

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад:

**Південноукраїнський національний педагогічний
університет**

імені К.Д. Ушинського

Фізико-математичний факультет

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до практичних занять
з математичного аналізу**

ТЕМА: « ЧИСЛОВІ РЯДИ »

Одеса - 2018

Укладачі:

Урум Г. Д. , к. техн. н., доцент кафедри вищої математики і статистики
ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Олефір О. І., к. ф.-м. н., старший викладач кафедри вищої математики і
статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Рецензенти:

Третьяк О. І., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики і
статистики ПНПУ ім. К. Д. Ушинського

Васильєва Н. С. к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики ОДАБА

Рекомендовано до друку засіданням кафедри вищої математики і статистики
ПНПУ імені К. Д. Ушинського

протокол № від « » _____ 2018 року

Ухвалено до друку радою ОПДПУ імені К. Д. Ушинського

протокол № від « » _____ 2018 року

Зміст

Вступ	4
1. Числовий ряд та його сума	6
2. Основні властивості числових рядів.....	8
3. Достатні умови збіжності знакододатних рядів	10
4. Вправи.....	16
5. Знакозмінні ряди.....	19
6. Вправи.....	25
Список використаної літератури	26

ВСТУП

Методичні рекомендації до практичних занять з математичного аналізу на тему «Числові ряди» складено на основі галузевого стандарту підготовки бакалавра і навчального плану для студентів 2 курсу 014.04 Середня освіта (Математика), ОС бакалавр, фізико-математичного факультету ПНПУ імені К. Д. Ушинського, які вивчають навчальну дисципліну «Математичний аналіз».

В курсі математичного аналізу ряди є потужним засобом вивчення функцій та сильним обчислювальним апаратом, який дозволяє знаходити їх значення, обчислювати інтеграли та розв'язувати інші прикладні задачі. В багатьох випадках точне виконання вказаних математичних операцій виявляється досить важким чи неможливим. У цих випадках можна одержати наближений розв'язок за допомогою рядів з будь-якою, достатньою для практичного використання, точністю. Ряди являють собою простий і довершений інструмент математичного аналізу, у тому числі, і для розв'язувань диференціальних рівнянь. Тому знайомство студентів з теорією рядів – обов'язкова частина математичної освіти.

Ряди відіграють значну роль не тільки в математиці, але і в економіці, інженерії, геодезії, хімії, фізиці, астрономії, біології, архітектурі, естетиці, теорії музики, криптографії тощо.

В сучасній строгій теорії рядів основними задачами є:

- визначення поняття суми нескінченної послідовності доданків;
- встановлення ознак, за якими можна судити, чи має даний ряд суму;
- виділення класів рядів, з якими можна поводитися як зі скінченими сумами;
- виведення формул, які дозволяють представити задані функції у вигляді сум рядів, що складаються з порівняно простих функцій;
- інші прикладні застосування рядів (наближене обчислення рядів, розв'язання диференціальних рівнянь, обчислення границь, обчислювання

визначених інтегралів тощо).

Студенти, які завершили вивчення даного курсу, мають уміти класифікувати тип ряду; знати основні властивості ряду, необхідні і достатні ознаки збіжності ряду при застосуванні до різних класів рядів, алгоритми розкладання функції в степеневий ряд; володіти практичними навичками застосування рядів до обчислення значень функцій, визначених інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь.

У результаті оволодіння даною темою студент повинен засвоїти основні теоретичні положення, вміти практично застосовувати отримані знання при розв'язанні задач.

Робота складається з теоретичного матеріалу, розв'язаних прикладів та прикладів для самостійної роботи.

1.Числовий ряд, його сума

Нехай дана деяка нескінченна послідовність чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Означення: Вираз виду $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) називають *числовим рядом*.

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ називають *членами ряду*, a_n - *n-м членом ряду*.

Щоб задати ряд (1), досить задати функцію натурального аргументу $a_n = f(n)$ обчислення n – го члена ряду за його номером n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Суму n перших членів ряду (1) позначають через S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (2)$$

ї називають *n-ою частинною сумою ряду*.

Означення: Якщо послідовність частинних сум S_n ряду збіжна і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то число S називають *сумою цього ряду*, а ряд називають *збіжним*. Використовують символічний запис $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо послідовність S_n скінченної границі не має, то ряд називають *розбіжним*.

Приклад 1. Дослідити на збіжність наступні числові ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} -1^{n-1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n+1}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n.$$

Розв'язання.

1) Розглянемо послідовність частинних сум даного ряду: $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots, S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0, \dots$. Ця послідовність границі не має, тому ряд розбіжний.

2) Запишемо n -й член ряду u_n у вигляді: $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Знайдемо n -у частинну суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \dots + \frac{1}{n \cdot n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то ряд є збіжним і його сума дорівнює одиниці.

3) Даний ряд є сумою членів геометричної прогресії з першим членом a та знаменником q . При $q \neq 1$ сума n членів геометричної прогресії

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}. \text{ При } |q| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}, \text{ оскільки у цьому випадку } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

тому ряд збіжний і його сума дорівнює $\frac{a}{1 - q}$. При $q > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$, тому

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ і ряд розбіжний. При $q < -1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ не існує, не існує також і

границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, ряд розбіжний. При $q = 1$ маємо ряд $a + a + a + \dots$ з частинною

сумою $S_n = na$. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, тому у цьому випадку ряд розбіжний. При

$q = -1$ маємо ряд $a - a + a - a + \dots$. Тут при парному номері $n = 2k$

$S_n = S_{2k} = 0$, для непарного номера $n = 2k - 1 \quad S_n = S_{2k-1} = a$, тому границя

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує і ряд розбіжний.

Отже, ряд, що є сумою членів нескінченної геометричної прогресії, є збіжним при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

2. Основні властивості числових рядів

Основні властивості числових рядів сформулюємо у вигляді наступних теорем.

Теорема 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і має суму S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot u_n$ (α – стала) також збіжний і його сума дорівнює αS .

Теорема 2. Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжними і мають суми відповідно S та σ , то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm v_n$ і суми їх дорівнюють $S \pm \sigma$.

Теорема 3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і позначимо $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Величину r_n називають *n-м залишком ряду*. Його можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ після відкидання його перших n членів. Якщо ряд збіжний і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $r_n = S - S_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Справедливим є і наступне твердження.

Теорема 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним (розбіжним) тоді і лише тоді, коли збіжним (розбіжним) є його n -й залишок.

Теорема 5. (Необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Теорема 6. (Достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

Приклад 2. Дослідити на збіжність наступні ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}.$$

Розв'язання.

1) Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ необхідна умова збіжності виконана, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Отримали, що $S_n > \sqrt{n}$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, тобто ряд є розбіжним.

2) Перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0$,

тому за теоремою 6 ряд є розбіжним.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ є збіжним, оскільки це сума членів нескінченної геометричної

прогресії, знаменник якої $q = \frac{1}{5}$, $|q| < 1$.

Як свідчать приклади, з виконання необхідної умови збіжності ряду ніякого висновку про його збіжність зробити не можна. Потрібне додаткове дослідження. Звичайно воно виконується з допомогою достатніх умов збіжності ряду.

3. Достатні умови збіжності знакододатних рядів

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше використовують такі достатні умови, як ознаки порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші.

Теорема 7. (Ознаки порівняння). Нехай задано ряди з невід'ємними членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0, \forall n \in N$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n, v_n \geq 0, \forall n \in N$ і для всіх $\forall n \in N u_n \leq v_n$. Тоді:

- 1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (перша ознака порівняння);
- 2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (друга ознака порівняння).

Зазначимо, що ознаки порівняння (теорему 7) можна застосовувати і тоді, коли нерівність $u_n \leq v_n$ виконується не для всіх членів рядів, що порівнюються, а починаючи з деякого номера N . Це впливає з теореми 3. При дослідженні рядів на збіжність за допомогою ознак порівняння використовують еталонні ряди, про збіжність чи розбіжність яких наперед відомо. У якості таких рядів найчастіше використовують суму нескінченної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ та ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ є збіжним при $|q| < 1$ і розбіжним при інших значеннях знаменника прогресії q . Ряд Діріхле збіжний при $\alpha > 1$, при $\alpha \leq 1$ він розбіжний. Ряд Діріхле називають також *узагальненим гармонічним рядом*.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n + 1}$.

Розв'язання.

1) Оскільки $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ є збіжним (сума нескінченної геометричної прогресії, де $q = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ за першою ознакою порівняння також є збіжним.

2) Оскільки $\ln x < x$ при $x > 0$, то $\ln n+1 < n+1$ і $\frac{1}{\ln n+1} > \frac{1}{n+1}$. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ є розбіжним (це гармонічний ряд з вилученим першим членом), тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n+1}$ за другою ознакою порівняння також є розбіжним.

Теорема 8. (Гранична ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = a$ ($a \neq 0$, $a \neq \infty$), то ці ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^4+2n^2}{n^4+1}$$

Розв'язання.

1) Застосуємо граничну ознаку порівняння. Нехай $u_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$, $v_n = \frac{1}{n}$.

$$\text{Тоді} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} = \left\| \begin{array}{l} x = \frac{1}{n}, \\ n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{x} = \left\| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k \right\| = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний (це гармонічний ряд), тому розбіжним є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}.$$

2) Позначимо $u_n = \frac{2n+1}{n^3+2}$. Виберемо $v_n = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним, оскільки це

ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha = 2 > 1$. Знайдемо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n^3+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+n^2}{n^3+2} = 2 \neq 0. \text{ За граничною ознакою порівняння з}$$

збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_n = \frac{2n+1}{n^3+2}$.

3) Порівняння з гармонічним рядом за ознакою порівняння I тут нічого не

дає, так як $\frac{1}{n+\ln n} < \frac{1}{n}$, і ніякого висновку про збіжність даного ряду зробити

неможливо. Скористаємось ознакою порівняння II з тим же гармонічним

рядом. Маємо $a_n = \frac{1}{n+\ln n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, а значить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n+\ln n}{n}} = 1 \neq 0$$

$$4) \text{ Так як } \ln \frac{n^4+2n^2}{n^4+1} = \ln \left(1 + \frac{2n^2-1}{n^4+1} \right) \sim \frac{2n^2-1}{n^4+1} \sim \frac{2}{n^2}$$

То даний ряд поводить себе (в сенсі збіжності) так, як і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$.

Останній збігається як узагальнений гармонічний з показником $p = 2 > 1$.

Значить, збігається і даний ряд.

Теорема 9. (Ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то:

1) ряд збіжний при $l < 1$;

2) ряд розбіжний при $l > 1$.

3) Зазначимо, що у випадку, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, ряд може бути як збіжним, так

і розбіжним. У цьому випадку ознаку Д'Аламбера застосувати не можна, потрібно використовувати інші ознаки.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n \cdot (n)!}$$

Розв'язання.

1) Для даного ряду $u_n = \frac{n^3}{3^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{3n^3}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3n^3} = \frac{1}{3} < 1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

2) Тут $u_n = \frac{n!}{5^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} = \frac{n+1}{5}$. Оскільки границя

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty > 1$, то за ознакою Д'Аламбера ряд розбіжний.

3) $u_n = \frac{n^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Використаємо ознаку Д'Аламбера. Маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot 1 = e > 1.$$

Отже, ряд є розбіжним.

4) Застосуємо до даного ряду ознаку Даламбера, то $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Таким

чином, ознака Даламбера відповіді не дає. Інтегральну ознаку Коші тут

застосувати досить важко, тому що загальний член ряду містить факторіали. Спробуємо застосувати ознаку порівняння I. Загальний член

$$\text{ряду має вигляд: } a_n = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n}.$$

Звеличивши у кожному множнику починаючи з другого чисельники й знаменники на одиницю та враховуючи, що $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$ (оскільки

$4n^2 - 1 < 4n^2$), отримуємо нерівність

$$a_n < \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{n^2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) (n+1)}{n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n}} = \frac{1}{n^2 a_n (n+1)}$$

Так як $2n+1 > n$, то й $a_n < \frac{1}{n^3 a_n}$, звідки $a_n^2 < \frac{1}{n^3}$, й тоді $a_n < \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Але ряд з загальним членом $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ збігається як гармонічний з

показником $p = \frac{3}{2} > 1$. Значить, за ознакою порівняння I, збігається і даний ряд.

Теорема 10. (Радикальна ознака Коші). Якщо для ряду з додатними

членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n}$.

Розв'язання.

1) Загальний член ряду $u_n = \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^{2n}$, тоді $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^{2n \cdot \frac{1}{n}} = \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^2$,

отже $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^2 = 2^2 = 4 > 1$.

За радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^{2n}$ є розбіжним.

Зауважимо, що розбіжність даного ряду нескладно встановити за допомогою необхідної умови збіжності ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, отже, ряд розбіжний.)

2) Для даного ряду $u_n = \sin^n \frac{\pi}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0 < 1$. За радикальною

ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n}$ є збіжним.

Теорема 11. (Інтегральна ознака Коші). Нехай задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, члени

якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1; +\infty)$. Тоді цей ряд збіжний, якщо збіжним є невласний

інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл є розбіжним.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Розв'язання.

1) Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього візьмемо функцію

$f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$, $x \in [1; +\infty)$. Заданий ряд можна записати у вигляді:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+5} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+5} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{d(x^2+5)}{x^2+5} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln(x^2+5) \Big|_1^M = +\infty.$$

Цей інтеграл є розбіжним, отже розбіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+5}$.

2) Застосовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідимо на збіжність ряд

Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1; +\infty)$. Розглянемо

відповідний невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_1^M = \begin{cases} 0, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже, ряд Діріхле збігається при $\alpha > 1$ і він розбіжний при $\alpha < 1$. При $\alpha = 1$

інтеграл набуває вигляду: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \|x\|_1^M = +\infty$.

Отже, при $\alpha = 1$ ряд Діріхле є розбіжним. Таким чином, цей ряд збігається при $\alpha > 1$ і є розбіжним при $\alpha \leq 1$.

Вправи для самостійної роботи:

I. Знайти суми наступних рядів:

1. $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$

2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} + \dots$

3. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \dots$

4. $\left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{18}\right) + \dots + \left(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}}\right) + \dots$

5. $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$

6. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n+1)} + \dots$

7. $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} + \dots$

8. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 5n - 6}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2 + 7n - 12}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n - 3}$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 15}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{26n^2 + 12n - 35}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+1)(n+5)}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+2)(n+3)}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$$

II. Досліджувати на збіжність ряди з ознакою Даламбера

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(n+1)!}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \dots (n-4)}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{n^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \dots (n-3)}{2 \cdot 6 \dots (n-2)}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{3^n n!}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (n+2)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 7^{n+1}}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+4)3^n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{1 \cdot 4 \cdot (n+1)}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n!)^2}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n+1) \dots (n+1)}{(n-1)!}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n+2)}{2^n (n+1)!}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n!)^2 4^{3n}}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+1)!}{(n!)^2}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{2^{n+5} (n^2 + 1)}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$19. \sum n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2 + 1)3^n}}{n \cdot 2^{n/2}}$$

III. Досліджувати на збіжність ряди з ознакою Коши

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n!)^m}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^3}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^2+3n+1}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{(n(n+1))^{1/2}}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{n/2} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n/3}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \quad 16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2} \quad 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (e+1)}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e+1)^{n^2}}{n^{n^2} 3^n} \quad 19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n (e+1)}$$

IV. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність такі ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n^2}{n+1}} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4^n} \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4^n} \right)}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}} \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sqrt{2} + \sin \sqrt{n})}{2^n + n}$$

5. Знакозмінні ряди

Ряд називають *знакозмінним*, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. Знакопочережні ряди є окремим випадком знакозмінних рядів.

Розглянемо довільний знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де числа u_n можуть мати довільний знак. Поряд з цим розглянемо ряд, утворений з модулів членів цього ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Для знакозмінних рядів справедлива наступна ознака збіжності.

Теорема 12. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ є збіжним, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

З цієї теореми випливає, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності рядів з додатними членами.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

Розв'язання.

Даний ряд є знакозмінним, оскільки знаки його членів залежать від знаку виразу $\cos n\alpha$. Складемо ряд з модулів членів заданого ряду. Отримуємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^2}. \text{ Оскільки } |\cos n\alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha \in R, \forall n \in N, \text{ то } \frac{|\cos n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжним (це ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha = 2 > 1$), то за ознакою

порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$ є збіжним. За теоремою 13 збіжним є і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}.$$

Теорема 12 є лише достатньою, але не необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду. Існують знакозмінні ряди, які є збіжними, проте ряди,

складені з модулів їх членів, розбігаються. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n-1}}{n}$ за

ознакою Лейбніца є збіжним, а ряд, складений з його модулів, тобто

гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є класичним прикладом розбіжного ряду. У зв'язку з цим всі збіжні знакозмінні ряди можна розділити на абсолютно збіжні та умовно збіжні.

Означення. Знакозмінний ряд називають *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є ряд, складений з модулів його членів.

Означення. Якщо знакозмінний ряд є збіжним, а ряд, складений з модулів його членів розбігається, то такий ряд називають *умовно збіжним*.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n-1}}{n}$ – умовно збіжний.

Розмежування рядів на абсолютно та умовно збіжні є досить істотним. Абсолютно збіжні ряди мають важливі властивості скінченних сум, тоді як абсолютно збіжні ряди таких властивостей не мають. Зокрема, абсолютно збіжні ряди мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також є абсолютно збіжним і має ту ж суму, що й вихідний ряд. Умовно збіжні ряди такої властивості не мають: від перестановки їхніх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитися розбіжний ряд.

Дослідження знакозмінного ряду на збіжність розпочинають, як правило, з дослідження ряду на абсолютну збіжність, тобто з дослідження на збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

При цьому використовують ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами. Якщо останній ряд збігається, то роблять висновок, що заданий ряд збігається абсолютно і дослідження завершене. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ виявляється розбіжним, то дослідження продовжується, але уже безпосередньо ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Серед ознак збіжності знакозмінних рядів найбільш простою з точки зору перевірки її умов є ознака Лейбніца, але застосовна вона до рядів, у яких знаки змінюються по черзі.

Ознака Лейбніца. Якщо послідовність додатних чисел $\{u_n\}$ не зростаюча і нескінченно мала, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ збігається, причому $\forall n$

$$|s_n - s| < u_{n+1} \text{ де } s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k, \text{ } s - \text{сума ряду.}$$

Зазначимо, що дослідження послідовності $\{u_n\}$ на монотонність інколи значно спрощується, якщо можна побудувати функцію f таку, що $\forall n$ $f(n) = u_n$, і дослідити функцію $f'(x)$ на знак для достатньо великих x .

Зазначимо, також, що монотонність послідовності $\{u_n\}$ може виконуватись не з першого члена, а починаючи з деякого номера n_0 . Проте, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд збігається (відкидання скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність).

Наступні дві ознаки передбачають подання членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ у вигляді

$$\omega_n = u_n v_n \text{ і дослідження послідовності } \{u_n\} \text{ і ряду } \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Ознака Діріхле. Якщо послідовність (a_n) монотонна і нескінченно мала, а послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ обмежена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ збігається.

Ознака Абеля. Якщо послідовність (a_n) монотонна і обмежена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ збігається.

Приклад 9. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\ln n}{2^n}$ збігається абсолютно.

Розв'язання.

Заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\ln n}{2^n} = 0 - \frac{\ln 1}{4} + \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{16} + \dots$ є знакозмінним рядом.

До ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\ln n}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$ застосуємо ознаку Даламбера.

$$\text{Маємо} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{2 \ln n} = \frac{1}{2}$$

Отже, ряд складений з абсолютних величин членів заданого ряду, збігається. Тому заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 10. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \arccos \frac{n+1}{2n+1} \arctg \frac{n+1}{n^3+2}$

абсолютно збіжний.

Розв'язання.

Очевидно, що заданий ряд знакозмінний, так як $(\cos 1 > 0, \cos 2 < 0, \cos 3 < 0, \cos 4 < 0, \cos 5 > 0, \dots)$.

$$\text{Члени ряду} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \cos^3 n \arccos \frac{n+1}{2n+1} \arctg \frac{n+1}{n^3+2} \right| \quad (*)$$

не перевищують відповідних членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{n+1}{2n+1} \arctg \frac{n+1}{n^3+2} \quad (**)$$

Останній ряд порівняємо із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3n^2}$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{n+1}{2n+1} \arctg \frac{n+1}{n^3+2} \div \frac{\pi}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\pi} \arccos \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{\arctg \frac{n+1}{n^3+2}}{\frac{n+1}{n^3+2}} \cdot \frac{n^3+n^2}{n^3+2} = 1,$$

то ряд (**), а отже, і ряд (*) збігаються. Це й означає, що заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 11 . Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+4)}{n(2+\sqrt{n^2+3})}$ збігається умовно.

Розв'язання.

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n(2+\sqrt{n^2+3})} = 0$. Проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n(2+\sqrt{n^2+3})}$ розбігається, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, а послідовності $\frac{n+4}{n(2+\sqrt{n^2+3})}$ і

$\frac{1}{n}$ еквівалентні. Заданий ряд є рядом знаки якого по черзі змінюються, а послідовність членів є нескінченно малою. Більше того, похідна функції

$$f(x) = \frac{x+4}{x(2+\sqrt{x^2+3})} \quad f'(x) = -\frac{x^3+8x^2+8\sqrt{x^2+3}+12}{x^2(2+\sqrt{x^2+3})^2}$$

від'ємна для $x > 0$. Звідси випливає, що ця функція, а отже, і послідовність

$\frac{n+4}{n(2+\sqrt{n^2+3})}$ монотонно спадає. За ознакою Лейбніца заданий ряд

збігається, причому умовно.

Приклад 12. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ умовно збіжний.

Розв'язання.

Спочатку доведемо, що даний ряд збігається. Послідовність часткових сум

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ подаємо у вигляді

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \cos k = \frac{1}{2\sin 1} \sum_{k=1}^n 2\sin 1 \cos k = \frac{1}{\sin 1} \sum_{k=1}^n \left(\sin\left(k + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sin 1} \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin\frac{1}{2} \right) = \frac{\cos \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin 1}. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |s_n| \leq \frac{1}{\sin 1}, \end{aligned}$$

тобто є обмеженою.

Послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонна і нескінченно мала. Отже, за ознакою Діріхле заданий ряд збігається. У ряді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ n -й член оцінимо в такий спосіб:

$$\frac{|\cos n|}{n} \geq \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1 + \cos 2n}{2n}$$

Тоді кожний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ не менший відповідного члена ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2n}{2n}$. Останній ряд розбіжний як сума розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ і

збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$.

Заданий ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається. А це й означає, що заданий ряд умовно збіжний.

Приклад 13. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \arctg \frac{2n^2 + 3}{2n^2 + 1}$ умовно збіжний.

Розв'язання.

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

за ознакою Лейбніца збігається, а послідовність $\left\{\arctg \frac{2n^2 + 3}{2n^2 + 1}\right\}$ монотонна і

спадна, то за ознакою Абеля заданий ряд збігається. Доведемо, що він не є

абсолютно збіжним, тобто доведемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \arctg \frac{2n^2 + 3}{2n^2 + 1}$

розбігається.

Дійсно, послідовність його членів $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \arctg \frac{2n^2 + 3}{2n^2 + 1}$ еквівалентна

послідовності $\frac{\pi}{8\sqrt{n}}$ і ряд розбігається одночасно з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{8\sqrt{n}}$.

Вправи для самостійної роботи:

I. Довести, що задані ряди є абсолютно збіжними:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{2n+1} \right)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ln(n+1)}}{(n+1) \ln^2(n+1)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{(n+1) \sqrt{\ln^3(n+2)}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sin n+1}}{\sqrt[3]{n}} \arcsin \frac{\pi}{6n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{4}} \frac{n^n}{n! e^{n+1}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(-n)^n}{\sqrt{2n^3 + n + 1}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2}{n^3 + 4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n \ln(n+1) \ln^2(\ln(n+2))}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right) \cos n\pi$

II. Довести, що задані ряди є умовно збіжними:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln^5 n}{n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \ln(n+1)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \arctg \frac{1}{\sqrt{n}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{n+2}{n^2+4}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n+1) \ln(\ln(n+2))}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(-n)^{n+1}}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 - 2n + 3}}{n}$

III. Дослідити на збіжність знакозмінні ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n^2 + 1}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[n]{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{\pi}{4})}{\ln^2(n+1)}$

Список використаної літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. М.: - Наука, 1978. –т.2.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под. Ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1972. -472 с.
3. Запорожец Г.И. руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1961. – 404 с.
4. Каплан А.И. Практическое занятия по высшей математике. Ч.3 и 4, - Харьков: Изд. ХГУ, 1971. – 498 с.