готовим рисунком (рис. 9).

Дано: $\triangle ABC$, $AM = BM$, $BN = CN$, $AC = 42$ см. Знайти: MN .

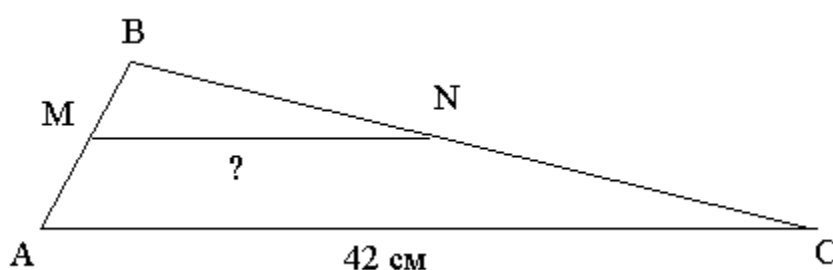


Рис. 9

2. Якими теоретичними відомостями користувалися при розв'язуванні даної задачі? (Означенням середньої лінії трикутника та її властивостями).

- Сформулюйте означення середньої лінії трикутника. (Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох сторін цього трикутника).
- 3. За аналогією дайте означення середньої лінії трапеції.
- 4. Нарисуйте довільну трапецію ABCD і її середню лінію KP (рис. 10).

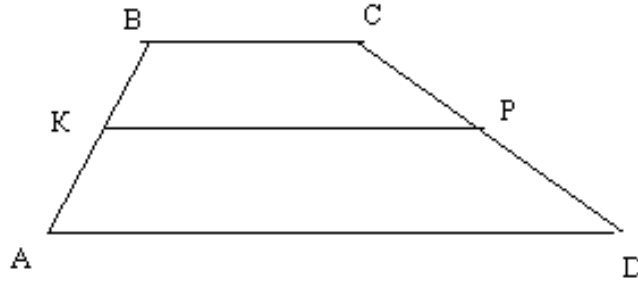


Рис. 10

2) Мотивація вивчення теореми.

- Сформулюйте ще раз властивість середньої лінії трикутника. (Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює її половині).
- Отже, за довжиною сторони трикутника можна знайти довжину середньої лінії, яка їй паралельна та навпаки. А чи можна знайти довжину середньої лінії трапеції за довжинами її основ? Про це дізнаємося зараз.

3) Робота над усвідомленням формулювання теореми.

Застосовуємо конкретно-індуктивний спосіб.

- Використовуючи аналогію з властивістю середньої лінії трикутника можна припустити, що середня лінія трапеції також паралельна її стороні (у цьому випадку двом сторонам – основам) і, дорівнює ...? Пропонуємо учням у зошитах зобразити довільні трапеції і виконати «експеримент»: виміряти довжини основ і середньої лінії, обчислити півсуму довжин основ і порівняти їх з довжиною середньої лінії. Далі учні висувають гіпотезу.

- Остаточно формулювання теореми таке: середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

4) Побудова рисунка та запис короткої умови теореми.

У даному випадку рисунок вже був побудований на першому етапі.

Дано: ABCD – трапеція

 KP – середня лінія

Довести: 1) KP // AD,

KP // BC;

2) $KP = \frac{1}{2} (AD + BC)$

5) Робота над доведенням теореми.

5.1. Ідея доведення: використати властивість середньої лінії трикутника.

Для цього треба побудувати такий трикутник.

- Пропоную через точки B і P провести пряму до перетину з продовженням основи AD (рис. 11).

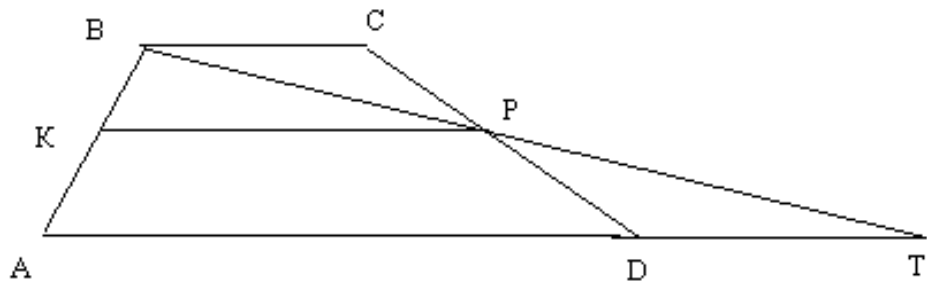


Рис. 11

- Одержимо трикутник ABT, у якого KP – середня лінія.

5.2. Вчитель проводить і записує етапи доведення теореми на дошці.

Доведення.

1) Допоміжна побудова. Проведемо пряму BP, позначимо т. T = $BP \cap AD$.

2) Розглянемо трикутники BCP і TDP, в них:

CP = PD за означенням середньої лінії трапеції;

$\angle BPC = \angle TPD$ як вертикальні;

$\angle BCP = \angle PDT$ як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній CD.

Отже, ці трикутники рівні за стороною і прилеглими до неї кутами (за II ознакою рівності трикутників).

Тому, $BC = DT$ і $BP = PT$ (за означенням рівних трикутників).

3) Таким чином, KP – середня лінія трикутника ABT за означенням.

За властивістю середньої лінії: $KP \parallel AT$ і $KP = \frac{1}{2} AT$.

5) $BC \parallel AT$, тому $KP \parallel BC$ (за ознакою паралельності прямих) ;

$KP = \frac{1}{2} AT = \frac{1}{2} (AD + BC)$, що й треба було довести.

5.3. Вчитель коротко повторює зміст кожного етапу доведення.

- Допоміжна побудова.
- Доведення $\triangle BCP = \triangle TDP$ і тому $BC = DT$ і $BP = PT$.
- Доведення KP – середня лінія $\triangle ABT$ і, тому $KP \parallel AT$ і $KP = \frac{1}{2} AT$.
- Доведення $KP \parallel BC$ і $KP = \frac{1}{2} (AD + BC)$.

6) *Первісне закріплення.* Усно розв'язати задачі за готовими рисунками.

Задача 1. Див. рис. 12.

Дано: TP – середня лінія трапеції $ABCD$.

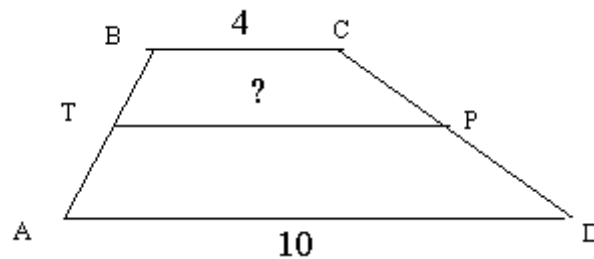


Рис. 12

Задача 2. Див. рис. 13.

Дано: PT – середня лінія трапеції $ABCD$. AD - ? PT - ?

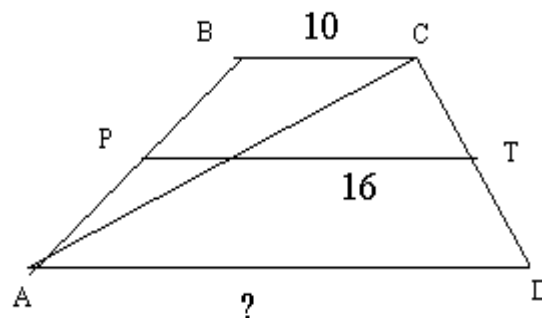


Рис. 13

3. Ілюстрація основних етапів роботи з теоремою при вивченні теореми про три перпендикуляри.

Поєднуючи етапи 1 і 2, 3 і 4 (див. табл. 1), можна запропонувати *узагальнену (спрощену) послідовність етапів роботи над теоремою*:

- 1) Підготовча робота (актуалізація опорних знань, створення проблемної ситуації, мотивація терміна, експеримент, висування гіпотези та ін.).
- 2) Формулювання теореми (аналіз умови, побудова рисунка, короткий запис «дано – довести»).
- 3) Доведення теореми.
- 4) Закріплення доведення.
- 5) Застосування теореми.

Розглянемо реалізацію цих етапів на прикладі вивчення **теореми про три перпендикуляри** (ТТП).

1) Підготовча робота.

Мотивацією до вивчення цієї теореми може слугувати наступна задача:

Задача. Дано прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$). До площини цього трикутника проведено перпендикуляр MA . Знайдіть відстань від точки M до прямої BC , якщо відрізок MC становить 10 см, а довжина катету CB дорівнює 6 см (рис. 14).

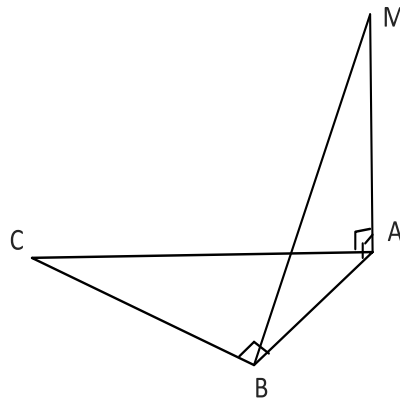


Рис. 14

Природньо, має виникнути питання: а що є відстанню від точки до прямої? Це довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки до даної прямої. Отже, треба з т. М опустити перпендикуляр на СВ. Куди ж він «попаде»? Може, це і є відрізок СМ?

У такий спосіб створюється *проблемна ситуація*, що демонструє учням недостатність теоретичних фактів для розв'язування цієї задачі.

Далі вчитель має показати просторову модель, що ілюструє ТТП. Звертаємо увагу учнів на той факт, що якщо сполучити точки М і В, то одержимо: МА – перпендикуляр до площини (АВС), МВ – похила до цієї площини, АВ – проекція похилої МВ на площину (АВС), т. В – основа похилої, через яку проведено точку В, причому – $AB \perp BC$. Дивлячись на модель, разом з учнями висуваємо гіпотезу: здається, МВ також перпендикулярна до ВС! «Отже, спробуємо довести цей факт», - говорить учитель, і починається другий етап роботи з теоремою: звучить формулювання цього твердження.

2) Аналіз формулювання теореми.

Теорема ($A \Rightarrow B$). Якщо пряма, що проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна її проекції, то вона перпендикулярна і похилій.

Вчитель, звертаючись знову до моделі (яку обов'язково треба «пропустити по рядах»), *мотивує термін*: дійсно, маємо три перпендикуляри, і дивлячись на модель, зображуємо цю ситуацію на дошці (рис. 15):

Дано:

Пл. α

$AB \perp \alpha$, АС – похила

$c \in \alpha$, $CB \perp c$

Довести:

$AC \perp c$

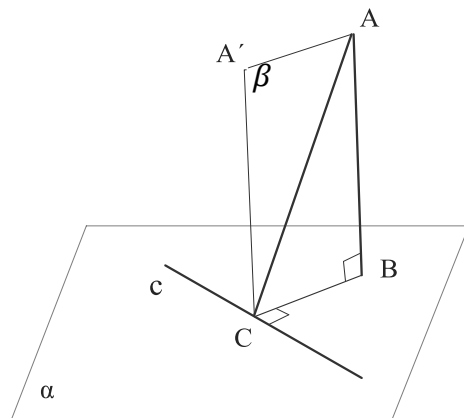


Рис. 15

Вчитель виконує рисунок, а хтось із учнів може записати коротку умову на дошці.

3) *Доведення.*

1. Проведемо пряму CA' , паралельну прямій AB .
2. $CA' \perp \alpha$ (за теоремою – властивістю перпендикулярних прямої і площини). Отже, $CA' \perp c$ (за означенням перпендикулярних прямої і площини).
3. CA' і AB задають пл. β .
4. $CA' \perp c$, $CB \perp c$, отже $c \perp \beta$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини).
5. Оскільки $AC \in \beta$, то $AC \perp c$ (за означенням перпендикулярних прямої і площини).

Теорему доведено.

Представлене доведення демонструє синтетичний метод (за послідовністю міркувань), який не вскриває хід думки. Дійсно, при такому підході не обґрунтовано додаткову побудову; в учнів природно має виникнути запитання: чому треба провести пряму CA' паралельно прямій AB ? Як треба здогадатися, що починати потрібно саме з цього?

Для свідомого засвоєння такого доведення вчителю слід розпочати з *висхідного аналізу*, проведеного у формі *евристичної бесіди*.

Учитель. Як можна довести факт перпендикулярності двох прямих?

Учень. Можна довести, що вони перетинаються під прямим кутом.

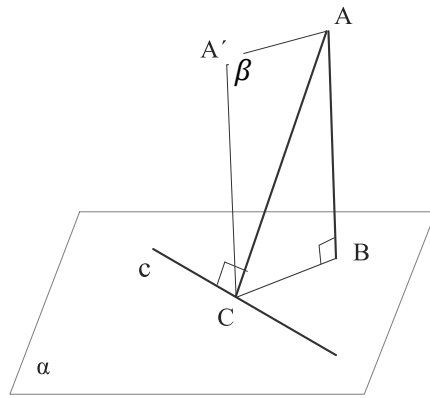
Учитель. Так, але, користуючись означенням, іноді важко встановити градусну міру кута між прямими. Можна також «помістити» ці прямі в прямокутний трикутник. А ще можна помістити пряму AC в площину, яка напевно перпендикулярна прямій c (тоді AC буде перпендикулярна c за означенням перпендикулярних прямої і площини). За ознакою перпендикулярних прямої і площини треба мати дві прямі в цій площині, що перпендикулярні прямій c . Одна така пряма в нас є, це пряма CB (за умовою). Потрібна ще одна пряма, перпендикулярна c . Якщо така пряма буде перпендикулярна пл. α , вона буде перпендикулярна і прямій c (за означенням перпендикулярних прямої і площини). Тоді ця пряма має проходити через t . C і бути паралельною прямій AB (тоді за теоремою – властивістю перпендикулярних прямої і площини ця пряма буде перпендикулярна пл. α). Отже, проведемо пряму CA' , паралельну прямій AB .

У такий спосіб *обґрунтовується додаткова побудова, і намічається план доведення*. І далі вже проводиться доведення, і учні записують у зошиті короткий запис доведення з обґрунтуванням.

Справедливим є також і обернене твердження, яке можна сформулювати за допомогою учнів, попередньо звернувшись до моделі, і висунувши гіпотезу. Учні на етапі 10 класу вже обізнані з поняттям «обернене твердження», тому можна їх залучати до формулювання оберненої теореми (умова і висновок міняються місцями) і короткого запису умови і висновку.

Теорема (обернена) ($B \Rightarrow A$). Якщо пряма, що проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна їй, то вона перпендикулярна і проєкції цієї похилої.

Виконуємо рисунок (рис. 16), оформлюємо коротку умову.



Дано:

Пл. α

$AB \perp \alpha$, AC – похила

$c \in \alpha$, $AC \perp c$

Довести:

$CB \perp c$

Рис. 16

Доведення оберненої теореми аналогічно доведенню прямої теореми, і учні можуть провести його самостійно, що може слугувати реалізацією четвертого етапу: закріплення доведення.

4) Отже, закріплення доведення відбувається у процесі доведення оберненої теореми. До того ж, робота з оберненим твердженням, як ми пам'ятаємо, розвиває логічне мислення учнів, розвиває інтерес до доказових міркувань. Корисно також переформулювати пряме і обернене твердження за допомогою термінів «необхідно», «достатньо», «необхідно і достатньо», «тоді і тільки тоді», «якщо, і тільки якщо».

5) Застосування теореми.

Перш за все, слід повернутися до вихідної задачі, за допомогою якої було створено проблемну ситуацію. Тепер теоретичних фактів вистачає: за ТТП робимо висновок, що $CB \perp MB$, тому перпендикуляр MB і є відстанню від т. М до прямої BC . Його довжину неважко знайти із прямокутного $\triangle MBC$.

Корисно дати *опорні задачі*, що вирішуються за допомогою ТТП, наприклад, таку:

Задача. Через центр вписаного у трикутник кола проведено пряму, перпендикулярну площині трикутника. Доведіть, що кожна точка цієї прямої рівновіддалена від сторін трикутника.

Варто зауважити, що в деяких сучасних підручниках геометрії для 10 класу автори приймають узагальнений підхід до визначення перпендикулярності у просторі: перпендикулярними можуть бути і мимобіжні прямі (наприклад, у підручнику [23] авторів Мерзгялк А.Г., Номіровський Д.А, Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія, 10 клас, профільний рівень, §3, с. 151).

Тому ТТП (*узагальнена*) формулюється так:

Якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна проєкції похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до самої похилої.

Справедливим є і обернене твердження.

(див. рис. 17)

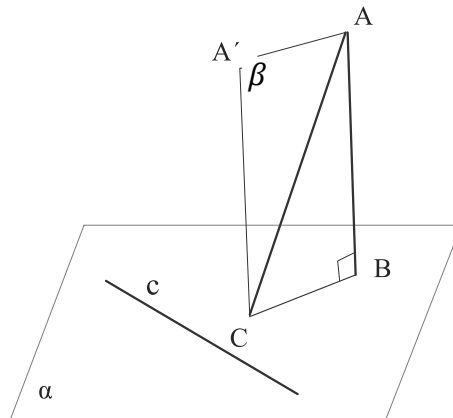


Рис. 17

На наступних уроках можна надати *інший спосіб доведення теореми про три перпендикуляри* (рис. 18).

Дано:

Пл. α

$AB \perp \alpha$, AC – похила

$c \in \alpha$, $CB \perp c$

Довести:

$AC \perp c$

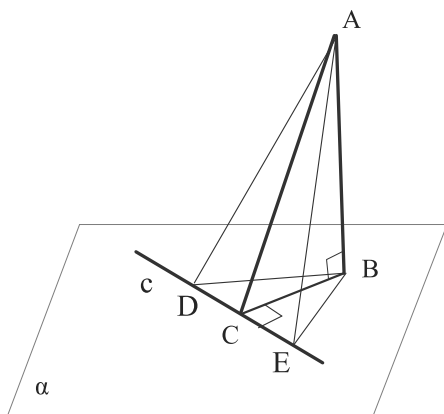


Рис. 18

Доведення:

1. Відкладемо від т. С рівні відрізки CD і CE . Сполучимо т. В з т. Е і т. В з т. D. $\triangle BDC$ є рівнобедрений, оскільки медіана CB є висотою.
2. Отже, $BE=BD$. Тому $\triangle AEB = \triangle ADB$ за двома катетами.
3. З цього слідує, що $AE=DE$ як відповідні сторони рівних трикутників. Тому $\triangle ADE$ рівнобедрений, а значить, медіана AC є висотою, тобто $AC \perp DE$ (за властивістю рівнобедреного трикутника).

Теорему доведено.

Зазначимо, що ТТП можна доводити також ще й методом від супротивного, векторним, за допомогою теореми, оберненої до теореми Піфагора.

(Поміркуйте, з методичної точки зору, в якому аспекті корисно надати інший спосіб доведення теореми про три перпендикуляри? (це запитання містить елементи випереджального навчання, оскільки є предметом обговорення наступної лекції))

(Проаналізуйте сучасні підручники з геометрії 10 кл. різних авторських колективів щодо теореми про три перпендикуляри та її доведення).

4. Демонстрація основних етапів роботи над теоремою при навчанні теореми про рівносильність рівнянь.

Продемонструємо реалізацію основних етапів роботи над теоремою на прикладі **теореми про рівносильність рівнянь** (теорема 7.6. за підручником Мерзляка А. Г і співавторів [23]).

1) Підготовчий етап.

1. Актуалізація опорних знань.

Розв'яжемо рівняння: $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-2} = 1$.

Учні знають метод розв'язування ірраціональних рівнянь – піднесення обох частин рівняння в один і той самий степінь. Застосовуючи цей метод і виконуючи наступні перетворення, одержуємо: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$. Також учні обізнані на попередньому уроці з тим, що при розв'язуванні ірраціональних рівнянь необхідно робити перевірку знайдених коренів підстановкою у вихідне рівняння. Виконуючи таку підстановку, впевнюємося, що обидва значення перетворюють вихідне рівняння у вірну рівність. Отже, відповідь: 3; 2.

2. Мотивація вивчення теореми (створення проблемної ситуації).

Розв'яжемо рівняння: $\sqrt{x+2} = 1-x$.

Розв'язання: піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $x+2 = 1-2x+x^2$; далі: $x^2-3x-1=0$, звідки $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Виникає проблема технічної реалізації наступного етапу розв'язування рівняння – перевірки підстановкою. Дійсно, підстановка у вихідне рівняння знайдених значень змінної призводить до «неприємних» обчислень.

Учитель повідомляє, що для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування – метод рівносильних перетворень.

2) Аналіз формулювання теореми.

Учитель повідомляє теорему:

Теорема. Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Зауваження. За логікою викладу матеріалу за даним підручником, учні вже попередньо ознайомлені з поняттями «рівносильне рівняння», «рівняння - наслідок», «область визначення рівняння», «сторонній корінь».

Аналізуємо з учнями умову теореми, оформлюємо короткий запис:

Дано: рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$;

Довести: (1) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ (2)

У ч и т е л ь: Що означає довести рівносильність рівняння і мішаної системи? Для цього необхідно пригадати означення рівносильності.

У ч н і: це означає, необхідно показати, що корені рівняння співпадають з розв'язками системи.

Зауваження. Аналізуючи формулювання теореми, варто обговорити зі школярами ту обставину, що в умовах системи (2) фактично враховано область визначення рівняння (1): $f(x) \geq 0$. Дійсно, якщо $f(x) = (g(x))^2$, то $f(x) \geq 0$ (квадрат будь-якого виразу є вираз, який приймає тільки невід'ємних значень).

3) *Доведення теореми.*

Доведемо, що корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1). Це означатиме, що рівняння (1) і система (2) рівносильні.

Нехай число α - корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$; це означає, що $g(\alpha) \geq 0$ і $f(\alpha) = (g(\alpha))^2$ - також правильна числова рівність, тобто α - розв'язок системи (2).

Нехай β - розв'язок системи (2). Тоді $g(\beta) \geq 0$ і $f(\beta) = (g(\beta))^2$. При умові, що $g(x) \geq 0$ функція $y = (g(x))^2$ є оборотною і, тому, $\sqrt{f(\beta)} = g(\beta)$. Отже, β - корінь рівняння (1).

Теорему доведено.

Зауваження. У цьому підручнику учням пропонується самостійно довести цю теорему за аналогією з доведенням теореми 7.3. На нашу думку, варто провести доведення цієї теореми колективно, за допомогою вчителя.

4) Закріплення доведення.

Для закріплення доведення цієї теореми можна запропонувати старшокласникам відповісти на низку запитань (це може відбутися і на наступному уроці):

1. Що означає довести рівносильність рівняння і системи рівнянь? (Це означає довести, що корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1))

2. Якщо α - корінь рівняння (1), чи перетворюється це рівняння у вірну числову рівність при підстановці цього значення? (Так)

3. Якщо $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$ - вірна числова рівність, чи випливає з цього, що $g(\alpha) \geq 0$? (Так)

4. Якщо $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$ - вірна числова рівність, чи випливає з цього, що $f(\alpha) = (g(\alpha))^2$ - також правильна числова рівність? (Так)

5. Чи означатиме це, що α - розв'язок системи (2)? (Так)

6. Якщо β - розв'язок системи (2), що з цього випливає? (Що $g(\beta) \geq 0$ і $f(\beta) = (g(\beta))^2$)

7. За якої умови функція $y = (g(x))^2$ є оборотною? (При умові, що $g(x) \geq 0$)

8. Якщо виконується така умова, чи буде справедливо, що $\sqrt{f(\beta)} = g(\beta)$? (Так)

9. Який з цього можна зробити висновок? (Що β - корінь рівняння (1))

10. Якщо корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1), можна стверджувати, що рівняння (1) і система (2) рівносильні? (Так, за означенням рівносильності).

5) Застосування теореми.

1. На цьому етапі перш за все варто повернутися до рівняння $\sqrt{x+2} = 1-x$, за допомогою якого було створено проблемну ситуацію і вирішити його, застосовуючи теорему. Використовуючи умову $1-x \geq 0$, неважко помітити, що із двох значень $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ і $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ цієї нерівності задовольняє $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, а $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ - сторонній корінь. Відповідь: $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

2. Можна запропонувати ще раз порівняти методи розв'язання, адресуючи дітей до таблиці 2 (вона може бути поданою як на слайді, так і як роздавальний матеріал на карточці):

Таблиця 2

Порівняльний аналіз методів розв'язування ірраціонального рівняння

<i>Поетапне розв'язання з перевіркою</i>	<i>Застосування методу рівносильних перетворень</i>
$\sqrt{x+1} = x-5$. 1. Знайдемо ОДЗ: $x+1 \geq 0$; $x \geq -1$. 2. Піднесемо обидві частини рівняння в квадрат: $x+1 = (x-5)^2$; І далі: $x^2 - 10x + 25 - x - 1 = 0$; $x^2 - 11x + 24 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = 8$. 3. Обидва значення входять в ОДЗ, однак перевірка показує: $\sqrt{8+1} = 8-5$; $3=3$; $\sqrt{3+1} = 3-5$; $2 \neq -2$, тобто $x_1 = 3$ - сторонній корінь. Відповідь: 8.	$\sqrt{x+1} = x-5$. За теоремою про рівносильні перетворення задане рівняння рівносильне такій мішаній системі: $\begin{cases} x+1 = (x-5)^2; \\ x-5 \geq 0 \end{cases}$ і далі: $\begin{cases} x^2 - 10x + 25 - x - 1 = 0; \\ x \geq 5 \end{cases}$ Коренями квадратного рівняння $x^2 - 11x + 24 = 0$ є $x_1 = 3$; $x_2 = 8$. Системі задовольняє тільки один - $x_2 = 8$. Відповідь: 8.

3. Далі можна розглянути таке рівняння: $\sqrt{x^2 - 1} = 3 - 2x$. При його розв'язанні методом рівносильних перетворень ми приходимо до системи:
$$\begin{cases} x^2 - 1 = (3 - 2x)^2; \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases}$$
, розв'язуючи яку дістаємо відповідь: $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$ (зауважуємо, що перевірка коренів призвела б до складних обчислень).

4. Повторюючи формулювання теореми, можна запропонувати учням переформулювати її за допомогою слів «необхідно і достатньо»:

Теорема: Для того, щоб розв'язати рівняння $\sqrt{f(x)} = g(x)$ необхідно і достатньо розв'язати систему
$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

5. Організаційні форми на кожному етапі роботи з теоремою.

Аналіз навчальної та науково-методичної літератури, досвіду викладання вчителів-математиків дозволяє узагальнити **організаційні форми на кожному етапі роботи з теоремою**.

1) На етапі підготовчої роботи

- ✓ Запропонувати задачу, для вирішення якої недостатньо теоретичних фактів (проблемна ситуація). Підвести до необхідності вивчення нового теоретичного факту.
- ✓ Провести математичний «експеримент»: побудувати, обчислити, виміряти та ін., мета якого – висунути гіпотезу.
- ✓ Провести дослідження властивостей деякої геометричної фігури на практиці, потім висунути гіпотезу.
- ✓ Зацікавити учнів швидким розв'язанням деякої задачі з наступною постановкою проблемного питання: «Як це було зроблено?»
- ✓ Залучити комп'ютерну графіку для демонстрації досліджуваного факту.
- ✓ Навести історичні факти щодо постановки проблеми.
- ✓ ...

2) На етапі роботи з формулюванням теореми

- ✓ Один учінь біля дошки вичленовує, що дано в теоремі, що треба довести, виконує рисунок.
- ✓ Учні з місця допомагають вчителю оформити «дано-довести» на дошці, виконати рисунок.
- ✓ На слайді відразу з'являється готові умова і рисунок до даної теореми.
- ✓ Учні самостійно вичленовують і записують умову і висновок теореми, потім хтось із учнів записує це на дошці.
- ✓ Якщо теорема сформульована в категоричній формі, хтось із учнів (або колективно) намагається переформулювати її в умовну форму, вичленовуючи «дано-довести».
- ✓ ...

3) На етапі роботи з доведенням теореми

- ✓ Вчитель самостійно доводить теорему біля дошки.
- ✓ Біля дошки теорему доводить учень, який заздалегідь підготувався до такої роботи вдома.
- ✓ Учні самостійно вивчають доведення за підручником.
- ✓ Готове доведення представлено на слайді, клас колективно його розбирає (за допомогою вчителя).
- ✓ На слайді (або на дошці) запропонований тільки рисунок (можливо, з деякими підказками), учні (або один учень) намагається довести теорему самостійно.
- ✓ Вчитель пропонує тільки план доведення, учні намагаються його реалізувати.
- ✓ ...

4) На етапі закріплення доведення теореми

- ✓ Відразу після доведення дехто з учнів (або декілька учнів) намагається його відтворити (на дошці або в зошиті). Такий прийом дає набагато більше користі, якщо вивчене доведення

повторюється за зміненим рисунком, з іншими буквеними позначеннями.

- ✓ Така сама робота може проводитися, але вже на наступному уроці, в якості перевірки домашнього завдання (можливо навіть до початку уроку дехто з учнів біля дошки записує довгі перетворення або готує рисунок для доведення).
- ✓ Повторюються лише етапи доведення або зазначаються ключові моменти доведення: вчитель задає питання всьому класу.
- ✓ Обговорюється лише метод доведення.
- ✓ Вчитель пропонує скласти (в зошитах) план доведення.
- ✓ Учні відтворюють доведення по ланцюжку біля дошки (більшість учнів класу стає активною).
- ✓ Учні на наступному уроці (або на теоретичному заліку з теми) пишуть самостійну роботу контролюючого характеру, відтворюючи повністю доведення теореми.
- ✓ ...

5) *На етапі застосування теореми*

- ✓ Вчитель або учні розв'язують задачу на безпосереднє застосування теореми, що розглядається.
- ✓ Закріплення теореми відбувається на подальших уроках (в наступних класах) у процесі розв'язування більш складних задач.
- ✓ Під час фронтального опитування учні формулюють теорему, зазначають метод доведення, вставляють пропущені вчителем слова у формулюванні та ін.
- ✓ Учні виконують завдання логічного характеру: «А чи вірне твердження...?», «Чи буде вірним обернене твердження до даної теореми?», намагаються переформулювати теорему за допомогою слів «необхідно», «достатньо» або «необхідно і достатньо» та ін.

- ✓ Виконують учні вправи за готовими рисунками на застосування даної теореми, час від часу проговорюючи її формулювання.
- ✓ Теорема, що вивчається, доводиться іншим способом, відмінним від того, що вже розглянуто в класі або подано авторами підручника.
- ✓ ...

(Додайте хоча б по одному пункту до кожного етапу)

6. Аналіз етапів формування у здобувачів середньої освіти компетентності доводити математичні твердження.

Зауважимо, що компетенції учнів щодо доведення математичних тверджень формуються поступово на протязі вивчення усього шкільного курсу математики. У таблиці 3 орієнтовно вказані етапи, на яких починається формування певної складової компетентності доводити математичні твердження; під час подальшого навчання така робота системно продовжується.

Таблиця 3

Етапи формування компетенції доводити математичні твердження

<i>Складники компетентності</i>	<i>Етапи</i>
✓ Формування потреби у логічних обґрунтуваннях; ✓ формування компетенцій виконання дедуктивних висновків.	5-6 класи
✓ Навчання евристичним прийомам при доведенні математичних тверджень та формування компетенції щодо їх використання; ✓ навчання виконанню ланцюга логічних кроків у доведенні теорем.	6-7 класи

✓ Навчання самостійному аналізу готового доведення теореми; ✓ формування компетенції визначати ідею доведення та використовувати наочні опорні схеми та таблиці під час доведень математичних тверджень.	7 клас
✓ Формування компетенцій з використання різних методів та способів доведення; ✓ формування компетенцій доводити твердження самостійно; ✓ формування компетенцій щодо знаходження помилок у доведенні та раціоналізації запропонованих доведень.	7-8 класи
✓ Формування компетенцій щодо порівняння різних методів та способів доведення математичних тверджень; ✓ формування компетенцій самостійно доводити твердження у найбільш раціональний спосіб та різними методами	9-11 класи

ЛЕКЦІЯ 5

Тема: *Різні способи доведення теорем: методичний аспект.*

*Обґрунтуємо з методичної точки зору, з чим може бути пов'язане подання вчителем **різних способів доведення теорем** на уроках математики:*

1. З підвищенням інтересу до доказових міркувань. Тоді доведення різними способами може відбуватися на одному уроці або інший спосіб може бути поданий для розбору додому, у тому числі як самостійний пошук доведення (за готовим рисунком або без підказки).
2. У зв'язку з вивченням нової теми задля її закріплення можна подати інший спосіб доведення теореми, що вже була розглянута на попередніх уроках, або навіть у попередніх класах.
3. Для закріплення даної теореми, оскільки доведення цієї ж теореми іншим способом є одним із способів такого закріплення.
4. Для реалізації диференціації навчання як спосіб врахування індивідуальних можливостей учнів.
5. І, насамперед, як дієвий засіб розвитку логічного мислення учнів, оскільки зазвичай різні способи доведення теорем засновані на використанні різних достатніх умов того чи іншого поняття.

Проілюструємо на прикладах кожний із зазначених напрямів подання вчителем **різних способів доведення теорем** на уроках планіметрії.

1. Конспект фрагменту уроку

з вивчення теореми про площу чотирикутника

Розглянемо різні способи доведення **теореми**: *Площа чотирикутника дорівнює півдобутку діагоналей на синус кута між ними.*

Дану теорему доцільно доводити двома способами: учні таким чином акцентують увагу на цій теоремі, краще її запам'ятовують і вразі необхідності відтворюють і застосовують під час розв'язання задач.

І спосіб доведення.

Учитель: Скористаємося тим, що ми маємо в формулюванні теореми.

Учні: Згідно умови, маємо довільний чотирикутник, в якому знаємо довжини його діагоналей та кут між ними (рис. 19):

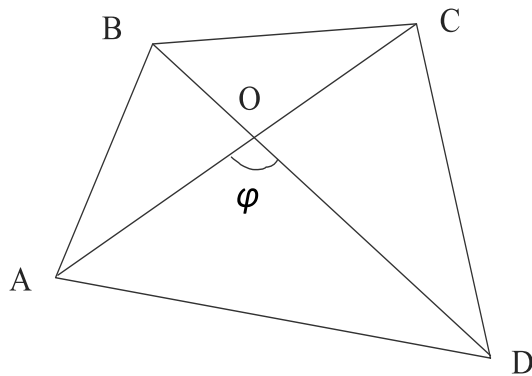


Рис. 19

Учитель: Що ж нам треба довести?

Учні: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$.

Учитель: Площі яких фігур ми вже знаємо, як знаходити?

Учні: Ми знаємо як знаходяться площі трикутників.

Учитель: Які маємо трикутники завдяки проведеним діагоналям?

Учні: $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$, $\triangle DAO$.

Учитель: Як доцільно знайти площі цих трикутників (можна перелічити всі відомі способи)?

Учні: За двома сторонами і кутом між ними.

Учитель: І вже сума площ цих трикутників дасть площу чотирикутника. Так як $\angle AOD = \varphi$, то чому дорівнює $\angle AOB$?

Учні: $\angle AOB = 180^\circ - \varphi$.

Учитель: Позначимо S_1, S_2, S_3, S_4 відповідно площі трикутників $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$, $\triangle DAO$. S - площа чотирикутника $ABCD$.

Учні: Отже $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Учитель: Так як $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$, то як можна виразити площі трикутників?

$$\text{Учні: } S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \varphi;$$

$$S_2 = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin \varphi;$$

$$S_3 = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin \varphi;$$

$$S_4 = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin \varphi.$$

Учитель: Що тепер необхідно зробити?

$$\begin{aligned} \text{Учні: Знаходимо суму площ: } S &= \frac{1}{2} \sin \varphi (AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + AO \cdot OD) \\ &= \frac{1}{2} \sin \varphi (AO(OB + OD) + OC(BO + OD)) = \frac{1}{2} ((OB + OD) \cdot (AO + OC)) \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot AC \sin \varphi. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

II спосіб доведення.

Для підвищення інтересу до доказових міркувань учням можна запропонувати довести цю ж теорему іншим способом. Вчитель, щоб наштовхнути на ідею доведення, може надати готовий рисунок (рис. 20).

Проведемо висоти BE і DK у трикутниках ABC і ADC (рис. 20).

$$\begin{aligned} \text{Тоді: } S &= \frac{1}{2} AC \cdot BE + \frac{1}{2} AC \cdot DK = \frac{1}{2} AC \cdot BO \sin \varphi + \frac{1}{2} AC \cdot DO \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2} AC \sin \varphi (BO + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi. \end{aligned}$$

На наступному уроці можна разом з учнями обговорити ці два способи доведення теореми та зробити порівняльний аналіз (повторюючи різні способи знаходження площі трикутників).

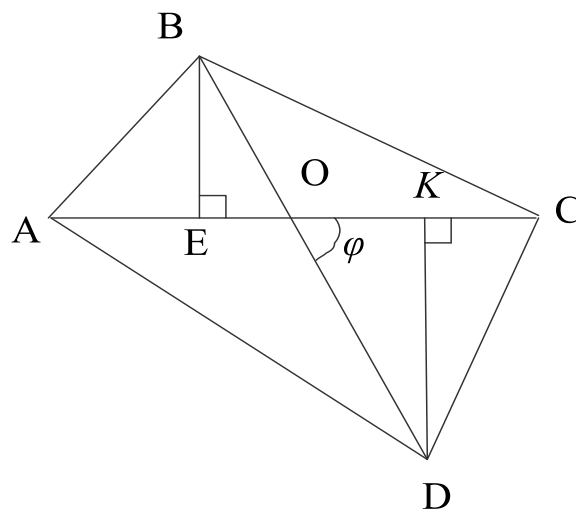


Рис. 20

2. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми косинусів

Теорема: Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.

І спосіб доведення

Учитель: З'ясуємо умову теореми та визначимо, що дано.

Учні: Довільний $\triangle ABC$, дві сторони та кут між ними.

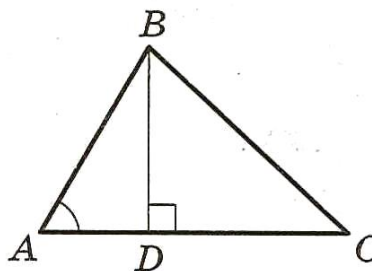


Рис. 21

Учитель: Розглянемо $\triangle ABC$. Доведемо, наприклад, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$ (рис. 21).

Учитель: Чи обов'язково $\angle A$ гострий?

Учні: Ні. Можливі три випадки:

1. Кут A – гострий;

2. Кут A – тупий;
3. Кут A – прямий.

Учитель: Розглянемо перший випадок: якщо $\angle A < 90^\circ$, то який висновок ми можемо зробити про градусну міру кутів B і C ?

Учні: Хоча б один з кутів B і C – гострий.

Учитель: Нехай, наприклад $\angle C < 90^\circ$. З яких трикутників ми вміємо за відомими елементами визначити невідомі?

Учні: З прямокутних трикутників.

Учитель: Тоді проведемо висоту BD . Як ми можемо визначити BD ?

Учні: З $\triangle ABD$ маємо: $BD = AB \cdot \sin \angle A$, $AD = AB \cdot \cos \angle A$.

Учитель: Як тепер можна знайти шукану сторону BC ?

Учні: З $\triangle BDC$ отримуємо:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A = \\ &= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A. \end{aligned}$$

Учитель: А що буде, якщо $\angle C \geq 90^\circ$?

Учні: Тоді $\angle B < 90^\circ$, і ми проводимо висоту $\triangle ABC$ з вершини C .

Доведення буде аналогічним.

Для випадку, коли $\angle A$ – тупий можна запропонувати учням прочитати доведення за підручником (або довести теорему самостійно).

Проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 22).

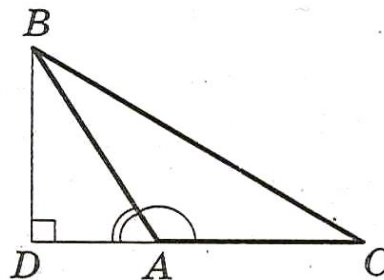


Рис. 22

З $\triangle ABD$ маємо: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD = AB \cdot \sin(180^\circ - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC$, $AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180^\circ - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC$.

З $\triangle BDC$ маємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$
 $= AB^2 \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$
 $= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$.

II спосіб доведення.

Під час вивчення теми «Вектори на площині» задля закріплення основних відомостей, що вивчаються в межах цієї теми, а також для мотивації введення нових теоретичних фактів можна подати доведення вже відомої учням теореми косинусів, але іншим методом – векторним.

Учитель: Спробуємо довести теорему косинусів векторним методом. Як ми можемо знайти вектор $\overrightarrow{AB}$?

Учні: За правилом трикутника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Учитель: Отже чому дорівнює шуканий вектор $\overrightarrow{BC}$?

Учні: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Учитель: Так як нам треба знайти $\overrightarrow{BC}^2$, то розглянемо рівняння $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$.

Так як $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, $\overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$, $\overrightarrow{BC}^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$,

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$.

В результаті отримуємо: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle A$.

Даний фрагмент уроку може бути використаний як для повторення теореми косинусів, так і для закріплення теми «Вектори». Векторний метод доведення цієї теореми є більш раціональним, що може слугувати додатковою мотивацією до вивчення теми «Вектори».

3. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про суму кутів трикутника

Одна з найважливіших **теорем** курсу геометрії 7-го класу: *Сума кутів трикутника дорівнює 180°* . Доведення цієї теореми кількома способами забезпечує її закріплення.

Учитель: Зобразіть довільний трикутник ABC і виміряйте за допомогою транспортиру, чому дорівнює сума його кутів.

Учні: 180° .

Учитель: Спробуємо висунути гіпотезу: чому ж дорівнює сума кутів будь-якого трикутника?

Учні: Вона дорівнює 180° .

Учитель: Перевіримо нашу гіпотезу за допомогою паперової моделі трикутника.

Учням роздаються паперові трикутники (у всіх різні). На дошці вішається плакат (або рисунок демонструється на екрані) (рис. 23).

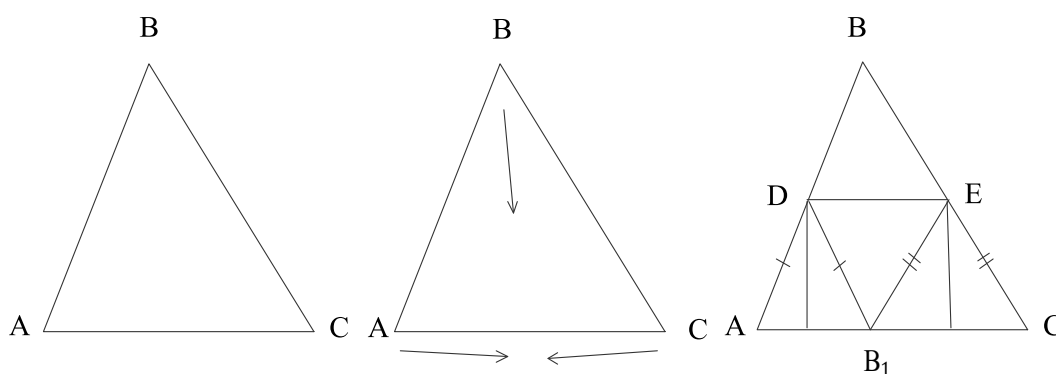


Рис. 23

I спосіб доведення

Учитель: Дивлячись на плакат, складаємо трикутник таким чином, щоб вершина B належала тепер стороні AC (точка B перемістилась в точку B_1), а лінія згинання була паралельна AC , тобто $DE \parallel AC$.

Трикутники $\triangle BDE$ і $\triangle B_1DE$ – рівні за трьома сторонами. Отже $\angle B = \angle B_1$, $\angle BDE = \angle B_1DE$, $BE = B_1E$.

Так як $DE \parallel AC$, то $\angle EDB_1 = \angle AB_1D$ (як внутрішні різносторонні кути). З іншого боку $\angle B_1AD = \angle EDB$ (як відповідні кути при паралельних прямих AC і DE і січній AD). Тому $\angle DAB_1 = \angle AB_1D$ (тобто за ознакою $\triangle ADB_1$ – рівнобедрений, і AD можна сумістити з DB_1).

Аналогічно доводиться, що $\angle ECB_1 = \angle EB_1C$.

Отже кути $\angle DB_1E + \angle AB_1D + \angle CB_1E = 180^\circ$ (оскільки $\angle AB_1C$ – розгорнутий).

Значить сума кутів і вихідного (довільного) трикутника дорівнює 180° . Значить, наша гіпотеза підтвердилася.

Теорему доведено.

II спосіб доведення

Учитель: Запишемо, що дано в теоремі?

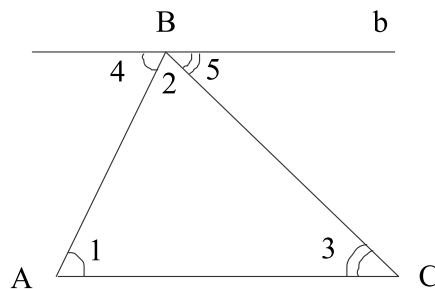


Рис. 24

Учні: Нам дано $\triangle ABC$, кути $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ – внутрішні кути трикутника (рис. 24).

Учитель: Що треба довести?

Учні: Нам треба довести, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

Учитель: Ми знаємо, що градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180° . Спробуємо скористатися цим фактом. Проте розгорнутого кута ми не

маємо, тому проведемо пряму через вершину B трикутника $\triangle ABC$, яка буде паралельною AC , тобто $b \parallel AC$.

Учитель: Знаючи, що $b \parallel AC$ і AB – січна, що можна сказати про кути 1 і 4?

Учні: Вони рівні (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих a і AC і січній AB). Аналогічно, кути 3 і 5 також рівні.

Учитель: Який кут утворюють (за аксіомою вимірювання кутів) кути 4, 2 і 5?

Учні: Розгорнутий.

Учитель: Отже, який висновок можна зробити?

Учні: Так як $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 3$, то сума кутів трикутника ABC дорівнює 180° , тобто $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180$.

Теорему доведено.

4. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про середню лінію трапеції

Даний фрагмент уроку демонструє можливості диференційованого навчання при вивченні теореми про середню лінію трапеції у 8 класі.

Теорема: *Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.*

І спосіб доведення

Учитель: Чи зустрічалися ми з поняттям «середня лінія»?

Учні: Так, коли вивчали середню лінію трикутника.

Учитель: Якими властивостями володіє середня лінія трикутника?

Учні: Вона дорівнює половині основи та паралельна їй.

Учитель: Спробуємо довести дану теорему, використовуючи вже доведене твердження щодо середньої лінії трикутника.

Нехай MN – середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 25). Що нам треба довести?

Учні: $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{BC+AD}{2}$.

Учитель: Чи маємо ми трикутник, в якому б відрізок MN був середньою лінією трикутника (щоб далі стверджувати, що $MN \parallel AD$)?

Учні: Ні, не маємо.

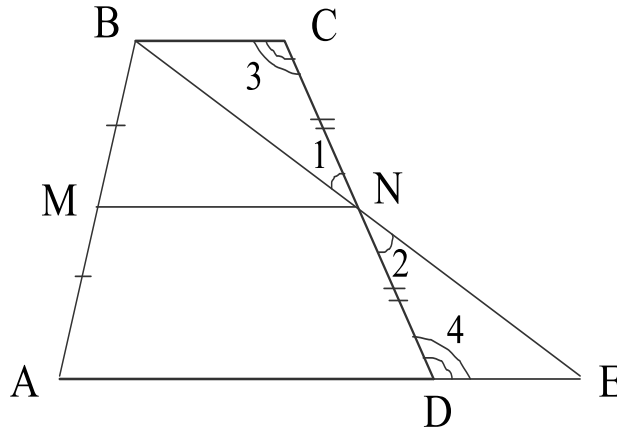


Рис. 25

Учитель: Тоді проведемо пряму BN і точку її перетину з прямою AD позначимо E . Спробуємо довести що MN – середня лінія трикутника ABE , іншими словами, треба довести, що $BN = NE$ ($AM = MB$ за умовою). Яким способом ми найчастіше доводимо рівність відрізків?

Учні: Застосовуючи рівність трикутників.

Учитель: Які трикутники доцільно розглянути?

Учні: Розглянемо трикутники NCB і NDE .

Учитель: Так як N – середина відрізка CD , то $CN = ND$. Що ви можете сказати про кути 1 і 2, 3 і 4?

Учні: Кути 1 і 2 – рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 – рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AE і січній CD .

Учитель: Тоді, що можна сказати про трикутники NCB і NDE ?

Учні: Вони рівні за другою ознакою рівності трикутників.

Учитель: Що з цього випливає?

Учні: $BC = DE$, $BN = NE$. Значить відрізок MN – середня лінія трикутника ABE . З цього випливає, що $MN \parallel AE$, тобто $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{1}{2}AE$.

Учитель: А як прийти до необхідної рівності?

Учні: $MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Враховуючи індивідуальні можливості учнів, можна запропонувати для розгляду вдома інший спосіб доведення цієї теореми, який є менш очевидним і потребує деякої здогадки.

II спосіб доведення

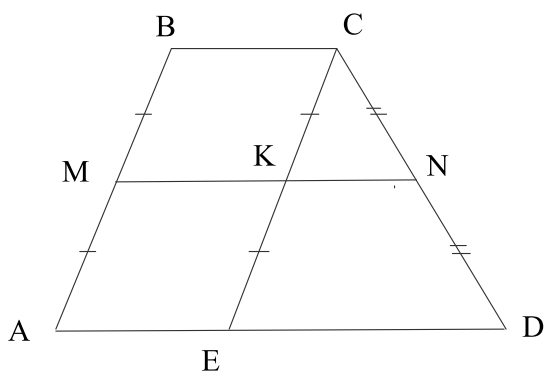


Рис. 26

Учитель: Проведемо $CE \parallel AB$. Далі проведемо через точку N пряму $KN \parallel ED$ (рис. 26). Якими будуть відрізки CK і KE ?

Учні: Рівними.

Учитель: На підставі чого це можна стверджувати?

Учні: За теоремою Фалеса.

Учитель: Отже, KN – середня лінія трикутника ECD за означенням. Значить, $KN \parallel ED$.

Що ви можете сказати про чотирикутник $ABCE$?

Учні: Він є паралелограмом, так як $BC \parallel AE$ – за властивістю трапеції, $AB \parallel CE$ – за побудовою.

Учитель: А чотирикутник $MBCK$?

Учні: Він також є паралелограмом за ознакою (дві протилежні сторони паралельні і рівні).

Учитель: Отже, ми отримали, що $MK \parallel BC \parallel AD$ (дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою).

Виходить, що $KN \parallel AD$ і $MK \parallel AD$ також. Ми отримали, що через одну точку проходять дві прямі паралельні даній. Чи це можливо?

Учні: Ні.

Учитель: З чого це слідує?

Учні: Це слідує з аксіоми паралельних прямих.

Учитель: Який висновок можна зробити?

Учні: Прямі KN і MK співпадають.

Учитель: Тобто точка $K \in MN$ і значить $MN \parallel AD$. Доведемо другу частину теореми.

Оскільки KN є середньою лінією трикутника ECD , то $KN = \frac{1}{2}ED$.

$$\begin{aligned}\text{Тоді: } MN &= MK + KN = MK + \frac{1}{2}ED = \\ &= BC + \frac{1}{2}ED = AE + \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}(2AE + ED) = \frac{1}{2}(AE + ED + BC) = \\ &= \frac{1}{2}(AD + BC).\end{aligned}$$

Теорему доведено.

5. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про властивість бісектриси трикутника

Під час доведення цієї теореми розвивається логічне мислення та здатність учнів до доказових міркувань, оскільки різні способи доведення теореми засновані на використанні різних достатніх умов поняття.

Теорема: Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

І спосіб доведення

Учитель: Що нам дано за умовою теореми?

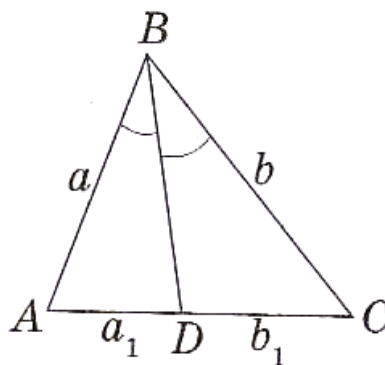


Рис. 27

Учні: BD - бісектриса $\triangle ABC$ (рис. 27).

Учитель: А що нам треба довести?

Учні: Треба довести, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Учитель: Якщо б у нас $\triangle ABC$ був рівнобедрений, чи могли б ми одразу стверджувати, що наше твердження очевидне?

Учні: Так.

Учитель: Чому ви так вважаєте?

Учні: Тому що в цьому випадку $AB = BC$, і бісектриса BD водночас була б і медіаною.

Учитель: Але у нас $\triangle ABC$ довільний, тому розглянемо випадок, коли $AB \neq BC$.

Отже, треба довести, що вірна пропорція $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. З яких фактів можна дістати пропорцію?

Учні: Наприклад, з подібності трикутників.

Учитель: Чи є на рисунку подібні трикутники?

Учні: Ні, немає.

Учитель: Проведемо перпендикуляри AE і CF до прямої BD (рис. 28). Подібність яких трикутників можна довести?

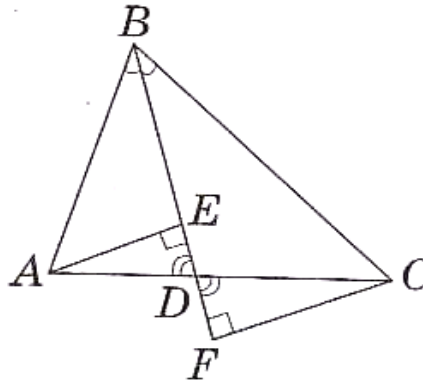


Рис. 28

Учні: $\triangle ADE$ і $\triangle CDF$. Вони подібні як прямокутні трикутники з рівними гострими кутами (кути при вершині D рівні як вертикальні).

Учитель: Яку пропорцію маємо з подібності цих трикутників?

Учні: $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{DC}.$

Учитель: Добре, але цього не достатньо. Чи є ще за рисунком подібні трикутники?

Учні: Так, $\triangle ABE \sim \triangle CBF.$

Учитель: На основі чого ви це стверджуєте?

Учні: Так як ці трикутники мають рівні гострі кути при вершині B.

Учитель: Яку ж пропорцію ми одержуємо?

Учні: $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CF}.$

Учитель: Який висновок робимо?

Учні: Із двох пропорцій одержуємо те, що треба довести: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$

Теорему доведено.

II спосіб доведення

Учитель: Що нам дано за умовою теореми?

Учні: Нам дано $\triangle ABC$ (рис. 29).

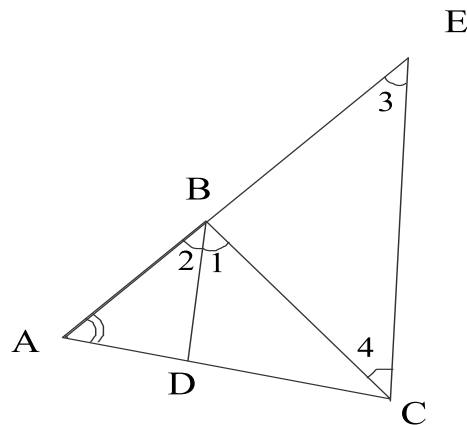


Рис. 29

Учитель: Що нам треба довести?

Учні: Треба довести, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Учитель: Тобто, що така пропорція вірна. З яких теоретичних фактів, окрім подібності трикутників, можна одержати пропорцію?

Учні (або сам вчитель): Теорема про пропорційні відрізки (узагальнена теорема Фалеса): паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки.

Учитель: Через вершину C $\triangle ABC$ проведемо пряму, паралельну DB і точку перетину з продовженням сторони AB позначимо точкою E (тобто кут A перетинають паралельні прямі BD і EC). Яку можна скласти пропорцію за теоремою про пропорційні відрізки?

Учні: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$.

Учитель: Відношення $\frac{AD}{DC}$ у нас є, але немає $\frac{AB}{BE}$. Якщо б BE дорівнювало BC , то ми би одразу могли стверджувати, що теорема вірна. Отже, задача зводиться до чого?

Учні: Довести рівність відрізків BC і BE .

Учитель: Ці відрізки є сторонами $\triangle CBE$. Висуваємо припущення: $\triangle CBE$ - рівнобедрений. Як довести? Яку доречно застосувати ознаку?

Учні: Якщо у трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Учитель: Які це можуть бути кути?

Учні: $\angle BCE$ і $\angle BEC$.

Учитель: Рівність яких кутів, дивлячись на рисунок, вже очевидна?

Учні: $\angle 2 = \angle 1$ - за умовою.

Учитель: А що ви можете сказати про кути $\angle 2$ і $\angle 3$?

Учні: Вони також рівні, як відповідні кути подібних трикутників $\triangle DAB$ і $\triangle CAE$.

Учитель: Тобто $\angle 1 = \angle 3$. А що ми можемо сказати про кути 1 і 4?

Учні: Вони також рівні, як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BD і CE і січній BC .

Учитель: Отже з цього слідує, що $\angle 4 = \angle 3$. Ми отримали, що $\triangle CBE$ - рівнобедрений, тому $BC = BE$ за означенням. Звідси випливає, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Теорему доведено.

РОЗДІЛ II

Дидактико-методичні матеріали до проведення практичних занять

Практичне заняття №1

Тема: *Методи доведення теорем.*

Мета: усвідомлення поняття “доведення”, що застосовується в ШКМ; з’ясування сутності основних методів доведення теорем; виявлення можливостей доведення теорем різними способами; розв’язування методичних завдань.

Зміст практичного заняття №1

1. Синтетичний і аналітичний методи доведення теорем (пояснення на прикладах) (15 хв.).
2. Пряме і непряме доведення (пояснення на прикладах) (15 хв.).
3. Цільне доведення і доведення по частинах (пояснення на прикладах) (15 хв.).
4. Векторний і координатний методи доведення теорем (пояснення на прикладах) (20 хв.).
5. Робота з теоремою про кут, вписаний у коло. Дати повну характеристику доведення цієї теореми: за послідовністю міркувань, за загальнологічною основою, за формою умовивіду, в залежності від використання математичних теорій (самостійна робота навчального характеру з наступною перевіркою) (15 хв.).

**Питання до актуалізація опорних теоретичних знань
студентів у процесі заняття**

1. Дайте означення поняттю «доведення».
2. Що таке «тезис», «аргумент», «демонстрація»?
3. Сформулюйте закон контрапозиції. Наведіть приклад із ШКМ.
4. За якими основами класифікують математичні доведення?
5. Розкрийте сутність синтетичного методу доведення теорем. Які недоліки і переваги цього методу?
6. У чому сутність аналітичного методу доведення теорем (нисхідний і висхідний аналіз)?
7. У чому різниця між прямим і непрямим доведеннями?
8. Що таке «цільне доведення»?
9. Яким методом реалізується доведення по частинах?
10. Дайте тлумачення термінам «дедуктивне доведення», «індуктивне доведення».
11. Яка роль вивчення теорем та їх доведень у шкільному курсі математики?

**Синтетичний і аналітичний методи доведення
(пояснення на прикладах)**

Розглянемо доведення такого твердження: $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2, \forall a \neq 0$.

Доведення 1: $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2, \forall a \neq 0$ – істинне твердження;

⇕

$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \geq 0$ - істинне твердження;

⇕

$$\frac{a^4+1-2a^2}{a^2} \geq 0 \text{ - істинне твердження;}$$

↑↑

$$\frac{(a^2-1)^2}{a^2} \geq 0 \text{ - істинне твердження. Рівність досягається}$$

за умови, що $a = \pm 1$.

Запитання до студентів:

- Який метод доведення демонструє цей приклад?

Доведення 2: $a \neq 0 \Rightarrow \frac{(a^2-1)^2}{a^2} \geq 0$ - істинне твердження, причому рівність досягається за умови, що $a = \pm 1$;

⇓

$$\frac{a^4+1-2a^2}{a^2} \geq 0 \text{ - істинне твердження;}$$

⇓

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \geq 0 \text{ - істинне твердження;}$$

⇓

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2, \text{ що і необхідно було довести.}$$

Запитання до студентів:

- Який метод доведення демонструє цей приклад?

Пряме і непряме доведення

(пояснення на прикладах)

Поняття про метод від супротивного вводиться у курсі геометрії 7 класу. Вперше цей метод може застосовуватися для доведення теореми про дві прямі, паралельні третій.

Теорема. Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Доведення: Нехай $b \parallel a$ і $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$ (рис. 30).

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а, отже, перетинаються в деякій точці M . Тоді виходить, що через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a , що суперечить аксіомі паралельних прямих. Значить, припущення невірне, а вірно, що $b \parallel c$.

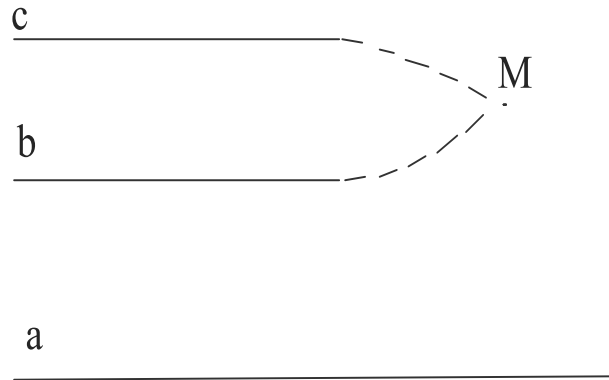


Рис. 30

Необхідно дати учням алгоритм застосування методу від супротивного. Також корисно познайомити школярів з *правилом-орієнтиром* для використання цього методу: *метод від супротивного, як правило, використовується при доведенні теорем про єдиність (прямих, відрізков, інших фігур, геометричних перетворень), існування (прямих, площин), паралельність (прямих, площин).*

Завдання для самостійного виконання студентами:

Навести приклад теорем шкільного курсу геометрії, що мають пряме доведення.

Цільне доведення і доведення по частинах

(пояснення на прикладах)

Доведемо, що якщо $a \in N$, то $(2a^3 + 3a^2 + a) : 6$.

Доведення:

$$2a^3 + 3a^2 + a = a(a + 1)(2a + 1).$$

Із двох послідовних натуральних чисел одне обов'язково парне, тому добуток $a(a + 1) : 2$ і, отже, $a(a + 1)(2a + 1) : 2$. Тепер необхідно довести, що $a(a + 1)(2a + 1) : 3$.

Якщо $a : 3$, тобто має вигляд $a = 3k$, де $k \in N$, то $a(a + 1)(2a + 1) : 3$.

Якщо $a = 3k + 1$, то $2a + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1) : 3$.

Якщо $a = 3k + 2$, то $a + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$

Отже, якщо $a(a + 1)(2a + 1) : 2$ і $a(a + 1)(2a + 1) : 3$, то, за теоремою, $a(a + 1)(2a + 1) : 6$, і вихідне твердження вірне для будь-якого натурального a .

Запитання до студентів:

- Який метод доведення демонструє цей приклад?

Завдання для самостійного виконання студентами:

Навести приклад твердження ШКМ, яке доводиться методом повної індукції.

Векторний і координатний методи доведення теорем

(пояснення на прикладах)

Доведемо різними способами, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

I спосіб (ілюструє застосування дедуктивного методу доведення теорем)

Дано: $\triangle ABC$ – рівнобедрений, AC – основа, AE і CK – медіани (рис. 31).

Довести: $AE = CK$.

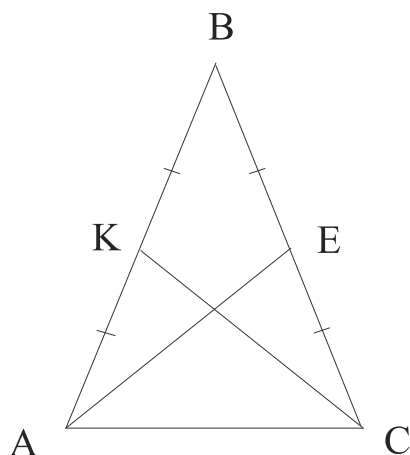


Рис. 31

Доведення: Оскільки $\triangle ABC$ рівнобедрений з основою AC , то $AB=BC$ (за означенням рівнобедреного трикутника) і $\angle A = \angle C$ (за властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника). Так як CK – медіана, то $AB=2AK$ (за означенням медіани). Аналогічно $BC=2CE$. Із того, що $AB=BC$, $AB=2AK$, $BC=2CE$, слідує, що $AK=CE$. У трикутниках AKC і CEA маємо: $AK=CE$, AC – спільна сторона цих трикутників, $\angle A = \angle C$, тому ці трикутники рівні (за двома сторонами і кутом між ними). Звідки $AE=CK$ (за означенням рівних трикутників).

Теорему доведено.

II спосіб (ілюструє застосування векторного методу доведення теорем)

Введемо вектори: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (рис. 32). Тоді $\overrightarrow{EA} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{KC} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

$$\overrightarrow{EA}^2 = |\overrightarrow{EA}|^2 = \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2;$$

$$\overrightarrow{KC}^2 = |\overrightarrow{KC}|^2 = \left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)^2 = \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a}^2.$$

Оскільки $\triangle ABC$ рівнобедрений з основою AC , то $AB=BC$, тобто $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Отже, $\overrightarrow{EA}^2 = \overrightarrow{KC}^2$, тоді $EA^2 = KC^2$; це означає, що $AE=CK$.

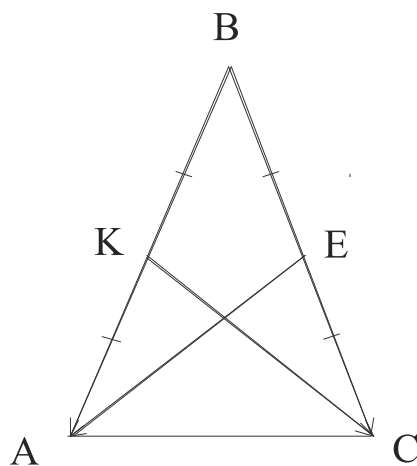


Рис. 32

III спосіб (ілюструє застосування координатного методу доведення теорем)

Введемо систему координат. Вісь x містить сторону AC , вісь y – висоту, проведену до основи (рис. 33). Тоді вершини трикутника матимуть такі координати:

$A (-x; 0)$, $B (0; y)$, $C (x; 0)$.

Так як відрізки AE і CK – медіани, то точки K і E – середини відрізків AB і CB , тому точки E і K матимуть такі координати:

$E (0,5x; 0,5y)$, $K (-0,5x; 0,5y)$.

Знайдемо довжини відрізків AE і CK :

$$AE = \sqrt{(0,5x + x)^2 + (0,5y - 0)^2} = \sqrt{2,25x^2 + 0,25y^2};$$

$$CK = \sqrt{(-0,5x - x)^2 + (0,5y - 0)^2} = \sqrt{2,25x^2 + 0,25y^2}.$$

Довжини відрізків AE і CK рівні, отже, рівні і самі відрізки.

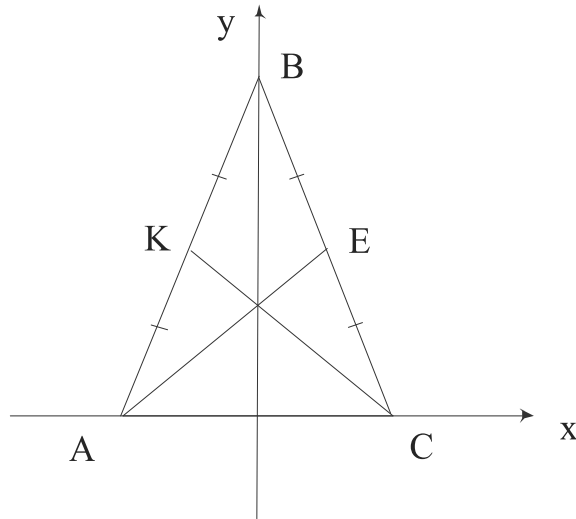


Рис. 33

Домашнє завдання

1. Проаналізуйте доведення теореми про середню лінію трапеції векторним методом [54; ст. 115].
2. Доведіть теорему - властивість вписаного чотирикутника. Охарактеризуйте проведенне доведення за різними ознаками.
3. Запропонуйте теорему шкільного курсу геометрії, яку б можна було довести координатним методом.
4. Доведіть, що $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$. Яким методом доведення користувалися?
5. Проаналізуйте діючий підручник 7 класу і випішіть теореми, що доводяться методом від супротивного.

Практичне заняття №2

Тема: *Методика навчання школярів доведень теорем.*

Мета: засвоєння основних методів доведення теорем, доведення теорем різними способами; вивчення методики навчання учнів доведень теорем: обговорення пропедевтичної роботи вчителя в цьому напрямку, виявлення методів і прийомів, які сприяють засвоєнню школярами готових доведень (виділення ідеї, складання плану, таблиць та ін.); навчання самостійному пошуку доведень.

Зміст практичного заняття №2

1. Перевірка виконання домашнього завдання (25 хв.).
2. Актуалізація опорних теоретичних знань (10 хв.).
3. Різні способи доведення теореми про властивість бісектриси трикутника.
Методика роботи над цією теоремою (пояснення викладача) (25 хв.).
4. Методика роботи над першою ознакою рівності трикутників: порівняльний (ретроспективний) аналіз доведень, запропонованих у підручниках [99] і [137] (сумісна робота) (20 хв.)

Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Що розуміють під навчанням учнів доведень?
2. На які методичні завдання доцільно розчленувати проблему навчання учнів доведень?
3. Охарактеризуйте пропедевтичний етап навчання учнів доведень теорем. Коли його можна розпочинати?

4. З яких двох взаємопов'язаних компонентів складається сутність поняття «знати доведення теореми»?
5. Зазначте головні моменти у роботі вчителя щодо навчання учнів готових доведень.
6. Охарактеризуйте головні компоненти, що входять в уміння учнями самостійно доводити теореми і задачі на доведення.
7. Навіщо учням знати набори достатніх умов поняття? Охарактеризуйте методику роботи вчителя по складанню з учнями достатніх умов понять.
8. Що лежить в основі різних способів доведення теорем?
9. Які основні етапи розв'язання задач на підведення під поняття?
10. Надайте евристичну схему пошуку доведень, яку можна було б запропонувати учням.
11. На які методичні аспекти варто звернути увагу при навчанні школярів доведень?
12. Які основні етапи роботи над теоремами? У який спосіб можливо реалізовувати кожний із етапів?
13. Обґрунтуйте з методичної точки зору доцільність пошуку і демонстрації різних способів доведення теорем.

Методика роботи з теоремою про властивість бісектриси трикутника

***Теорема:** Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.*

Розглянемо декілька способів доведення цієї теореми.

I спосіб доведення

Нехай дано $\triangle ABC$ і BD – бісектриса кута B (рис. 33).

Доведемо, що $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$.

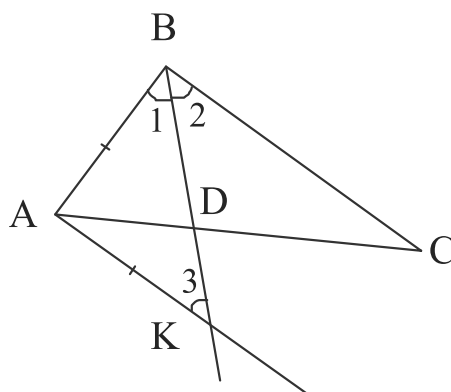


Рис. 33

Проведемо пряму, паралельну BC, що проходить через точку A. Продовжимо бісектрису BD до перетину з цією прямою в точці K. Оскільки $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, то $\triangle KAB$ - рівнобедрений, і тому $AB = AK$.

$\triangle ADK \sim \triangle CDB$ (за двома кутами), тому $\frac{AK}{BC} = \frac{AD}{DC}$ або $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Що і необхідно було довести.

Запитання до студентів:

- Яким методом проведено доведення? Чи можливо застосувати вихідний аналіз при роботі з учнями над доведенням цієї теореми?

II спосіб доведення

Нехай дано $\triangle ABC$ і AL – бісектриса кута A (рис. 34).

Доведемо, що $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$.

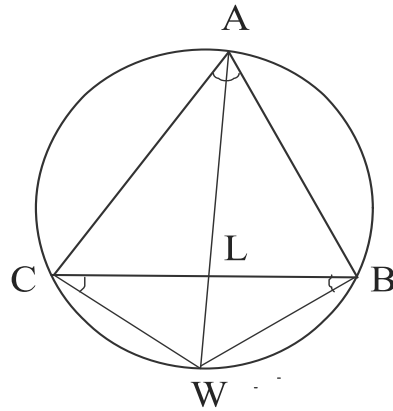


Рис. 34

Застосуємо допоміжне коло. Опишемо його навколо $\triangle ABC$.

Продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці W . Розглянемо дві пари подібних трикутників: $\triangle ALB \sim \triangle CLW$; $\triangle ALC \sim \triangle BLW$ (за двома кутами). Тоді: $\frac{AB}{CW} = \frac{BL}{WL}$ (1); $\frac{AC}{WB} = \frac{CL}{LW}$ (2).

Поділимо (1) на (2); враховуючи, що $CW=WB$ (оскільки $\triangle CWB$ рівнобедрений за ознакою), маємо: $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. Що і необхідно було довести.

Запитання до студентів:

- Яку додаткову побудову використано для доведення цієї теореми?
Яке правило-орієнтир застосування цієї додаткової побудови можна дати учням?

III спосіб доведення

Нехай CD – бісектриса $\angle C$ $\triangle ABC$ (рис. 35). На сторонах CA і CB від вершини цього кута відкладемо одиничні вектори $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{e_2}$.

Тоді $\overrightarrow{CA} = b\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{CB} = a\overrightarrow{e_2}$, де $b = |\overrightarrow{CA}|$, $a = |\overrightarrow{CB}|$.

Побудуємо ромб $CPMN$ (т. $P \in CD$). Маємо: $\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$, де $k > 0$ – деяке дійсне число.

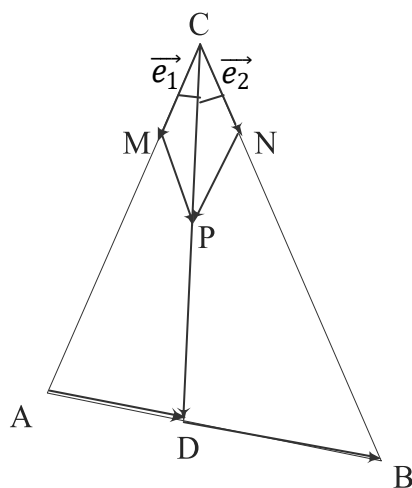


Рис. 35

Нехай $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{DB}$, $m = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$, або, за правилом різниці векторів:
 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = m(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$, тобто $k(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) - b\overrightarrow{e_1} = m(a\overrightarrow{e_1} - k(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}))$,
 звідки $(k - b + mk)\overrightarrow{e_1} + (k - ma + mk)\overrightarrow{e_2} = 0$. Оскільки $\overrightarrow{e_1} \nparallel \overrightarrow{e_2}$, то
 $\begin{cases} k - b + mk = 0, \\ k - ma + mk = 0 \end{cases}$. Тобто $ma = b$, $m = \frac{b}{a} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$. Що і необхідно було довести.

Примітка. Ще два способи доведення цієї теореми розглянуто в лекції 5.

Як можна організувати вивчення теореми-властивості бісектриси трикутника з учнями?

На етапі підготовчої роботи до вивчення цієї теореми можна запропонувати таку задачу:

Задача. Дано трикутник FKP, в якому проведено бісектрису трикутника FN, причому FK=6 см, FP=8 см, NP=4см. Знайти довжину сторони KP.

Для вирішення цієї задачі учням не вистачає теоретичних фактів, таким чином створюється проблемна ситуація, і вчитель повідомляє учням, що на

цьому уроці ми вивчимо властивість бісектриси трикутника, завдяки якій така задача просто вирішується (відтак, формується відповідна мотивація).

На етапі роботи з формулюванням теореми учні за допомогою вчителя намагаються переформулювати теорему в умовній формі (*Якщо в трикутнику проведено бісектрису, то вона поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам*), виокремлюючи, що дано і що треба довести. Хтось із учнів на дошці виконує рисунок і записує коротку умову.

На етапі роботи з доведенням теореми вчитель, застосовуючи висхідний аналіз і звертаючись із навідними запитаннями до класу, проводить доведення і робить необхідні записи на дошці, учні їх фіксують в зошитах (пропонується довести теорему *I способом*, проводячи через вершину трикутника пряму, паралельну протилежній стороні трикутника).

На етапі закріплення доведення теореми дехто з учнів намагається його відтворити на дошці за зміненим рисунком, з іншими буквеними позначеннями.

На етапі застосування теореми вчитель повертається до задачі, з якої починали вивчення теореми. Далі, в якості теоретичної частини домашнього завдання можна запропонувати більшості учнів опрацювати доведення, представлене у більшості підручників, а деяким учням класу, хто цікавиться математикою, запропонувати довести цю теорему *II способом*, застосовуючи допоміжне коло (таким чином відбувається реалізація диференційованого та індивідуального підходів до навчання математики). На наступному уроці ці два нових способи доведення даної теореми будуть розглянуті (таким чином реалізується мета теми – вирішується якомога більше задач на застосування подібності трикутників; підвищується інтерес до доказових міркувань; теорема, що розглядається, добре фіксується в пам'яті).

На подальших уроках буде напрацьовуватися практика застосування цієї теореми до розв'язування задач різного рівня складності.

Наприклад, можна запропонувати таку задачу: Бісектриса AM трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) ділить катет BC на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A , C і M .

До методики роботи над першою ознакою рівності трикутників

***Указівки до проведення порівняльного аналізу доведень,
представлених у сучасних підручниках і підручниках минулих років:***

- 1) Проаналізувати доведення першої ознаки рівності трикутників за підручником Мерзляка А. Г. і співавторів. Зробити висновки щодо доступності такого доведення для учнів.
- 2) Ознайомитися з *прийомом складання таблиць у процесі роботи над доведенням*, вивчивши таблицю 5.2. за посібником [49, с. 77] для доведення першої ознаки рівності трикутників. Відповісти на запитання: яка мета складання такої таблиці з учнями, особливо на *перших уроках геометрії*?
- 3) Проаналізувати доведення першої ознаки рівності трикутників за підручником О. Погорєлова.
- 4) Виконавши логіко-математичний аналіз попереднього матеріалу за даними підручниками, відповісти на запитання: у чому причина застосування авторами підручників різних підходів до доведення цієї теореми?

Домашнє завдання

1. Доведіть координатним методом, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до всіх вершин описаного квадрата є величина стала.
2. Складіть набір достатніх умов таких понять:
 - 1) «рівність кутів»;
 - 2) «ромб».
3. Методика роботи над теоремою Фалеса або над теоремою Вієта (*за вибором*) (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) застосування теореми).
Оформіть як конспект фрагменту уроку з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу.

Практичне заняття 3

Тема: *Методика роботи з твердженнями шкільного курсу геометрії.*

Мета: Формування складника методичної компетентності щодо навчання здобувачів середньої освіти використовувати математичні твердження у процесі сумісного складання конспекту уроку.

Зміст практичного заняття № 3

1. Актуалізація опорних знань (10 хв.).
2. Складання конспектів двох послідовних уроків (сумісна робота викладача і студентів) (70 хв.).

Хід заняття

Складання орієнтовних конспектів уроків.

Тема уроку 1: Найпростіші геометричні фігури та їх властивості. Аналогія в геометрії.

Мета: Узагальнити і систематизувати знання учнів з цієї теми.

Сформувати уявлення про аналогію як форму умовиводу та методу наукового пізнання.

Формувати в учнів навички і уміння застосовувати властивості найпростіших геометричних фігур при розв'язуванні задач.

Розвивати логічне мислення, просторову уяву.

Виховувати працьовитість, наполегливість, охайність, культуру математичного мовлення.

Обладнання уроку : креслярські приладдя, таблиця, презентація, картки, зелені та червоні прапорці.

Тип уроку : узагальнення і систематизація знань.

Епіграф до уроку:

«Точка - це перша основа геометрії».

Леонардо да Вінчі

Хід уроку:

I. 1. Повідомлення теми, створення позитивної мотивації до навчання.

Учитель: Запишіть, будь ласка, тему уроку в зошит (слайд). Які найпростіші геометричні фігури вам відомі? (...) Із яких фігур можна створити безліч інших?

Так, точка і пряма.

І навіть пряму можна уявити як безліч точок. Тому недарма Леонардо да Вінчі сказав: «Точка - це перша основа геометрії» (слайд).

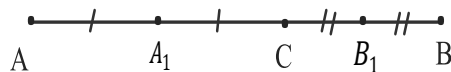
Точка і пряма – перші поняття геометрії, їх не можна визначити. А от проміню можна дати означення. Що ми називаємо променем? (...) *За аналогією* ми даємо означення відрізка.

2. Аналогія в геометрії.

Ми сказали «за аналогією». Що означає цей термін?

Розглянемо дві задачі (дітям даються картки, перша задача на дошці, а друга – розбір готового розв'язання) (на слайді)

Задача 1. На відрізку АВ, який дорівнює 20 см, позначено точку С. Знайдіть відстань між серединами відрізків АС і СВ.



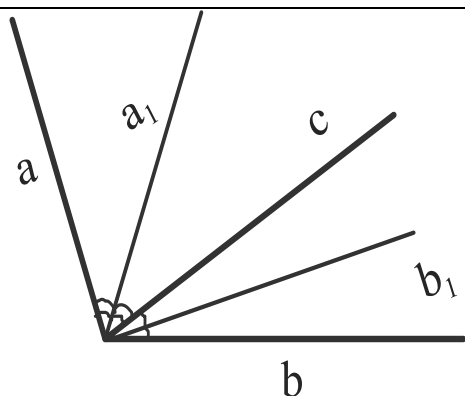
Розв'язання.

Нехай т. С належить відрізку АВ, точки A_1 і B_1 – середини відрізків АС і СВ відповідно. Тоді $A_1C = \frac{1}{2}AC$, $CB_1 = \frac{1}{2}CB$. Знайдемо довжину відрізка $A_1B_1 = A_1C + CB_1 = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB$.

Оскільки за умовою задачі $AB=20$ см, маємо: $A_1B_1 = \frac{20}{2} = 10$ см.

Відповідь: 10 см.

Задача 2. Промінь c ділить кут (ab) , що дорівнює 140° , на два кути. Знайдіть кут між бісектрисами кутів (ac) і (cb) .



Розв'язання.

Нехай промінь c ділить кут (ab) на два кути, промені a_1 і b_1 – бісектриси кутів (ac) і (cb) відповідно. Тоді $\angle(a_1c) = \frac{1}{2}\angle(ac)$, $\angle(b_1c) = \frac{1}{2}\angle(cb)$. Знайдемо градусну міру кута (a_1b_1) :
 $\angle(a_1b_1) = \angle(a_1c) + \angle(b_1c) = \frac{1}{2}\angle(ab)$.

Оскільки за умовою задачі $\angle(ab)=140^\circ$, маємо: $\angle(a_1b_1) = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$.

Відповідь: 70° .

Учитель: чи помітили ви щось спільне в обох задачах? Так, і в умові, і в розв'язанні. В першій задачі мова йде про середину відрізка, а в другій – про бісектрису кута. Говорять, що ці задачі аналогічні.

Аналогія допомагає науковцям роботи відкриття.

Літаки було створено за *аналогією* із польотом птахів (слайд);

кажан у польоті випускає ультразвукові коливання, завдяки яким орієнтується в темряві: за аналогічним принципом вчені створили радіолокатор (слайд).

Заповнимо таблицю. Що потрібно вставити у порожні місця? (слайд)

Відрізки	Кути
Кінці відрізка	Сторони кута
	Промінь ділить кут на два кути
Рівні відрізки суміщаються накладанням	
Середина відрізка	
	Градусна міра кута
Аксіома (основна властивість) відкладання відрізків	
	Аксіома (основна властивість) вимірювання кутів

Відповіді:

- ✓ Точка ділить відрізок на два відрізки
- ✓ Рівні кути суміщаються накладанням
- ✓ Бісектриса кута
- ✓ Аксіома (основна властивість) відкладання кутів
- ✓ Аксіома (основна властивість) вимірювання відрізків

Учитель: Аналогія настільки важлива у науці, що відомі люди так висловлювалися про неї: (слайд)

1. «Можливо, не існує відкриттів ні в елементарній, ні у вищій математиці, ні, мабуть, у бідь-якій іншій галузі, які б могли бути зроблені ... без **аналогії**» (Дьєрдь Пойа (1887 – 1985), угорський, швейцарський і американський математик).

2. «Пізнання світу є пізнання самого себе, оскільки людина – найбільша таємниця, джерело **аналогій** для Всесвіту» (Новаліс (1772 – 1801), німецький письменник, поет, містик).
3. «Часто траплялося, що суттєвий успіх був досягнутий проведенням послідовної **аналогії** між непов'язаними, на перший погляд, явищами» (Альберт Ейнштейн (1879 – 1955), фізик – теоретик, лауреат Нобелівської премії).

II. Дидактична гра «Так - Ні» (логічні задачі). (слайд)

Якщо «вірно» - учень показує **зелений** прапорець, якщо «невірно» - **червоний** прапорець.

(Учитель пояснює, наводить за потреби контрприкладі).

1. Якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні? (**Ні**)
2. Чи може пара суміжних кутів складатися:
 - а) із двох гострих кутів; (**Ні**)
 - б) із двох прямих кутів? (**Так**)
3. Для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут? (**Так**)
4. На прямій позначено п'ять точок. Чи є вірним таке твердження:
 - а) будь-які три з даних точок лежать між двома іншими; (**Ні**)
 - б) серед даних точок знайдуться три, що лежать між двома іншими. (**Так**)
5. Якщо кути рівні, то вони вертикальні? (**Ні**)
6. Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні? (**Так**)
7. Якщо точка С лежить на промені АВ, то вона обов'язково лежить і на відрізку АВ. Чи є вірним таке твердження? (**Ні**)
8. Якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий? (**Ні**)
9. Якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то вони суміжні? (**Ні**)
10. Якщо сума двох кутів не дорівнює 180° , то вони не суміжні? (**Так**)

III. Розв'язання задач.

1. **Задачі на доведення:** (умови задач на слайді) (схема методу від супротивного на слайді)

1.1. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, є тупим. Доведіть методом від супротивного, що жоден із решти утворених кутів не може бути прямим.

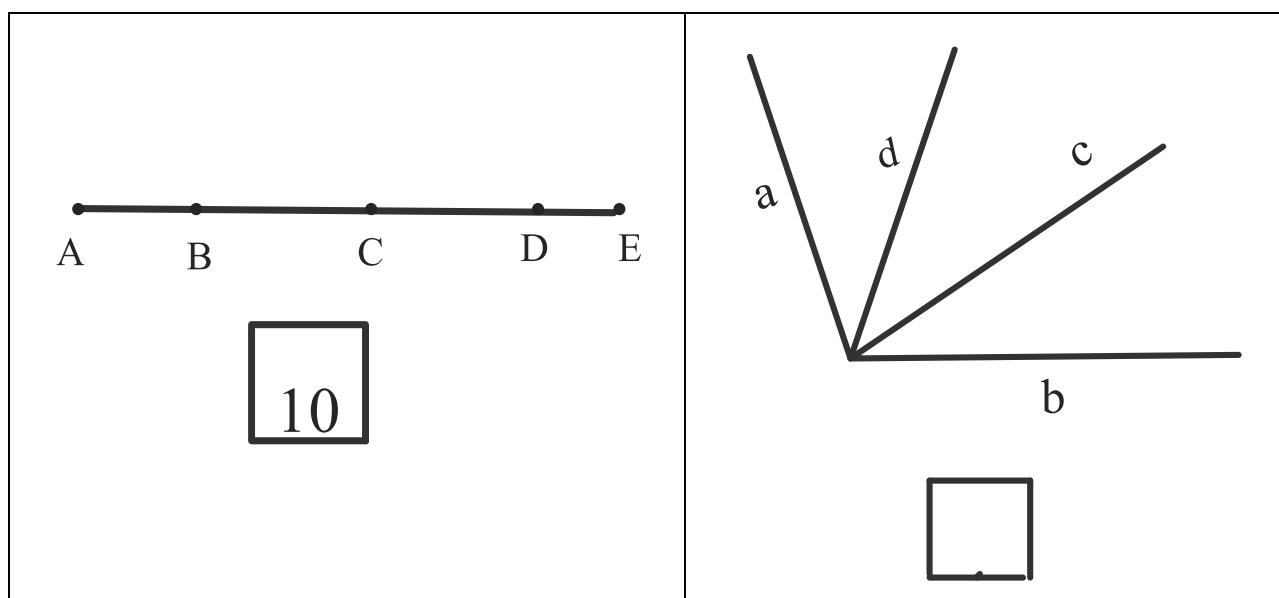
Учитель роздає картки «Схема доведення методом від супротивного». Задачу вирішує учитель за допомогою учнів. Реалізовуємо схему. В зошитах рисунок, коротка умова, доведення.

1.2. (якщо встигаємо). Доведіть, що коли бісектриси кутів АОВ і ВОС перпендикулярні, то точки А, О і С лежать на одній прямій. Учень рисує на дошці рисунок. Пишемо дано, доведення на дошці.

Схема доведення від супротивного	
Твердження Якщо А, то В	
Доведення	
1. Припущення. Нехай А, але не В	Припускаємо, що умова теореми справджується, а висновок — ні
2. Міркування	Міркуємо, спираючись на аксіоми, раніше доведені теореми, умову задачі
3. Суперечність	Отримуємо нове твердження, що суперечить або даній умові, або одній з аксіом, або раніше доведених теоремі
4. Висновок. Тоді В	Переконуємося, що наше припущення хибне, тобто дане твердження є правильним

У ході вирішення задач обговорюються поняття, що складають логічну основу шкільного курсу геометрії: «доведення» (посилання на аксіому, теорему, дані задачі, означення), «метод доведення» (від супротивного, аналітичний, синтетичний), «аксіома» (твердження, що приймається без доведення), «теорема» (твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою доведення).

2. **Логічна задача:** (слайд) Яке число треба поставити у порожній квадрат?



Тому, хто першим дає відповідь, додається один бонусний бал до результату контрольної роботи.

Домашнє завдання: підготовка до Кр.

Мерзляк, Сходінки (2015), с. 88, КР №1, варіант 1.

Тема уроку 2: Найпростіші геометричні фігури та їх властивості.

Мета: Узагальнити і систематизувати знання учнів з цієї теми.

Тип уроку: самостійна робота (диференційована, навчального характеру).

Хід уроку

Задачі для підготовки до контрольної роботи з теми:

«Найпростіші геометричні фігури та їх властивості»

(учні обирають задачі різного рівня складності, одержують консультації учителя у разі утруднень)

1. На промені з початком у точці А побудуйте відрізки АВ і АС так, щоб $AB = 8$ см, $AC = 5$ см.

а) Яка з трьох даних точок лежить між двома іншими?

б) Яку довжину має відрізок ВС ? 1 б.

2. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 124° . Знайдіть градусні міри решти кутів. 1 б.

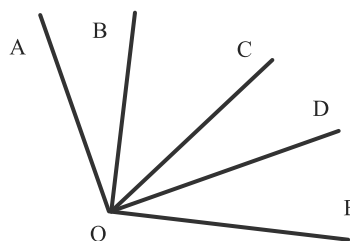
3. Один із суміжних кутів на 28° менший від другого. Знайдіть ці кути. 2 б.

4. Промінь OL ділить кут MON на два кути так, що $\angle MOL = 84^\circ$ і $\angle LON = 18^\circ$. Промінь ОК — бісектриса кута MON. Знайдіть кут KOL. 2 б.

5. На рисунку $\angle AOB = \angle COD$,
 $\angle AOC = \angle COE$.

Доведіть, що $\angle BOC = \angle DOE$.

3 б.



6. Точки М , К і Р лежать на одній прямій, $MP = 24$ см, відрізок КР у 5 разів менший від відрізка МК. Знайдіть відрізок МК. 3 б.

Учитель проводить індивідуальне консультування.

Учні обирають завдання, розраховуючи очікуваний бал на Контрольній роботі (виявляємо рівень мотивації, очікувань від результатів навчальної діяльності).

Банк задач до уроків

Усні:

1. Через точку A проведено дві прямі. Чи можуть ці прямі мати спільну точку B , відмінну від точки A ?
2. Промені DE і DF — доповняльні. Яка з точок D , E і F лежить між двома іншими?
3. Два промені мають спільну початкову точку. Чи обов'язково вони є доповняльними?

Графічні:

1. Чи можуть два промені однієї прямої не бути доповняльними? Зробіть рисунок.
2. За допомогою двосторонньої лінійки проведіть паралельні прямі a і b .
а) Позначте на прямій a точку A . Чи можна провести через точку A іншу пряму, паралельну прямій b ? Чому?
3. За допомогою двосторонньої лінійки проведіть паралельні прямі a і b .
б) Проведіть пряму c , паралельну прямій a . Чи паралельні прямі b і c ? Чому?

Прикладні:

1. Скільки прямих трас необхідно прокласти, щоб сполучити будь-які два з чотирьох міст? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть рисунки.
2. Три паралельні шосейні траси перетинаються двома іншими паралельними трасами. Скільки перехресть утворилося?

Логічні:

1. На прямій позначено п'ять точок. Визначте, які з наведених тверджень є правильними: а) серед даних точок існує принаймні одна, що не лежить між двома з решти цих точок; б) серед даних точок існує рівно одна, що не лежить між двома з решти цих точок
2. Якщо точка C лежить на відрізку AB , то вона лежить і на промені AB . Чи є правильним таке твердження?

3. Чи може пара суміжних кутів складатися: 1) із двох гострих кутів; 2) із двох тупих кутів; 3) із прямого та тупого кутів; 4) із прямого та гострого кутів?
4. Чи є правильним твердження: 1) для кожного кута, відмінного від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут; 2) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий; 3) якщо два кути суміжні, то один із них більший за другий; 4) якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то вони суміжні; 5) якщо сума двох кутів не дорівнює 180° , то вони не суміжні; 6) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні; 7) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі; 8) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?
5. Чи є правильним твердження: 1) якщо два кути мають спільну вершину та їхні бісектриси є доповняльними променями, то ці кути вертикальні; 2) якщо бісектриси двох рівних кутів лежать на одній прямій, то ці кути вертикальні?

Дослідницькі:

1. Чи можна розбити пряму на відрізок і два промені? Якщо так, то чи можуть отримані промені бути доповняльними?
2. Точки A , B і C лежать на одній прямій. Відрізок AB більший, ніж відрізок AC . Чи може точка C лежати між точками A і B ? Чи може точка A лежати між точками B і C ?
3. На площині проведено три паралельні прямі. Чи може якась четверта пряма: а) перетинати тільки одну з даних прямих; б) перетинати тільки дві з даних прямих; в) не перетинати жодної з даних прямих?

На доведення:

1. На площині проведено три прямі. При цьому утворилися дві точки перетину. Доведіть, що серед даних прямих є паралельні.
2. Прямі a і b перетинаються, а пряма c перпендикулярна до прямої a . Доведіть, що прямі b і c не можуть бути перпендикулярними.

3. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними півпрямими.
4. Два рівні кути мають спільну вершину, а їхні бісектриси є доповняльними променями. Доведіть, що ці кути вертикальні.
5. Промені b і c ділять кут (ad) на три рівні кути. Доведіть, що бісектриса кута (bc) є бісектрисою кута (ad) .
6. Прямі a і b перетинаються, пряма c паралельна прямій a . Доведіть методом від супротивного, що прямі b і c не паралельні. (Якщо за підручником Ершової, Голобородько).

На обчислення:

1. Різниця двох суміжних кутів дорівнює одному з них. Знайдіть ці суміжні кути.
2. Сума трьох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, на 60° більша, ніж четвертий кут. Знайдіть кут між даними прямими.
3. Кути AOB і COB суміжні, причому $\angle AOB = 108^\circ$. З точки O проведено промінь OD так, що $\angle COD = 126^\circ$. Чи є промінь OD бісектрисою кута AOB ? Відповідь обґрунтуйте.
4. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 124° . Знайдіть градусні міри решти кутів.
5. Кути DEF і MEF — суміжні, промінь EK — бісектриса кута DEF , кут KEF у 4 рази менший від кута MEF . Знайдіть кути DEF і MEF .

Домашнє завдання

Скласти урок з іншої теми ШКГ з указаною метою.

Практичне заняття 4

Тема: *Методика організації та проведення «уроку однієї задачі».*

Мета: формування складника методичної компетентності щодо організації та проведення різних типів уроків, спрямованих на усвідомлення учнями логічних основ шкільного курсу геометрії та розвитку їх вмінь проводити доказові міркування.

Хід заняття

Проаналізуємо конспект уроків (двох, спарених), під час проведення яких було реалізовано ідею «уроку однієї задачі». Як правило, «уроки однієї задачі» використовують у школі для поглиблення, систематизації та узагальнення знань та вмінь учнів. На таких уроках організовується робота учнів щодо розв'язання запропонованої задачі різними способами, порівняння цих способів, вибір більш раціонального. Крім того, пропонуємо поширити трактування терміну «урок однієї задачі» і до них віднести такі уроки, на яких передбачено розв'язування складної задачі, обговорення різних способів виконання окремих етапів її розв'язування, розгляд як окремих випадків, так і узагальнень даної задачі. Отже, це не просто «урок однієї задачі», а, як іноді влучно кажуть, – «урок-бенефіс однієї задачі» або «урок-свято однієї задачі».

Тема уроків 1–2: Розв'язування задачі поглибленого рівня з теми «Чотирикутники».

Мета: узагальнити і систематизувати знання учнів щодо теми «Чотирикутники»; формувати уміння доводити геометричні твердження; розвивати в учнів дослідницькі вміння.

Заняття починаємо з висловлення надії на плідну співпрацю з учнями у ході уроку і проведення математичної розминки за такими вправами.

1. Розглянемо типову систематизаційну схему (діаграму Ейлера-Вена) щодо чотирикутників, на якій представлено різні види (паралелограми, прямокутники, ромби, квадрати; трапеції). Використовуючи цю діаграму, легко сформулювати означення чотирикутників різних видів. Наприклад, паралелограм – це чотирикутник ... Сформулюйте, користуючись схемою, означення прямокутника.

2. Чи є обов'язковою в означення прямокутника теза про те, що всі кути мають бути прямими? Якщо ні, то чи достатньо одного прямого кута? Як довести рівність інших кутів 90° ?

3. Задача за готовим рисунком (рис. 1). У паралелограмі ABCD, менша сторонами якого дорівнює 5 см, проведено бісектрису АК. Відрізок КС дорівнює 4 см. Знайти довжину більшої сторони паралелограма.

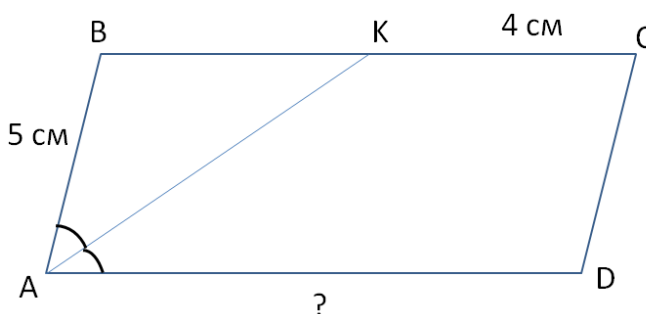


Рис. 1. Задача за готовим рисунком

На наступному етапі розглядаємо задачу підвищеної складності.

Задача*. У паралелограмі ABCD з сторонами 4 см і 7 см, проведено бісектриси усіх кутів. Знайти довжину відрізка FN, обґрунтувавши розв'язання (рис. 2).

Для мотивування учнів щодо розв'язування цієї задачі використовуємо технологію «Сторітеллінг», а саме: розповідаємо історію, пов'язану із цією задачею.

«Дана задача була запропонована на одній із математичних олімпіад. Умова задачі, на перший погляд, здалася учасникам олімпіади простою, вони одразу почали її розв'язувати. Але потім, після перевірки, виявилось, що правильно задачу не розв'язав жодний учасник олімпіади. Лише деякі з них зробили перші кроки у розв'язанні. Чому так сталося?»

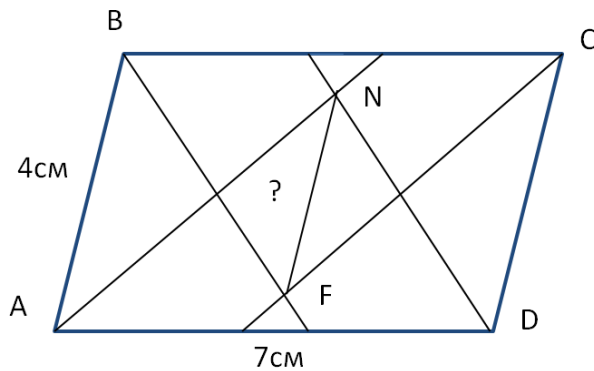


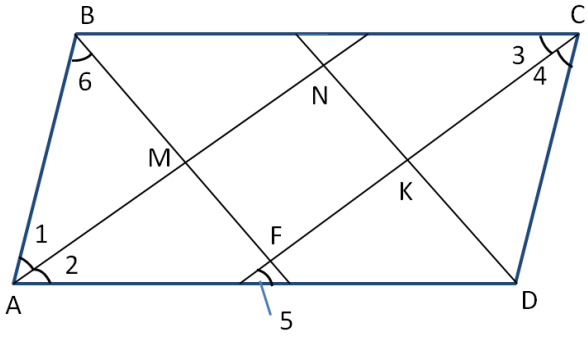
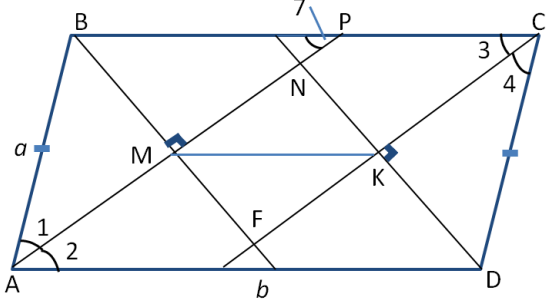
Рис. 2. Основна задача уроку

Передбачається, що учні висловлять припущення: задача складна, бо незрозуміло, як пов'язаний відрізок FN зі сторонами заданого паралелограма.

Пропонується розв'язати допоміжні задачі за готовими рисунками (табл. 1). Під час складання плану доведення допоміжної задачі 1 використовуємо евристичний метод. Щоб довести, що чотирикутник є прямокутником, що спочатку треба довести? Які теоретичні відомості можна використати, щоб довести, що чотирикутник є паралелограмом? Які теоретичні відомості можна використати, щоб довести паралельність AM і CK? Чому дорівнює сума $\angle 1$ і $\angle 6$, з урахуванням того факту, що AM і BM – бісектриси відповідних кутів паралелограма?

Для розв'язання допоміжної задачі 2 створюємо план: 1) доводимо, що трикутник ABP – рівнобедрений; 2) доводимо рівність трикутників BMP і CKD ; 3) доводимо, що чотирикутник $MPCK$ – паралелограм; 4) робимо висновок: $MK = PC = BC - BP = b - a$.

Допоміжні задачі

Допоміжна задача 1	Допоміжна задача 2
	
Довести, що чотирикутник MNKF – прямокутник.	1) Довести, що $MK \parallel BC$; 2) Визначити, чому дорівнює МК.

Повертаємося до задачі* і записуємо її розв'язання.

На цьому етапі доречно знову звернутися до історії про задачу* з математичної олімпіади. Просимо учнів зробити припущення, чому цю задачу не розв'язали учасники олімпіади? З чим пов'язані труднощі при її розв'язуванні?

Далі пропонуємо учням сформулювати доведене твердження: *діагоналі чотирикутника, утвореного при перетині бісектрис усіх кутів паралелограма, дорівнюють різниці його сторін*. Демонструємо інтелектуальну карту у вигляді опорної схеми щодо доведення даного твердження (рис. 3).

Діагоналі чотирикутника, утвореного при перетині бісектрис усіх кутів паралелограма, дорівнюють різниці його сторін.

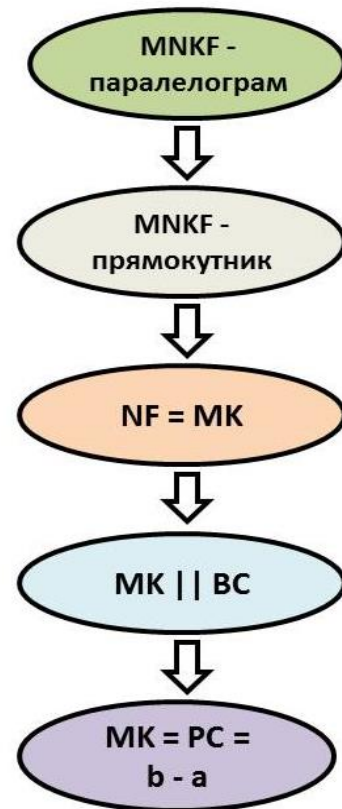
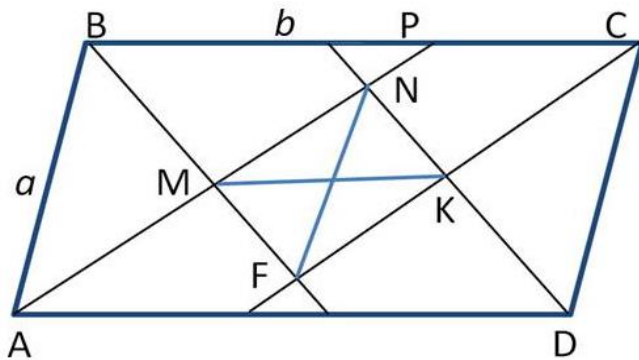


Рис. 3. Опорна схема доведення твердження

Підсумовуємо, які теоретичні відомості використовуються під час доведення даного твердження. Встановлення переліку теоретичних відомостей проводимо з використанням дидактичної гри «Аукціон»: учні по черзі називають означення, або ознаку, або властивість геометричних фігур; виграє той учасник гри, хто формулює геометричний факт, використаний під час доведення, останнім. Зроблено висновок: при доведенні використано 13 теоретичних положень, з них 6 – з теми «Чотирикутники».

Наступний етап уроку – дослідження окремих випадків (конкретизації) і узагальнення одержаного твердження.

Встановлено, якщо заданий паралелограм і проведено бісектриси його кутів, то при їх перетині отримуємо прямокутник. Чи буде справедливим таке твердження при заміні паралелограма, заданого умовою, на ромб, або прямокутник, або трапецію?

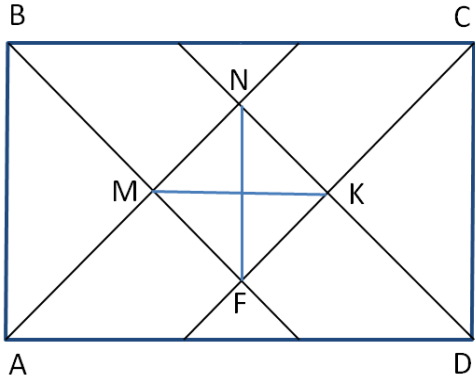
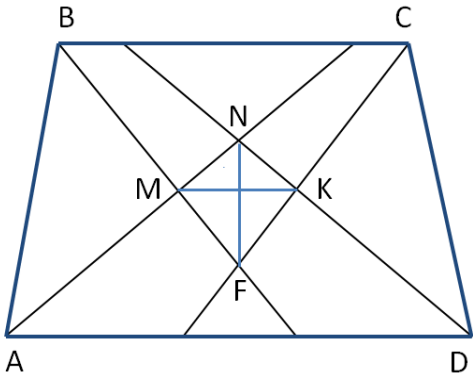
Створюємо 2 дослідницькі групи. Перша група учнів встановлює вид чотирикутника, який отримуємо при перетині бісектрис усіх кутів прямокутника, а друга – рівнобічної трапеції (табл. 2).

Учні першої групи у результаті дослідження встановлюють і обґрунтовують, що при перетині бісектрис усіх кутів прямокутника утворюється квадрат. Розглядаються різні способи доведення цього твердження.

Учні другої групи встановлюють, що при перетині бісектрис усіх кутів рівнобічної трапеції утворюється чотирикутник, який має цікаві властивості – вісь симетрії, два прямих кута, по дві рівні сторони та ін.

Таблиця 2

*Чотирикутники, утворені при
перетині бісектрис усіх кутів заданих геометричних фігур*

Прямокутник	Рівнобічна трапеція
	
MNKF – квадрат	MNKF – чотирикутник з віссю симетрії NF

Таким чином, нами запропоновано варіацію «уроку однієї задачі» для учнів 8 класу з метою розвитку дослідницьких умінь учнів; узагальнення і систематизації знань з теми «Чотирикутники» й удосконалення умінь їх застосування у складних, нетипових ситуаціях.

У ході такого уроку реалізовано дослідницьку технологію навчання, елементи методики евристичного навчання, методики узагальнюючого повторення, технологію сторітеллінгу, групового навчання та НІТ, застосовувалися інтелект-карти у вигляді опорних схем.

Бажано, щоб протягом такого уроку учні вчилися створювати гіпотези щодо різних способів доведення геометричних тверджень, розробляти плани доведення та їх успішно реалізовувати, демонструвати уміння працювати в команді, доброзичливість та взаємоповагу.

Домашнє завдання:

Розробити власний конспект «уроку однієї задачі» із зазначеною метою.

Завдання для самостійної роботи студентів

1. Доведіть, що якщо $a > 0, b > 0$, то $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}$. Який метод доведення було використано?
2. Доведіть, що якщо $a > 0, b > 0$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. Чи доречно використати непряме доведення?
3. Доведіть теорему – властивість вписаного чотирикутника. Охарактеризуйте проведені доведення за різними ознаками.
4. Доведіть різними способами, у тому числі координатним методом, що в рівнобічній трапеції $ABCD$ відрізок KD дорівнює середній лінії (K – проекція точки B на більшу основу трапеції). В якому класі можна розглядати цю задачу?
5. Знайдіть кут між мімобіжними діагоналями двох суміжних граней куба (розв'яжіть задачу векторним методом).
6. Доведіть векторним методом, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і поділяються на цій точці у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.
7. Наведіть приклади декількох задач ШКГ, в яких ознаки рівності трикутників виступають як ключ до розв'язання задачі.
8. Запропонуйте карточку-орієнтир для самостійного доведення учнями теореми про середню лінію трикутника іншим способом, відмінним від запропонованого у чинному підручнику.
9. Оформіть доведення теореми про суму кутів трикутника у вигляді таблиці, ліва колонка якої – твердження, права – його обґрунтування.
10. Доведіть, що якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кутів, то цей паралелограм – ромб. Охарактеризуйте методику роботи з учнями над цією задачею.

11. Складіть набір достатніх умов поняття прямокутника. Навіщо учням володіти систематизованим набором достатніх умов поняття? Наведіть приклад задачі, у процесі розв'язання якої доцільно пригадати з учнями набір достатніх умов поняття прямокутника.

12. Складіть розгорнутий конспект *позакласного заходу з математики*, мета якого – підвищити інтерес учнів до доказових міркувань і до різних способів доведення теорем шкільного курсу математики.

13. Розгляньте теорему 11.1 (про вписаний кут) за підручником [Мерзляк, 8 кл. поглиб. рів. С. 65]. Проаналізуйте представлене доведення за різними ознаками: за *послідовністю міркувань*; за *загальнологічною основою*; за *формою умовиводу*; в залежності від використання математичних теорій. Виконайте порівняльний аналіз такого доведення з доведенням, поданим у лекції 2 (див. с. ...)

14. Розглянемо твердження:

Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм $\Leftrightarrow \forall \text{ т. } Q : \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}$
(рис. 36)

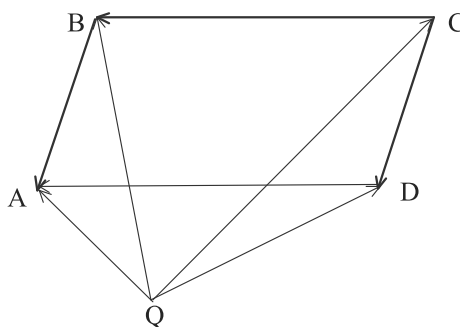


Рис. 36

Доведення:

1) Нехай $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}$. Доведемо, що $ABCD$ – паралелограм.

$$\underbrace{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB}}_{\overrightarrow{BA}} = \underbrace{\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QC}}_{\overrightarrow{CD}}, \text{ тобто } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow AB = CD.$$

$$\underbrace{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QD}}_{\overrightarrow{DA}} = \underbrace{\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC}}_{\overrightarrow{CB}}, \text{ тобто } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CB}| \Rightarrow DA = CB.$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ DA = CB \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ – паралелограм за ознакою.}$$

Яку частину твердження було доведено: необхідність або достатність?

Проведіть доведення другої частини вихідного твердження.

Охарактеризуйте проведене доведення за різними ознаками.

15. Охарактеризуйте методику роботи з наступними теоремами (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми):

- *теорема про площу паралелограма;*
- *теорема, обернена до теореми Піфагора;*
- *теорема – ознака паралельності прямих: «Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні перехресні кути рівні, то прямі паралельні»;*
- *з теорема – ознака рівнобедреного трикутника: «Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений»;*
- *теорема – властивість рівнобедреного трикутника, пов'язана з кутами.*

Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу).

16. Наведіть приклади тверджень ШКМ, у процесі доведення яких були б посилання на:

- 1) теорему, обернену до теореми Піфагора;
- 2) теорему Вієта;
- 3) теорему, обернену до теореми Вієта;
- 4) теорему – властивість описаного чотирикутника;
- 5) теорему про три перпендикуляри;
- 6) теорему про рівносильність рівнянь;
- 7) теорему про рівносильність нерівностей;
- 8) теорему Фалеса;
- 9) теорему – ознаку перпендикулярності прямої і площини;
- 10) теорему – властивість рівнобічної трапеції.

17. Розглянемо теорему Птолемея та її доведення.

Теорема (Птолемея). Добуток діагоналей чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ – вписаний в коло (рис. 37).

Доведемо, що $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$.

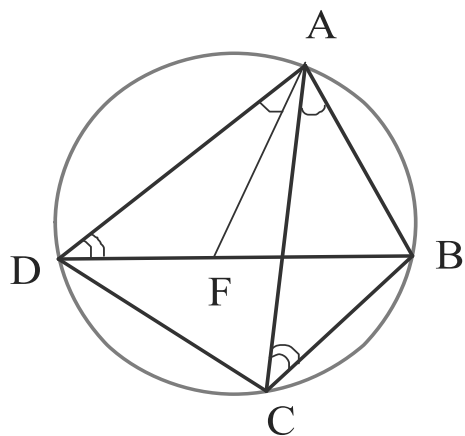


Рис. 37

Проведемо відрізок AF (точка F належить відрізку DB) так, щоб кут DAF дорівнював куту CAB .

$\triangle ACB \sim \triangle ADF$ (за двома кутами), тому $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{BC}$, або $AD \cdot BC = AC \cdot DF$ (1).

Оскільки $\angle DAC = \angle FAB$, то

$\triangle DAC \sim \triangle FAB$ (за двома кутами), тому $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{FB}$, або $AC \cdot FB = AB \cdot DC$ (2).

Додамо рівності (1) і (2), одержимо: $AC(DF + FB) = AD \cdot BC + AB \cdot DC$, або $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$.

Теорему доведено.

Охарактеризуйте представлене доведення за різними ознаками.

Затосовуючи теорему Птолемея, розв'яжіть наступну задачу:

Задача. На колі, описаному навколо рівностороннього трикутника ABC , взято довільну точку X . Доведіть, що найбільший з відрізків XA , XB , XC дорівнює сумі двох інших.

18. Розглянемо софізм: " $4=5$ ".

«Доведення». Нехай $a=b+c$. Помножимо обидві частини на 5: $5a=5b+5c$.
Додавши почленно цю рівність до рівності $4b+4c=4a$, будемо мати:
 $5a+4b+4c=4a+5b+5c$. Віднявши від обох частин одержаної рівності $9a$,
матимемо: $4b+4c-4a=5b+5c-5a$, або $4(b+c-a)=5(b+c-a)$. Звідки $4=5$.

Знайдіть помилку у наведених міркуваннях.

Чому корисно знайомити учнів на уроках математики з прикладами софізмів?

**Завдання в тестовій формі щодо підготовки
майбутніх учителів математики до навчання учнів
доводити математичні твердження**

1. Розглянемо теорему та її доведення.

Теорема. Якщо x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доведення. Очевидно, що дискримінант D даного рівняння не може бути від'ємним. Нехай $D > 0$. Застосовуючи формулу коренів квадратного рівняння,

запишемо: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Маємо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Зауваження. Теорема є справедливою і тоді, коли $D=0$. При цьому вважають, що $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Маємо:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Охарактеризуйте представлене доведення.

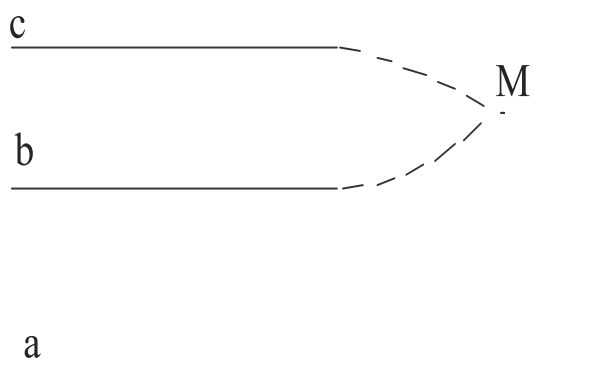
А	Синтетичне, пряме, цільне, дедуктивне.
Б	Аналітичне, непряме, по частинах, індуктивне.
В	Синтетичне, пряме, по частинах, індуктивне.
Г	Аналітичне, пряме, по частинах, індуктивне.

2. *Теорема.* Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Доведення: Нехай $b \parallel a$ і $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а, отже, перетинаються в деякій точці M . Тоді виходить, що через точку M проходять дві прямі, паралельні

прямій a , що суперечить аксіомі паралельних прямих. Значить, припущення невірне, а вірно, що $b \parallel c$.



Охарактеризуйте представлене доведення.

А	Синтетичне, непряме, по частинах, дедуктивне.
Б	Синтетичне, непряме, ціле, дедуктивне.
В	Аналітичне, непряме, по частинах, індуктивне.
Г	Аналітичне, пряме, по частинах, індуктивне.

3. Дано твердження: «Вертикальні кути рівні». Чим воно є?

А	теоремою - властивістю
Б	теоремою - ознакою
В	аксіомою
Г	означенням

4. Дано справедливе твердження: «Сума суміжних кутів дорівнює 180° ». Переформулюйте його за допомогою слова «достатньо», не порушивши його вірності.

А	Для того, щоб сума суміжних кутів дорівнювала 180° , достатньо, щоб вони були рівні
Б	Якщо градусні міри двох кутів в сумі складають 180° , цього

	достатньо, щоб вони були суміжними
В	Для того, щоб кути були суміжними, достатньо, щоб їх сума дорівнювала 180°
Г	Для того, щоб сума кутів дорівнювала 180° , достатньо, щоб вони були суміжними

5. «Через будь – які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна».

Чим може бути таке математичне речення?

А	Аксіомою або означенням
Б	Аксіомою або теоремою
В	Теоремою або означенням
Г	Це неправильне математичне твердження

6. Оберіть таке твердження, для якого обернене твердження є хибним.

А	Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.
Б	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
В	У паралелограма протилежні сторони і кути рівні.
Г	Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.

7. Яке з тверджень є вірним?

А	Оскільки у чотирикутника дві сторони паралельні, а дві інші рівні, то цей чотирикутник - паралелограм
Б	Центр симетрії трапеції - точка перетину його діагоналей
В	Існує чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні, однак він не є ромбом
Г	У рівнобедреному трикутнику зі сторонами 3 см і 7 см, основа дорівнює 7 см.

8. Якій з заданих теорем еквівалентна теорема, що має структуру «Якщо p , то q »?

А	Б	В	Г
«Якщо не p , то q »	«Якщо не p , то не q »	«Якщо q , то не p ».	«Якщо не q , то не p ».

9. Яку із представлених логічних структур має теорема: «Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні».

А	$(\forall x \in M)(A_1(x) \wedge A_2(x) \Rightarrow B(x))$
Б	$(\forall x \in M)(A_1(x) \vee A_2(x) \Rightarrow B(x))$
В	$(\forall x \in M)(\exists y): A(x; y) \Rightarrow B(x; y)$
Г	$(\forall x \in M)(A_1(x) \wedge A_2(x) \Rightarrow B_1(x) \wedge B_2(x))$

10. Яке твердження стане невірним, якщо у ньому слово «пряма» замінити словом «площина»?

А	Дві прямі паралельні, якщо кожна з них паралельна третій прямій.
Б	Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна деякій площині, то і інша пряма перпендикулярна цій площині
В	Через будь-яку точку можна провести пряму, перпендикулярну площині і притому тільки одну
Г	Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і іншій прямій

11. Теорема записана у вигляді «Якщо А, то В». Умова А є:

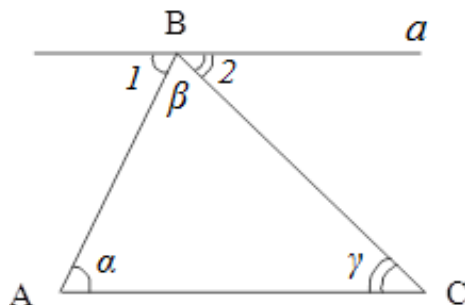
А	необхідною для В
Б	достатньою для В

В	необхідною і достатньою для В
Г	інша відповідь

12. Які з тверджень не є вірними?

А	Паралелограм з діагоналями $\sqrt{6}$ см, $\sqrt{10}$ см і стороною 4 см є ромбом
Б	Існує трикутник зі сторонами $c = 0,3$ см, $b = 0,8$ см і $\sin C = 0,4$
В	Діаметр, що перпендикулярний до хорди, поділяє її навпіл.
Г	Будь-які два кола подібні між собою

13. Які теоретичні відомості використані при доведенні теореми про суму кутів трикутника за даною опорною схемою?



1) Допоміжна побудова:

$$a \parallel AC, B \in a$$

⇓

$$2) \angle 1 + \beta + \angle 2 = 180^\circ$$

⇓

$$3) \angle 1 = \alpha, \angle 2 = \gamma$$

⇓

$$4) \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

А	Величина розгорнутого кута, ознака паралельних прямих.
Б	Величина розгорнутого кута, властивість паралельних прямих.
В	Аксиома паралельних прямих, величина розгорнутого кута,

	властивість паралельних прямих.
Г	Аксіома паралельних прямих, властивість паралельних прямих.

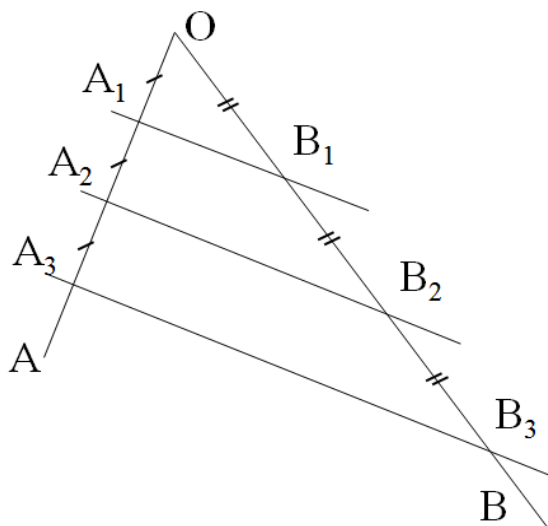
14. Яке твердження є істинним?

А	Формула для обчислення площі ромба $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, де d_1 і d_2 – діагоналі, є узагальненням формули для обчислення площі паралелограма $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \gamma$, де d_1 і d_2 – діагоналі, γ – кут між ними.
Б	Теорема Піфагора є узагальненням теореми косинусів.
В	Теорема синусів є узагальненням теореми Піфагора.
Г	Теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.

15. Теорема Фалеса.

Дано: $\angle AOB$, $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Довести: $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$



Які теоретичні відомості використані при доведенні теореми Фалеса методом від супротивного за даною опорною таблицею?

I. $OB_1 = B_1B_2$ (т. B_1 – середина OB_2) -?	II. $B_1B_2 = B_2B_3$ -?
1) Припустимо	
т. C_1 – середина OB_2	т. C_2 – середина B_1B_3
2) A_1C_1 – середня лінія $\triangle A_2OB_2$ $\Downarrow$ $A_1C_1 \parallel A_2B_2$	2) A_2C_2 – середня трапеції $A_3A_1B_1B_3$ $\Downarrow$ $A_2C_2 \parallel A_3B_3$
3) Через т. A_1 / т. A_2 проведені дві прямі паралельні третій (протиріччя)!!!	
4) $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$	

А	Означення та властивості середньої лінії трикутника, аксіома паралельних прямих.
Б	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
В	Властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
Г	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих

16. «Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180° ».

Представлене твердження є:

А	Теоремою – ознакою вписаного чотирикутника
Б	Теоремою – властивістю вписаного чотирикутника
В	Невірним математичним твердженням
Г	Критерієм вписаного чотирикутника

17. Яке з тверджень є істинним?

А	Якщо рівняння $f(x)=g(x)$ помножити або поділити на один і той самий вираз $\varphi(x)$, який не дорівнює нулю, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.
Б	Якщо обидві частини рівняння $f(x)=g(x)$ помножити або поділити на вираз $\varphi(x)$, який не дорівнює нулю, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.
В	Якщо обидві частини рівняння $f(x)=g(x)$ помножити або поділити на один і той самий вираз $\varphi(x)$, який має смисл при всіх x із області визначення вихідного рівняння, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.
Г	Якщо обидві частини рівняння $f(x)=g(x)$ помножити або поділити на один і той самий вираз $\varphi(x)$, який має смисл при всіх x із області визначення вихідного рівняння і ніде в цій області визначення не обертається в нуль, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.

18. Яке з тверджень є хибним?

А	Якщо обидві частини нерівності піднести до одного і того самого натурального степеня, і при цьому залишити знак нерівності без змін, то одержана нерівність буде рівносильна даній.
Б	Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і

	той самий вираз $\varphi(x)$, який при всіх значеннях x із області визначення вихідної нерівності приймає тільки додатні значення, і при цьому залишити знак нерівності без зміни, то одержана нерівність буде рівносильною даній.
В	Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і той самий вираз $\varphi(x)$, який при всіх значеннях x із області визначення вихідної нерівності приймає тільки від'ємні значення, і при цьому замінити знак нерівності на протилежний, то одержана нерівність буде рівносильна даній.
Г	Якщо до обох частин нерівності додати одну і ту саму функцію $\varphi(x)$, яка визначена при всіх x із області визначення вихідної нерівності, і при цьому залишити знак нерівності без зміни, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

19. Розглянемо рівняння: $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$.

Розв'язання: $3x+4=x-2$, звідки $x=-3$. Однак перевірка показує, що -3 не є коренем вихідного рівняння.

Відповідь: $\emptyset$.

В чому причина появи стороннього кореня?

А	Невірно застосовано теорему про рівносильність рівнянь
Б	Розширення області визначення
В	Звуження області визначення
Г	Розв'язання невірне

20. Оберіть невірне твердження:

А	Для того, щоб трапеція була рівнобедреною, необхідно і достатньо, щоб вона була вписана в коло
Б	Якщо паралелограм вписаний в коло, то він є прямокутником
В	В ромб можна вписати коло, тільки якщо він квадрат

Г	Якщо в паралелограм вписане коло, то він є ромбом
---	---

21. Розглянемо софізм: *Сума будь-яких двох однакових чисел дорівнює нулю.*

«Доведення»: доведемо, що $a+a=0$.

1) Нехай $a=x$.

2) Помноживши обидві частини цієї рівності на $-4a$, де $a \neq 0$, дістанемо:
 $-4ax = -4a^2$, або $-4ax + 4a^2 = 0$.

3) Додамо до обох частин рівності x^2 , тоді $x^2 - 4ax + 4a^2 = x^2$.

4) Або $(x-2a)^2 = x^2$.

5) Звідки $x-2a=x$.

6) Але оскільки $x=a$, то $a-2a=a$, тобто $-a=a$.

7) Остаточно: $a+a=0$.

На якому кроці міркувань припущено помилку?

А	Б	В	Г
На 6)	На 2)	На 5)	На 4)

Ключ до розв'язання тестових завдань

1 – В; 2 – Б; 3 – А; 4 – Г; 5 – Б; 6 – Г; 7 – В; 8 – Г; 9 – А; 10 – В; 11 – Б; 12 - Б;
13– В; 14 – Г; 15 – Г; 16 – Б; 17 – Г; 18 – А; 19 – Б; 20 - В; 21 – В.

Висновки

Ключовим елементом методичної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних спеціальностей, їх здатності проєктувати дидактичний вимір сучасного шкільного курсу математики, є підготовленість до навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження.

Будучі інваріантом загальної методології навчання математики, репрезентована в навчальному посібнику методика увиразнює сучасну інтерпретацію функційної ролі логіко-аргументаційних механізмів у формуванні математичної компетентності учнів.

Матеріал навчального посібника збагачує систему методичної підготовки майбутніх учителів природничо-математичних спеціальностей, увиразнюючи сучасні дидактичні контури таких інваріантів: 1) усвідомлення майбутніми вчителями математики функційної ролі та принципової значущості формування в учнів культури доказових міркувань; 2) глибоке розуміння ролі та змістової сутності пропедевтики навчання учнів доводити математичні твердження та систематизація вмінь її здійснювати; 3) набуття студентами глибоких та міцних знань (зокрема логічних основ шкільного курсу математики, методів доведень теорем, принципів, методів, прийомів навчання школярів готових доведень та самостійного пошуку учнями доведень математичних тверджень) та формування системних вмінь їх реалізовувати; 4) дотримання майбутніми вчителями математики логіки та етапності роботи з теоремами та їх доведеннями, активізація творчого підходу до можливих шляхів їх реалізації; 5) усвідомлення майбутніми вчителями значущості та доцільності застосування різноманітних способів доведень теорем на уроках математики, формування вмінь їх реалізовувати з правильної методичної позиції; 6) набуття майбутніми учителями математики практичного досвіду правильної організації вивчення учнями математичних тверджень та алгоритмів їх доведень в курсах алгебри та геометрії (під час практичних занять, семінарів, лабораторних робіт,

конференцій, педагогічної практики тощо); 7) урізноманітнення викладачем фахових дисциплін комплексу методів, засобів, розмаїття форм організації навчальної (дидактичної, практичної, індивідуальної) діяльності студентів, зокрема активізація інформаційно-цифрових, інноваційних інтерактивних технологій, завдань в тестовій формі, дослідницько-зорієнтованих та проблемних завдань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабенко С. П. Уроки геометрії. 7 клас. Харків : Вид. група «Основа», 2007. 208 с.
2. Бевз Г.П. Доведення від супротивного (геометрія). *Математика в школах України*. 2006. №1. С. 6-9.
3. Бурда М. І. Компетентнісна орієнтація змісту шкільних підручників з математики. *Проблеми сучасного підручника*: зб. наук. праць / за заг.наук. ред. О. М. Топузова. Київ : Педагогічна думка, 2014. Вип. 14. С. 78 –85.
4. Геометрія. Карти знань. 7-8 класи : зошит з друкованою основою до зошита «Геометрія» / І. В. Гавриш, С. О. Доценко, О. А. Горьков, С. Б. Скиба. Харків : Інтелект України, 2022. 40 с.
5. Єршова А., Голобородько В., Крижановський О. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2024. 288 с.
6. Єршова А., Голобородько В., Крижановський О. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2016. 256 с.
7. Жовнір Я. М. 500 задач методики викладання математики. Київ : Центр навчальної літератури, 2007. 112 с.
8. Істер О. С. Математика. 6 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів. Київ : Генеза, 2014. 296 с.
9. Коростіянець Т. П., Нєдзялкова К. В. Самостійна робота студентів в умовах дистанційного навчання. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова*. Серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. Київ, 2021. Вип. 84. Т. 1. С. 84 – 88.
10. Коростіянець Т. П., Нєдзялкова К. В. Підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти. *Актуальні питання*

- гуманітарних наук : міжвуз. зб. наук. праць молодих вчених Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Дрогобич, 2020. Вип. 31. Т. 3. С. 249 – 258.
11. Коростіянець Т. П., Недялкова К. В. Вдосконалення методичної підготовки майбутніх учителів математики через використання ситуаційних задач. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова*. Серія 5 Педагогічні науки: реалії та перспективи". Вип. №75, м. Київ, 2020 р. - С.111-115.
12. Коростіянець Т. П., Недялкова К. В. Підготовка майбутніх учителів математики до формування понять в учнів: психолого-дидактичний аспект. *Математична освіта: минуле, сьогодення, майбутнє, до 100-річчя від дня народження О. Ф. Семеновича*: монографія / М. І. Бурда та ін.; за ред. Н. А.Тарасенкової. Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2020. С. 156–162.
13. Кушнір І. А. Геометрія. Школа Бойового мистецтва. Навчальний посібник для учнів 7 – 9 класів. Київ : Факт, 2001. 232 с.
14. Матяш О. І. Формування методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики: дис... д-ра пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Ольга Іванівна Матяш – Київ, 2014. 568 с.
15. Медяник А. І. Учителеві про шкільний курс геометрії. Київ : Рад. шк., 1988.
16. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2024. 272 с.
17. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 304 с.
18. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням

- математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 224 с.
19. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Математика : підруч. інтегров. курсу для 7 кл. закладів загальної середньої освіти (у двох част.) : Част. 1. Харків : Гімназія, 2024. 320 с.
20. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Математика : підруч. інтегров. курсу для 7 кл. закладів загальної середньої освіти (у двох част.) : Част. 2. Харків : Гімназія, 2024. 336 с.
21. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 512 с.
22. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 304 с.
23. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 272 с.
24. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 240 с.
25. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2018. 144 с.
26. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 11 кл. : профільний рівень : збірник самостійних і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2019. 64 с.

27. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Геометрія. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2018. 112 с.
28. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 368 с.
29. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
30. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 224 с.
31. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 304 с.
32. Мерзляк А. Г. Математика: підруч. для 5 кл. загальноосв. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2013. 352 с.
33. Мерзляк А. Г. Математика: підручник для 6 класу / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2006. 304 с.
34. Методика навчання математики. Загальна методика: Практикум для організації самостійної роботи студентів: У 4-х ч. / Н. А. Тарасенкова та ін.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : ЧДУ ім. Б. Хмельницького, 2004.
35. Насенко О. Доведення методом від супротивного у шкільному курсі алгебри. *Математика*. 2006. №21. С. 6–8.

- 36.Науково-методичні засади формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти : монографія / ДЗ «ПНПУ ім. К. Д. Ушинського»; за ред. К. В. Недялкової. Одеса : Видавець ФОБ Бойчук, 2021. 279 с.
- 37.Недялкова К. В. Формування складника методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження. *Педагогічні науки*: зб. наук. праць. Херсон, 2020. Вип. 90. С. 110–118.
- 38.Недялкова К. В., Тумбрукакі А. В. Формування вмінь майбутніх учителів математики оцінювати навчальні досягнення учнів: методичні рекомендації. Одеса: ТОВ «Рекламсервіс», 2020. 36 с.
- 39.Недялкова К. В. Загальна методика навчання математики: практичний курс. Навчальний посібник. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.
- 40.Недялкова К. В., Кушнірук А. С., Тумбрукакі А. В. Збірник тестових завдань з шкільного курсу математики і методики його навчання. Одеса: ТОВ «Рекламсервіс», 2020. 72 с.
- 41.Недялкова К. В., Тумбрукакі А. В. Застосування технології QR – кодування в процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики. *Актуальні питання природничо – математичної освіти*. 2019. Вип. 2(14). С. 125–132.
- 42.Пометун О. І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: наук.-метод. посібн. Київ : Видавництво А.С.К., 2004. 192 с.
- 43.Прус А. В., Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир : «Рута», 2011. 388 с.
- 44.Рабінович Ю. М. Геометрія 7–9: задачі і вправи на готових кресленнях. Київ : КІМО, 2001. 64 с.
- 45.Середа В. Ю. Математична логіка в шкільному курсі математики. Київ : Радянська школа, 1984. 189 с.

46. Скафа О. І., Тутова О. В. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник. Донецьк : вид-во «Вебер», 2009. 320 с.
47. Скворцова С. О., Недялкова К. В. Математика : підруч. для 6 кл. закл. загал. серед. освіти (у 2-х ч.) Харків : Вид-во «Ранок», 2023. 448 с.
48. Скворцова С., Недялкова К. Методичні підходи, реалізовані у підручнику з математики для учнів 6 класів (за підручником «Математика. 6 клас» Світлани Скворцової та Катерини Недялкової). *Український педагогічний журнал*. Інститут педагогіки НАПН України. № 3. Київ, 2023. С. 205 – 215.
49. Слепкань З. І. Методика навчання математики. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
50. Соколенко Л. О. Наукові основи шкільного курсу математики : Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.
51. Тарасенкова Н. А. Математика. 5 кл. : підруч. для закладів загальної середньої освіти / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.П. Бочко, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. Вид. 2-ге, доопр. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 240 с.
52. Токар Н. Г. Урок однієї теореми. Конкурс ерудитів. *Математика в школах України*. 2005. №3. С. 21-23.
53. Фурман А. В. Проблемні ситуації в навчанні. Київ : Рад.школа, 1991. 102 с.
54. Чашечникова О. С. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики. Розвиток математичних здібностей. Суми : ВВП "Мрія". 2014. 210 с.
55. Шкільний О., Нелін Є., Милянник А., Простакова Ю. Математика : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Частина 1. Харків : Ранок, 2024. 317 с.

- 56.Школьний О., Нелін Є., Милянник А., Простакова Ю. Математика : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Частина 2. Харків : Ранок, 2024. 301 с.

Електронні ресурси

1. Переліки підручників, рекомендованих МОН на 2024-25 навч. рік. URL: <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/>
2. Програма з математики для 5–9 класів. URL: <https://ru.osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/>
3. Програми з математики для старшої школи. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
4. Ресурс підручників (електронні версії). URL: <https://pidruchnik.com.ua>
5. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti>
6. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт. URL : <https://library.pdpu.edu.ua/>
7. Концепція НУШ. URL : <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
8. Модельні навчальні програми. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoyi-ukrayinskoyi-shkoli-zaprovadzhuysya-poetapno-z-2022-roku>; <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>)

Додаток

QR – словник понятійного апарату досліджуваної теми



Дедукція



Аналіз



Доведення



Індукція



Методи доведення теорем



Мислення



Синтез



Узагальнення



Теорема



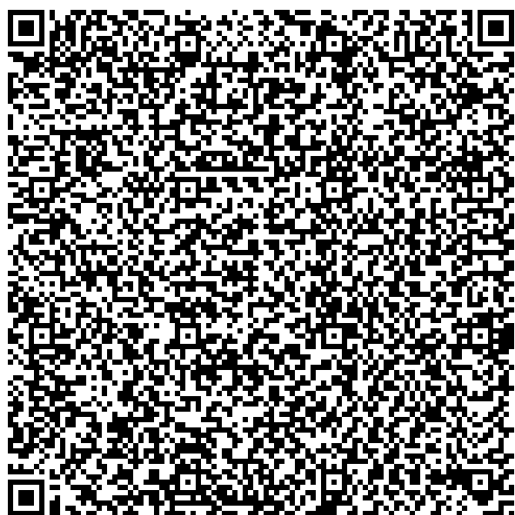
Теза



Навчання учнів доводити твердження



Метод повної індукції



Аргумент



Софізм

Навчальне видання

НЄДЯЛКОВА Катерина Василівна, кандидат педагогічних наук,

доцент, доцент кафедри математики і методики її навчання

ІВАНОВА Світлана Володимирівна, кандидат педагогічних наук,

доцент, доцент кафедри математики і методики її навчання

ТУМБРУКАКІ Алла Валеріївна, старший викладач кафедри

математики і методики її навчання

*Методика навчання здобувачів середньої освіти
доводити математичні твердження*

Навчальний посібник

Одеса

2025