МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д.УШИНСЬКОГО»

Факультет початкового навчання

Кафедра математики і методики її навчання

НЄДЯЛКОВА КАТЕРИНА ВАСИЛІВНА

Навчальний посібник

«Методика навчання планіметрії у 7 класі Нової української школи»

для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем

освітньо-професійних програм

«Середня освіта (Математика. Інформатика)»,
«Середня освіта (Математика. Мова і література (англійська))»,
«Середня освіта (Фізика. Математика)»

Одеса
2024

УДК: 37.016: 51 (075.8)

Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»
протокол №__ від _____

Рецензенти:

Галина Василівна Налева, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і фізики Національного університету “Одеська морська академія”

Марія Георгіївна Волкова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри фізико-математичних наук Державного університету інтелектуальних технологій і зв’язку

Нєдялкова К. В. Навчальний посібник «Методика навчання планіметрії у 7 класі Нової української школи» (для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика. Інформатика)», «Середня освіта (Математика. Мова і література (англійська))», Середня освіта (Фізика. Математика)). Одеса : Університет Ушинського, 2024. 204 с.

Навчальний посібник розроблено відповідно до освітньо-професійних програм «Середня освіта (Математика. Інформатика)», «Середня освіта (Математика. Мова і література (англійська))», Середня освіта (Фізика. Математика) та робочих програм навчальної дисципліни «Методика навчання шкільного курсу математики». Посібник підготовлено з метою ознайомлення здобувачів вищої освіти – майбутніх учителів математики з оновленими методичними підходами до навчання планіметрії у сьомому класі згідно Концепції Нової українсько школи. Навчальний посібник орієнтований на студентів, практикуючих учителів, методистів.

ЗМІСТ

Вступ

У навчальному посібнику розроблено в контексті реформування шкільної математичної освіти згідно Концепції Нової української школи, що, безумовно, актуальним. Реформування успішно здійснюється, і у 2024-2025 навальному році сьомі класи закладів загальної середньої освіти навчаються за новими Модельними навчальними програмами і новими підручниками, зокрема з планіметрії. Відтак, потребують перегляду деякі загальні педагогічні питання організації навчально-виховного процесу; також потребують дослідження методичні підходи, реалізовані в нових шкільних підручниках з метою їх впровадження в освітній процес та оновлення підходів до фахової підготовки здобувачів вищої освіти – майбутніх учителів математики.

Саме на цих аспектах зосереджено увагу авторки посібника, який реалізується курсом лекції з методики навчання планіметрії у 7 класі Нової української школи, розробленими завданнями, орієнованими як на подальший розгляд в рамках практичних занять, так і на самостійне виконання студентами.

Теоретичні аспекти проблеми розглядаються авторкою у контексті порівняльного аналізу методичних концепцій, реалізованими авторами сучасних підручників з геометрії для сьомого класу та альтернативних методик, запропонованих авторами навчальних проєктів, зокрема «Інтелект України». Окрема увага приділяється аналізу змісту Модельних програм для навчання геометрії у 7-9 класах Нової української школи, реалізації компетентнісного підходу при навчанні планіметрії у сьомому класі, на що спрямовує Концепція Нової української школи.

Логічні основи шкільного курсу геометрії

Як відомо, існує декілька видів математичних речень, що складають логічну основу математики: означення (включає в себе характеристичні властивості предмета), аксіоми (твердження, що приймаються без доведень) і теореми (твердження, справедливість якого встановлюється шляхом доведення); при цьому розрізняють теореми-властивості, теореми-ознаки, теореми існування.

- Наведіть приклади з ШКГ означень різних видів, аксіом, теорем-властивостей, теорем-ознак, теорем існування.

Як відомо, основу будь-якої науки, в тому числі і математики, складають поняття. Але не всі математичні поняття визначають. Для деяких понять не можна дати чіткого з точки зору логіки означення, адже дати означення поняттю означає з'ясувати його зміст за допомогою вже відомих понять та їх особливостей. Але на початку розвитку тієї чи іншої науки ще не буває визначених понять, тому перші поняття вводяться без означень. Їх називають *первинними, основними або неозначуваними поняттями.* Наприклад, на початку вивчення геометрії першими вводяться поняття „точка" і „пряма". Розкрити їх зміст, тобто дати означення за допомогою вже відомих понять неможливо, оскільки не про які геометричні поняття мова ще не йшла. Отже, „точка" і „пряма" – первинні поняття. Але це не означає, що нам невідомий їх зміст: ми розуміємо його інтуїтивно, із життєвого досвіду. Так, в ШКГ зміст первинних понять розкривається за допомогою опису і системи аксіом, а в наукових курсах – за допомогою системи аксіом.

Отже, опис відношень між первинними поняттями дається за допомогою аксіом. Аксіоми непрямо визначають первинні поняття настільки, що після цього їх можна використовувати у доведеннях. Тому можна говорити про непряме визначення основних понять через аксіоми. Іноді навіть говорять про аксіоматичні означення - **означення понять через систему аксіом.**

Так, наприклад, в „Основаниях геометрии" Гілберта під „точками", „прямими", „площинами" і під відношеннями „належить", „між", „дорівнює" розуміються деякі речі і відношення, відносно яких нам відомо тільки те, що ці речі і відношення задовольняють деяким аксіомам. Для перелічених речей і відношень не дається прямих означень, але можна стверджувати, що система аксіом непрямо їх визначає. Наприклад, перша група аксіом геометрії Гілберта (аксіоми приналежності) слугують непрямим означенням поняття „належить".

Цілком зрозуміло, що ШКГ не може бути аксіоматичним, строго логічним. В ШКГ не перелічуються всі основні поняття, не формулюються деякі аксіоми (хоча в неявному вигляді ми ними користуємося), не всі поняття визначаються.

Яке ж походження первинних понять?

Ці поняття введені шляхом абстракції. Натягнута струна дає уявлення про пряму. Відволікаючись від розмірів, поперечного перетину струни, неминучих нерівностей ребра лінійки, ширини та довжини отриманої лінії на папері одержуємо геометричний образ - пряму. Тому говорять, що пряма **визначена через абстракцію.**

Наприклад, ввести *поняття геометричного тіла означенням через абстракцію* можна було б так: розглянув з учнями різні предмети (шкаф, кузов вантажного автомобіля, сірникову коробку, м'яч, глобус, біл'ярдну кулю) і вказав на їх різні фізичні, хімічні ті ін. властивості, відзначаємо, що спільним для всіх цих предметів є форма (паралелепіпед і куля). Демонструючи інші предмети, утворюємо в учнів поняття про форму взагалі: звертаємо увагу на те, що різні предмети можуть мати різні розміри, займати різне положення у просторі. Після цього повідомляється, що реальні предмети, які розглядаються тільки з точки зору їх форми, розмірів та положення, називаються геометричними тілами. При цьому від учнів не слід вимагати механічного заучування означень через абстракцію.

При різних способах викладання *можливі різни системи первинних понять*. Так, поняття „пряма” вважається первинним. Але можна замінити послідовність викладення матеріалу, ввести інші первинні поняття так, щоб для поняття «пряма» можна було б дати строге означення.

- Які, на Вашу думку, поняття вважаються первинними у шкільному курсі геометрії?

Кожне означення – це деяке погодження. Ми могли б, взагалі кажучи, вільно створювати класи предметів і називати їх. Тому коли вчений вводить перші означення, немає сенсу з’ясовувати, чи вірно воно, чи ні. Можна ставити питання: чи розумно воно, доцільно обрано?

Таким чином, будь-яке математичне означення не є висловленням (відносно означення не можна сказати, істинно воно чи хибно), воно лише розумно обрано з декількох можливих означень.

А от помилки в формулюваннях означень можуть припускатися, і тоді ми говоримо, що означення неправильне (хоча коректніше було б говорити – неправильно сформульоване означення).

- Пригадайте найпоширеніші помилки, що припускаються учнями при означенні понять і шляхи їх запобігання і виправлення.
- Чи будуть вірними такі означення: „Прямі називаються паралельними в просторі, якщо вони належать одній площині і не перетинаються, скільки б ми їх не продовжували”; „Ромбом називають паралелограм, у якого дві сторони, що утворюють кут, рівні”.

Розглянемо відоме означення паралелограма: „Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні”. Виходячи з цього визначення, можна сформулювати декілька висловлень, які виражають властивості паралелограма:

1. Паралелограм має чотири кута;
2. Паралелограм має чотири вершини;
3. Паралелограм має дві пари паралельних друг другу сторін.

Відмітимо, що перші дві властивості притаманні не тільки паралелограму, а й іншим видам чотирикутника. Третя ж властивість характеризує саме цю фігуру, виділяє її з множини всіх інших чотирикутників, повністю визначає паралелограм і дозволяє його побудувати. Саме таку властивість математичного об’єкта називають його *характеристичною властивістю.*

Зазвичай в *означенні поняття (об’єкта) відображені необхідні та достатні умови для того, щоб даний об’єкт належав деякій множині.* Тому при формулюванні означень часто використовуються зв’язки „необхідно і достатньо”, „тоді і тільки тоді” і т.п. В розглядуваному випадку можна сказати: „Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом необхідно і достатньо, щоб його протилежні сторони були попарно паралельні”.

- Сформулюйте це означення за допомогою слів „тоді і тільки тоді”.

Властивість мати чотири сторони і властивість попарної паралельності сторін такі, що кожна з них необхідна для характеристики паралелограма, а перелічена множина цих властивостей достатня, щоб повністю охарактеризувати саме це поняття.

Разом з тим, із всієї множини властивостей, притаманних даному поняттю, відбір властивостей, які здатні повністю охарактеризувати це поняття, може бути здійснений декількома способами. Тобто не треба думати, що для визначення поняття існує тільки одна єдина група істотних ознак: *вибір істотних ознак для утворення визначення із всієї сукупності ознак не є однозначним. Якщо один набір таких ознак поняття покладений в основу його визначення, то інші подібні набори характеристичних властивостей зазвичай виступають в ролі теорем.*

Отже, будь-яка характеристична властивість даного математичного об'єкта може бути прийнята в якості означення цього об'єкта. Наприклад, теорема „В паралелограмі діагоналі перетинаються і точкою перетину поділяються навпіл" виражає лише одну із властивостей паралелограма, тоді як обернена теорема „Якщо в чотирикутнику діагоналі перетинаються і точкою перетину поділяються навпіл, то цей чотирикутник - паралелограм" показує, що вказана властивість цілком визначає паралелограм, тобто є його характеристичною властивістю. Знаючи, що така властивість притаманна деякому чотирикутнику, можна не тільки стверджувати, що він – паралелограм, але й побудувати його.

- Побудуйте паралелограм за таким планом:

1. AB – довільний відрізок; $O \in AB$; OA=OB;
2. $\angle BOC$ – довільний; OC – довільний відрізок;
3. OD=OC; т. D $\in$ пр. OC;
4. ADBC – паралелограм.

Тому теореми, що виражають характеристичні властивості, називають теоремами-ознаками об'єкта (в даному випадку – ознака паралелограма).

Зрозуміло, що якщо за означення паралелограма обрати указану властивість, то відоме означення (основу якого складає властивість попарної паралельності сторін) стане висловленням-теоремою.

- Доведіть таку теорему.

- Наведіть приклад означення рівнобедреного трикутника, в основу якого покладено іншу характеристичну властивість. Які теореми випливають з такого означення? Доведіть їх.

Визначаючи будь-яке математичне поняття, ми повинні довести існування класу об'єктів, які відповідають даному поняттю. Теореми, в яких доводиться існування об'єкту, що визначається, називаються теоремами існування. Доводячи теорему існування, ми встановлюємо, що включені в означення ознаки не суперечать як один одному, так і прийнятим раніше аксіомам.

В деяких випадках існування об'єкта, що визначається, здається очевидним, і вчителі не звертають уваги на доведення теореми існування. Це крупний недолік у викладанні математики.

Теореми існування не повинні розглядатися лише в тих випадках, коли існування об'єкта, що визначається, безпосередньо випливає з означення (в цьому випадку визначення найчастіше генетичне (конструктивне) - тобто в самому означенні вказаний спосіб утворення об'єкта).

Теореми існування не розглядуються і в тих випадках, коли існування даного об'єкта настільки очевидно, що ніякого спеціального доведення не потрібно. Поняття ілюструється малюнком (означення вписаного кута, вписаного многокутника та ін.).

Доведення теорем існування повинно бути конструктивним, тобто містити в собі спосіб отримання предмета. Таким конструктивним доведенням теорем існування в геометрії є побудова фігур, які визначаються. Тому слід за означенням повинна завжди розглядатися задача на побудову. Можливий і такий варіант, коли спочатку дається теорема існування (задача на побудову), а вже потім означення поняття.

Необхідно відзначити роль ознак поняття при доведенні теорем існування.

Послідовність розглядання означення, теореми існування і теореми-ознаки може бути різною. Ця різниця визначається прийнятим порядком викладення матеріалу, вибором означення і міркуваннями методичного характеру.

Отже, можливі такі варіанти:

1. Означення, теорема існування, теорема-ознака.

Теоретичний матеріал, яким вже володіють учні, дає можливість довести теорему існування без використання ознаки.

2.Означення, теорема-ознака, теорема існування.

Тут в теоремі існування - задачі на побудову – як раз і показується, як умова теореми - ознаки реально може бути виконана. Тобто при доведенні теореми існування використовується ознака поняття.

3. Теорема існування, означення, теорема-ознака.

4.Означення, теорема-ознака (теорема існування відсутня).

Умова ознаки настільки проста, що існування не викликає сумнівів (при бажанні відповідні побудови легко можуть бути виконані). Тому відпадає необхідність в спеціальному розгляданні теореми існування.

- Наведіть приклади з ШКГ вивчення означень, теорем-ознак і теорем існування за кожним з наведених варіантів.

Із всіх задач на побудову задачам, які є теоремами існування в геометрії повинна відводиться особлива увага. Вони повинні бути твердо засвоєні учнями, адже знання тільки означень і властивостей геометричних фігур недостатньо, необхідно ще й вміння будувати ці фігури. При відсутності цього вміння не можна вважати, що поняття засвоєно, хоча б з тієї причини, що воно вже не може бути використано при розв’язанні задач на побудову.

Завдання для подальшого обговорення:

Проаналізувати текст параграфів 14, 15 за ***інтегрованим підручником «Математика – 7. Частина 1» авторів О. Школьний, Є. Нелін, А. Миляник, Ю. Простакова (2024)*** та задачний матеріал до них**.**

Зміст

Геометрія як навчальний предмет в середній загальноосвітній школі

ПЛАН

1. Вступні зауваження.
2. Геометрія як навчальна дисципліна.
3. Пропедевтика геометрії.

1. Вступні зауваження.

Геометрія як наука – частина математики, предметом якої є просторові відношення і форми тіл, без урахування інших їх властивостей (густини, маси, кольору тощо). Сучасна геометрія вивчає будь-які відношення і форми, що виникають при дослідженні однорідних об’єктів, явищ, подій (без урахування їх конкретного змісту) і виявляються схожими на звичайні просторові відношення і форми.

Виникнення геометрії з давніх часів, як і більшості інших наук, зумовлено практичними потребами людей (вимірювання відстаней, площ земельних ділянок, об’ємів тіл). Найпростіші геометричні твердження і поняття були відомі ще в Стародавньому Єгипті (початок II тис. до н. е.). Проте логічних доведень тверджень або зовсім не було, або були примітивними. Згодом геометричні знання з Єгипту проникли в Грецію, і з VI по I ст. до н.е. розвиток геометрії відбувався в основному в Стародавній Греції, де геометричні відомості було зведено в систему і виникла назва науки – геометрія. На той час вже з’явилися порівняно строгі логічні доведення, які були зібрані в „Началах” Евкліда (близько 300 р. до. н.е.).

Зовсім новий підхід до розв’язування геометричних задач запропонував у першій половині XVII ст. Р. Декарт (1596-1650), який відкрив метод координат, чим заклав основи аналітичної геометрії.

У 1826 р. М.І.Лобачевський запропонував систему аксіом, відмінну від аксіом Евкліда, - була відкрита можливість існування неевклідової геометрії. До найбільш відомих неевклідових геометрій відносять геометрію Лобачевского і геометрію Рімана. Питання про введення ідей Лобачевского в середню школу поставало ще наприкінці XIX – початку XX ст., прихильниками якої були українські педагоги-математики. Наприклад, П.О.Долгушин, розробляючи методику ознайомлення учнів з неєвклідовими геометріями, виходив з того, що поняття геометрії Лобачевского і геометрії Рімана потрібно вводити у тісному зв’язку з геометрією Евкліда, розглядаючи всі три геометрії як логічні системи, що допускають різні інтерпретації.

У шкільному курсі до 60-х років XX ст. в основу логічної побудови підручників геометрії було покладено аксіоматику Евкліда. У період світового руху за модернізацію шкільного курсу висловлювалися думки відмовитися від системи Евкліда і будувати шкільний курс тільки на основі сучасної і досконалої аксіоматики. Наприклад, пропонувалося побудувати ШКГ на основі аксіоматики векторного простору (аксіоми Вейля), в основу покласти геометричні перетворення, аксіоми метричного простору. Створювалися пробні підручники, наприклад, підручник планіметрії А. М. Колмогорова, в основу якого було покладено аксіоматику, запропоновану А. М. Колмогоровим. Однак, посібник зазнав гострої критики через його занадто високий теоретичний рівень, заформалізованість термінологією і символікою множин, недосконалість системи задач.

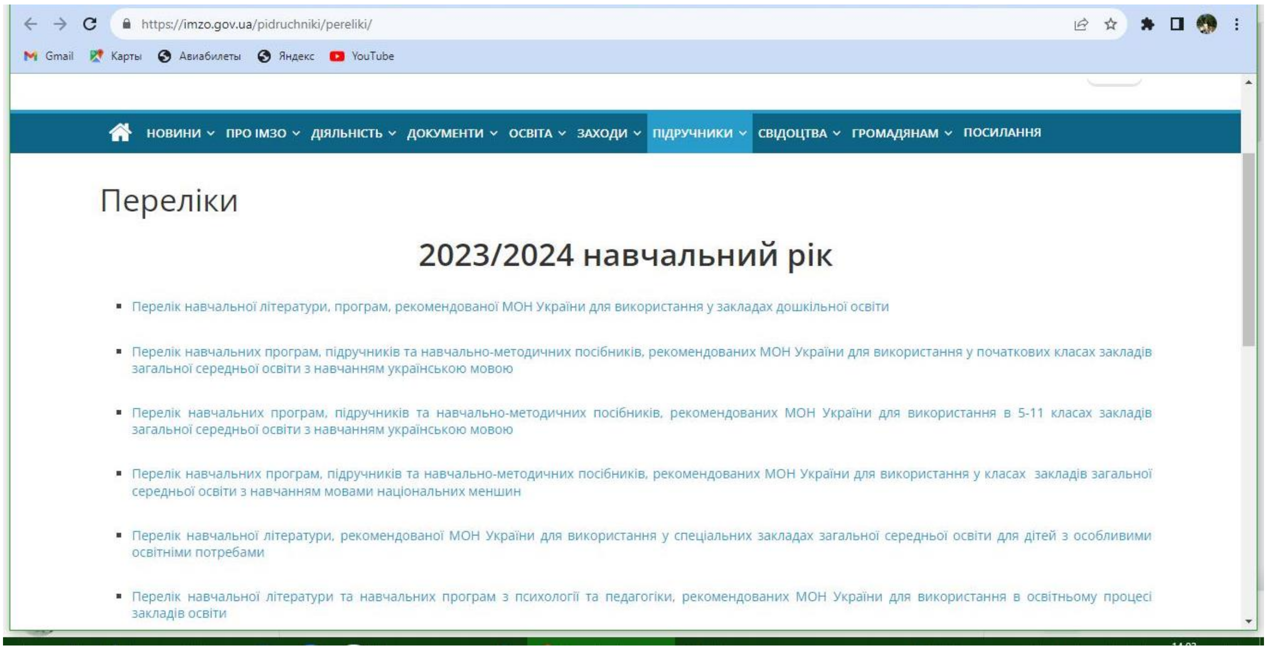
З 1982 – 1983 навч. р. всі школи України почали працювати за навчальним посібником О. В. Погорєлова, яким користувалися в загальноосвітніх класах фактично до 2000 – х років.

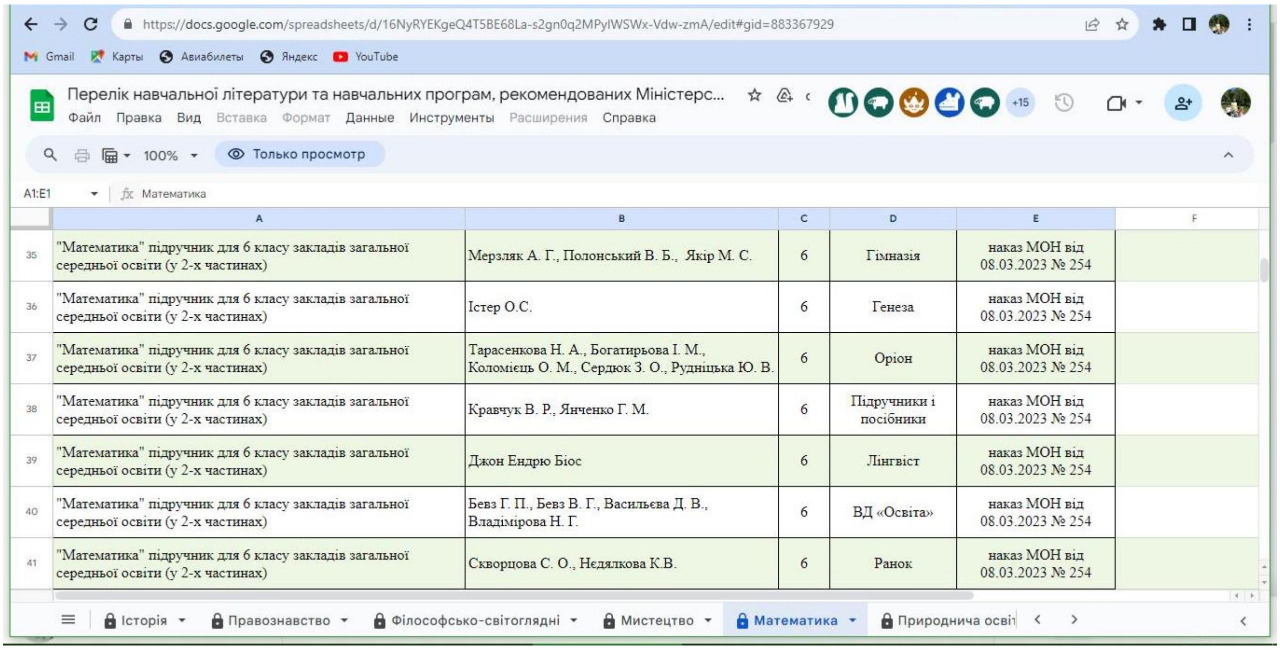
Наразі розроблено нові підручники з геометрії для 7-9 кл., рекомендованими МОН України, серед яких, наприклад, останніми роками запропоновано підручники таких авторів і авторських колективів:

1. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.
2. Апостолова Г. В.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г.
4. Істер О. С.
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.
6. Роганін О. М., Капіносов А. М.
7. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О.Ф.
8. Тадеєв В. О.

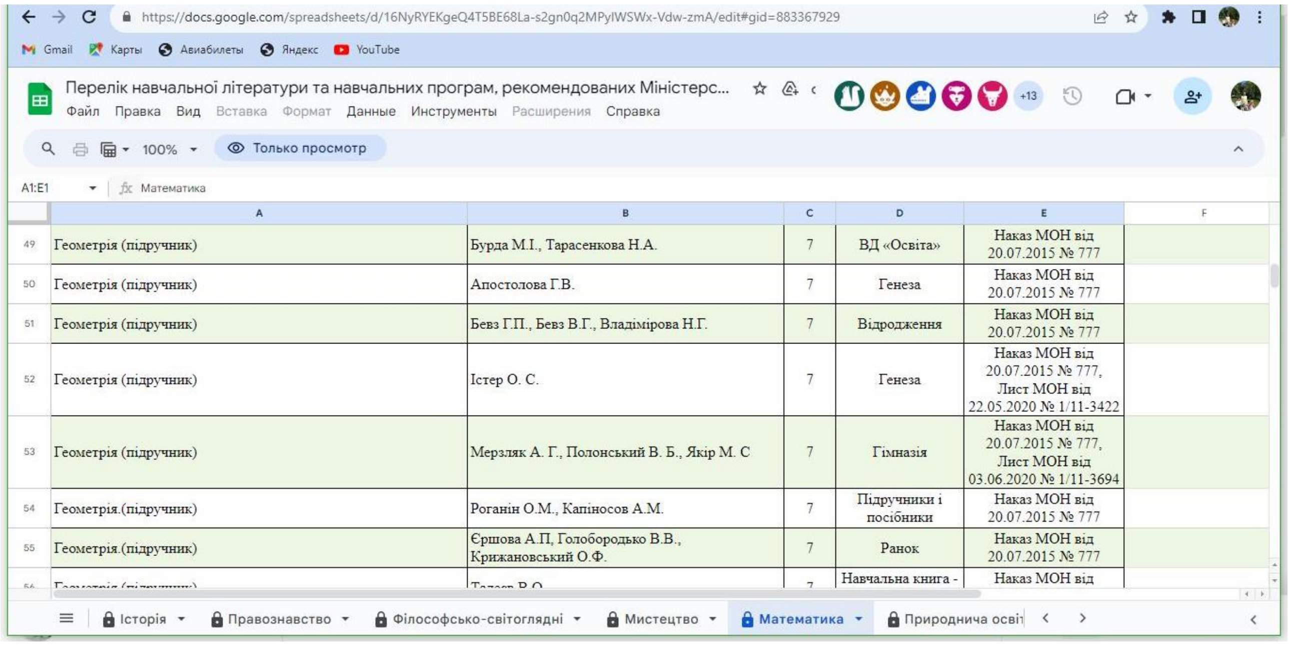
(зеленим кольором – ті, що тільки для 7 кл.)

Підручники з математики (5-6 клас) та геометрії 7-9 кл., рекомендовані МОН на 2023-24 н.р.





	A	B	C	D	E	F
35	"Математика" підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)	Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.	6	Гімназія	наказ МОН від 08.03.2023 № 254	
36	"Математика" підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)	Істер О.С.	6	Генеза	наказ МОН від 08.03.2023 № 254	
37	"Математика" підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)	Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О., Рудніцька Ю. В.	6	Оріон	наказ МОН від 08.03.2023 № 254	
38	"Математика" підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)	Кравчук В. Р., Янченко Г. М.	6	Підручники і посібники	наказ МОН від 08.03.2023 № 254	
39	"Математика" підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)	Джон Ендрю Біос	6	Лінгвіст	наказ МОН від 08.03.2023 № 254	
40	"Математика" підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)	Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г.	6	ВД «Освіта»	наказ МОН від 08.03.2023 № 254	
41	"Математика" підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)	Скворцова С. О., Нєдялкова К.В.	6	Ранок	наказ МОН від 08.03.2023 № 254	



	A	B	C	D	E	F
49	Геометрія (підручник)	Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.	7	ВД «Освіта»	Наказ МОН від 20.07.2015 № 777	
50	Геометрія (підручник)	Апостолова Г.В.	7	Генеза	Наказ МОН від 20.07.2015 № 777	
51	Геометрія (підручник)	Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.	7	Відродження	Наказ МОН від 20.07.2015 № 777	
52	Геометрія (підручник)	Істер О. С.	7	Генеза	Наказ МОН від 20.07.2015 № 777, Лист МОН від 22.05.2020 № 1/11-3422	
53	Геометрія (підручник)	Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С	7	Гімназія	Наказ МОН від 20.07.2015 № 777, Лист МОН від 03.06.2020 № 1/11-3694	
54	Геометрія.(підручник)	Роганін О.М., Капіносов А.М.	7	Підручники і посібники	Наказ МОН від 20.07.2015 № 777	
55	Геометрія.(підручник)	Єршова А.П, Голобородько В.В., Крижановський О.Ф.	7	Ранок	Наказ МОН від 20.07.2015 № 777	
			7	Навчальна книга -	Наказ МОН від	

Автори сучасних підручників, рекомендованих на 2024-25 навчальний рік, розробляли їх з урахуванням концепції Нової української школи (НУШ), яка спрямовує на:

- новий зміст освіти, заснований на формуванні компетентностей, потрібних для успішної самореалізації в суспільстві;

- орієнтацію на потреби учня в освітньому процесі, дитиноцентризм;
- нову структуру школи, що сприятиме засвоєнню нового змісту і формуванню життєвих компетентностей;
- сучасне освітнє середовище, яке забезпечить необхідні умови, засоби і технології для навчання учнів, освітян, батьків не лише в приміщенні навчального закладу.

Також навчання на концептуальних засадах НУШ передбачає:

✓ організацію освітнього процесу, орієнтованого на зону найближчого розвитку дитини;

✓ відмову від застарілих підходів: фронтальних форм організації освітнього процесу, класичного розташування учнів у класі, статичних поз під час навчальних занять, натомість - зміна різних видів діяльності;

✓ реалізацію діяльнісного підходу через введення в освітній процес різних видів діяльності творчого характеру (ігор, технічного і художнього моделювання тощо);

✓ насичення освітнього простору практико-орієнтованими ситуаціями, наближеними до реального життя;

✓ використання розвивальних ігор і вправ, логічних задач, проблемних питань, ігрових технологій, що активізують у дітей мислення та уяву;

✓ організацію систематичних спостережень, пошуково-дослідної діяльності;

✓ спілкування педагога з учнями у формі діалогу, визнання права дитини на ініціативні висловлювання, аргументоване відстоювання своїх пропозицій, права на помилку;

✓ створення емоційно значущих ситуацій, підтримка діалогічного спілкування між дітьми.

3) З'ЯСУВАННЯ ОСНОВНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ТА НАСКРІЗНИХ УМІНЬ ЗГІДНО КОНЦЕПЦІЇ НУШ;

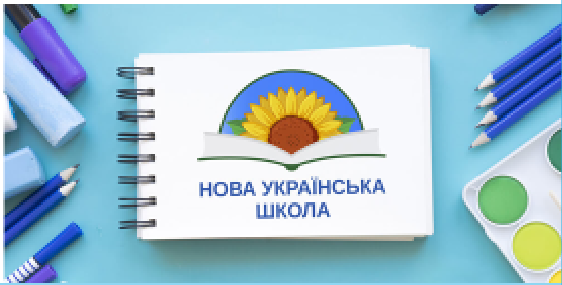
У документі «Концепція НУШ» чітко окреслено ***ключові компетентності***, якими мають оволодіти школярі після закінчення кожного з двох циклів – адаптаційного (5-6 класи) і базового предметного навчання (7-9 класи), та ***наскрізні вміння***.

НАСКРІЗНІ ВМІННЯ

Наскрізні вміння формуються на всіх інтегрованих курсах або предметах.
Вони є спільними для всіх компетентностей.

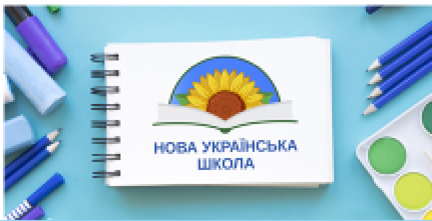
Перелік наскрізних умінь:

•читати з розумінням,
•висловлювати власну думку усно і письмово,
•критично та системно мислити,
•діяти творчо,
•виявляти ініціативність,
•здатність логічно обґрунтувати позицію,
•конструктивно керувати емоціями,
•оцінювати ризики,
•приймати рішення,
•розв'язувати проблеми.

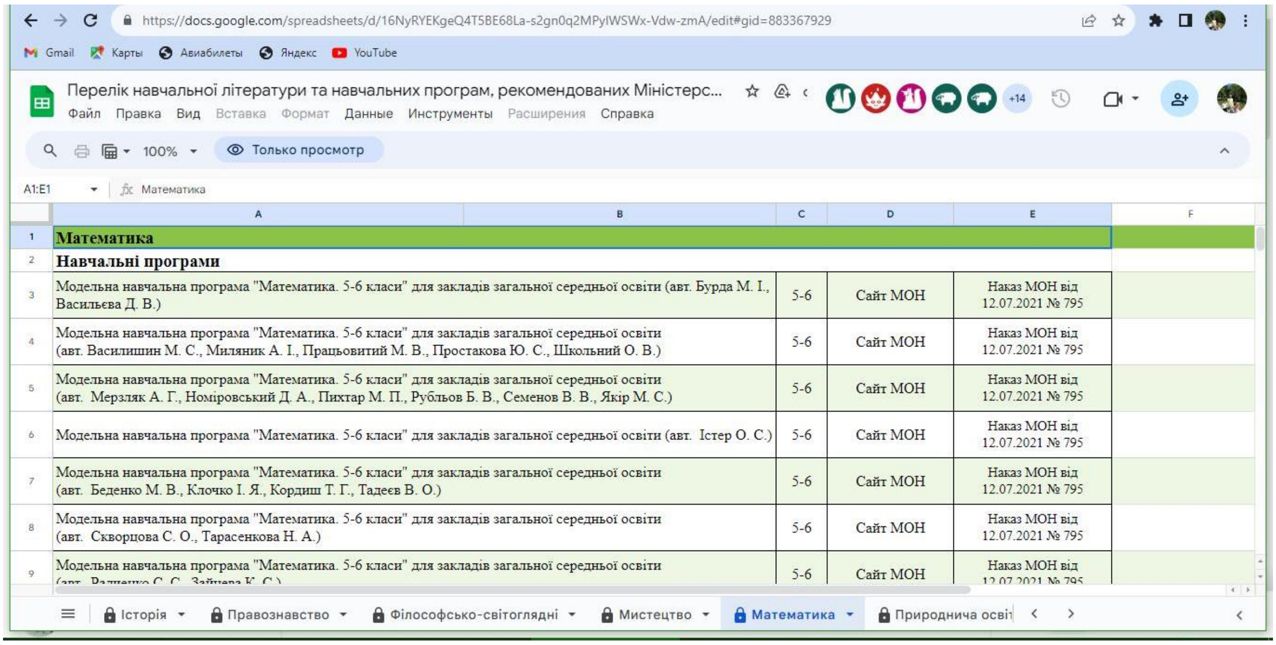


Перелік ***основних компетентностей*** :

•вільне володіння державною мовою,
•здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами,
•математична компетентність,
•компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій,
•інноваційність,
•екологічна компетентність,
•інформаційно-комунікаційна компетентність,
•навчання впродовж життя,
•громадянські та соціальні компетентності,
•культурна компетентність,
•підприємливість і фінансова грамотність.



Виходячи із зазначених положень НУШ, було створено нові навчальні програми (**модельні навчальні програми**) різними авторами або авторськими колективами, які є нормативними документами, що визначають цілі, завдання, зміст навчання, надають рекомендації по вивченню окремих тем шкільного курсу математики.



	A	B	C	D	E
1	**Математика**				
2	**Навчальні програми**				
3	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Бурда М. І., Васильєва Д. В.)		5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
4	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.)		5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
5	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)		5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
6	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Істер О. С.)		5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
7	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Беденко М. В., Клочко І. Я., Кордиш Т. Г., Тадеєв В. О.)		5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
8	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Скворцова С. О., Тарасенкова Н. А.)		5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
9	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти		5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від

Слід зазначити, що для 5-6 класів базової загальної освіти є чинними сім Модельних програм для закладів загальної середньої освіти, які можна переглянути за посиланнями нижче:

- Математика 5-6 кл. Беденко та ін.
  (автори Беденко М.В., Клочко І.Я., Кордиш Т.Г., Тадеєв В.О.)
- Математика 5-6 кл. Бурда та ін.
  (автори Бурда М.І., Васильєва Д.В.)
- Математика 5-6 кл. Василишин та ін.
  (автори Василишин М.С., Миляник А.І., Працьовитий М.В., Простакова Ю.С., Школьний О.В.)
- Математика 5-6 кл. Істер
  (автор Істер О.С.)
- Математика 5-6 кл. Мерзляк та ін.
  (автори Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Пихтар М.П., Рубльов Б.В., Семенов В.В., Якір М.С.)
- Математика 5-6 кл. Радченко та ін.
  (автори Радченко С.С., Зайцева К.С.)

- Математика 5-6 кл. Скворцова та ін.

  (автори Скворцова С.О., Тарасенкова Н.А.)

А для 7 - 9 класів розроблено 8 Модельних програм для закладів загальної середньої освіти, які можна переглянути за посиланнями нижче:

- Математика 7-9 кл. Василишин та ін.

  (автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.)
- Алгебра 7-9 кл. Бурда та ін.

  (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.)
- Алгебра 7-9 кл. Істер

  (автор Істер О.С.)
- Алгебра 7-9 кл. Мерзляк та ін.

  (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.
- Геометрія 7-9 кл. Бурда та ін.

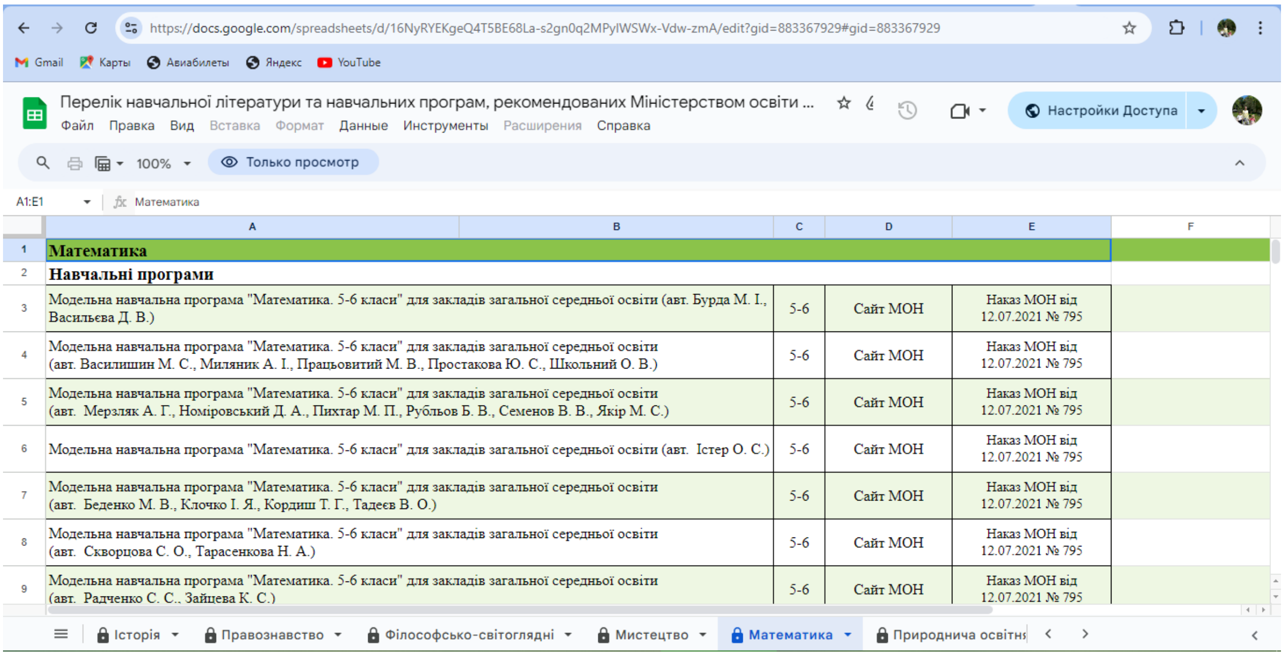
  (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.)
- Геометрія 7-9 кл. Мерзляк та ін.

  (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)
- Геометрія 7-9 кл. Істер

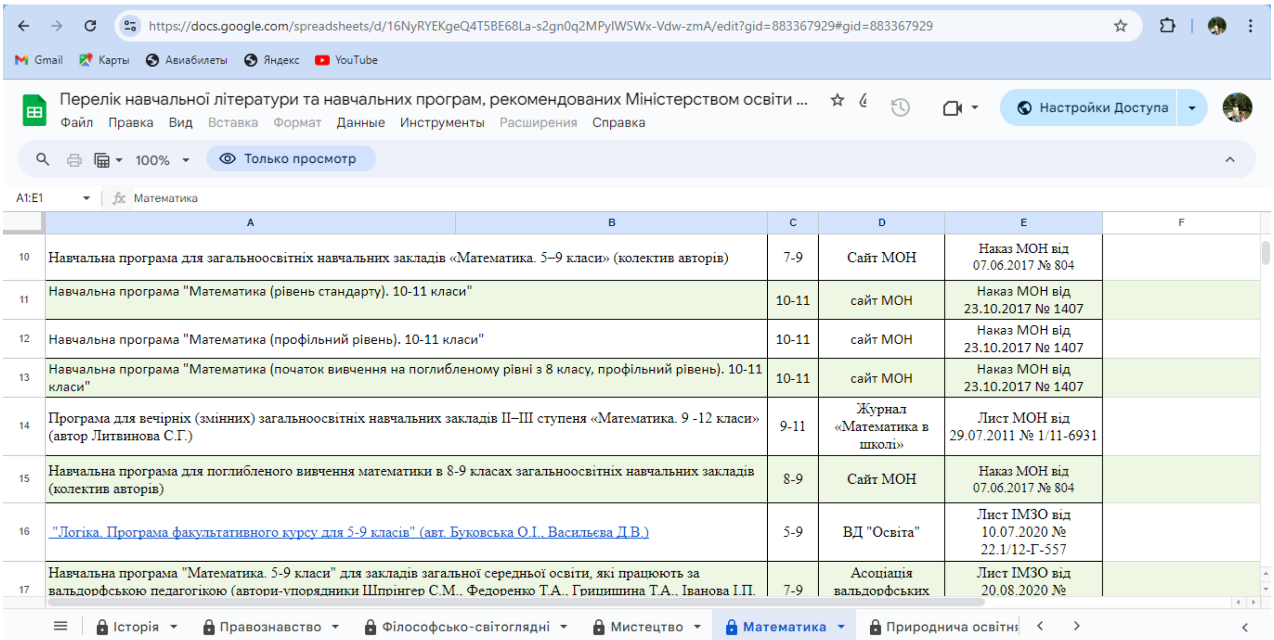
  (автор Істер О.С.)
- Геометрія 7-9 кл. Панченко

  (автор Панченко С. Ю.)

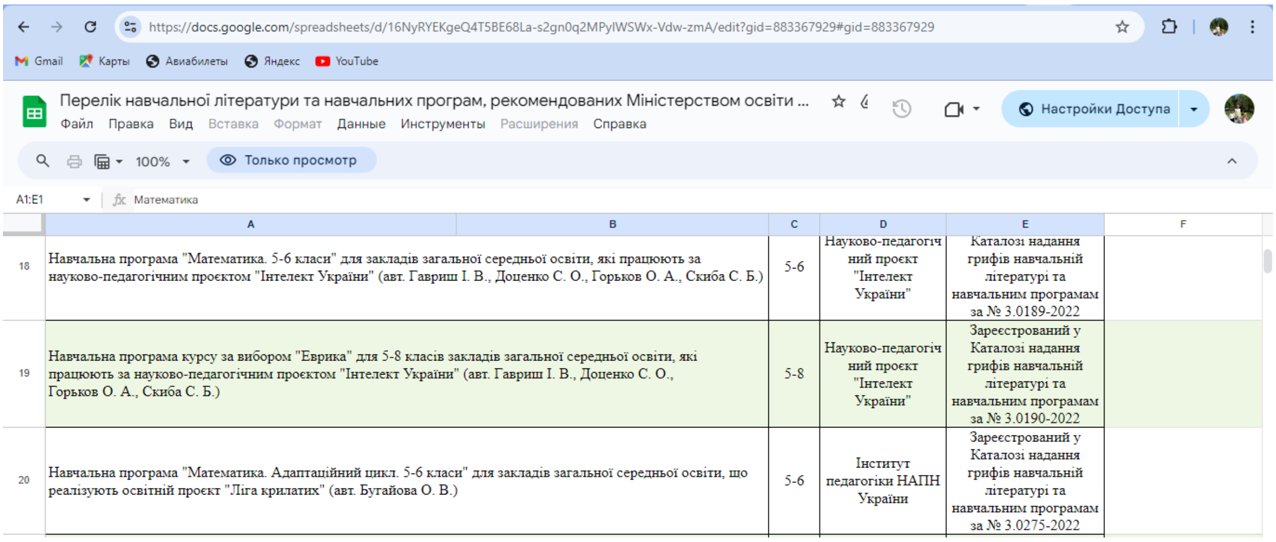
Звертаємо увагу на розроблену Модельну програму ***інтегрованого курсу «Математика. 7-9 класи»*** (автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.).



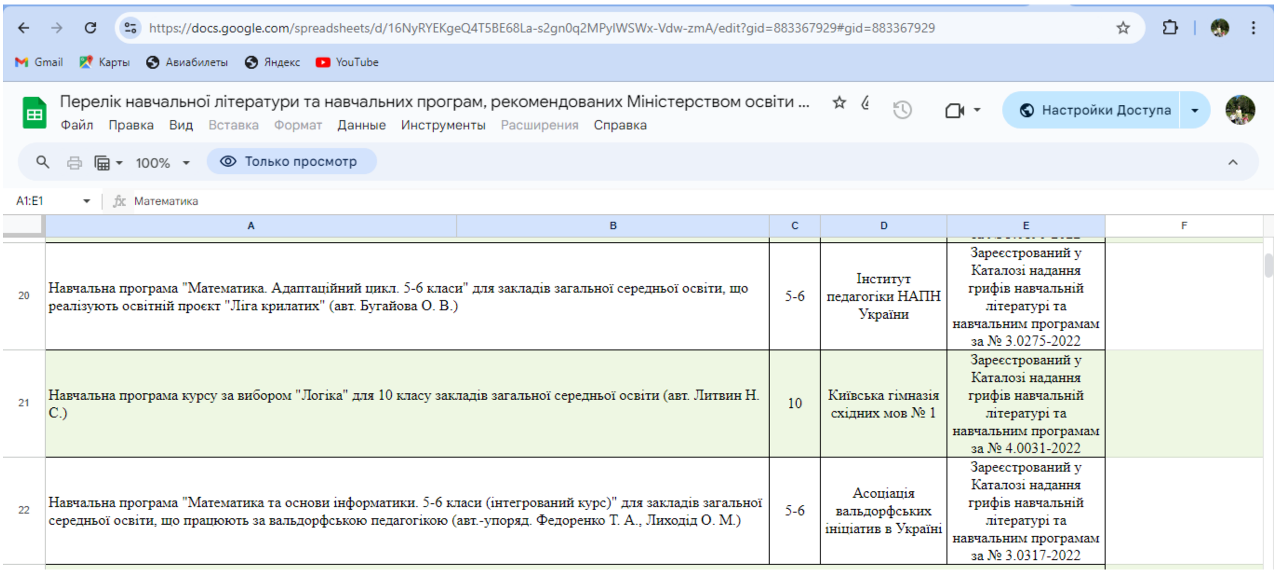
	A	C	D	E
1	**Математика**			
2	**Навчальні програми**			
3	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Бурда М. І., Васильєва Д. В.)	5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
4	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.)	5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
5	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)	5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
6	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Істер О. С.)	5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
7	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Беденко М. В., Клочко І. Я., Кордиш Т. Г., Тадеєв В. О.)	5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
8	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Скворцова С. О., Тарасенкова Н. А.)	5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795
9	Модельна навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти (авт. Радченко С. С., Зайцева К. С.)	5-6	Сайт МОН	Наказ МОН від 12.07.2021 № 795



	A	C	D	E
10	Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів «Математика. 5–9 класи» (колектив авторів)	7-9	Сайт МОН	Наказ МОН від 07.06.2017 № 804
11	Навчальна програма "Математика (рівень стандарту). 10-11 класи"	10-11	сайт МОН	Наказ МОН від 23.10.2017 № 1407
12	Навчальна програма "Математика (профільний рівень). 10-11 класи"	10-11	сайт МОН	Наказ МОН від 23.10.2017 № 1407
13	Навчальна програма "Математика (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень). 10-11 класи"	10-11	сайт МОН	Наказ МОН від 23.10.2017 № 1407
14	Програма для вечірніх (змінних) загальноосвітніх навчальних закладів II–III ступеня «Математика. 9 -12 класи» (автор Литвинова С.Г.)	9-11	Журнал «Математика в школі»	Лист МОН від 29.07.2011 № 1/11-6931
15	Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів (колектив авторів)	8-9	Сайт МОН	Наказ МОН від 07.06.2017 № 804
16	"Логіка. Програма факультативного курсу для 5-9 класів" (авт. Буковська О.І., Васильєва Д.В.)	5-9	ВД "Освіта"	Лист ІМЗО від 10.07.2020 № 22.1/12-Г-557
17	Навчальна програма "Математика. 5-9 класи" для закладів загальної середньої освіти, які працюють за вальдорфською педагогікою (автори-упорядники Шпрінгер С.М., Федоренко Т.А., Грицишина Т.А., Іванова І.П.	7-9	Асоціація вальдорфських	Лист ІМЗО від 20.08.2020 №

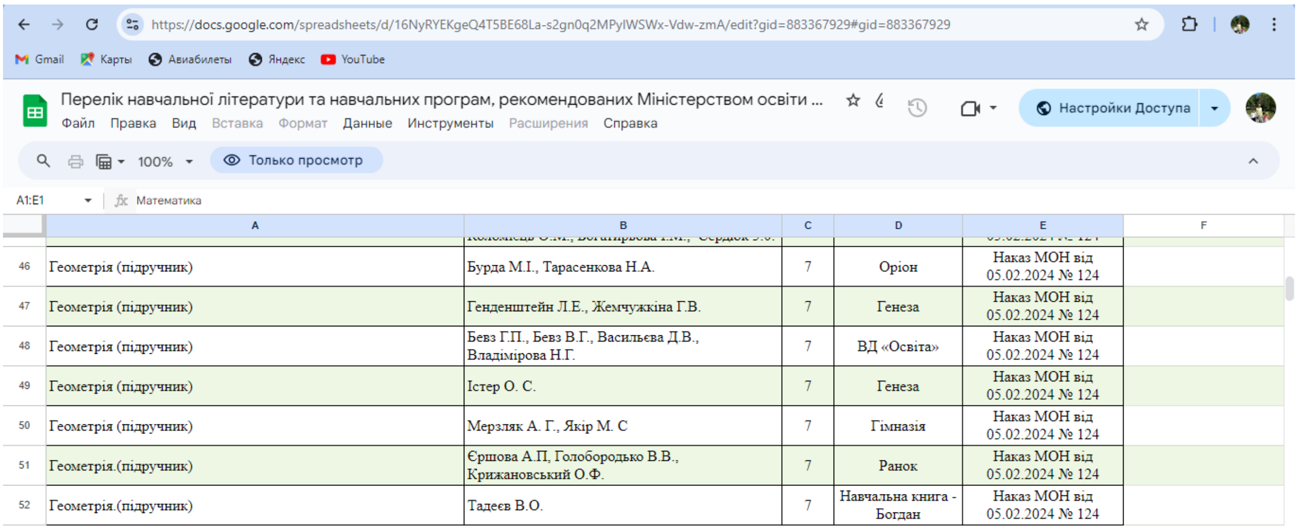


	A	C	D	E
18	Навчальна програма "Математика. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти, які працюють за науково-педагогічним проєктом "Інтелект України" (авт. Гавриш І. В., Доценко С. О., Горьков О. А., Скиба С. Б.)	5-6	Науково-педагогічний проект "Інтелект України"	Каталозі надання грифів навчальній літературі та навчальним програмам за № 3.0189-2022
19	Навчальна програма курсу за вибором "Еврика" для 5-8 класів закладів загальної середньої освіти, які працюють за науково-педагогічним проєктом "Інтелект України" (авт. Гавриш І. В., Доценко С. О., Горьков О. А., Скиба С. Б.)	5-8	Науково-педагогічний проект "Інтелект України"	Зареєстрований у Каталозі надання грифів навчальній літературі та навчальним програмам за № 3.0190-2022
20	Навчальна програма "Математика. Адаптаційний цикл. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти, що реалізують освітній проєкт "Ліга крилатих" (авт. Бугайова О. В.)	5-6	Інститут педагогіки НАПН України	Зареєстрований у Каталозі надання грифів навчальній літературі та навчальним програмам за № 3.0275-2022

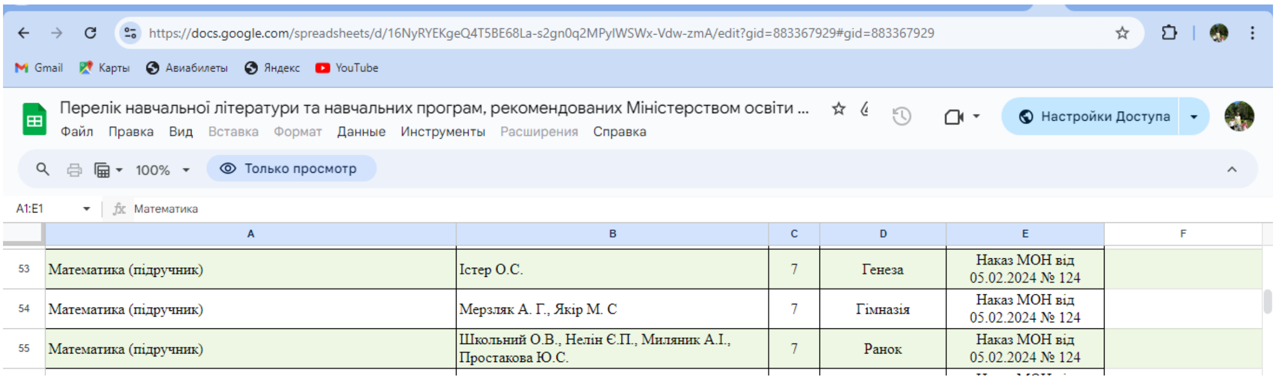


	A	C	D	E
20	Навчальна програма "Математика. Адаптаційний цикл. 5-6 класи" для закладів загальної середньої освіти, що реалізують освітній проєкт "Ліга крилатих" (авт. Бугайова О. В.)	5-6	Інститут педагогіки НАПН України	Зареєстрований у Каталозі надання грифів навчальній літературі та навчальним програмам за № 3.0275-2022
21	Навчальна програма курсу за вибором "Логіка" для 10 класу закладів загальної середньої освіти (авт. Литвин Н. С.)	10	Київська гімназія східних мов № 1	Зареєстрований у Каталозі надання грифів навчальній літературі та навчальним програмам за № 4.0031-2022
22	Навчальна програма "Математика та основи інформатики. 5-6 класи (інтегрований курс)" для закладів загальної середньої освіти, що працюють за вальдорфською педагогікою (авт.-упоряд. Федоренко Т. А., Лиходід О. М.)	5-6	Асоціація вальдорфських ініціатив в Україні	Зареєстрований у Каталозі надання грифів навчальній літературі та навчальним програмам за № 3.0317-2022

Грунтуючись на розроблених модельних програмах, було створено нові підручники, із яких рекомендованими на 2024-25 н.р. є такі:



	A	B	C	D	E
46	Геометрія (підручник)	Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.	7	Оріон	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
47	Геометрія (підручник)	Генденштейн Л.Е., Жемчужкіна Г.В.	7	Генеза	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
48	Геометрія (підручник)	Бевз Г.П., Бевз В.Г., Васильєва Д.В., Владімірова Н.Г.	7	ВД «Освіта»	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
49	Геометрія (підручник)	Істер О. С.	7	Генеза	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
50	Геометрія (підручник)	Мерзляк А. Г., Якір М. С	7	Гімназія	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
51	Геометрія.(підручник)	Єршова А.П, Голобородько В.В., Крижановський О.Ф.	7	Ранок	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
52	Геометрія.(підручник)	Тадеєв В.О.	7	Навчальна книга - Богдан	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124



	A	B	C	D	E
53	Математика (підручник)	Істер О.С.	7	Генеза	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
54	Математика (підручник)	Мерзляк А. Г., Якір М. С	7	Гімназія	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124
55	Математика (підручник)	Шкільний О.В., Нелін Є.П., Милляник А.І., Простакова Ю.С.	7	Ранок	Наказ МОН від 05.02.2024 № 124

2. Геометрія як навчальна дисципліна.

Мета викладання геометрії в 7-9 класах – систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині, формування просторових уявлень, розвиток логічного мислення, засвоєння відомостей, потрібних для вивчення суміжних дисциплін (фізики, географії, креслення, трудового навчання та ін.).

Визначена мета досягається розв’язуванням таких завдань: забезпечення раціонального поєднання логічної строгості і геометричної наочності, розвитку інтуїції, послідовного проведення ідеї дедуктивної побудови математичної теорії і формування у зв’язку з цим потреби обґрунтовувати твердження при доведенні теорем і розв’язуванні задач; цілеспрямоване навчання учнів вичленовуванню геометричних форм, відношень і фактів в предметах і явищах навколишньої дійсності; реалізація практичної спрямованості курсу шляхом застосування геометричного апарату до розв'язування задач на обчислення, доведення і побудову, у тому числі прикладного і міжпредметного змісту.

Будувати курс геометрії можна по-різному, додержуючись різних логічних рівнів або напрямів.

Напрям А – формально-логічний – повне відмовлення від інтуїції і досвіду, основні поняття визначаються лише аксіомами.

Напрям В – досвідно-дедуктивний – основні поняття і відношення запозичуються з досвіду, всі обґрунтування дедуктивні. Розрізняють три підрівня: B_1 - формулюються всі необхідні аксіоми; B_2 - тільки частина аксіом подається явно; B_3 - формулюються тільки ті аксіоми, зміст яких не здається очевидним.

Напрям С – інтуїтивно – дедуктивний – інтуїція переплітається з дедукцією.

Напрям D – інтуїтивно-експериментальний – геометричні факти встановлюються експериментально, доведення відсутні.

ШКГ будувати на рівні А неможливо, оскільки він буде недоступний для учнів. Рівень D достатній тільки для учнів 1-6 класів. В 7-12 класах у сучасній школі геометрію викладають на рівні B_2.

Навчальний матеріал курсу планіметрії групується навколо п'яти змістових ліній:

1) Геометричні фігури та їх властивості;
2) Геометричні побудови;
3) Геометричні перетворення;
4) Геометричні величини, їх вимірювання і обчислення;
5) Координати і вектори.

3. Пропедевтика геометрії.

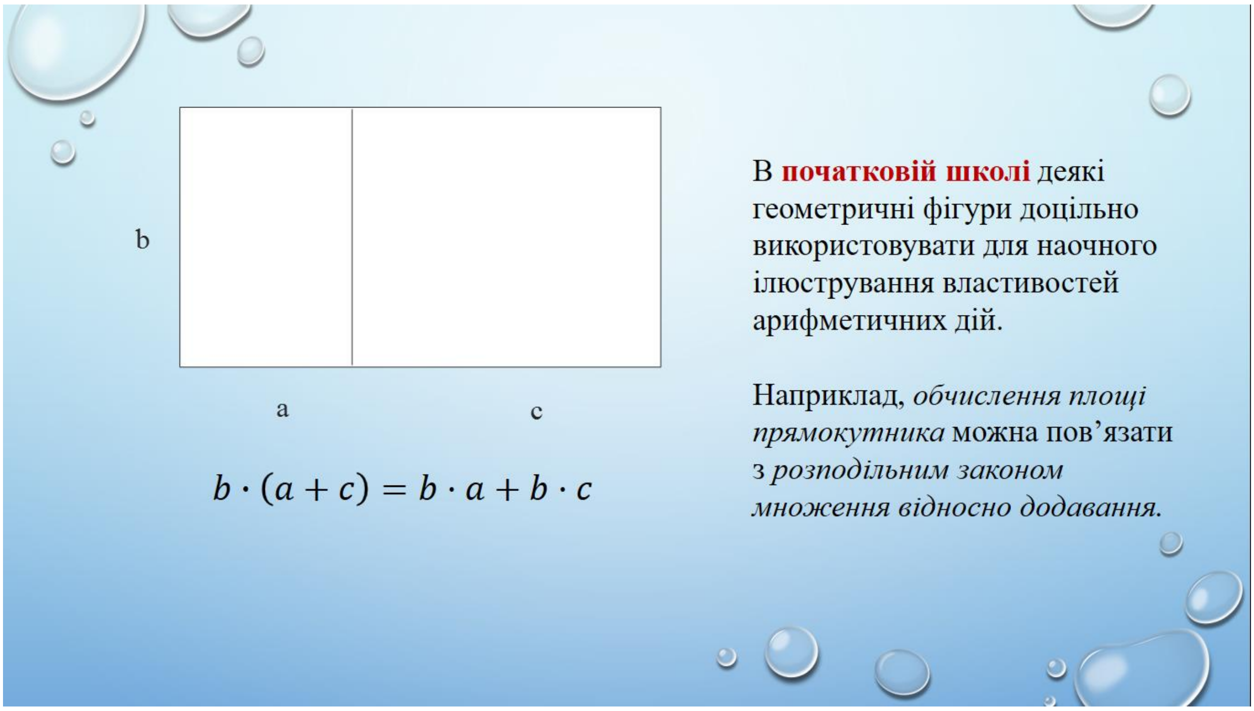
Питання про необхідність уведення пропедевтичного курсу геометрії поставало ще на початку минулого століття. У зв'язку з цим необхідно відзначити працю М. М. Володкевича „К вопросу о реформе преподавания математики" (1910 р.). Ідеї викладу такого курсу геометрії індуктивно-лабораторним методом були здійснені О. М. Астрябом („Наглядная геометрия", 1909 р.).

На сучасному етапі пропедевтика здійснюється не окремим курсом, а в межах початкової школи і на протязі вивчення математики в 5-6 класах.

Найважливішим завданням курсу математики початкової школи, що стосуються пропедевтики систематичного курсу геометрії, є: ознайомлення учнів з основними величинами та їх вимірюванням (довжини відрізків, площі фігур); формування уявлень про деякі геометричні фігури та їх властивості; відпрацювання потрібних графічних умінь.

Вивчення у молодших класах геометричного матеріалу тісно пов'язане з арифметичним. Наприклад, ознайомлення з многокутником і його елементами пов'язується з лічбою: „Скільки сторін має цей многокутник? Скільки кутів? Який з даних двох многокутників має більше сторін? На скільки більше?".

Деякі геометричні фігури доцільно використовувати для наочного ілюстрування властивостей арифметичних дій. Наприклад, за допомогою поділеного на рівні квадрати прямокутника можна проілюструвати переставну властивість множення натуральних чисел, обчислення площі прямокутника можна пов'язати з розподільним законом множення відносно додавання.



Також можна подати геометричну інтерпретацію деяким формулам скороченого множення:

Особливістю методики вивчення геометричного матеріалу в початковій школі є широке застосування конкретно-індуктивного методу, наочності і практичних дій учнів. На основі наочного ознайомлення з моделями та рисунками учні повинні навчитися вільно розпізнавати простіші геометричні фігури на оточуючих предметах, моделях, рисунках, оволодіти навичками побудови та вимірювання. На цьому етапі навчання не передбачено введення означень геометричних фігур, проведення дедуктивних міркувань, крім, можливо, найпростіших дедуктивних висновків.

На відміну від початкової школи в 5-6 класах теоретичний рівень викладу геометричного матеріалу вищий. Окремі поняття вводяться на основі означень (розгорнутий кут, паралельні прямі тощо), проводяться нескладні дедуктивні міркування. Разом з тим, як і в початковій школі, при вивченні елементів геометрії мають переважати конкретно-індуктивний метод навчання, широке застосування наочності, практичних дій учнів з моделями і виконання ними зображень фігур, побудов лінійкою, косинцем, циркулем.

На цьому етапі навчання поглиблюються і розширюються відомості про знайомі учням з початкової школи фігури, а також вводяться нові фігури і геометричні поняття. Зокрема, учні далі вивчають відрізки і їх вимірювання, але при цьому звертається увага на те, що відрізок коротше будь-якої іншої лінії, що з'єднує їх кінці, що довжина відрізка, який складається з кількох відрізків, дорівнює сумі довжин його частин. Отже, всі теоретичні факти, що стосуються геометричних величин і формулюються в курсі геометрії у вигляді аксіом вимірювання, на цьому етапі засвоюються на рівні наочно-дійового мислення.

Завдання для подальшого обговорення

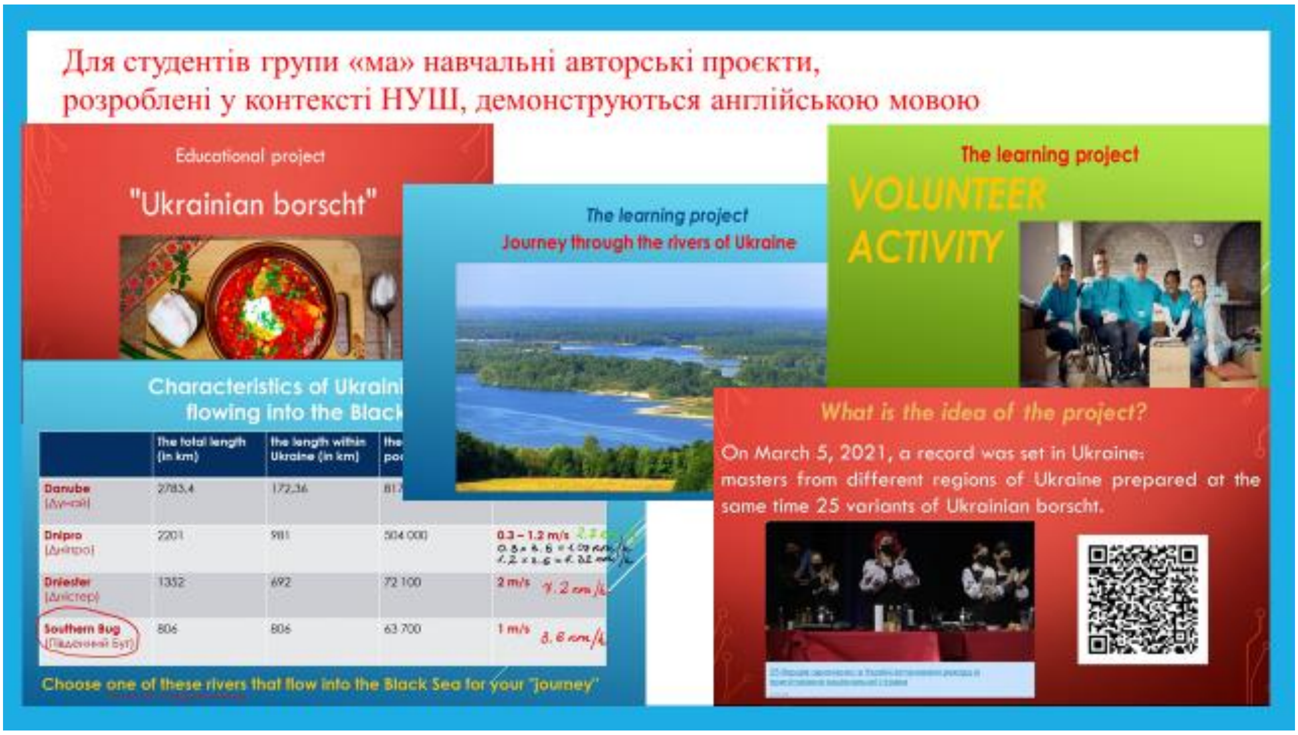
1. Проаналізувати Модельну навчальну програму Мерзляка А. Г. та співавторів.

2. За підручником «Математика. 6 кл.» (Скворцової С. О., Нєдялкової К. В.) розглянути методику розв’язування таких (різнорівневих) завдань, які забезпечують *пропедевтику геометричного матеріалу* до початку його систематичного вивчення у 7 класі:

С. 45, №№ 147, 148;
С. 48, №№ 160, 161;
С. 51, №№ 166-170;
С. 243, №№ 936-942;
С. 245-246, №№ 949-954;
С. 249, №№ 960 – 965;
С. 251, №№ 972 – 975;
С. 367, №№ 1404 – 1406;
С. 368, №№ 1409 – 1413;
С. 370, №№ 1421, 1422, 1424.

«Родзинки» цього підручника:


6) ОЗНАЙОМЛЕННЯ ІЗ СУТНІСТЮ ІНТЕГРОВАНОГО І ПРОЄКТНОГО НАВЧАННЯ, РЕКОМЕНДОВАНОГО КОНЦЕПЦІЄЮ НУШ, зокрема розгляд конкретних прикладів проєктів-досліджень для школярів 5-6 класів
40. НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЄКТ
ВОЛОНТЕРСЬКА ДІЯЛЬНІСТЬ
Який задум проєкту?
Сьогодні багато хто з людей потребує допомоги, пов'язаної з нестачею їжі, одягу, предметів побуту тощо. Не щасти, є люди — свідомі, активні, вдумливі, які здатні організувати допомогу тим, кому вона необхідна. Цих людей називають волонтерами. Спробуйте й ви ефективно організувати свою діяльність у ролі волонтерів.
54. НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЄКТ
ПОДОРОЖ РІЧКАМИ УКРАЇНИ
Який задум проєкту?
Річки України — сукупність природних водотоків території нашої країни, яких нараховується понад... Кожна річкова система унікальна, потребує дослідження й охорони, а разом вони складають справжню «судинну систему» України, яка має надзвичайне господарське значення. Тож здійснимо подорож річками України.
ЗОЛОТИЙ ПЕРЕТИН
УКРАЇНСЬКИЙ БОРЩ


Для студентів групи «ма» навчальні авторські проєкти, розроблені у контексті НУШ, демонструються англійською мовою
Educational project
"Ukrainian borscht"
The learning project
Journey through the rivers of Ukraine
The learning project
VOLUNTEER
ACTIVITY
Characteristics of Ukraini
flowing into the Black
The total length (in km)
the length within Ukraine (in km)
Danube (Дунай) 2783,4 172,36
Dnipro (Дніпро) 2201 981 504 000 0.3 – 1.2 m/s
Dniester (Дністер) 1352 692 72 100 2 m/s 7,2 km/h
Southern Bug (Південний Буг) 806 806 63 700 1 m/s 3,6 km/h
Choose one of these rivers that flow into the Black Sea for your "journey"
What is the idea of the project?
On March 5, 2021, a record was set in Ukraine: masters from different regions of Ukraine prepared at the same time 25 variants of Ukrainian borscht.

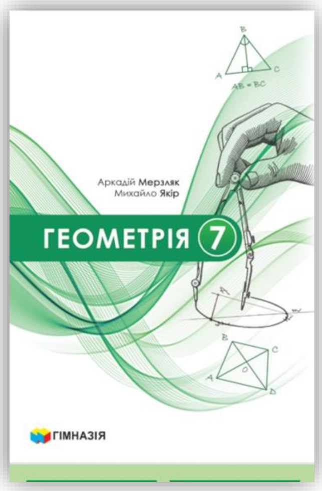
Методика проведення перших уроків планіметрії

План

1. Вступні зауваження.
2. Формування понять.
3. Вивчення аксіом.
4. Доведення перших теорем.
5. Особливості системи вправ.
6. Порівняльний аналіз матеріалу, що стосується перших уроків геометрії, поданого в різних підручниках.

1. Вступні зауваження.

Матеріал, що вивчається на перших уроках геометрії, відповідає параграфу 1 ***підручника авторського колективу: Аркадія Мерзляка та Михайла Якіра „Геометрія - 7” (2024 р.)*** [1] і включає первісні поняття геометрії, найпростіші геометричні фігури: відрізок, промінь, кут, трикутник, перпендикулярні прямі, вводяться поняття аксіоми, теореми, формулюються (в явному та неявному вигляді) всі аксіоми, що покладено в основу курсу.



Основна мета перших уроків геометрії (незалежно від підручника, за яким відбуватиметься навчання):

1) дати поняття про геометрію як науку;
2) систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури;
3) ввести первісні поняття;
4) вмотивувати необхідність означення деяких відомих їм фігур (відрізок, промінь, кут, перпендикулярні та паралельні прямі);
5) розглянути первісні та означувані відношення;
6) сформулювати основні властивості найпростіших фігур, які названі аксіомами.

На перших уроках також вводяться поняття аксіоми, теореми та їх доведення. В учнів формується потреба в доведенні нових тверджень за допомогою аксіом і вже відомих тверджень. Важливим завданням перших уроків є формування геометричного мовлення на основі вже відомої і нової для учнів термінології.

Необхідно також на перш уроках ознайомити учнів з навчальними посібниками, повідомити, які потрібні зошити і креслярські приладдя.

На перших уроках не ставиться за мету пояснювати роль і походження первісних понять, говорити про аксіоматичну побудову геометрії. Це можна свідомо обговорювати лише наприкінці вивчення планіметрії або на початку вивчення стереометрії. Однак дещо в загальних рисах учням можна пояснити, що і роблять автори підручника [1] наприкінці §1 (пункт 6, с. 51), при цьому наголошуючи, що не слід домагатися повного розуміння ідеї дедуктивної побудови геометрії від усіх учнів. Цю ідею вчитель повинен систематично проводити з перших уроків шляхом формування потреби доводити нові геометричні твердження на основі означень вже відомих понять, аксіом і доведених тверджень, а також умови задачі.

Загалом, автори підручника [1] вважають, що в межах загальноосвітньої школи з тією кількістю годин, які відводяться на вивчення цієї дисципліни реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії неможливо. **В основу даного підручника покладено наочно-дедуктивний принцип у поєднанні з частковою аксіоматизацією.**

Отже, зміст перших уроків геометрії здебільшого описовий: учитель не стільки креслить, обчислює, записує на дошці, скільки пояснює усно, формулює й аналізує різні означення, властивості тощо. А така інформація, як відомо, важкіше сприймається і запам’ятовується учнями, оскільки має більш високий рівень абстракції. Тому треба переходити від рівня D до рівня B_2 (див. лекцію 1) (а саме цей рівень і прийнято в даному підручнику) поступово, спочатку систематизуючи матеріал попередніх класів, чому автори підручника приділяють значну увагу у вступі.

Загалом, **автори даного підручника вважають, що мета вивчення геометрії в школі – навчити учнів застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язання практичних і теоретичних задач.**

2. Формування понять.

Щодо неозначуваних понять планіметрії „точка”, ”пряма”, то уявлення про них учні отримують ще в попередніх класах. Однак хоч уявлення про точку походить від об’єктів, що існують реально (місце дотику олівця до паперу, місце перетину двох ліній тощо), варто підкреслити, що в геометрії точка не має розмірів. Аналогічно, уявлення про пряму учні отримують з туго натягнутої нитки, однак, відзначаємо, пряма не має товщини, кінців і вважається необмежено продовженою.

У підручнику [1] зустрічаємо: «Пряма — це геометрична фігура, яка має певні властивості» (с. 11).

При формуванні поняття „належить” (п. 1) для точок і прямих на площині треба звернути увагу на можливість вживання тотожної термінології: „точки А і С належать прямій *а*”, „точки А і С лежать на прямій *а*”, „пряма *а* проходить через точки А і С”.

При формуванні поняття „лежить між” (п. 2) треба відзначити, ще цей термін вживається тільки стосовно трьох точок, які лежать на одній прямій. Корисно розв’язувати усні вправи на підведення під первісні відношення, використовуючи різні відомі учням фігури.

При роботі за підручником [1] на перших уроках геометрії вводиться 14 понять, яким дається строге означення (середина відрізка, відстань між точками, рівні кути, суміжні кути, доповняльні промені та ін.), наприклад:

Означення. Серединою відрізка АВ називають таку його точку С, що АС=СВ.

Означення. Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням. (Рівним відрізкам дається аналогічне означення).

В п. 3 (с. 30) вводиться поняття «бісектриса кута», дається строге означення.

Означення. Б і с е к т р и с о ю кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

Як же учням зображувати рівні кути? На с. 32 автори зазначають: „Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути”.

Щодо поняття «кут», то за концепцією цього підручника під цією фігурою розуміється частина площини, що володіє певними властивостями:

На рисунку 48, *а* зображено фігуру, яка складається з двох променів OA та OB, що мають спільний початок. Ця фігура ділить площину на дві частини, які виділено різними кольорами. Кожну із цих частин разом із променями OA та OB називають **кутом.**

Промені OA та OB називають **сторонами кута**, а точку O — **вершиною кута**.

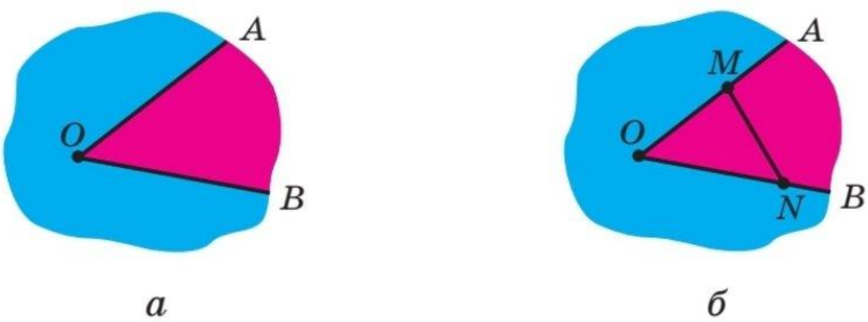


Рис. 48

Як бачимо, кути на рисунку 48, *а* зовні суттєво відрізняються. Ця відмінність визначена такою властивістю. На променях OA та OB виберемо довільні точки M і N (рис. 48, *б*). Відрізок MN належить «**пурпуровому**» куту, а «**блакитному**» куту належать лише кінці відрізка.

Надалі, говорячи «кут», матимемо на увазі лише той із них, який містить будь-який відрізок із кінцями на його сторонах. Ситуації, коли розглядатимуться кути, для яких ця умова не виконується, будуть спеціально обумовлені.

В підручнику [1] також є низка понять, що вводяться описово (аксіома, означення, відрізок, промінь, внутрішня точка відрізка, числове значення довжини відрізка та ін.).

Термін „означення” в підручнику пояснюється, що полегшує роботу вчителя, і зустрічається у першому ж пункті (с. 12). В першому ж пункті дається перше означення – двом прямим, які перетинаються. На думку авторів, це не ускладнює текст, а дозволяє його структурувати.

> Якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміна), то використовують **означення.** Наприклад:
>
> 1) годинником називають прилад для вимірювання часу;
>
> 2) геометрія — це розділ математики, який вивчає властивості фігур.
>
> Означення є і в геометрії.
>
> **Означення. Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.**

Поняття, що визначаються, на перших уроках планіметрії можна вводити і конкретно-індуктивним (наприклад суміжних кутів, перпендикулярних прямих) і абстрактно-дедуктивним („рівні відрізки”, „перпендикулярні відрізки”) методами.

Щодо поняття „геометрична фігура”, то в даному підручнику цей термін не обговорюється; автори вважають його інтуїтивно зрозумілим учням. Застосовуючи моделі фігур, варто підкреслити, що трикутники, многокутники, коло, круг можуть розміщуватися в одній площині всіма своїми точками, на відміну від паралелепіпеда, кулі, циліндра, що називаються тілами. Після цього природно ввести поняття планіметрії як розділу геометрії, що вивчає фігури на площині.

Отже, на перших уроках геометрії згадується і така фігура, як площина (у поясненні терміну „планіметрія”), хоча вони не є об’єктом вивчення в планіметрії (с.10).

Шкільний курс геометрії традиційно поділяють на **планіметрію** та **стереометрію.** Планіметрія вивчає фігури на площині («планум» у перекладі з латинської — «площина»), стереометрія — фігури в просторі («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Отже, ми приступаємо до вивчення планіметрії.

3. Вивчення аксіом.

Слід мати на увазі, що з аксіомами планіметрії на оперативному, практичному рівні учні фактично знайомляться при вивчення математики в 1-6 класах. Однак на тому етапі навчання ці властивості найпростіших фігур аксіомами не називалися.

У підручнику [1] передбачається введення 11 аксіом, 6 в явному вигляді та 5 в неявному.

12 § 1. Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

Основна властивість прямої. **Через будь-які дві точки[1] можна провести пряму, і до того ж тільки одну.**

Чому цю властивість прямої вважають основною?

Нехай про деяку *лінію* відомо лише те, що вона проходить через точки A і B. Для того щоб скласти уявлення про цю фігуру, такої інформації явно бракує. Адже через точки A і B можна провести багато різних ліній (рис. 14). Пряма ж задається цими точками однозначно. У цьому й полягає суть основної властивості прямої.

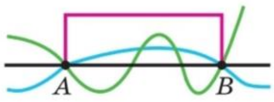


Рис. 14

Ця властивість дозволяє позначати пряму, називаючи дві будь-які її точки. Так, пряму, проведену через точки M і N, називають «пряма MN» (або «пряма NM»).

Основну властивість геометричної фігури ще називають аксіомою (докладніше про аксіоми ви дізнаєтеся в п. 6).

В неявному вигляді (не сказано, що це основні властивості фігур):

1. Якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
2. Для будь-яких точок А і В існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями.
3. Кожний відрізок має певну довжину.
4. Кожний кут має певну величину.
5. Будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини, для яких ця пряма є *межею.*

2. Відрізок і його довжина

На рисунку 20 зображено пряму a, яка проходить через точки A і B. Ці точки обмежують частину прямої a, яку виділено червоним кольором. Таку частину прямої разом з точками A і B називають **відрізком,** а точки A і B — **кінцями** цього відрізка.

Рис. 20

Рис. 21

Рис. 22

Для будь-яких двох точок існує *єдиний* відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто *відрізок своїми кінцями задається однозначно*. Тому відрізок позначають, називаючи його кінці. Наприклад, відрізок, зображений на рисунку 21, позначають так: MN або NM (читають: «відрізок MN» або «відрізок NM»).

На рисунку 22 зображено відрізок AB і точку X, яка належить цьому відрізку, проте не збігається із жодним його кінцем. Точку X називають **внутрішньою точкою** відрізка AB. У такому випадку також говорять, що точка X **лежить між точками** A і B.

Таким чином, відрізок AB складається з точок A і B, а також усіх точок прямої AB, які лежать між точками A і B.

Означення. Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 23 зображено рівні відрізки AB і CD. Записують: $AB = CD$.

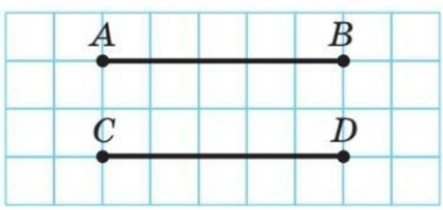


Рис. 23

Ви знаєте, що кожний відрізок має певну довжину й для її вимірювання треба вибрати **одиничний відрізок.** За одиничний можна взяти будь-який відрізок.

В явному вигляді (зазначено, що це основні властивості фігур).

6. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і д того ж тільки одну.
7. Якщо точка С є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB, тобто AB=AC+CB. Якщо відрізків" = „сума довжин відрізків").
8. Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB, то ∠AOB = ∠AOC + ∠COB.
9. Для даного кута ABC і даного променя B1C1 існує єдиний кут A1B1C1, який дорівнює куту ABC, такий, що точка C1 лежить у заданій півплощині відносно прямої B1C1.

В § 2 даного підручника міститься також ***основна властивість (аксіома) рівності трикутників***.

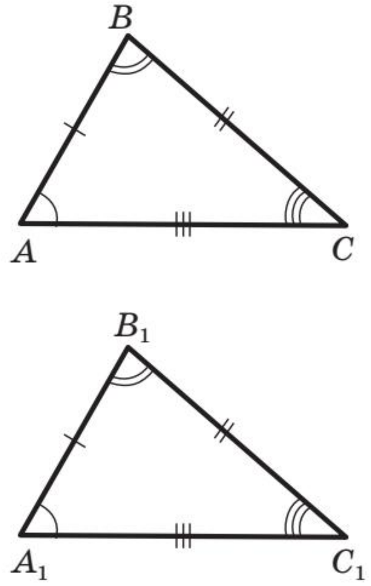


Рис. 117

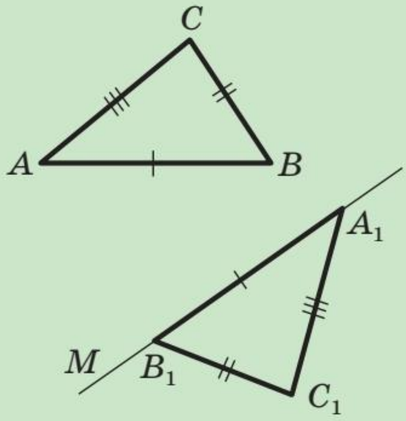


Рис. 118

Аксіома про існування трикутника, рівного даному. **Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC, такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M, а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M** (рис. 118).

Тільки в п. 13 з´являється ***основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих).*** Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Спочатку розглядається задача на побудову прямої, паралельної даній, через точку, що не належить даній прямій – у такий спосіб доводиться факт існування прямої, паралельної даній (с. 126).

13. Паралельні прямі

Означення. Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

На рисунку 204 зображено паралельні прямі a і b. Записують: $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b»).

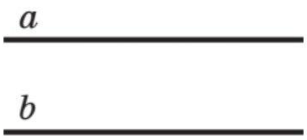


Рис. 204

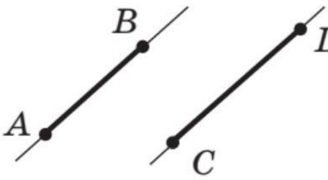


Рис. 205

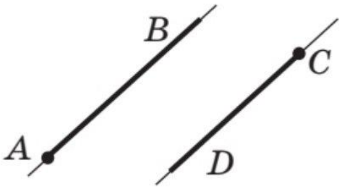


Рис. 206

Якщо два відрізки лежать на паралельних прямих, то їх називають паралельними. На рисунку 205 відрізки AB і CD паралельні. Записують: $AB \parallel CD$.

Також можна говорити про паралельність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 206 зображено паралельні промені AB і CD.

Теорема 13.1 (ознака паралельності прямих). ***Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 207 $a \perp c$ і $b \perp c$. Треба довести, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці M (рис. 208). Тоді через точку M, яка не належить прямій c, проходять дві прямі a і b, перпендикулярні до прямої c. Це суперечить тому, що через точку можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної (теорема 7.1). Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $a \parallel b$. ●

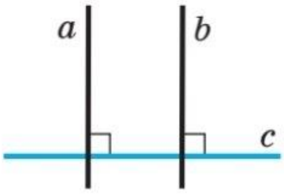


Рис. 207

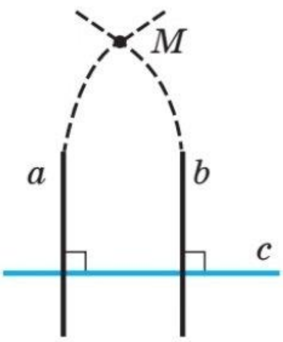


Рис. 208

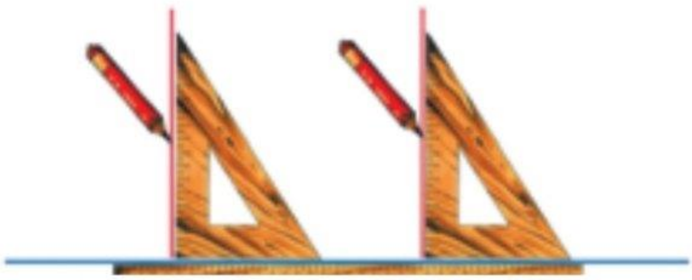


Рис. 209

Доведена теорема пояснює, чому за допомогою лінійки та косинця можна будувати паралельні прямі так, як показано на рисунку 209.

Наслідок. ***Через дану точку M, яка не належить прямій a, можна провести пряму b, паралельну прямій a.***

Доведення. ⊙ Нехай точка M не належить прямій a (рис. 210).

Проведемо через точку M пряму c, перпендикулярну до прямої a. Тепер через точку M проведемо пряму b, перпендикулярну до прямої c. За ознакою паралельності прямих (теорема 13.1) отримуємо, що $a \parallel b$. ●

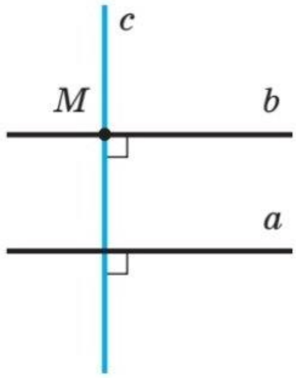


Рис. 210

Чи можна через точку M (рис. 210) провести ще одну пряму, паралельну прямій a? Відповідь на це запитання дає аксіома паралельності прямих.

Аксіома паралельності прямих. Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Теорема 13.2. ***Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.***

Доведення. Нехай $b \parallel a$ і $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а перетинаються в деякій точці M (рис. 211). Тоді маємо, що через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a, а це суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $b \parallel c$.

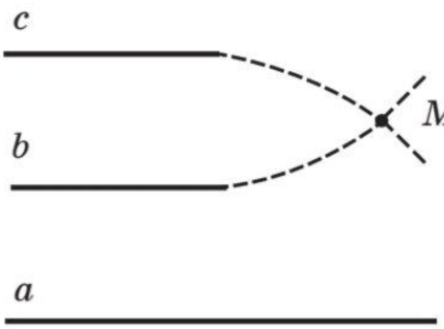


Рис. 211

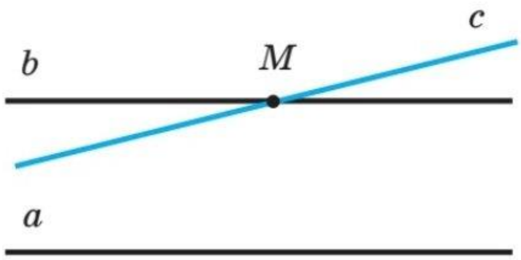


Рис. 212

Задача. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні, пряма c перетинає пряму b у точці M (рис. 212). Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тоді $c \parallel a$. Але в цьому випадку через точку M проходять дві прямі b і c, які паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення неправильне, отже, пряма c перетинає пряму a.

В тексті підручника [1] також зустрічаються формулювання, які в підручнику О. В. Погорєлова було прийнято за аксіоми, наприклад: будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини, для яких ця пряма є *межею*. Правда, О. В. Погорєлов не вводив поняття „*межі півплощини*".

Вивчення основних властивостей найпростіших фігур і формулювання кожної властивості доцільно починати з розгляду відповідних фігур і практичних дій учнів:

- ✓ вибір точок на прямій і поза нею;
- ✓ проведення прямої через дві даної точки;
- ✓ вимірювання довжини відрізка;
- ✓ вимірювання величини кута;
- ✓ проводити паралельні прямі та ін.

Помічені властивості учні можуть сформулювати самостійно у вигляді тверджень, які пізніше будуть називатися аксіомами.

4. Доведення перших теорем.

В умовах роботи за підручником [1] поняття про теорему вводиться в першому ж пункті:

> Розглянемо таку задачу. Відомо, що всі мешканці Геометричної вулиці — математики та математикині. Євген живе за адресою вул. Геометрична, 5. Чи є Євген математиком?
>
> За умовою задачі Євген живе на Геометричній вулиці. А оскільки всі мешканці цієї вулиці математики та математикині, то Євген — математик.
>
> Наведені логічні міркування називають **доведенням** того факту, що Євген — математик.
>
> У математиці твердження, істинність якого встановлюють за допомогою доведення, називають **теоремою.**

Крім того, вводиться і перша теорема з доведенням. Автори обґрунтовують доцільність такого рішення тим, що:

1) дітям відразу стає зрозумілим, що від них будуть вимагати доказових міркувань;

2) це дозволяє відразу продемонструвати застосування першої аксіоми (основної властивості);

3) це дозволяє скоріше вводити задачі на доведення.

Перша теорема: Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Така теорема має категоричну форму, проте можна пояснити структуру теореми (умова і висновок) також треба пояснити на прикладі формулювання цієї теореми, бо іншого зразка учні ще не мають. Можна також показати учням зразок скороченого запису умови і висновку теореми, проілюструвати рисунком. Треба привчати учнів до культури записів на дошці і в зошиті: рекомендувати рисунок розміщувати зліва, а скорочений запис змісту теореми (задачі) – справа. Хоча у підручнику [1] не використовується символіка теорії множин, учитель може ввести символи $\in$ і $\notin$ для точок.

Перша теорема доводиться методом від супротивного, що показує його надважливість в курсі геометрії, тому необхідно учням пояснити ідею метода. Пізніше треба дати навчальний алгоритм і орієнтир доцільності використання метода від супротивного: порівнюючи обидва доведення, учні помічають їх суттєві однакові кроки і за допомогою вчителя можуть сформулювати алгоритм застосування цього методу; орієнтир можливості застосування методу від супротивного: неможливість чого-небудь і єдність чого-небудь в математиці завжди доводиться методом від супротивного, також цим методом іноді користуються при доведенні паралельності, перпендикулярності, обернених тверджень.

Також в першому параграфі будуть доведені ще три теореми: про суміжні, вертикальні кути та існування та єдність прямої, перпендикулярної даної в кожній її точці.

На перших уроках геометрії доцільним є такий варіант опрацювання доведення: воно пояснюється, закріплюється повторним поясненням чи відтворенням одним з учнів, тільки після цього, якщо вчитель вважає за потрібне, діти записують скорочений запис доведення у відведений для цього час.

Не слід ставити негативні оцінки учням за нездатність цілком відтворити доведення відразу після його вивчення або на наступному уроці. На рівні обов’язкових результатів навчання можна вимагати вміння сформулювати теорему, виконати рисунок, висловити ідею доведення, назвати загальний хід і твердження, що використовувалися при доведенні.

Цікаво, що п. 12 (с. 106) підручника йде під назвою „теореми”, і до цього пункту надано систему задач.

Наприклад:

№ 295. Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного: 1) якщо трикутник рівносторонній, то його кути рівні; 2) якщо два кути вертикальні, то їхні бісектриси є доповняльними променями; 3) якщо кут між бісектрисами двох кутів прямий, то ці кути суміжні; 4) якщо сторона та протилежний їй кут одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та протилежному їй куту другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Для яких із даних тверджень:

1) пряме й обернене твердження є правильними; 2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним; 3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

5. Особливості системи вправ.

Перші уроки геометрії включають у себе всі типи задач: на доведення (№№ 135, 140), обчислення (№№ 136, 138), побудову (№№ 124, 125) і дослідження (№143, 144 із *).

48 **§ 1.** Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

а б в

Рис. 102

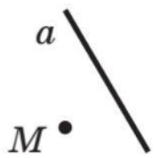


Рис. 103

123.° Перерисуйте в зошит рисунок 103. Користуючись косинцем, опустіть із точки M перпендикуляр на пряму a. Проведіть із точки M які-небудь дві похилі до прямої a.

124.° Проведіть пряму c і позначте на ній точку K. Користуючись косинцем, проведіть через точку K пряму, перпендикулярну до прямої c.

125.° Проведіть пряму d і позначте точку M, яка їй не належить. За допомогою косинця опустіть із точки M перпендикуляр на пряму d. Проведіть із точки M які-небудь дві похилі до прямої d.

126.° Накресліть кут ABK, який дорівнює: 1) $73°$; 2) $146°$. Позначте на промені BK точку C і проведіть через неї прямі, перпендикулярні до прямих AB і BK.

127.° Накресліть два перпендикулярних відрізки так, щоб вони: 1) перетиналися та не мали спільного кінця; 2) не мали спільних точок; 3) мали спільний кінець.

128.° Накресліть два перпендикулярних промені так, щоб вони: 1) перетиналися; 2) не мали спільних точок.

135.• Доведіть, що коли бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні, то точки A, O і C лежать на одній прямій.

136.• На рисунку 108 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42°$, $\angle MOC + {}$ ${} + \angle BOK = 130°$. Знайдіть: 1) кут MOK; 2) кут MOD.

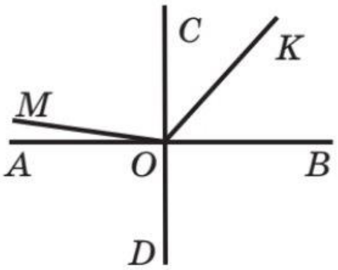


Рис. 108

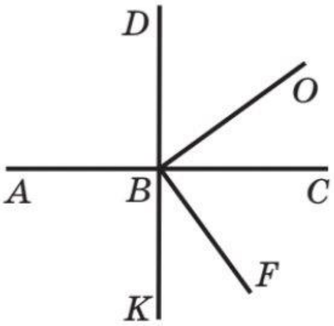


Рис. 109

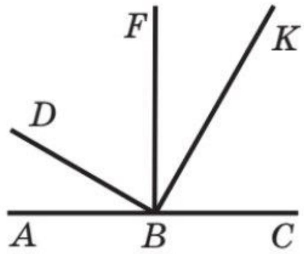


Рис. 110

137.• На рисунку 109 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54°$. Знайдіть кут ABF.

138.• Кут ABC дорівнює $160°$, промені BK і BM проходять між сторонами цього кута й перпендикулярні до них. Знайдіть кут MBK.

139.• На рисунку 110 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle FBK$.

140.• На рисунку 110 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Доведіть, що $BF \perp AC$.

141.•• Із вершини кута ABC, який дорівнює $70°$, проведено промені BD і BF так, що $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, промені BD і BC належать куту ABF. Знайдіть кути DBF і ABF.

142.•• Із вершини кута ABC, який дорівнює $130°$, проведено промені BD і BF так, що $BD \perp AB$, $BF \perp BC$, промінь BF належить куту ABC, промінь BA належить куту DBF. Знайдіть кут DBF.

143.* Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює $17°$, побудуйте кут: 1) $5°$; 2) $12°$.

Система задач, які розв’язуються на перших уроках геометрії, спрямована насамперед на:

- засвоєння основних властивостей найпростіших фігур;
- формування вмінь посилатися на аксіоми, теореми й означення при доведенні нових тверджень;
- засвоєння геометричної мови.

У цій системі задач значне місце треба відвести задачам на *практичні дії учнів* щодо проведення прямих, вибір точок, які задовольняють певні вимоги, поясненню мовою геометрії помічених на рисунку властивостей точок, прямих, відрізків, кутів. Задачі, що пов’язані з визначенням довжини відрізків, градусної міри кутів, розвивають в учнів окомір, практичні навички вимірювання і побудови відрізків і кутів заданої величини.

Задачі на побудову бажано виконувати і за допомогою креслярських інструментів, і на „око” (№47-48).

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

47. Порівняйте на око відрізки AB і CD (рис. 42). Перевірте свій висновок вимірюванням.

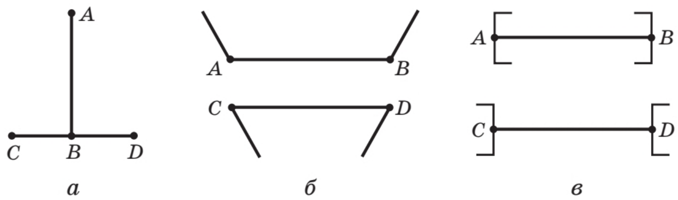


Рис. 42

26 **§ 1.** Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

48. Порівняйте на око відрізки AB і BC (рис. 43). Перевірте свій висновок вимірюванням.

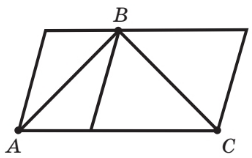


Рис. 43

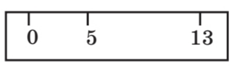


Рис. 44

Треба варіювати способи розміщення прямих: треба, щоб учні зображували їх не тільки горизонтально, а й вертикально і похило.

При розв'язуванні задач на обчислення і доведення слід вимагати, щоб учні наводили і коротко записували необхідні пояснення. Задачі на дослідження на перших уроках геометрії доцільно розв'язувати усно (з ілюстрацією на рис.).

У параграфі надано розв'язання деяких задач підвищеного рівня складності:

20 § 1. Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

Задача. Точки A, B і C належать одній прямій, $AB = 8$ см, відрізок AC на 2 см довший за відрізок BC. Знайдіть відрізки AC і BC.

Розв'язання. В умові не вказано, яким є взаємне розміщення даних точок на прямій. Тому розглянемо три можливих випадки.

1) Точка B — внутрішня точка відрізка AC (рис. 29). Тоді відрізок AC довший за відрізок BC на довжину відрізка AB, тобто на 8 см. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

2) Точка C — внутрішня точка відрізка AB (рис. 30). У цьому випадку $AB + BC = AB$. Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = (x + 2)$ см. Маємо:

$$x + 2 + x = 8;$$
$$x = 3.$$

Отже, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.

Рис. 29

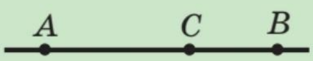


Рис. 30

Рис. 31

3) Точка A — внутрішня точка відрізка BC (рис. 31). У цьому випадку $AB + AC = BC$ і тоді $AC < BC$. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

Відповідь: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см.

Інтерес представляють задачі, де необхідно встановити, чи правильні твердження (№ 106).

№ 106. Чи є правильним твердження: 1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут; 2) для кожного кута, відмінного від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут; 3) якщо кути рівні, то вони вертикальні; 4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні; 5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні; 6) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий; 7) якщо два кути суміжні, то один із них більший за другий; 8) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони суміжні; 9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони не суміжні; 10) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні; 11) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі; 12) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні; 13) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?

Після кожного пункту автори пропонують рубрику: „Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте”.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

51. Із прямокутників розмірами 1×1, 1×2, 1×3, ..., 1×13 складіть прямокутник, кожна сторона якого більша за 1.

Після кожного параграфу автори пропонують тестове контрольне завдання:

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Скільки прямих визначають три точки, які не лежать на одній прямій?

А) 2; Б) 4; В) 3; Г) 1.

2. Скільки можна провести відрізків, які містять дві задані точки?

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) безліч.

3. Точка M є внутрішньою точкою відрізка PQ. Яке з поданих тверджень є правильним?

А) $PM + MQ = PQ$; В) $MQ = PQ + PM$;
Б) $PQ = PM - MQ$; Г) $PM = PQ + MQ$.

4. Точки A, B і C лежать на одній прямій, причому $BC = 8$ см, $AB - BC = 8$ см. Яке з поданих тверджень є правильним?

А) Точка A — середина відрізка BC;
Б) Точка B — середина відрізка AC;
В) точка C — середина відрізка AB;
Г) точки A і B збігаються.

5. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 14 см?

А) Безліч; Б) 1; В) 2; Г) жодної.

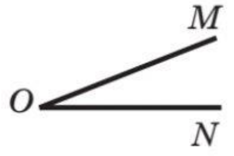
6. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 12 см?

А) Жодної; Б) 2; В) безліч; Г) 1.

7. Два промені є доповняльними, якщо:

А) вони мають спільний початок;
Б) їхнім об'єднанням є пряма й вони мають спільний початок;
В) вони належать одній прямій;
Г) їхнім об'єднанням є пряма.

8. Яке позначення кута, зображеного на рисунку, є неправильним?



А) $\angle O$; В) $\angle MON$;
Б) $\angle OMN$; Г) $\angle NOM$.

9. Яке з поданих тверджень є хибним?
А) Суміжні кути мають спільну вершину;
Б) суміжні кути мають спільну сторону;
В) завжди один із суміжних кутів гострий, а другий — тупий;
Г) якщо кути *AOC* і *COB* суміжні, то промені *OA* і *OB* доповняльні.

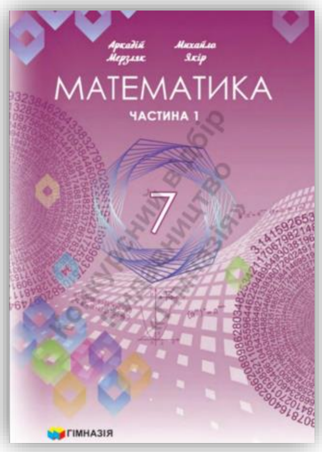
10. Яке з поданих тверджень є хибним?
А) Вертикальні кути рівні;
Б) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
В) вертикальні кути мають спільну вершину;
Г) сторони вертикальних кутів утворюють дві пари доповняльних променів.

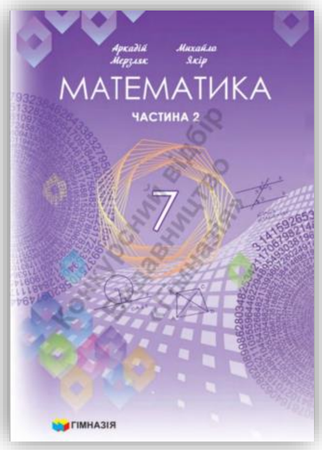
11. Яке з поданих тверджень є правильним?
А) Перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку;
Б) перпендикулярні промені завжди мають спільну точку;
В) перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку;
Г) перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку.

Система задач має диференційований характер і допомагає здійснювати індивідуальний підхід. Підручник містить задачі усіх рівнів – від найпростішого до олімпіадного. На думку авторів, *„не важкі задачі визначають складність дидактичного матеріалу, а відсутність простих”.*

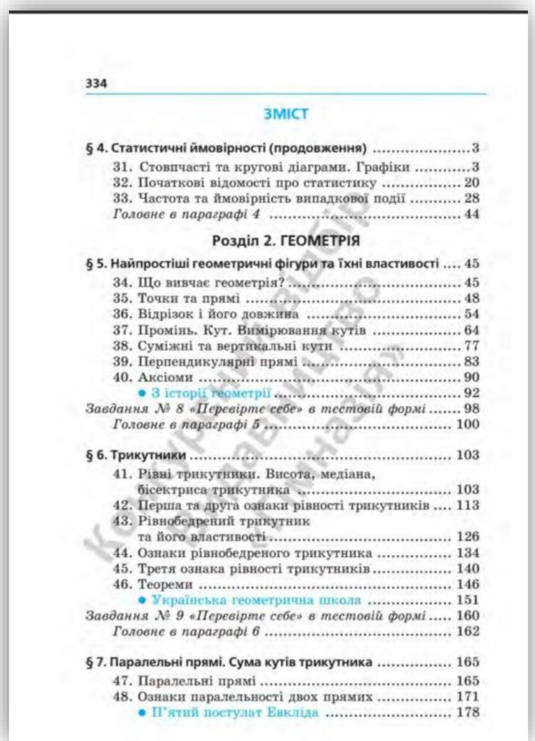
6. Порівняльний аналіз матеріалу, що стосується перших уроків геометрії, поданого в паралельних підручниках і альтернативних методиках.

Слід зазначити, що в ***інтегрованому підручнику тих самих авторів А. Мерзляк і М. Якір «Математика - 7»*** матеріал, який стосується вивчення найпростіших фігур та їх властивостей подано ідентично, тобто без будь-яких змін. Цей підручник представлено у двох частинах, причому перша частина присвячена повністю алгебраїчному матеріалу, а друга – переважно геометричному.



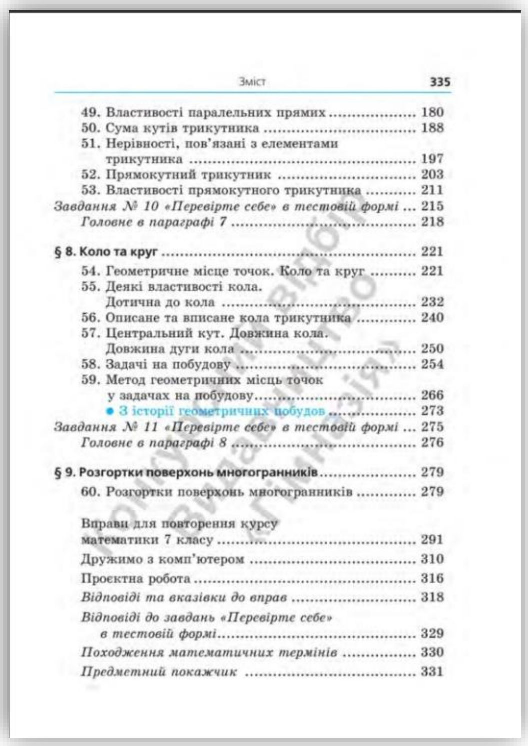


Відмінністю цього підручника від підручника тих самих авторів «Геометрія - 7» є наявність останнього параграфу 9 «Розгортки поверхонь многогранників».



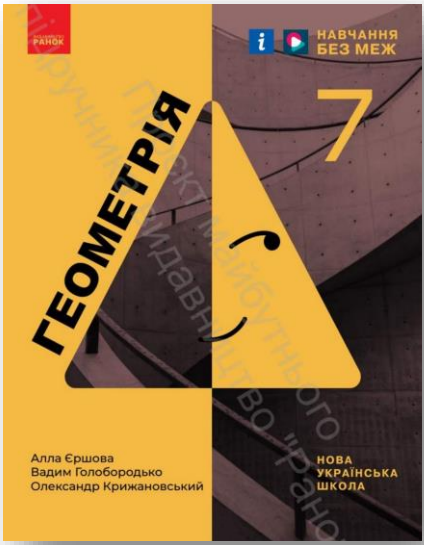
334

ЗМІСТ



Зміст 335

Автори підручника „Геометрія - 7” Єршової А.П., Голобородько В.В., Крижанівського О.Ф. (2024) [2], розробленого згідно Концепції НУШ, також першу главу присвячують вивченню простіших геометричних фігур та їх властивостей, вводячи первісні поняття „точка” і „пряма”.



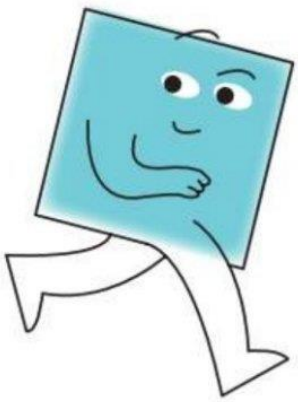
Говорячи про властивості основних геометричних фігур, автори **відразу** в п. 1.2 вводять термін „аксіома”, пояснюючи його.

Аксіома — від грецького «аксіос» — загальноприйнятий, безперечний, який не викликає сумніву

Аксіома проведення прямої

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Із цього випливає, що дві різні прямі не можуть мати дві чи більше спільних точок: вони або мають одну спільну точку, або не мають спільних точок узагалі. Пряму з вибраними на ній двома точками можна позначати великими літерами, якими названо ці точки. Так, пряму на рис. 3 можна назвати прямою AB або прямою BA.



[1] Тут і далі, кажучи «дві точки» («дві прямі», «три точки» тощо), вважаємо, що ці точки (прямі) є різними, тобто не накладаються одна на іншу. В окремих випадках задля зручності будемо наголошувати на тому, що відповідні об'єкти не збігаються, прямо у формулюваннях означень, теорем тощо.

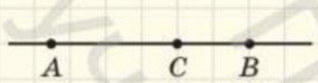
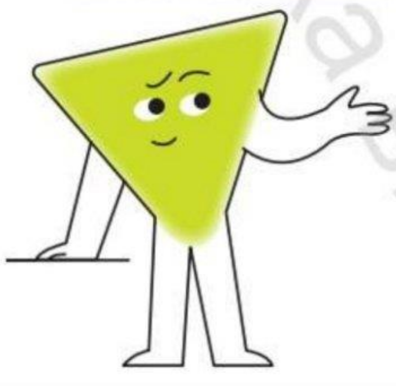


Рис. 4. Точка C лежить між точками A і B

Через три точки площини не завжди можна провести пряму. Так, на рис. 1 не можна провести пряму через точки A, B, D.

На рис. 4 точки A, B, C лежать на одній прямій, причому точка C лежить між точками A і B. Можна також сказати, що точки A і B лежать по різні боки від точки C.

Точки B і C лежать по один бік від точки A, а точки A і C лежать по один бік від точки B.



Аксіома розміщення точок на прямій

Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

В основу курсу покладено 7 аксіом.

Аксіома проведення прямої. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Аксіома розміщення точок на прямій. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Аксіома вимірювання відрізків. Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом у заданих одиницях вимірювання. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які відрізок ділиться будь-якою його точкою.

Аксіома відкладання відрізків. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

Аксіома вимірювання кутів. Кожний кут має градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Якщо промінь ділить даний кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів.

Аксіома відкладання кутів. Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в заданий бік від прямої кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

Аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда). Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній.

У порівнянні з підручником [1], в якому прийнято 6 аксіом (у явному вигляді), тут додано аксіому про взаємне розташування трьох точок на одній прямій, аксіоми відкладання відрізків, аксіому паралельних (сформульовано по-іншому). В цьому смислі аксіоматика даного підручника нагадує систему аксіом за підручником О. В. Погорєлова, про що автори і зазначають **наприкінці підручника у Додатку 1.**

Можна також зазначити, що деякі постулати даються в цьому підручнику в неявному вигляді:

2.3. Вимірювання та відкладання відрізків

Важливою властивістю відрізка є його довжина. Вона виражається додатним числом, що може бути визначене порівнянням даного відрізка з відрізком, прийнятим за одиницю вимірювання,— одиничним відрізком. За одиничний можна обрати будь-який відрізок. На практиці обирають одиничні відрізки завдовжки 1 мм, 1 см, 1 м тощо.

Перша теорема в даному підручнику зустрічається також в першій главі, однак не в першому ж пункті (в п. 4.2). Автори визначають поняття ”теорема” і формулюють першу теорему:

Теорема 1.1. Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

Далі доводять її методом від супротивного (як і в підручнику [1], перша теорема доведена цим методом).

4.2. Теорема про дві прямі, паралельні третій

На підставі аксіом за допомогою логічних міркувань (доведень) ми будемо отримувати нові геометричні факти. У математиці твердження, справедливість якого встановлюється шляхом доведення, називається **теоремою**. Для доведення теорем використовують означення й аксіоми, а також теореми, доведені раніше.

Отже, сформулюємо й доведемо першу теорему — теорему про паралельні прямі (рис. 31).

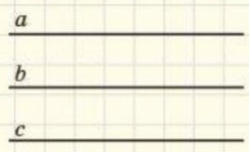


Рис. 31. Дві прямі, паралельні третій

Теорема (про дві прямі, паралельні третій)

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

Доведення

Нехай a, b і c — дані прямі, причому $a \parallel c$, $b \parallel c$. Доведемо, що прямі a і b паралельні.

[1] Насправді має місце таке твердження: «Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну». Можливість провести таку пряму ми доведемо в п. 14.3.

45

Розділ I. Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині

Теорема — від грецького «теорео» — розглядаю, обмірковую

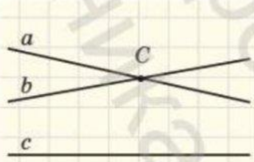


Рис. 32. До припущення про те, що прямі a і b не паралельні

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони мають перетинатись у деякій точці C (рис. 32). У такому разі через точку C проходитимуть дві прямі, паралельні прямій c. Але за аксіомою паралельних прямих через точку поза даною прямою може проходити не більш ніж одна пряма, паралельна даній. Отже, наше припущення про те, що прямі a і b можуть перетинатися, хибне, тобто ці прямі паралельні. Теорему доведено.

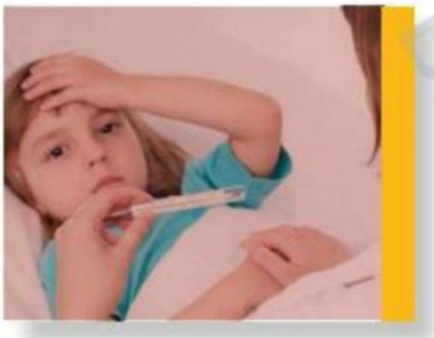
Застосуємо доведену теорему для розв'язування задачі.

Далі в п. 4.3. автори пояснюють структуру теорем, не відкладаючи цю розмову надовго (в підручнику [1] це поняття обговорюється наприкінці §2).

4.3. Умова й висновок теореми. Доведення від супротивного

У формулюванні будь-якої теореми завжди можна чітко виділити дві частини: те, що дано **(умова)**, і те, що треба довести **(висновок)**. Переформулюємо теорему про дві прямі, паралельні третій, у такий спосіб: «Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то ці прямі паралельні між собою». Нам відомо, що **дві прямі паралельні третій прямій** — це умова теореми. Потрібно довести, що **ці прямі паралельні між собою** — це висновок теореми. Узагалі, виділити умову й висновок найлегше для твердження, поданого у вигляді: «Якщо... **(умова)**, то... **(висновок)**».

Також вони дають схему доведення від супротивного.



Метод доведення від супротивного інколи використовується як в інших науках, так і в повсякденному житті. Наприклад, лікар, щоб переконатися, що пацієнт не хворий на грип, може міркувати так: «Припустимо, що у хворого грип; тоді в нього мають бути характерні симптоми: підвищення температури, головний біль тощо. Але цих симптомів немає, тобто припущення про грип хибне. Отже, пацієнт не хворий на грип».

Схема доведення від супротивного

Твердження	
Якщо A, то B	
Доведення	
1. *Припущення.* Нехай A, але не B	Припускаємо, що умова теореми справджується, а висновок — ні
2. *Міркування*	Міркуємо, спираючись на аксіоми та раніше доведені теореми
3. *Суперечність*	Отримуємо нове твердження, що суперечить або даній умові, або одній з аксіом, або раніше доведеній теоремі
4. *Висновок.* Тоді B	Переконуємося, що наше припущення хибне, тобто дане твердження є правильним

48

Також в главі 1 будуть доведено ще три теореми: про суміжні, вертикальні кути і ще одну ознаку паралельності прямих.

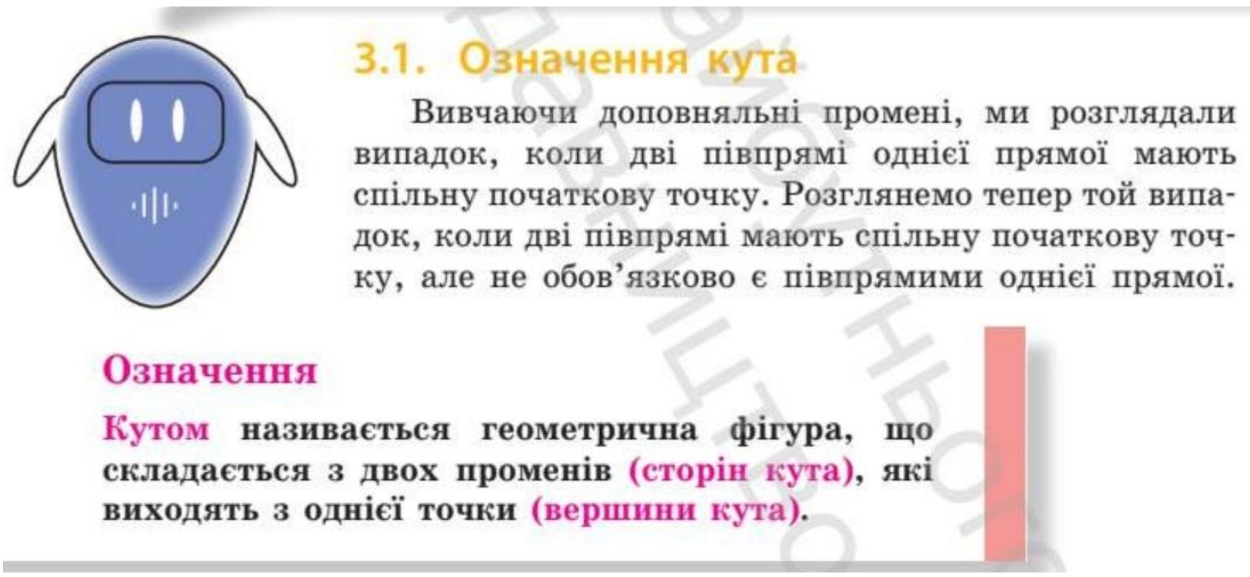
Щодо означення понять, то тут також є деякі розбіжності. Наприклад, якщо в підручнику [1] поняття „відрізок” вводиться описово (А. Мерзляк із співавторами вважає це поняття інтуїтивно зрозумілим учням), то в підручнику [2] йому дається чітке означення:

Означення. Відрізком називається частина прямої, що складається з двох даних точок цієї прямої (кінців відрізка) і всіх точок, що лежать між ними.

Так само дається строге *означення променя як частини прямої*.

В першій главі даного підручника вводиться поняття паралельних прямих, на відміну від підручника [1], де цей термін з'являється лише в §3 (п. 13).

Відміни є і у визначенні поняття кута, яке в підручнику [1] визначається як частина площини, а в [2] – як межа частини площини.



3.1. Означення кута

Вивчаючи доповняльні промені, ми розглядали випадок, коли дві півпрямі однієї прямої мають спільну початкову точку. Розглянемо тепер той випадок, коли дві півпрямі мають спільну початкову точку, але не обов'язково є півпрямими однієї прямої.

Означення

Кутом називається геометрична фігура, що складається з двох променів (сторін кута), які виходять з однієї точки (вершини кута).

Деякі поняття визначаються однаково в цих підручниках, наприклад, рівних відрізків, суміжних кутів, вертикальних кутів та ін. Також у підручнику [2] трактується поняття «означення».

1.4. Означення і його роль у геометрії

У п. 1.3 описано два поняття: «промінь», яке відоме вам із курсу математики 5 класу, і нове — «доповняльні промені». Завдяки цим описам можна чітко уявити, які саме фігури розглядаються. Наведені описи є **означеннями**; вони вказують на особливості описаної фігури, що відрізняють її від інших фігур.

Цікавим є пункт 3.4. «Аналогія в геометрії» (с. 36) у підручнику [2].

3.4. Аналогія в геометрії

Іноді в ході розв'язування задач про властивості відрізків і кутів застосовуються одні й ті самі методи й підходи. Це пояснюється схожістю деяких властивостей цих фігур. Така схожість у науці називається аналогією.

Пояснимо суть аналогії на прикладі двох задач.

Задача 1	Задача 2
На відрізку AB, який дорівнює 20 см, позначено точку C. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і CB.	Промінь c ділить кут (ab), що дорівнює 140°, на два кути. Знайдіть кут між бісектрисами кутів (ac) і (cb).

На перший погляд, перед нами зовсім різні задачі, адже в першій ідеться про відрізки, а в другій — про кути. Однак в обох задачах дано певне «ціле», поділене на частини. Крім того, поняття середини відрізка і бісектриси кута пов'язані з поділом цілого навпіл, і в обох задачах нам необхідно знайти суму половин кожної із частин фігури.

Розв'язання

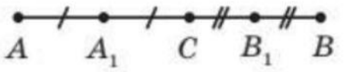


Рис. 26

Нехай точка C належить відрізку AB, точки A_1 і B_1 — середини відрізків AC і CB відповідно (рис. 26). Тоді $A_1C = \frac{1}{2}AC$, $CB_1 = \frac{1}{2}CB$.

Розв'язання

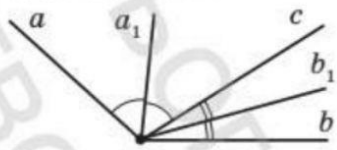


Рис. 27

Нехай промінь c ділить кут (ab) на два кути, промені a_1 і b_1 — бісектриси кутів (ac) і (cb) відповідно (рис. 27).

36

Щодо задачного матеріалу, то в підручнику [2] окремо до кожного параграфу виділено *усні вправи, графічні вправи і письмові вправи, які поділено на три рівні складності,* що забезпечує індивідуальний і диференційований підхід.

Після глави 1 надано підсумки, що забезпечують систематизацію і узагальнення матеріалу (с. 71).

Надано можливість онлайн підготовки до Контрольної роботи, також даються тренувальні вправи до підготовки (с. 77):

Задачі для підготовки до діагностичної роботи № 1

1. На промені з початком у точці A побудуйте відрізки AB і AC так, щоб $AB = 8$ см, $AC = 5$ см.
а) Яка з трьох даних точок лежить між двома іншими?
б) Яку довжину має відрізок BC?

2. Промінь OL ділить кут MON на два кути так, що $\angle MOL = 84°$ і $\angle LON = 18°$. Промінь OK — бісектриса кута MON. Знайдіть кут KOL.

3. Прямі a і b перетинаються, пряма c паралельна прямій a. Доведіть методом від супротивного, що прямі b і c не паралельні.

4. Різниця двох суміжних кутів дорівнює одному з них. Знайдіть ці суміжні кути.

5. Сума трьох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, на 60° більша, ніж четвертий кут. Знайдіть кут між даними прямими.

6. Кути AOB і COB суміжні, причому $\angle AOB = 108°$. З точки O проведено промінь OD так, що $\angle COD = 126°$. Чи є промінь OD бісектрисою кута AOB? Відповідь обґрунтуйте.

Виконайте тренувальні тестові завдання.

77

Розглянемо особливості викладу матеріалу, що стосується перших уроків планіметрії за ***інтегрованим підручником «Математика – 7. Частина 1»*** [3] ***авторів О. Школьний, Є. Нелін, А. Миляник, Ю. Простакова.***

Зміст

Розділ 4. ПОНЯТТЯ ТА ЇХ ОЗНАЧЕННЯ, ТВЕРДЖЕННЯ ТА ЇХ ДОВЕДЕННЯ

Систему аксіом в цьому підручнику прийнято таку:

Для будь-якої прямої існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Кожен відрізок має довжину, більшу за нуль.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і до того ж тільки один.

Кожна пряма на площині розбиває цю площину на дві півплощини.

Основні властивості кутів описуються такими аксіомами.

Основні властивості кутів

1. Кожен кут має градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут має градусну міру 180°.
2. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які розбивається цей кут будь-яким променем, що проходить між його сторонами.
3. Від будь-якого променя в задану півплощину можна відкласти кут заданої градусної міри, і до того ж тільки один.

Також можна зустріти постулат, оформлений у такому вигляді (не вказано, що це аксіома):

Очевидно, що поняття «належати» та «лежати між» також є неозначуваними. Вони інтуїтивно зрозумілі та легко моделюються за допомогою рисунків. Наприклад, очевидним є те, що з трьох точок на прямій одна і лише одна лежить між двома іншими.

Бачимо, що автори описують не тільки *первинні поняття, а й відношення*.

Що стосується означуваних понять, то, наприклад, *поняття кута* вводиться у такий спосіб:

Геометричну фігуру, яка складається з двох променів, що мають спільний початок, називають кутом. Точку, яка є спільним початком променів, називають вершиною кута, а самі промені — сторонами кута.

Кут здебільшого позначають або однією великою латинською буквою (вершина кута), або трьома буквами, причому вершина кута має бути розташована посередині. Наприклад, на рис. 17.2 зображено кут KLP, або кут L. Для позначення кутів також використовуються значок $\angle$. Наприклад: $\angle KLP$, $\angle L$.

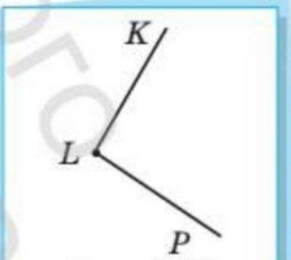


Рис. 17.2

Водночас, автори вводять і поняття *«плоский кут»:*

Кут розбиває площину на дві частини, кожну з яких називають **плоским кутом** (див. рис. 17.4).

Нехай задано кут ABC, який не є розгорнутим, і промінь із початком у точці B. Вважатимемо, що цей промінь **проходить між сторонами кута** ABC, якщо він перетинає відрізок AC. Наприклад, на рис. 17.5 промінь BM проходить між сторонами кута ABC, а промінь BK — ні.

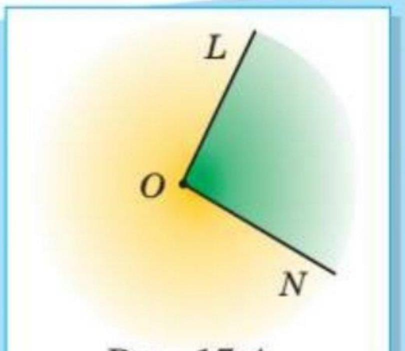


Рис. 17.4

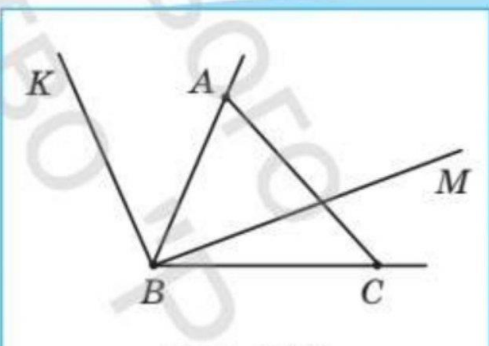


Рис. 17.5

Перша теорема курсу вводиться в підручнику [3] також у першому ж пункті, як і у підручнику [1], проте це виявляється більш виправданим, оскільки пропедевтика, пов'язана з розумінням школярами сутності теорем та їх доведень була виконана у попередньому параграфі 15 підручника [3].

ТЕОРЕМА (про кількість спільних точок прямих, що перетинаються).
Якщо дві різні прямі перетинаються, то вони можуть мати лише одну спільну точку.

Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо *супротивне*: дві різні прямі m і l мають більше однієї спільної точки. Тоді існують дві точки — K і P, що належать як прямій m,

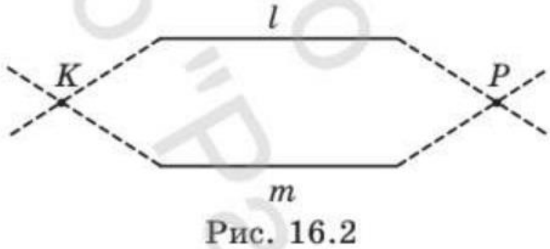


Рис. 16.2

так і прямій l (рис. 16.2). Тобто через точки K і P проведено дві *різні* прямі. Але це суперечить аксіомі про те, що така пряма може бути *тільки одна*. Отже, наше припущення неправильне, а правильним є те, що було потрібно довести: якщо дві різні прямі перетинаються, то вони мають тільки *одну* спільну точку.

Аналогічне зауваження можна надати і щодо методу доведення першої теореми підручника – методу від супротивного: учні та учениці вже обізнані з сутністю цього метода із попереднього параграфа 15.

Щодо задач, то їх система, диференційована за чотирма рівнями, подається під рубрикою «Тренажерний зал». Також деякі задачі з розв’язанням демонструються в теоретичній частині параграфа:

Розглянемо складнішу задачу.

Відомо, що села Абрикосове, Вишневе й Сливове розташовані на прямолінійній дорозі, причому село Вишневе розташовано між двома іншими селами. Відстань від Абрикосового до Сливового дорівнює 12 км, а відстань від Абрикосового до Вишневого на 2 км більша за відстань від Вишневого до Сливового. Знайдіть відстані від села Вишневе до двох інших сіл.

Зобразимо на рисунку села Абрикосове, Вишневе й Сливове точками A, B і C відповідно (див. рис. 16.6). За умовою задачі $AC = 12$ км. Якщо позначити відстань BC від Вишневого до Сливового як x (км), то відстань AB від Абрикосового до Вишневого становитиме $x+2$ (км). За аксіомою про довжину відрізка $AB + BC = AC$, тому $x + x + 2 = 12$. Тобто $2x+2=12$, $2x = 12-2$, $2x = 10$, $x = 5$ (км).

Отже, відстань від Вишневого до Сливового дорівнює 5 км, а відстань від Вишневого до Абрикосового — 7 км.

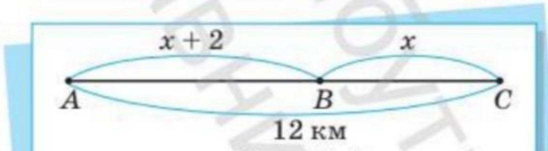


Рис. 16.6

Завдання для подальшого обговорення

1. *Проаналізувати методику вивчення теми «Суміжні та вертикальні кути» за проєктом «Інтелект України»*

   а) на етапі пропедевтики у 5 – 6 класах (див. матеріал нижче);

   б) на етапі систематичного вивчення у 7 класі (див. Робочий зошит. Геометрія, 7 клас, частина 1-2, за проєктом Інтелект України, в публікаціях відповідної команди в Teams). Дослідити застосування вправ на підведення під поняття (вправи на розпізнавання).

Вивчення теми «Суміжні та вертикальні кути» за методикою проєкта «Інтелект України»

Пропедевтика на етапах 5 і 6 класів

Пропедевтика: 5 клас

Кут **— геометрична фігура, утворена двома променями, що виходять з однієї точки.**

Елементи кута

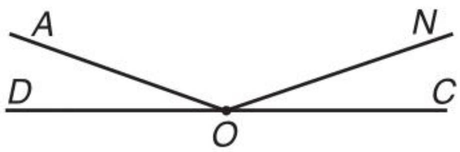
Промені є *сторонами* кута, а їх спільний початок — *вершиною* кута.

Кожен кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Градусну міру кута вимірюють у градусах (позначають «°»), мінутах (позначають «′») і секундах (позначають «″»).

$1^\circ = 60'$ $\quad$ $1' = 60''$

Градусну міру кута вимірюють за допомогою транспортира.

4. Робот «Агент *F*» за рисунком визначив та записав кути. Вірус пошкодив ці записи та все переплутав. Знайди помилки та виправ їх.



$\angle DOA$ — гострий

$\angle DOC$ — розгорнутий

$\angle DON$ — прямий

$\angle AON$ — гострий

$\angle AOC$ — тупий

$\angle NOC$ — прямий

➢ Визнач, чи всі кути, зображені на рисунку, записав робот «Агент *F*».

➢ Виміряй та запиши градусну міру кутів.

а) $\angle HBG$ = ________ б) $\angle GBH$ = ________

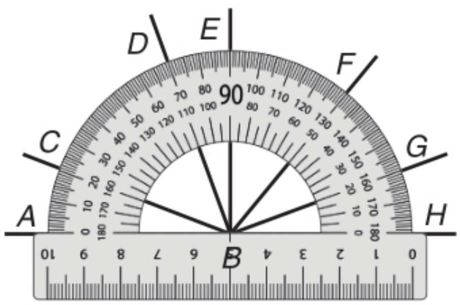
в) $\angle ABH$ = ________ г) $\angle DBH$ = ________

д) $\angle DBA$ = ________ е) $\angle ABG$ = ________

ж) $\angle EBH$ = ________ з) $\angle ABF$ = ________

и) $\angle EBA$ = ________ к) $\angle CBH$ = ________

л) $\angle FBH$ = ________ м) $\angle FBA$ = ________



10. **Вправа «Фотоапарат».**

$$1^\circ = 60' \qquad 1' = 60''$$

- **Запиши на с. 110 «сфотографовану» інформацію в рамочці.**
- **Виконай завдання.**

1) Вирази в мінутах.
   а) $2^\circ =$ ____________________
   б) $10^\circ =$ ____________________
   в) $6^\circ\,15' =$ ____________________
   г) $12^\circ\,5' =$ ____________________
   д) $50^\circ\,50' =$ ____________________
   е) $90^\circ\,9' =$ ____________________
   ж) $150^\circ\,10' =$ ____________________

2) Вирази в градусах і мінутах.
   а) $180' =$ ____________________
   б) $75' =$ ____________________
   в) $135' =$ ____________________
   г) $250' =$ ____________________
   д) $366' =$ ____________________
   е) $450' =$ ____________________
   ж) $500' =$ ____________________

11. **Обчисли за зразками в робочому зошиті. Запиши відповідь.**

Зразок 1. $11^\circ\,42' + 12^\circ\,36' = 24^\circ\,18'$

$$\begin{array}{r} 11^\circ\,42' \\ +\;\underline{12^\circ\,36'} \\ 23^\circ\,78' = 24^\circ\,18' \end{array}$$

а) $42^\circ\,29' + 51^\circ\,48' =$ __________ б) $11^\circ\,51' + 9^\circ\,47' =$ __________

Зразок 2. $25^\circ\,12' - 17^\circ\,23' = 24^\circ\,72' - 17^\circ\,23' = 7^\circ\,49'$

$$\begin{array}{r} 24^\circ\,72' \\ -\;\underline{17^\circ\,23'} \\ 7^\circ\,49' \end{array}$$

а) $48^\circ\,14' - 23^\circ\,32' =$ __________ б) $89^\circ\,22' - 45^\circ\,55' =$ __________

Алгоритм побудови кута заданої градусної міри

1. Побудуй промінь *OB*.

2. Сумісти точку із центром транспортира так, щоб промінь *OB* проходив через початок відліку напівкруглої шкали транспортира (рис. 1).

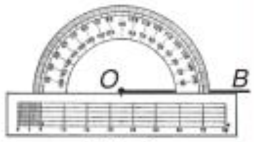


Рис. 1

3. Постав точку *A* навпроти поділки з потрібною позначкою (відлік градусів починай від променя *OB*).

4. Проведи промінь *OA* (рис. 2). Отриманий кут *AOB* — кут заданої градусної міри.

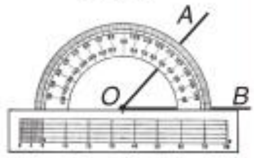


Рис. 2

13. Переглянь презентацію. Побудуй кути швидше за робота «Агент *F*».

а) $\angle A = 30°$; б) $\angle D = 100°$;

в) $\angle B = 70°$; г) $\angle C = 150°$.

11. За допомогою **карти знань 31** пригадай види кутів.

➢ Запиши гострі, прямі й тупі кути, зображені на рисунку.

____

____

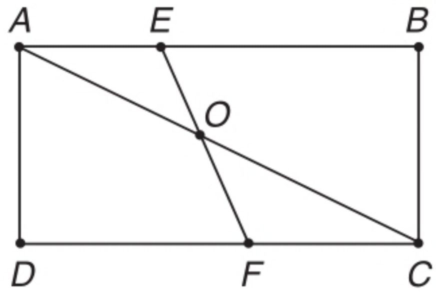
____

____

____

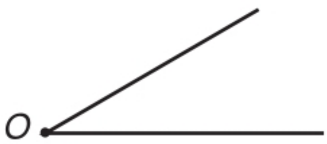
____

____



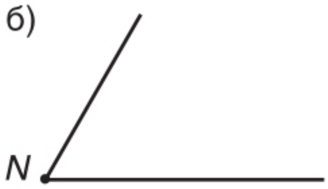
12. Визнач на око градусну міру кута. Перевір себе за допомогою транспортира й запиши результат вимірювання.

а)



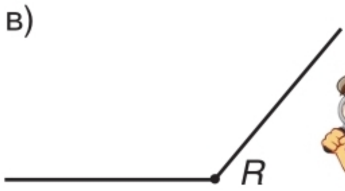
____

б)



____

в)

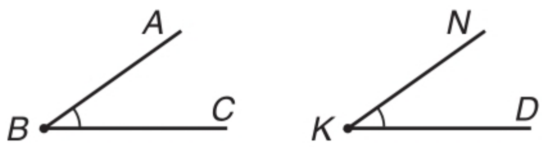


____

Два кути є *рівними*,
якщо їх можна сумістити накладанням
або вони мають однакову градусну міру.

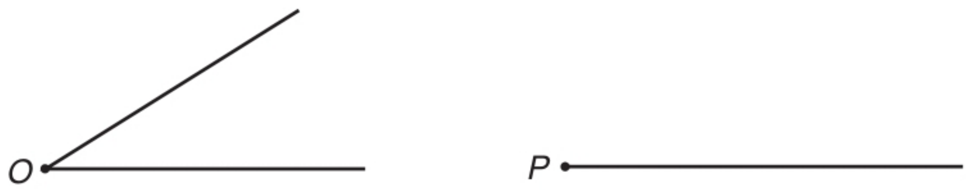
Для позначення рівних кутів використовують знак «=».

Наприклад: $\angle ABC = \angle NKD$.

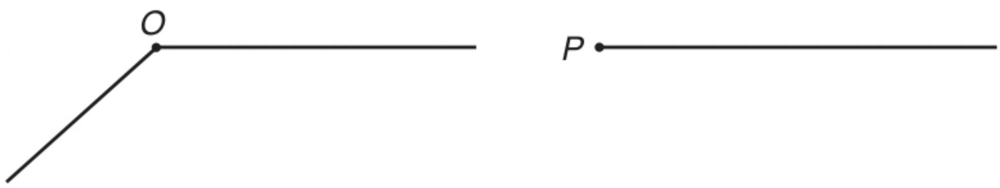


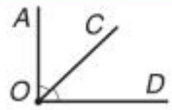
➢ Побудуй кут *P*, рівний куту *O*.

а)



б)





$\angle AOC = \angle COD$;
OC — бісектриса $\angle AOD$.

Промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами й ділить кут на дві рівні частини, є *бісектрисою* кута.

12. Виконай завдання.

Побудуй кути, градусна міра яких дорівнює: 60°; 80°; 120°; 50°. Проведи бісектрису кожного кута.

III. Виконай у робочому зошиті.

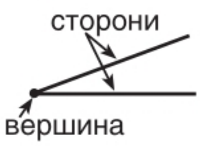
1. Побудуй кути, градусна міра яких дорівнює: 40°; 90°; 140°; 150°. Проведи бісектрису кожного кута.
2. Виконай завдання.

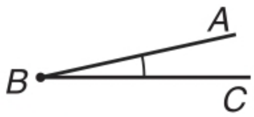
а) Прямий кут поділено на три рівні частини. Знайди градусну міру всіх утворених кутів.

б) Розгорнутий кут поділено на п'ять рівних частин. Знайди градусну міру всіх утворених кутів.

Пропедевтика 6 клас

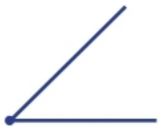
Кут **— геометрична фігура, утворена двома променями, що виходять з однієї точки. Промені є *сторонами* кута, а їхній спільний початок — *вершиною* кута.**





$\angle ABC$ або $\angle CBA$

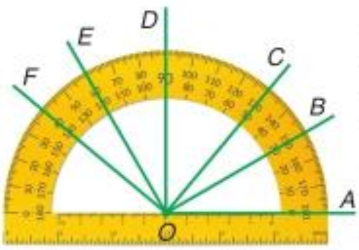
➢ **За допомогою інтелект-карти V пригадай види кутів. Підпиши види наведених кутів.**

а)  б)  в)  г)

______________ ______________ ______________ ______________________

Кожен кут має певну градусну міру, більшу від нуля.
Градусну міру кута вимірюють у градусах (позначають «°»), мінутах (позначають «′») і секундах (позначають «″»).
$1^\circ = 60'$ $1' = 60''$
Градусну міру кута вимірюють за допомогою транспортира.

6. Визнач градусну міру кутів.



Зразок: $\angle AOB = 30^\circ$.

____
____
____
____
____
____
____
____

7. **Прочитай текст. Підкресли головне.**

На рисунку 1 сторона *OB* є спільною для кутів *AOB* і *BOC*, дві інші сторони — *OA* й *OC* — утворюють пряму. Такі кути є суміжними. Суміжні кути утворюють розгорнутий кут, отже, сума суміжних кутів дорівнює 180°.

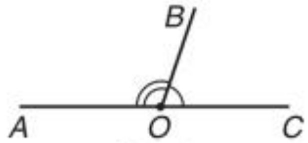
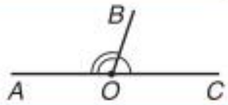


Рис. 1

➢ **Визнач, чи можуть обидва суміжних кути бути: а) гострими; б) прямими; в) тупими.**

Суміжні кути утворюють розгорнутий кут.
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

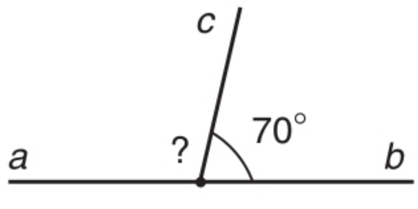


➢ **Заповни таблицю.**

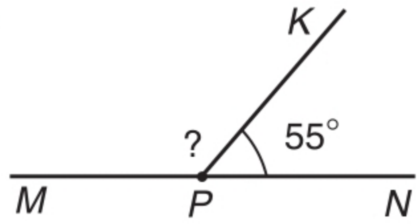
Кут	42°	15°	140°	7°	101°	56°	178°	180°
Суміжний кут								

11. **Дано суміжні кути. Знайди невідомий кут.**

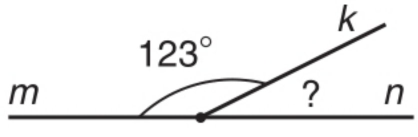
а)



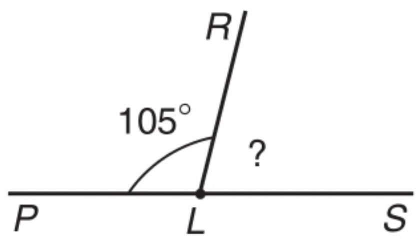
б)



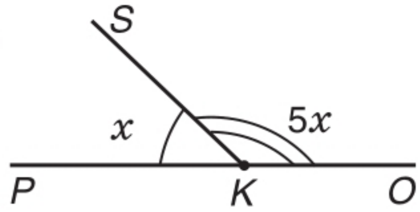
в)



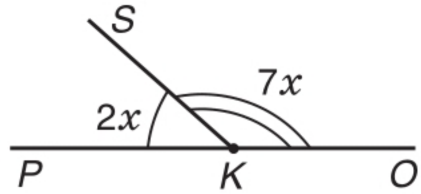
г)



д)



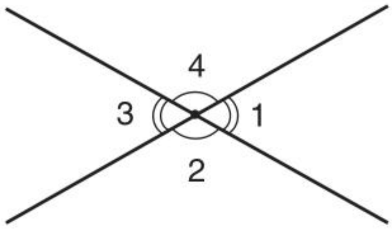
е)



➢ **Сформулюй гіпотезу: які кути є вертикальними? Перевір себе за допомогою тексту із завдання 3.**

3. Прочитай текст. Підкресли головне.

На рисунку праворуч зображено дві прямі, що перетинаються. Вони утворюють чотири кути. У цих кутів спільна вершина — точка перетину прямих. Кути 1 і 3 та 2 і 4 є вертикальними. Отже, при перетині двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів. Вертикальні кути рівні.



Кожен з утворених кутів доповнює сусідній кут до розгорнутого.

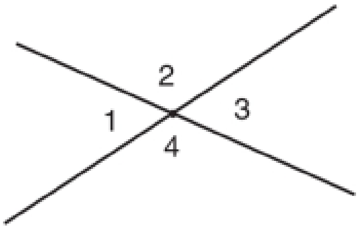
➢ **Виконай завдання.**

За рисунком праворуч запиши:

а) вертикальні кути: ____________________

б) суміжні кути: ______________________

____



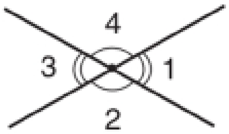
➢ **Визнач градусну міру даних кутів, якщо $\angle 1 = 70^\circ$.**

____

4. Вивчи інформацію за допомогою методики «Запам'ятовую ефективно».

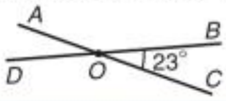
Дві прямі, що перетинаються, утворюють дві пари вертикальних кутів. Вертикальні кути рівні.

$\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$.



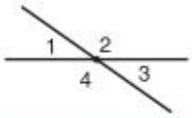
7. Знайди градусну міру невідомих кутів, зображених на рисунку.

а)



8. Виконай завдання.

У результаті перетину двох прямих утворилися дві пари вертикальних кутів. Відомо, що $\angle 1 + \angle 3 = 70^\circ$. Знайди градусну міру всіх кутів.



$\angle 1 + \angle 3 = 70^\circ$

$\angle 1$; $\angle 2$; $\angle 3$; $\angle 4$ — ?

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕГОНИ

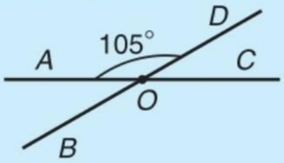
Виконай завдання швидше за робота «Агент *F*». (Робот «Агент *F*» виконує завдання за 10 хвилин.)

1) Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 10°. Знайди градусну міру інших кутів.

2) Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 115°. Знайди градусну міру інших кутів.

3) Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°. Знайди градусну міру інших кутів.

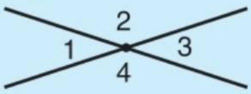
4) Знайди невідомі кути на рисунку.



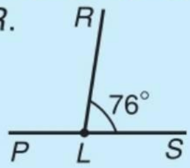
5) Знайди градусну міру всіх кутів на рисунку.

$\angle 1 + \angle 3 = 74^\circ$

$\angle 2 + \angle 4 = ?$



6) Знайди $\angle PLR$.



2. Вивчити опорний конспект до лекції 2. Доповнити його важливими фактами на власний розсуд.

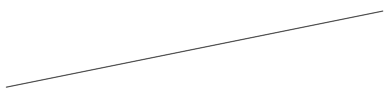
Опорний конспект до Лекції 2

При вивченні перших тем з геометрії слід врахувати **об'єктивні труднощі,** з якими стикаються учні:

- ✓ Психологічні особливості учнів даної вікової групи;
- ✓ Виділення геометрії в окрему навчальну дисципліну;
- ✓ Підвищення логічної строгості матеріалу, що вивчається;
- ✓ Велика кількість нових понять (біля 30);
- ✓ Підвищення рівня абстрактності матеріалу;
- ✓ Недостатня сформованість геометричних уявлень учнів, їхня логічна підготовка.

Подолати всі ці (та інші) труднощі можна, враховуючи такі **методичні поради:**

1. Введення всіх основних геометричних фігур проводити тільки на наочній основі, з опорою на очевидні для учнів факти.
2. Велику роль для засвоєння аксіом грають вправи, причому більша їх частина повинна вирішуватися усно. Завдяки цьому учні оволодівають навичками усного мовлення, термінологією. Значна частина вправ повинна мати конструктивний характер.
3. При розв'язанні більшості задач слід добиватися того, щоб учні спочатку побачили геометричну інтерпретацію (рисунок), потім знайшли наочно-індуктивне обґрунтування, і лише після цього давати обґрунтування з посилання на аксіоми, означення, раніше доведені теореми (тобто, на дедуктивній основі).



Наприклад: Точки A, B, і C належать прямій a. Точки B, C і D лежать на одній прямій. Чи належать всі точки на одній прямій? (за рисунком учні роблять наочно-індуктивний висновок, що всі чотири точки належать одній прямій).

4. При розв’язанні задач формувати в учнів потребу в доведеннях поступово, тому перші доведення повинні містити лише 1-2 кроки.
5. Велику роль в навчанні учнів геометрії повинні грати всі можливі опори (схеми, таблиці, завдання з пропусками, наочні посібники тощо).

Методика вивчення кожного поняття буде залежати від того, до якого класу понять воно належить:

1) первісних (неозначуваних);
2) таких, що вводяться описово (таким, яким не дається строгого математичного означення);
3) таких, що визначаються (є строге означення, яке треба пам´ятати).

Зрозуміло, що методика вивчення цих класів понять різна.

При вивченні аксіом слід пам’ятати наступні положення:

1) Термін „аксіома” з’являється лише наприкінці §1 підручника А. Г. Мерзляк, М. С. Якір, Геометрія - 7. На початку параграфу ці твердження називаються основними властивостями фігур; за підручником „Геометрія - 7” Єршової А. П., Голобородько В. В., Крижанівського О. Ф. поняття «аксіома» вводиться відразу, в першій темі.
2) Не слід добиватися того, щоб учні *відразу* запам’ятали і вміли відтворювати всі аксіоми. Достатньо, щоб серед всіх аксіом вони могли знайти необхідну для розв’язання задачі, для доведення і т.ін.
3) При вивченні перших уроків не всім аксіомам приділяється однакова увага, оскільки деякі використовуються більш часто (наприклад, аксіоми вимірювання відрізка, кута), ніж інші.

При вивченні аксіом *з методичної точки зору доцільно дотримуватися наступної послідовності:*

1. Підводимо до аксіоми учнів за допомогою прикладу з оточуючого середовища, за допомогою моделі, геометричної побудови тощо.
2. Формулюємо аксіому.
3. Ілюструємо рисунком.
4. Пропонуємо короткий запис (якщо можливо).

Терміни „означення”, „теореми” з’являються в першому ж пункті §1 підручника А. Мерзляка та співавторів. Терміну „означення” дається тлумачення: що означає „дати означення поняттю” можна продемонструвати на прикладах. Поняття „теорема”, „доведення” обговорюються в процесі доведення теореми 1.1 в першому ж пункті підручника, і в §1 вже вирішуються задачі на доведення і дослідження.

Як ці поняття вивчаються за паралельними підручниками?

Методика навчання трикутників у курсі планіметрії 7 класу

План

1. Вступні зауваження.
2. Формування понять.
3. Доведення теорем.
4. Розв’язування задач на застосування ознак рівності трикутників.
5. Порівняльний аналіз викладу теми за паралельними підручниками.

1. Вступні зауваження.

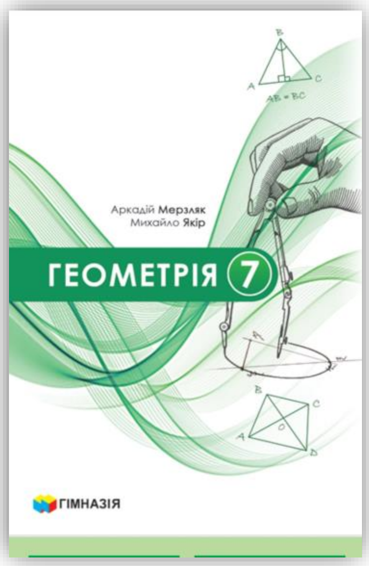
В шкільному курсі геометрії метод трикутників є одним з основних при розв’язуванні задач і доведенні теорем. Спочатку розглядається рівність трикутників, потім - співвідношення між елементами трикутників, надалі – подібність трикутників. Тому даній темі в курсі геометрії 7 класу приділяється особлива увага.

Означення й ознаки рівності трикутників вивчаються на початку вивчення планіметрії, оскільки вони стають основним аргументом під час доведення теорем і розв’язування задач у процесі вивчення різних тем.

Основна мета вивчення теми „Трикутники” – ознайомити учнів з ознаками рівності трикутників; вивчити окремі види трикутників – рівнобедрений, його властивості й ознаки; прямокутний та його властивості; навчити застосовувати отримані теоретичні відомості до розв’язування задач, зокрема практичного змісту.

Під час вивчення цієї теми посилюються можливості розвитку логічного мислення, усвідомлення учнями ідеї дедуктивної побудови геометрії.

В цій темі вперше з’являється можливість пояснити учням відмінність між твердженнями, що є означеннями фігур, і твердженнями, які є ознаками цих фігур (означення та ознаки рівності трикутників, означення й ознаки рівнобедреного трикутника), а також пояснити відмінність між теоремами-властивостями і теоремами-ознаками, що і роблять автори ***підручника „Геометрія – 7” Мерзляк А.Г., Якір М.С. (2024)*** [1] наприкінці §2.



2. Формування понять.

У підручнику [1] матеріал стосовно трикутників і ознак рівності трикутників міститься у параграфі 2. Ознаки рівності трикутників строго доводяться, що стає можливим завдяки прийнятим системі аксіом, означенням.

Поняття „трикутник” в підручнику [1] вводиться описово і розглядається як частина площини (разом зі сторонами). Розглядаються його елементи, вводяться такі поняття, як „кут, протилежний даній стороні”, „кути, прилеглі до даної сторони” і, відповідно, „сторона, протилежна даному куту” і „сторони, прилеглі до даного кута”. Дається означення периметра трикутника, класифікація трикутників за кутами (прямокутний, гострокутний, тупокутний) також у вигляді означення.

Розглянемо три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій. Сполучимо їх відрізками AB, BC, CA. Утворена фігура обмежує частину площини, виділену на рисунку 114 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC і CA називають **трикутником.** Точки A, B, C називають **вершинами трикутника**, а відрізки AB, BC, CA — **сторонами трикутника.**

Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку 114, позначають так: ΔABC (читають: «трикутник ABC»), або ΔBCA (читають: «трикутник BCA»), або ΔACB і т. д.

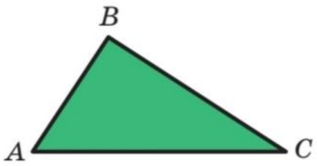


Рис. 114

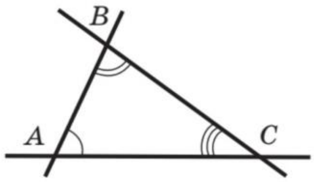


Рис. 115

Кути BAC, ABC, BCA (рис. 115) називають **кутами трикутника** ABC.

Відношення рівності трикутників є окремим випадком відношення рівності фігур. У підручнику [1] спочатку в § 1 давались означення рівних відрізків і рівних кутів як таких, що можна сумістити, причому задача пояснити учням, що значить „сумістити” покладається на вчителя (в підручнику цей термін не пояснюється, очевидно, автори вважають його інтуїтивно зрозумілим).

Означення рівних трикутників вводиться аналогічно:

Означення. Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Вже з цього означення робиться висновок, що у рівних трикутників всі шість відповідних елементів (сторони і кути) рівні. Причому автори визначають відповідні кути і сторони як ті кути і ті сторони, які суміщаються при накладанні трикутників.

Далі робиться узагальнення:

Означення. Дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити.

Зауваження. За концепцією підручника О. В. Погорєлова таке означення вводилося лише під час вивчення рухів у 8 класі.

Також в пункті 7 підручника [1] вводяться означення висоти, медіани, бісектриси трикутника.

68 § 2. Трикутники

Означення. Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

На рисунку 122 відрізки BB_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC.

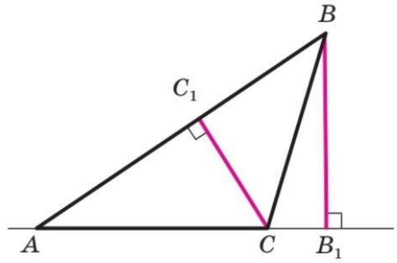


Рис. 122

Означення. Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.

На рисунку 123 відрізок AM — медіана трикутника ABC.

Означення. Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

На рисунку 124 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC. Кожний трикутник має три висоти, три медіани й три бісектриси.

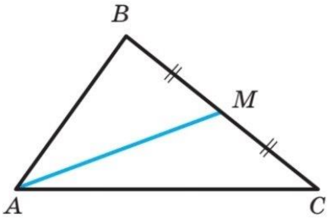


Рис. 123

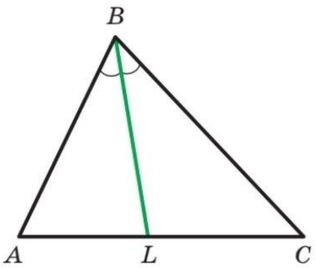


Рис. 124

В п. 8 вводиться поняття серединного перпендикуляра відрізка.

В темі „Трикутники” фактично розглянуто класифікацію трикутників і за сторонами: вивчаються рівнобедрений трикутник і рівносторонній трикутник як його окремий вид. Також у підручнику [1] вводиться строго поняття різностороннього трикутника:

Означення. Якщо у трикутнику довжини всіх сторін різні, то такий трикутник називається різностороннім.

У пункті 12 вводиться *низка понять, пов'язаних з поняттям теореми*: «умова», «висновок теореми», «теорема-властивість», «теорема-ознака», «теорема-наслідок», «пряма теорема» та «обернена теорема».

12. Теореми

Ви бачите, що в підручнику з'являється все більше та більше теорем. І це не дивно: адже геометрія складається переважно з теорем та їхніх доведень.

Формулювання всіх теорем, які ми довели, складаються з двох частин. Першу частину теореми (те, що дано) називають **умовою** теореми, другу частину теореми (те, що потрібно довести) — **висновком** теореми.

Наприклад, у теоремі 8.1 (перша ознака рівності трикутників) умовою є те, що ***дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника***, а висновком є ***рівність трикутників***.

Усі відомі вам теореми можна умовно поділити на **теореми-властивості** й **теореми-ознаки**. Наприклад, теорема 1.1 установлює властивість прямих, що перетинаються, теорема 9.1 — властивість рівнобедреного трикутника.

Теореми-ознаки вказують на ознаки, за якими можна розпізнати фігуру, тобто віднести її до того чи іншого виду (класу).

Так, у теоремах-ознаках рівності трикутників зазначено вимоги, за якими два трикутники можна віднести до класу рівних. Наприклад, у теоремах 10.1–10.4 сформульовано властивості, за якими розпізнають рівнобедрений трикутник.

Теореми, які випливають *безпосередньо* з аксіом або теорем, називають **теоремами-наслідками**, або просто **наслідками**.

Наприклад, властивість кутів, протилежних рівним сторонам трикутника, є наслідком з теореми 9.1.

Якщо в теоремі 8.2 про властивість серединного перпендикуляра поміняти місцями умову й висновок, то отримаємо теорему 11.2. Дві теореми, кожну з яких можна отримати з іншої, помінявши місцями умову й висновок, називають **взаємно оберненими**. Якщо яку-небудь із цих теорем назвати **прямою**, то другу теорему називатимемо **оберненою**.

У зв'язку з вивченням трикутників, ознак рівності трикутників використовується низка вивчених раніше понять і їх означень: відрізок, довжина відрізка, рівні відрізки, кут, кутова міра, рівні кути, перпендикуляр до прямої та ін. Тому треба подбати про *своєчасну актуалізацію опорних знань.*

Згідно з означенням рівних трикутників, яке прийнято в даному підручнику має значення порядок запису вершин. Тобто ні для одного різностороннього трикутника не буде вірним такий запис: $\Delta ABC = \Delta BCA = \Delta CAB$. На відпрацювання вміння правильно називати відповідні кути і сторони рівних трикутників можна запропонувати такі задачі, як-от:

Задача. В трикутниках *DEF* і *PRQ* сторони *DE=QR, FD=PR* і $\angle EDF = \angle QRP$. Чи правильний запис: $\Delta DEF = \Delta PRQ$? Якщо ні, то як правильно записати рівність трикутників?

При вивченні нових понять треба відрізняти суттєві їх властивості від несуттєвих. Наприклад: до означення медіани трикутника входять дві суттєві властивості: 1) це - відрізок; 2) він сполучає вершину з серединою протилежної сторони трикутника. Несуттєвими є вид трикутника, розташування вершин на площині.

Під час вивчення нових понять треба відпрацьовувати конструктивні навички: необхідно, щоб учні не тільки формулювали означення, а і вміли зображувати висоти, опущені з різних вершин трикутника, рівнобедрений трикутник, у якого основа розташована вертикально та ін.

3. Доведення теорем.

Всі теореми, що вивчаються в цій темі, є основними теоремами ШКГ, бо широко використовуються при вивченні інших теорем і розв’язуванні задач. В параграфі присутні теореми різних видів і різного рівня складності щодо їх доведення, причому автори підручника помічаються відповідним чином, чи це доведення, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень учнів, або високому рівню, або не є обов'язковим для вивчення; отже, це полегшує роботу вчителя.

В пункті 7 методом від супротивного доводиться єдність прямої, перпендикулярної до даної, що проходить через точку, яка не належить даній прямій.

Теорема 7.1. ***Через точку, яка не належить даній прямій, можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і до того ж тільки одну.***

Доведення цієї теореми подано в підручнику на зеленому фоні, що означає, що воно розраховано на класи з орієнтацією на поглиблене вивчення математики.

Перш, ніж вводити ознаки рівності трикутників, *автори підручника [1] застосовують проблемний виклад і ставлять проблемне запитання*: Як скоротити список вимог до мінімуму, зберігаючи при цьому рівність трикутників?

Теорема 8.1 – *перша ознака рівності трикутників*, що доводиться дещо простіше, ніж в підручнику О.В.Погорєлова завдяки прийнятому означенню рівних трикутників.

Теорема. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення:

Так як $\angle B = \angle B_1$, то можна накласти ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб промінь ВА сумістився з променем B_1A_1, а промінь ВС сумістився з променем B_1C_1. Оскільки за умовою $BA = B_1A_1$, а $BC = B_1C_1$, то при такому накладанні сторона ВА суміститься зі стороною B_1A_1, а сторона ВС зі стороною B_1C_1. Отже, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, тобто вони рівні.

Наступна *теорема 8.2 (кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка*) вже демонструє значущість ознаки рівності трикутників, оскільки її доведення відбувається на основі першої ознаки.

В цьому ж пункті дається *друга ознака рівності трикутників*: за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Доведення її дещо складніше, ніж першої ознаки, і автори відносять його до високого рівня складності (але не найвищого: доведення не міститься на зеленому фоні).

76 § 2. Трикутники

Теорема 8.3 (друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами). ***Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 138). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

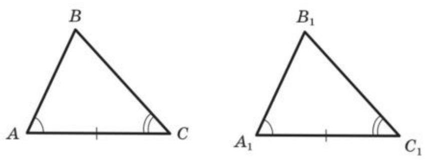


Рис. 138

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб точка A сумістилася з точкою A_1, відрізок AC — з відрізком A_1C_1 (це можливо, тому що $AC = A_1C_1$) і точки B і B_1 лежали в одній півплощині відносно прямої A_1C_1. Оскільки $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, то промінь AB суміститься з променем A_1B_1, а промінь CB — із променем C_1B_1. Тоді точка B — спільна точка променів AB і CB — суміститься з точкою B_1 — спільною точкою променів A_1B_1 і C_1B_1. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, а тому вони рівні.

Щодо *третьої ознаки* - *за трьома сторонами*, то вона з'являється наприкінці параграфа 2, після вивчення рівнобедреного трикутника, і її доведення не є обов'язковим для вивчення. Проте цікаво, що в процесі її доведення задля його повноти необхідно розглянути декілька випадків, пов'язаних з видом трикутників (метод повної індукції).

11. Третя ознака рівності трикутників

Теорема 11.1 (третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами). ***Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 189), у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (ці рівності вказують, які сторони трикутників відповідають одна одній). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина B — з вершиною B_1, а вершини C і C_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої AB (рис. 190). Проведемо відрізок CC_1. Оскільки $AC = A_1C_1$, то трикутник C_1A_1C рівнобедрений, а отже, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно можна довести, що $\angle 3 = \angle 4$. Отже, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тоді трикутники $A_1C_1B_1$ і A_1CB_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

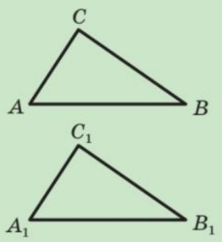


Рис. 189

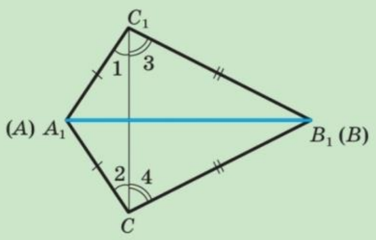


Рис. 190

Здавалося б, доведення завершено. Проте ми розглянули тільки випадок, коли відрізок CC_1 перетинає відрізок A_1B_1 у внутрішній точці. Насправді відрізок CC_1 може проходити через один із кінців відрізка A_1B_1, наприклад через точку A_1 (рис. 191), або не мати спільних точок з відрізком A_1B_1 (рис. 192). У кожному із цих випадків доведення будуть аналогічними наведеному. Проведіть їх самостійно.

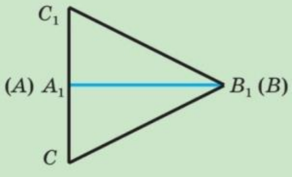


Рис. 191

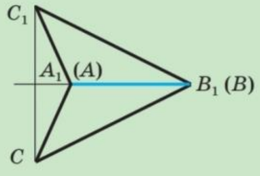


Рис. 192

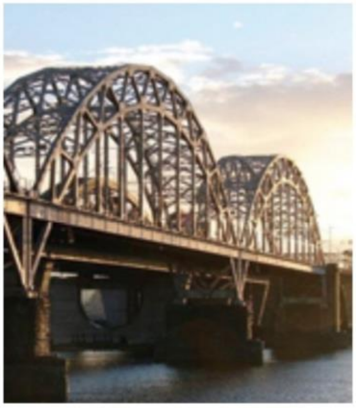
Після вивчення III ознаки рівності треба звернути увагу учнів на той факт, що трикутник – фігура „жорстка" (три сторони трикутника однозначно його визначають при відомих умовах), на відміну, наприклад, чотирикутника, і така властивість трикутника використовується в будівництві (металеві опори для високовольтних ліній, стріли підйомних кранів та ін.).

а б в г

Рис. 193

Із третьої ознаки рівності трикутників випливає, що *трикутник — жорстка фігура*. Справді, якщо чотири рейки з'єднати так, як показано на рисунку 193, *а*, то така конструкція не буде жорсткою (рис. 193, *б*, *в*). Якщо ж додати ще одну рейку, утворивши два трикутники (рис. 193, *г*), то одержана конструкція стане жорсткою. Цей факт широко використовують на практиці (рис. 194).

Опори ліній електропередачі



Дарницький міст через р. Дніпро

Рис. 194. Жорсткі конструкції

В даній темі міститься низка теорем, пов'язаних з *властивостями і ознаками* ***рівнобедреного трикутника***. Теорема 9.1 формулює дві властивості рівнобедреного трикутника: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою. Доведення її *ґрунтується на першій ознаці рівності трикутників*. З даної теореми випливають *наслідки*, які учні також повинні пам'ятати.

Із теореми 9.1 випливає, що:

1) ***у трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути;***

2) ***у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються;***

3) ***у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні;***

4) ***у рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.***

П. 10 присвячено *ознакам рівнобедреного трикутника*: тут їх формулюється чотири. Перш, ніж формулювати їх, автори зазначають, що такі теореми дозволяють „розпізнавати" рівнобедрені трикутники серед інших трикутників.

Теорема 10.1. Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення цієї теореми засновано на властивості серединного перпендикуляра.

Теорема 10.2. Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення даної теореми ґрунтується на другій ознаці рівності трикутників.

Теорема 10.3. Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення цієї теореми не обов'язковим для вивчення.

Теорема 10.4. Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Під час доведення цієї теореми, що є також не обов'язковим для вивчення, застосовується прийом додаткової побудови, з яким учні стикаються вперше.

Теорема 10.4. ***Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BM — медіана й бісектриса. Треба довести, що $AB = BC$.

На промені BM відкладемо відрізок MD, який дорівнює відрізку BM (рис. 184).

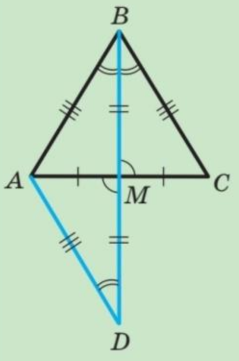


Рис. 184

У трикутниках AMD і CMB маємо: $AM = MC$ (оскільки за умовою відрізок BM — медіана); $BM = MD$ за побудовою; кути AMD і CMB рівні як вертикальні. Отже, трикутники AMD і CMB рівні за першою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AD і BC, кути ADM і CBM рівні як відповідні елементи рівних трикутників.

Оскільки промінь BD — бісектриса кута ABC, то $\angle ABM = \angle CBM$. Оскільки $\angle CBM = \angle ADM$, то маємо, що $\angle ABM = \angle ADM$. Тоді за ознакою рівнобедреного трикутника (теорема 10.3) отримуємо, що трикутник DAB рівнобедрений, звідки $AD = AB$. І вже доведено, що $AD = BC$. Отже, $AB = BC$. ●

Остання теорема даного параграфу є *оберненою до теореми 8.2*: якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.

4. Розв’язування задач на застосування ознак рівності трикутників.

Серед задач на застосування ознак рівності трикутників найважчими для учнів є задачі на доведення, тому організовувати розв’язання таких задач треба послідовно, у три етапи, згідно трьох видів задач, що виділяються в цій темі.

1. *Задачі на доведення рівності трикутників*. Наприклад, №№ 180, 181, 187 с. 79, 80.

2. *Задачі на доведення рівності деяких елементів у двох даних трикутниках*. Наприклад, 184, 185 с. 79, 80.

3. *Задачі, в яких для доведення рівності трикутників або їх елементів необхідно розглянути кілька пар рівних трикутників*. Наприклад: с. 81, №197.

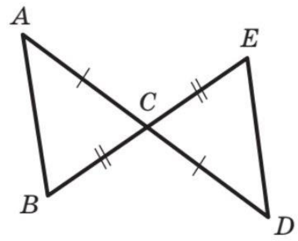


Рис. 143

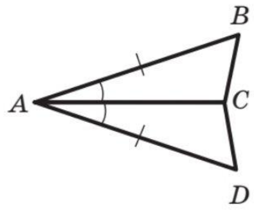


Рис. 144

180.° На рисунку 143 $AC = DC$, $BC = EC$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta DEC$.

181.° На рисунку 144 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta ADC$.

182.° На рисунку 145 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34°$. Знайдіть відрізок BC і кут A.

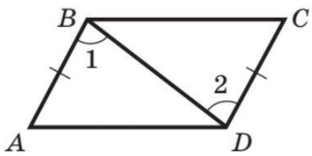


Рис. 145

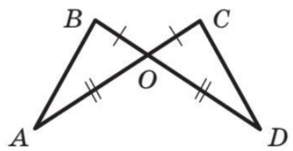


Рис. 146

183.° На рисунку 146 $AO = OD$, $BO = OC$. Знайдіть сторону CD і кут OCD трикутника OCD, якщо $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43°$.

184.° Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 147). Доведіть, що $\angle OAD = \angle OCB$.

185.° Дано: $AC = BD$, $\angle BAC = \angle ABD$ (рис. 148). Доведіть, що $AD = BC$.

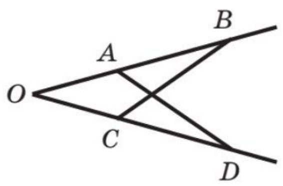


Рис. 147

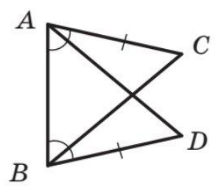


Рис. 148

186.° Дано: $\angle ADC = \angle ADB$, $BD = CD$ (рис. 149). Доведіть, що $AB = AC$.

187.° На рисунку 150 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, точка O — середина відрізка BD. Доведіть, що $\Delta ABO = \Delta CDO$.

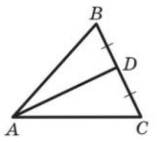


Рис. 149

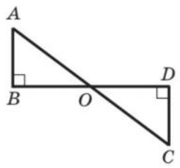


Рис. 150

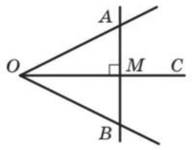


Рис. 151

188.° На рисунку 151 промінь OC — бісектриса кута AOB, прямі AB і OC перпендикулярні. Доведіть, що $\Delta AMO = \Delta BMO$.

189.° На рисунку 152 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть сторони AD і CD трикутника ADC.

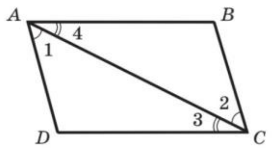


Рис. 152

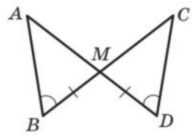


Рис. 153

190.° На рисунку 153 $\angle B = \angle D$, $BM = DM$, $CD = 7$ см, $CM = 4$ см. Знайдіть сторони AB і AM трикутника ABM.

191.° На рисунку 154 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Доведіть, що $\Delta BCO = \Delta EFO$.

192.° На рисунку 155 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta CDA$.

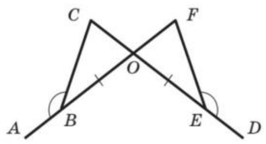


Рис. 154

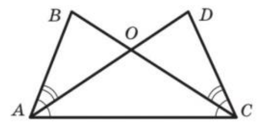


Рис. 155

193.• Із точок A і B, які лежать в одній півплощині відносно прямої a на однаковій відстані від неї, опущено на цю пряму перпендикуляри AC і BD. Знайдіть кут ACB, якщо $\angle ADC = 25°$.

194.• Відрізки AD і BC перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. Знайдіть кут ACD, якщо $\angle ABC = 64°$, $\angle ACO = 56°$.

195.• На сторонах кута з вершиною в точці B позначено точки A і C, а на його бісектрисі — точку D таку, що $\angle ADB = \angle CDB$. Доведіть, що $AB = BC$.

196.• Через точку M, що належить бісектрисі кута з вершиною в точці O, проведено пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси. Ця пряма перетинає сторони даного кута в точках A і B. Доведіть, що $AM = MB$.

197.• На рисунку 156 $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Доведіть, що $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$.

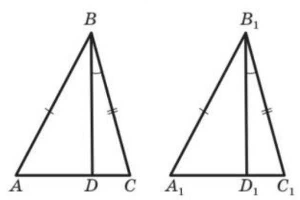


Рис. 156

Для розв'язування першої групи задач варто дати учням *загальний орієнтир*: щоб довести рівність двох трикутників, треба знайти у них три пари відповідно рівних елементів, серед яких має бути хоч би одна пара рівних сторін.

Для другої і третьої групи задач корисно дати учням таке загальне *правило-орієнтир*: щоб довести рівність двох відрізків або двох кутів, досить включити їх у два різні трикутники і довести їх рівність.

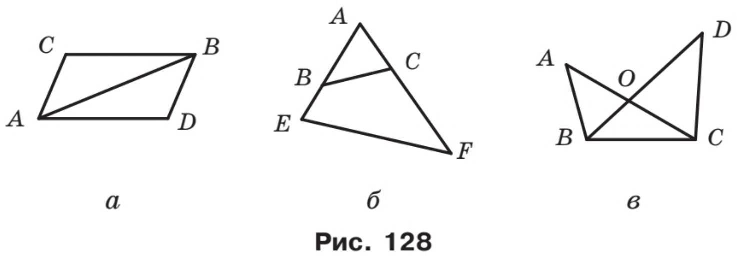
Треба також учити дітей аналізувати умови таких задач, зокрема з'ясовувати, скільки пар рівних елементів дано і до чого зводиться розв'язання задачі або які можливості для встановлення рівності інших пар елементів можна використати.

При розв'язанні задач слід приділити *увагу роботі з рисунком*, вимагати від учнів виділення рівних елементів, за допомогою рисунка складати план розв'язання, певним чином письмового його оформлювати.

Значну частину задач можна *вирішувати усно*, наприклад №№ 160-166. У підручнику [1], номери, які рекомендовано авторами вирішувати усно, виділені пурпуровим кольором:

160.° Чи є правильним твердження:
1) якщо трикутники рівні, то їхні периметри теж рівні;
2) якщо периметри двох трикутників рівні, то й самі трикутники рівні?

161.° Укажіть спільний елемент трикутників, зображених на рисунку 128.



а *б* *в*

Рис. 128

162.° Відрізок CH — висота трикутника ABC (рис. 129). Знайдіть градусні міри кутів AHC і BHC.

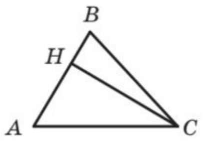


Рис. 129

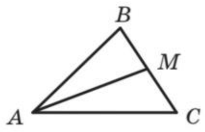


Рис. 130

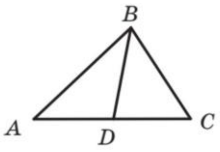


Рис. 131

163.° Відрізок AM — медіана трикутника ABC (рис. 130), $BM = 8$ см. Знайдіть відрізки CM і BC.

164.° Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC (рис. 131), $\angle ABD = 42°$. Знайдіть градусні міри кутів CBD і ABC.

165.° Які з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — завжди належать трикутнику?

166.° Який з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — може збігатися з його стороною? Укажіть вид трикутника, для якого це можливо.

Необхідно розглянути і *задачі практичного змісту*, наприклад, №№ 211-212 (геодезичного змісту).

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

211. Для знаходження відстані від точки B до дзвіниці A, яка розташована на другому березі річки (рис. 163), за

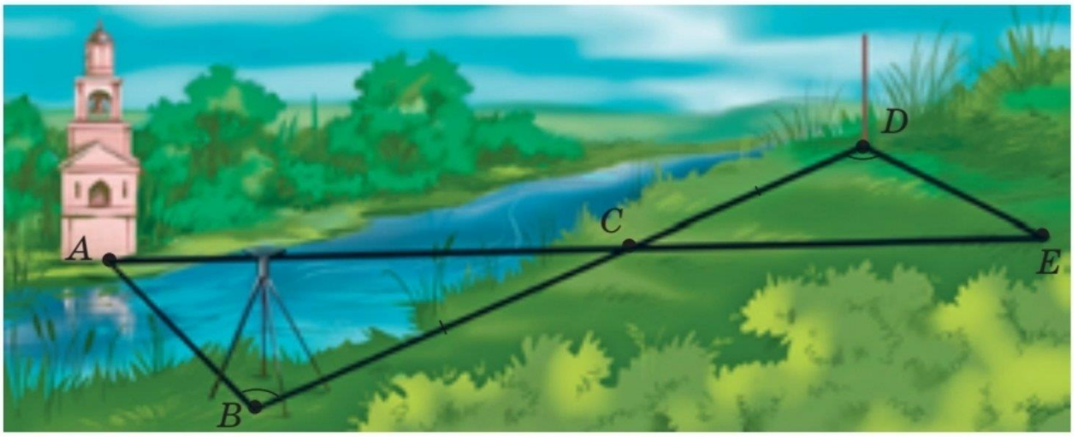


Рис. 163

допомогою віх, рулетки й астролябії позначили на місцевості точки C, D і E так, що точки B, C і D лежать на одній прямій, причому точка C є серединою відрізка BD. Потім намітили пряму AE, яка проходить через точку C, причому $\angle ABC = \angle CDE$. Потім, вимірявши одну зі сторін трикутника CDE, визначили відстань від точки B до точки A. Яку сторону виміряли? Відповідь обґрунтуйте.

212. Для визначення ширини озера (рис. 164) на його березі позначили точки A і B, а потім ще точки C, D і O так, щоб точка O була спільною серединою відрізків AC і BD. Як можна визначити ширину озера? Відповідь обґрунтуйте.

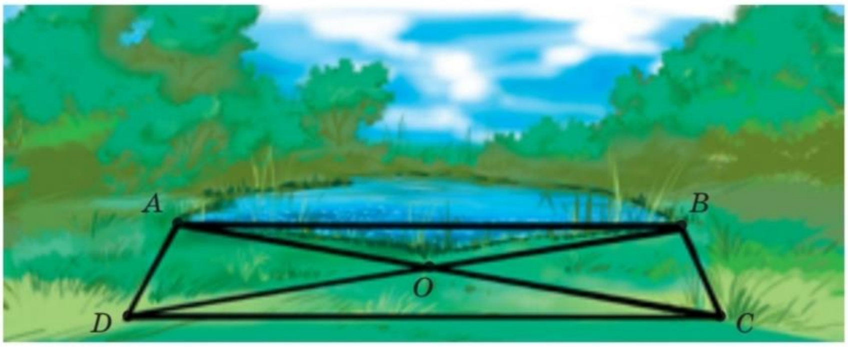


Рис. 164

Окремо виділяємо низку *задач, які демонструють логічні основи ШКГ* (с. 109) (п. 12).

296.• Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:

1) якщо два трикутники не рівні, то їхні периметри теж не рівні;
2) якщо градусна міра кута більша за 90°, то він є тупим.

Для яких із даних тверджень:

1) пряме й обернене твердження є правильними;
2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

297.• Сформулюйте твердження, що заперечує дане:

1) відрізок AB перетинає пряму m;
2) градусна міра кута ABC більша за 40°;
3) із двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90°;
4) промені OA та OB не є доповняльними;
5) відрізок має тільки одну середину.

При введенні *поняття оберненої теореми* доцільно запропонувати учням сформулювати твердження, обернені до відомих з курсу математики 5-6 класів, і з'ясувати, чи вірні вони (наприклад, твердження, обернене до ознаки подільності числа на 9: Якщо число ділиться на 9, то сума його цифр ділиться на 9 – істинне твердження).

Деякі задачі можна розв' язувати за *готовими рисунками*, що значно заощаджує час.

ВПРАВИ

179.° Чи є рівними трикутники, зображені на рисунку 142? У разі ствердної відповіді вкажіть, за якою ознакою рівності трикутників вони рівні.

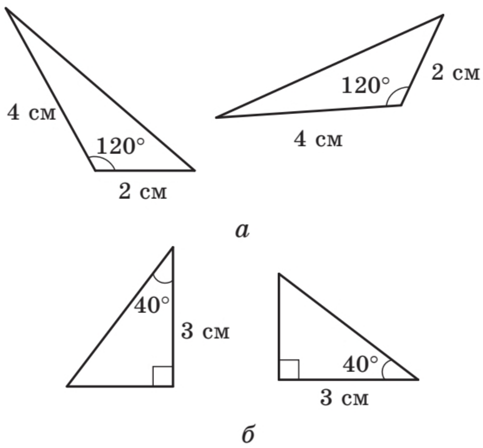


Рис. 142

Матеріал, пов'язаний з *нерівністю трикутника*, дається в підручнику в наступному параграфі 3 «Паралельні прямі. Сума кутів трикутника» в пункті 17. В цьому ж параграфі в п. 18 розглядаються властивості *прямокутного трикутника*.

17. Нерівності, пов'язані з елементами трикутника

Нехай сторони трикутника ABC зображають дороги (рис. 280). Вам потрібно дістатися з пункту A в пункт C. Який маршрут ви оберете: підете через пункт B чи виберете дорогу AC? Досвід підказує, що другий варіант коротший. Вашу здогадку підтверджує така теорема.

Рис. 280

Теорема 17.1 (нерівність трикутника). ***Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.***

Також в цьому пункті розглядається ще одна теорема:

Теорема 17.2. ***У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.***

Доведення цих теорем виходить за межі обов'язкової програми.

Методику вивчення **прямокутних трикутників** розглянемо за ***інтегрованим підручником «Математика – 7. Частина 2» [3] авторів О. Школьний, Є. Нелін, А. Миляник, Ю. Простакова.*** Цей матеріал викладено у підручнику у параграфі 24.

Зміст

Зміст

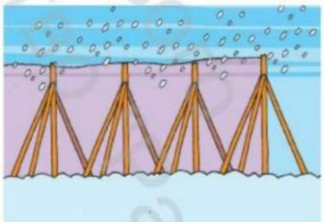
Важливо, що автори цього підручника, згідно Концепції НУШ, *мотивують* уведення нового математичного поняття конкретними прикладами, взятими із повсякденного життя, побуту, оточуючого середовища:

§ 24. Прямокутний трикутник і його властивості. Ознаки рівності прямокутних трикутників

Прямокутний трикутник і його властивості

Знаєш, Петрику, а трикутники дійсно надзвичайно часто використовують на практиці. Недавно майстер перекладав нам плитку на кухні та використовував цікавий пристрій для вирівнювання! Якщо глянути на цей клин згори, то він має форму прямокутника, а якщо подивитися збоку, то буде прямокутний трикутник. Таке тіло ми в 5 класі називали *трикутною призмою*.

Надзвичайно цікаво, ніколи не бачив такого пристрою. Але прямокутні трикутники на практиці дійсно дуже часто використовуються. Наприклад, минулої зими я бачив спеціальні щити для затримки снігу, які містять збоку підпорки. Таким



чином утворюються прямокутні трикутники, які забезпечують стійкість конструкції. Мені здається, що цей вид трикутників дуже важливий, і хочеться знати про нього більше!

Далі автори строго вводять поняття прямокутного трикутника та його елементів (слід сказати, що це поняття не абсолютно новим для учнів, оскільки його пропедевтика відбувала на попередніх етапах навчання):

Дійсно, прямокутні трикутники — особливі. Їх сторони мають спеціальні назви. Сторони, що утворюють прямий кут, називають катетами, а третю сторону називають гіпотенузою.

Наприклад, на рис. 24.1 зображений прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C. Навпроти кута C лежить гіпотенуза AB; сторони AC і BC є катетами, бо вони утворюють прямий кут.

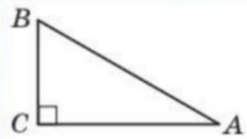


Рис. 24.1

Надалі розглядаються дві теореми-властивості прямокутного трикутника разом із доведеннями:

ТЕОРЕМА (властивість гострих кутів прямокутного трикутника).

У прямокутному трикутнику кути, що лежать навпроти катетів, є гострими, і сума їх градусних мір дорівнює 90°.

Справді, сума градусних мір кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°. Градусна міра прямого кута дорівнює 90°. Отже, сума градусних мір двох інших кутів, що лежать навпроти катетів, дорівнює $180° - 90° = 90°$.

Оскільки градусна міра кожного із цих двох кутів є додатною, то градусна міра кожного з них менша від 90°, тобто обидва кути є гострими.

ТЕОРЕМА (властивість катета, що лежить навпроти кута 30° прямокутного трикутника).

У прямокутному трикутнику катет, що лежить навпроти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Нехай на рис. 24.2 зображено прямокутний трикутник ABC, у якого $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$. Тоді за щойно доведеною властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle B = 60°$. Покажемо, що $BC = \frac{1}{2}AB$.

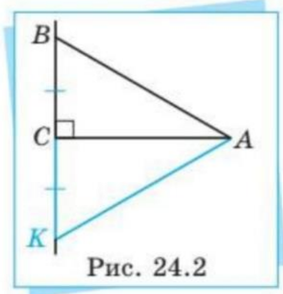


Рис. 24.2

Відкладемо на промені BC точку K так, щоб $CK = CB$. У трикутників ABC і AKC сторона AC — спільна, $CK = CB$ за побудовою, а $\angle ACB = \angle ACK = 90°$. Отже, $\triangle ABC = \triangle AKC$ за двома сторонами й кутом між ними. Тому $AB = AK$ і трикутник BAK — рівнобічний. Отже, $\angle B = \angle K = 60°$, а $\angle BAK = 180° - 60° - 60° = 60°$.

Трикутник, у якого всі кути рівні, як відомо, є рівностороннім, тобто $AB = AK = BK$. Тоді $BC = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}AB$, що й потрібно було довести.

Перша властивість є доволі очевидною. Друга властивість є надважливою для запам'ятовування учнями та ученицями, оскільки часто використовується під час розв'язування задач.

Важливим є те, що автори надають і обернене твердження, доведення якого школярі можуть дізнатися, перейшовши за посиланням по QR-коду:

Зауважимо, що істинним є також твердження, обернене до властивості катета, що лежить навпроти кута 30°: якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині його гіпотенузи, то кут, що лежить навпроти цього катета, дорівнює 30°.

Доведення цього твердження:
https://rnk.com.ua/106108

У такий спосіб формується і предметна математична компетентність, і інформаційно-комунікативна та культурна компетентності, та й, передусім, розвивається логічне мислення семикласників і семикласниць.

Щодо ознак рівності прямокутних трикутників, то автори підручника [3] виокремлюються їх п’ять і надають однією теоремою:

ТЕОРЕМА (ознаки рівності прямокутних трикутників).

1. **За двома катетами.** Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
2. **За катетом і прилеглим гострим кутом.** Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
3. **За катетом і протилежним гострим кутом.** Якщо катет і протилежний до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному до нього гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
4. **За гіпотенузою й гострим кутом.** Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
5. **За гіпотенузою й катетом.** Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Слід зазначити, що пункти 2 і 3 можна було б об’єднати і формулювати ознаку так:

Теорема-ознака прямокутного трикутника: Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

До речі, саме так і зроблено в деяких сучасних підручниках геометрії для 7 класу (зокрема, у підручниках [1] і [2]).

Так само, разом, автори інтегрованого підручника «Математика - 7» надають доведення п’ятьох пунктів цього твердження:

Більшість із наведених тверджень випливають з уже відомих вам ознак рівності довільних трикутників. Покажемо це.

1 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90°$ (рис. 24.3). За умовою відомо, що $BC = B_1C_1$ і $AC = A_1C_1$. Отже, такі трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників, оскільки в них відповідно рівні дві сторони та кут між ними.

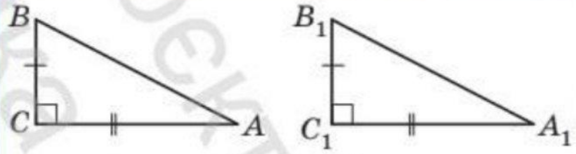


Рис. 24.3

2 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90°$ (рис. 24.4). За умовою відомо, що $\angle A = \angle A_1$ і $AC = A_1C_1$. Отже, такі трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників, оскільки в них відповідно рівні сторона та два прилеглих до неї кути.

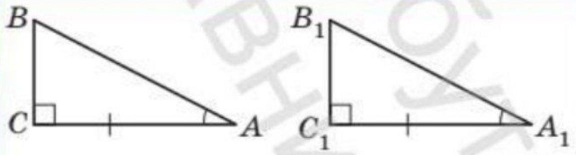


Рис. 24.4

3 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90°$ (рис. 24.5). За умовою відомо, що $\angle B = \angle B_1$ і $AC = A_1C_1$. Оскільки $\angle A = 90° - \angle B$ і $\angle A_1 = 90° - \angle B_1$, то $\angle A = \angle A_1$ і дані трикутники рівні за щойно доведеною в пункті 2 ознакою.

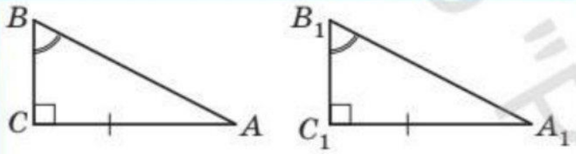


Рис. 24.5

4 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90°$ (рис. 24.6). За умовою відомо, що $\angle A = \angle A_1$ і $AB = A_1B_1$. Оскільки $\angle B = 90° - \angle A$ і $\angle B_1 = 90° - \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Отже, ці два трикутники будуть рівні за стороною і двома прилеглими до неї кутами.

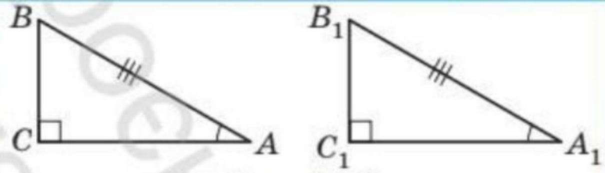


Рис. 24.6

5 Розглянемо два прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Доведемо, що ці трикутники рівні.

За аксіомою про існування рівного трикутника існує трикутник $A_2B_2C_2$, рівний трикутнику $A_1B_1C_1$ і розташований так, що точка C_2 збігається з точкою C, точка B_2 належить променю CB, а точка A_2 лежить в іншій півплощині відносно прямої BC, ніж точка A (рис. 24.7).

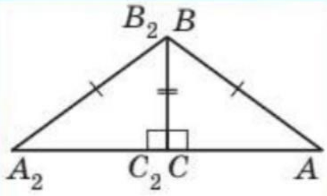


Рис. 24.7

Крім того, за означенням рівних трикутників $\angle C_1 = C_2 = 90°$, $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$.

Оскільки за аксіомою відкладання відрізка від початку даного променя можна відкласти лише один відрізок даної довжини, то точки B_2 і B збігаються. Оскільки $\angle A_2C_2B_2 = 90°$ і $\angle ACB = 90°$, то $\angle A_2C_2A = 180°$, тобто точки A_2, C_2 і A лежать на одній прямій.

Оскільки $AB = A_1B_1 = A_2B_2$, то трикутник A_2B_2A — рівнобічний з основою A_2A, а відрізок B_2C_2 є його висотою, проведеною до основи. За властивістю рівнобічного трикутника ця висота є також медіаною, тобто $A_2C_2 = AC_2 = AC$.

Отже, трикутники ABC і $A_2B_2C_2$ рівні за трьома сторонами. Тому трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ також рівні, що й потрібно було довести.

Помічаємо, що остання, п’ята частина доведення є найважкішою для розуміння та відтворення дітьми.

Можливо, варто було б надати окремо п’ять тверджень так, щоб його доведення слідувало безпосередньо за самим твердженням, і це кращу б структурувало матеріал і сприймалося школярами і школярками.

Розглянемо задачний матеріал цього параграфа, зокрема низку задач, які авторами підручника [3] віднесено до високого рівня складності. Зазначимо, що більшість задач серед них – на доведення, є задачі й на обчислення, і задачі з дослідницьким компонентом.

Високий рівень

35. Градусна міра одного з кутів прямокутного трикутника дорівнює $40°$. Знайдіть градусну міру кута між висотою та бісектрисою цього трикутника, проведених із вершини прямого кута.

36. Градусна міра кута між висотою та бісектрисою прямокутного трикутника, проведених із вершини прямого кута, дорівнює $10°$. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього прямокутного трикутника.

37. Градусна міра одного з кутів прямокутного трикутника дорівнює $60°$, різниця довжин гіпотенузи та катета, прилеглого до цього кута, становить 16 см. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника.

38. Медіана рівнобічного трикутника, проведена до його основи, утворює з бічною стороною кут $60°$. Знайдіть довжину цієї медіани, якщо бічна сторона трикутника дорівнює 18 см.

39. Точка $C(-3;2)$ є вершиною прямого кута прямокутного трикутника ABC. Знайдіть можливі координати інших двох вершин цього трикутника, якщо відомо, що вони лежать на прямій $y=6-2x$ і обидві координати цих вершин є цілими числами.

40. Точка $M(2;5)$ є вершиною прямого кута прямокутного трикутника KMN. Знайдіть можливі координати інших двох вершин цього трикутника, якщо відомо, що вони лежать на прямій $y=3-x$ і обидві координати цих вершин є цілими числами.

41. Доведіть, що в рівних трикутниках рівні відповідні висоти.

42. Доведіть, що коли дві висоти трикутника рівні, то цей трикутник рівнобічний.

43. Бісектриси AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці O; $\angle AOB=135°$. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

44. Знайдіть градусну міру кута, під яким перетинаються продовження висот, проведених із вершин гострих кутів трикутника, якщо тупий кут цього трикутника дорівнює $105°$.

45. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета.

46. Використовуючи додаткову побудову, наведену на рис. 11 (відклали $MD = AM$), доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

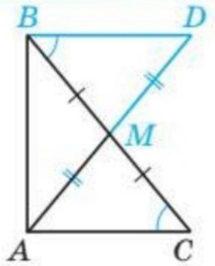


Рис. 11

47. Доведіть, що в прямокутному трикутнику з нерівними катетами бісектриса прямого кута ділить навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини.

48. Використовуючи рис. 12, доведіть, що коли висота і медіана трикутника, проведені з однієї вершини, ділять кут трикутника на три рівні кути, то цей трикутник прямокутний.

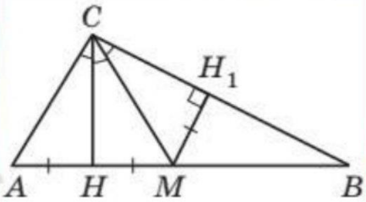


Рис. 12

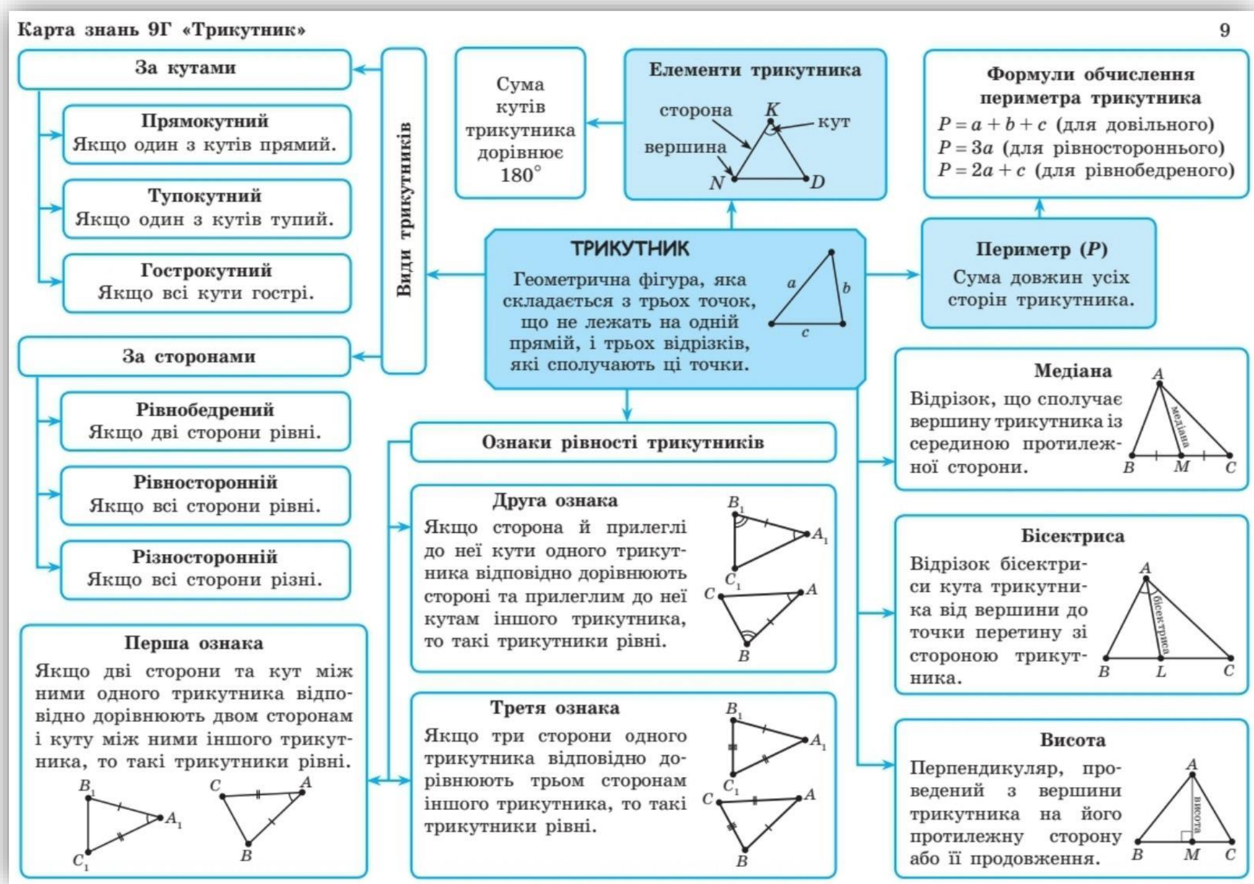
Наприкінці параграфу пропонуються цікавинки від діда Тараса:

Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Запитайте у вчителів і вчительок іноземної мови (англійської, французької, іспанської тощо) про те, як звучать цією мовою основні терміни, що стосуються геометрії: *точка, пряма, площина, відрізок, кут, трикутник, рівнобічний трикутник, рівносторонній трикутник, прямокутний трикутник, прямокутник, квадрат* та інші. Зробіть невелике повідомлення щодо цих термінів у різних мовах.

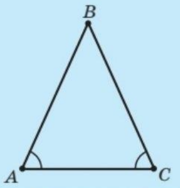
2. Знайдіть у мережі Інтернет підручники з математики для 7 класу іноземною мовою, яку ви вивчаєте. Чи є зрозумілим для вас викладений там матеріал? Які виникли труднощі?

За навчальним проєктом Інтелект України пропонують узагальнювати (або вводити) матеріал стосовно вивчення трикутників за допомогою інтелект-карт або карт знань. Розглянемо деякі з них:



Карта знань 10Г «Рівнобедрений трикутник»

Властивість кутів рівнобедреного трикутника.
У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.



РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

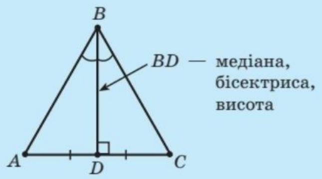
Трикутник є *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні.

Ознака рівнобедреного трикутника
Якщо два кути трикутника рівні, то він рівнобедрений.

Елементи
Рівні сторони рівнобедреного трикутника є *бічними сторонами*, а його третя сторона — *основою*.

AC — основа;
AB та BC — бічні сторони.

Властивість відрізків рівнобедреного трикутника
У рівнобедреному трикутнику:
- бісектриса, проведена до основи, є медіаною й висотою;
- висота, проведена до основи, є медіаною та бісектрисою;
- медіана, проведена до основи, є висотою й бісектрисою.

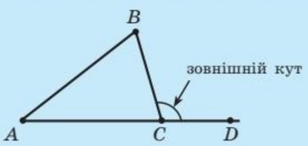


Ознаки рівнобедреного трикутника
Якщо у трикутника медіана та висота, проведені з однієї вершини, співпадають, то він рівнобедрений.
Якщо у трикутника медіана та бісектриса, проведені з однієї вершини, співпадають, то він рівнобедрений.
Якщо у трикутника висота та бісектриса, проведені з однієї вершини, співпадають, то він рівнобедрений.

Карта знань 11Г «Зовнішній кут трикутника»

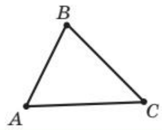
ТРИКУТНИК

Зовнішній кут
Кут, суміжний з кутом трикутника при поданій вершині.

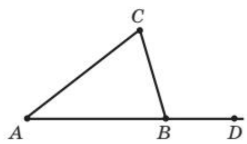


Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

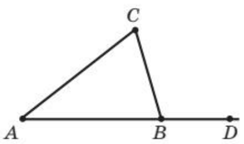


Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.



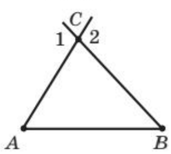
$\angle CBD = \angle BAC + \angle BCA$

Зовнішній кут трикутника більший від кожного внутрішнього кута, що з ним не суміжний.



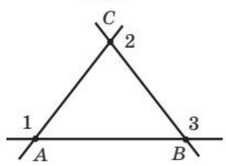
$\angle CBD > \angle CAB$
$\angle CBD > \angle BCA$

При кожній вершині трикутника існує два зовнішніх кути, що рівні між собою як вертикальні.

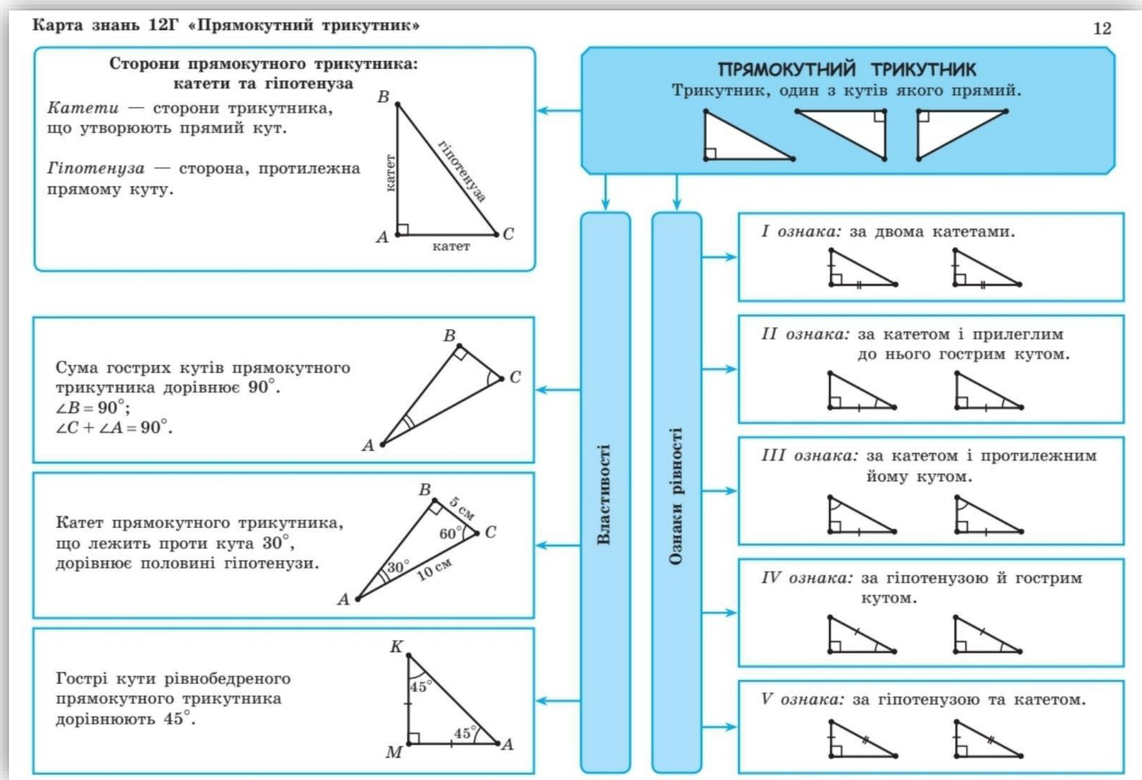


$\angle 1 = \angle 2$

Сума всіх зовнішніх кутів трикутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.



$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$



Карта знань 12Г «Прямокутний трикутник» 12

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Трикутник, один з кутів якого прямий.

Сторони прямокутного трикутника: катети та гіпотенуза

Катети — сторони трикутника, що утворюють прямий кут.

Гіпотенуза — сторона, протилежна прямому куту.

Властивості

Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.
$\angle B = 90^\circ$;
$\angle C + \angle A = 90^\circ$.

Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Гострі кути рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнюють 45°.

Ознаки рівності

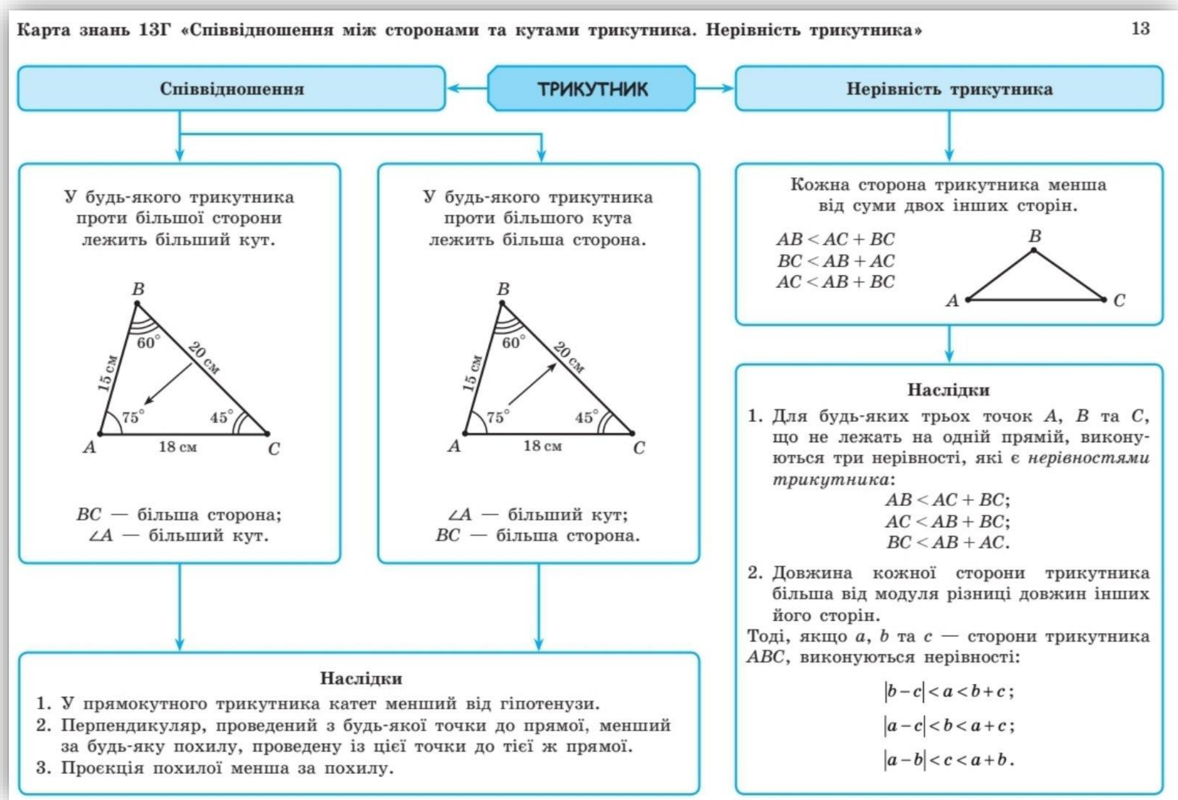
I ознака: за двома катетами.

II ознака: за катетом і прилеглим до нього гострим кутом.

III ознака: за катетом і протилежним йому кутом.

IV ознака: за гіпотенузою й гострим кутом.

V ознака: за гіпотенузою та катетом.



Карта знань 13Г «Співвідношення між сторонами та кутами трикутника. Нерівність трикутника» 13

ТРИКУТНИК

Співвідношення

У будь-якого трикутника проти більшої сторони лежить більший кут.

BC — більша сторона;
$\angle A$ — більший кут.

У будь-якого трикутника проти більшого кута лежить більша сторона.

$\angle A$ — більший кут;
BC — більша сторона.

Наслідки

1. У прямокутного трикутника катет менший від гіпотенузи.
2. Перпендикуляр, проведений з будь-якої точки до прямої, менший за будь-яку похилу, проведену із цієї точки до тієї ж прямої.
3. Проєкція похилої менша за похилу.

Нерівність трикутника

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін.

$AB < AC + BC$
$BC < AB + AC$
$AC < AB + BC$

Наслідки

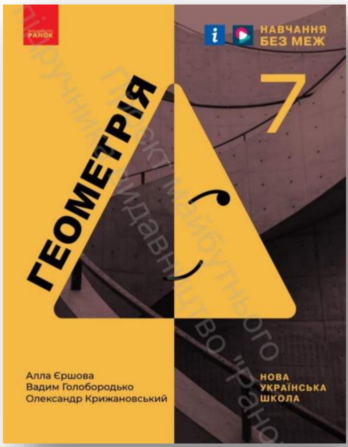
1. Для будь-яких трьох точок A, B та C, що не лежать на одній прямій, виконуються три нерівності, які є *нерівностями трикутника*:
$AB < AC + BC$;
$AC < AB + BC$;
$BC < AB + AC$.
2. Довжина кожної сторони трикутника більша від модуля різниці довжин інших його сторін.

Тоді, якщо a, b та c — сторони трикутника ABC, виконуються нерівності:

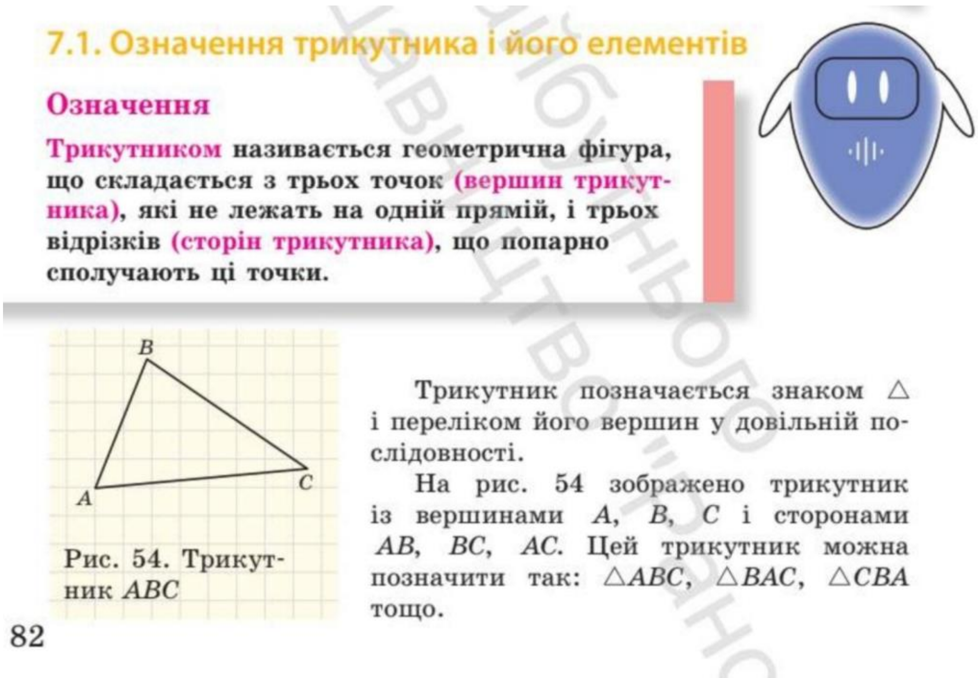
$$|b-c| < a < b+c;$$
$$|a-c| < b < a+c;$$
$$|a-b| < c < a+b.$$

5. Порівняльний аналіз викладу теми за паралельними підручниками.

Дослідимо відмінності викладу теми „Трикутники” у підручниках [1] та [2], ***авторів підручника „Геометрія - 7” Єршової А.П., Голобородько В.В., Крижанівського О.Ф. (2024)***



1. Поняття „трикутник” визначається по-різному: в підручнику [1] воно вводиться описово і визначається як частина площини разом з відрізками, що обмежують цю частину; у [2] „трикутник” визначається строго, конструктивно як фігура, що складається з трьох точок і трьох відрізків, що попарно їх з'єднують.



7.1. Означення трикутника і його елементів

Означення

Трикутником називається геометрична фігура, що складається з трьох точок (вершин трикутника), які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків (сторін трикутника), що попарно сполучають ці точки.

Рис. 54. Трикутник ABC

Трикутник позначається знаком $\triangle$ і переліком його вершин у довільній послідовності.

На рис. 54 зображено трикутник із вершинами A, B, C і сторонами AB, BC, AC. Цей трикутник можна позначити так: $\triangle ABC$, $\triangle BAC$, $\triangle CBA$ тощо.

82

2. Рівні фігури визначаються однаково.

7.2. Рівність геометричних фігур. Рівні трикутники

Згідно з раніше даними означеннями, два відрізки (кути) називаються **рівними**, якщо вони суміщаються накладанням. Узагальнимо це означення для довільних фігур.

Означення

Дві геометричні фігури називаються рівними, якщо вони суміщаються накладанням.

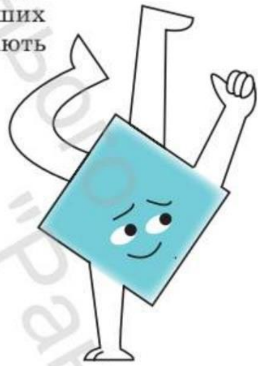
3. Всі ознаки рівності трикутників в даних підручниках доводяться однаково.

4. У [1] перша і друга ознаки даються в одному параграфі, а в [2] – розділені параграфом „перпендикуляр до прямої".

5. У [1] поняття медіани, висоти і бісектриси трикутника розглядаються відразу після введення поняття „трикутник”. У [2] – тільки після вивчення рівнобедреного трикутника.
6. Поняття медіани, бісектриси і висоти трикутника визначаються однаково.

12.1. Означення медіани, бісектриси й висоти трикутника

Крім сторін і кутів, із трикутником пов'язані кілька інших важливих елементів, що мають спеціальні назви.



Означення

Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

130

На рис. 95 відрізок BM є медіаною трикутника ABC. У будь-якому трикутнику можна провести три медіани — по одній із кожної вершини. Далі буде доведено, що всі вони перетинаються в одній точці (рис. 96)[1].

Означення

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину цього кута з точкою на протилежній стороні.

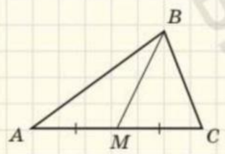


Рис. 95. Відрізок BM — медіана трикутника ABC

Рис. 96. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці

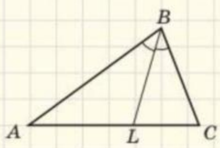


Рис. 97. Відрізок BL — бісектриса трикутника ABC

На рис. 97 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC. Звернемо увагу на те, що, на відміну від бісектриси кута, яка є променем, бісектриса трикутника — відрізок. Очевидно, що будь-який трикутник має три бісектриси (рис. 98). Усі вони також перетинаються в одній точці (цей факт буде доведено далі).

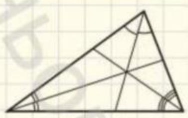


Рис. 98. Три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці

Означення

Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений із вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

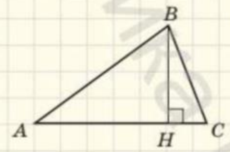
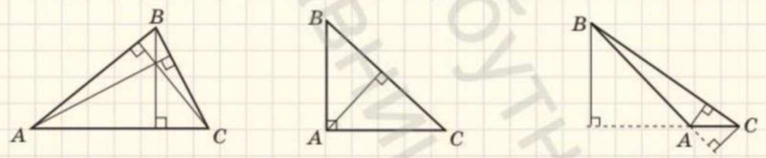


Рис. 99. Відрізок BH — висота трикутника ABC

На рис. 99 відрізок BH — висота трикутника ABC.

За теоремою про існування і єдиність перпендикуляра до прямої, з кожної вершини трикутника можна провести тільки одну його висоту. Висоти трикутника не обов'язково лежать усередині нього. На відміну від медіан і бісектрис, деякі з висот можуть збігатися зі сторонами трикутника або проходити поза ним (рис. 100).



Три висоти лежать усередині трикутника

Дві висоти збігаються зі сторонами трикутника

Дві висоти лежать поза трикутником

Рис. 100. Розміщення висот у трикутнику ABC

Висоти трикутника (або їхні продовження) перетинаються в одній точці (це твердження доведемо згодом).

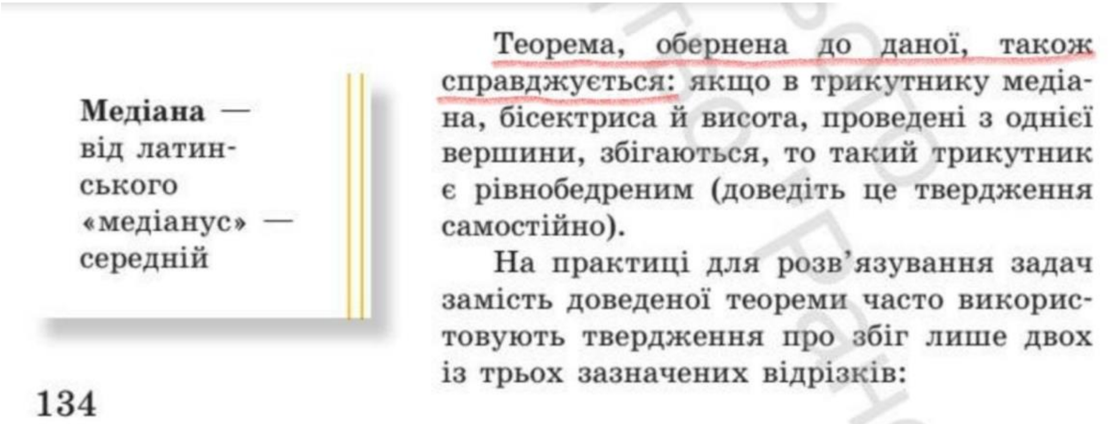
Натомість, бачимо, що у підручнику [2] відразу досліджуються властивості цих елементів трикутника конструктивним шляхом, і це надається в основному змісті підручника.

7. По різному вивчаються властивості й ознаки рівнобедреного трикутника: у [1] в одній теоремі формулюються властивості та в наступному пункті даються чотири ознаки рівнобедреного трикутника.

В [2] спочатку формулюються *пряма і обернена теореми щодо кутів рівнобедреного трикутника*, а потім в темі „Медіана, бісектриса і висота трикутника” розглядаються властивості рівнобедреного трикутника, пов'язані з цими поняттями.

Щодо іншої ознаки рівнобедреного трикутника, то в [2] це подається як обернене твердження, яке пропонується довести самостійно: *Якщо в трикутнику, медіана і бісектриса, поведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник рівнобедрений.*

Автори зазначають, що на практиці використовуються інші твердження:

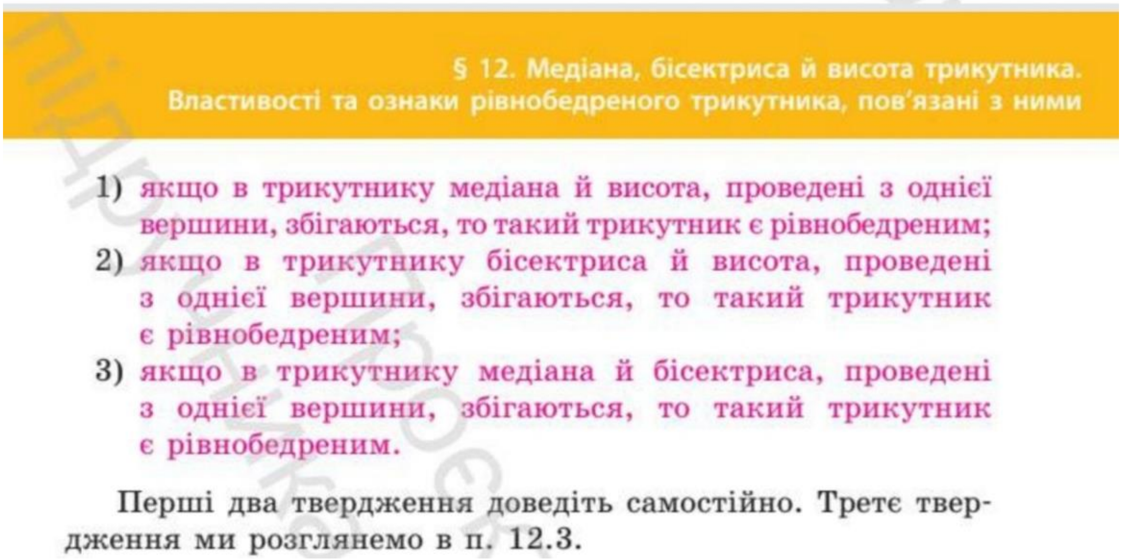


Медіана — від латинського «медіанус» — середній

Теорема, обернена до даної, також справджується: якщо в трикутнику медіана, бісектриса й висота, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним (доведіть це твердження самостійно).

На практиці для розв'язування задач замість доведеної теореми часто використовують твердження про збіг лише двох із трьох зазначених відрізків:

134



§ 12. Медіана, бісектриса й висота трикутника. Властивості та ознаки рівнобедреного трикутника, пов'язані з ними

1) якщо в трикутнику медіана й висота, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним;
2) якщо в трикутнику бісектриса й висота, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним;
3) якщо в трикутнику медіана й бісектриса, проведені з однієї вершини, збігаються, то такий трикутник є рівнобедреним.

Перші два твердження доведіть самостійно. Третє твердження ми розглянемо в п. 12.3.

8. У підручнику [2] також є завдання та обґрунтування практичного змісту:

Практичне значення доведеної теореми очевидне з такого прикладу.

Нехай на місцевості необхідно визначити відстань між точками A і C, прямий прохід між якими неможливий (рис. 60). Один зі способів вимірювання такий: на місцевості обирають певну точку O, до якої можна дістатися з точок A, C, B, D, і на променях AO і CO відкладають відрізки $BO = AO$ і $DO = CO$.

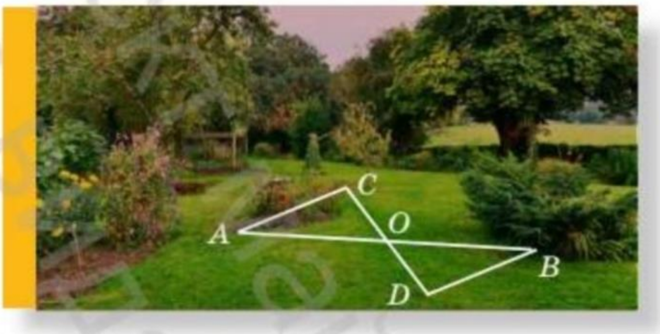
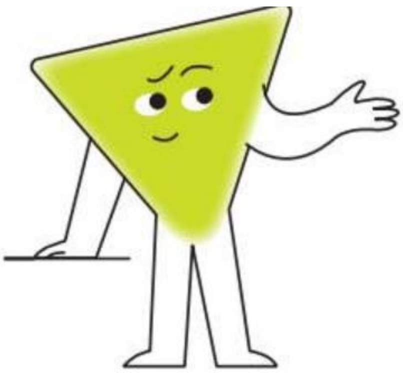


Рис. 60. Визначення відстані на місцевості за допомогою першої ознаки рівності

9. У [2] більше уваги приділяється розвиткові логічного мислення учнів: окрім понять прямої і оберненої теореми, теореми-властивості та теореми-ознаки пояснюється, що таке *контрприклад*, як розв'язувати геометричну задачу *„від кінця до початка*", одна з теорем доводиться *двома способами* тощо.



8.2. Спростування тверджень. Контрприклад

Проаналізуємо першу ознаку рівності трикутників. Згідно з нею для доведення рівності двох трикутників достатньо довести рівність трьох пар відповідних елементів — двох сторін і кута між ними. Вимога щодо того, щоб рівні кути обов'язково лежали між рівними сторонами, є дуже важливою.

Справді, розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 61). Вони не є рівними, хоча мають дві пари відповідно рівних сторін ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$), оскільки рівні кути C і C_1 лежать не між рівними сторонами.

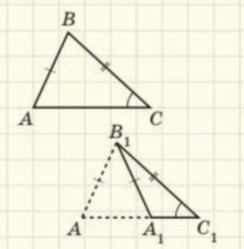


Рис. 61. Дві сторони й кут двох трикутників відповідно рівні, але самі трикутники не рівні

За допомогою наведеного прикладу ми показали, що твердження «Якщо дві сторони й певний кут одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і певному куту іншого трикутника, то такі трикутники рівні» є хибним. Інакше кажучи, ми спростували це твердження конкретним прикладом. Такий приклад, за допомогою якого можна показати, що якесь загальне твердження є неправильним, називається **контрприкладом**. Принцип побудови контрприкладу для спростування хибного твердження досить простий: потрібно змоделювати ситуацію, коли умова твердження виконується, а висновок — ні.

Контрприклад — від латинського «контра» — проти

Зобразимо схематично спростування твердження за допомогою контрприкладу.

Твердження	Контрприклад
Якщо A, то B	A, але не B

Контрприклади використовуються тільки для спростування неправильних тверджень, але не для доведення правильних.

Завдання для подальшого обговорення

1. Проаналізуйте методичні особливості навчання семикласників і семикласниць темі «Трикутники» за ***інтегрованим підручником «Математика – 7. Частина 2»*** [3] ***авторів О. Школьний, Є. Нелін, А. Миляник, Ю. Простакова.***

2. Виконайте ***лабораторну роботу*** за темою «Ознаки рівності трикутників» за методикою проєкта «Інтелект України» (див. посилання на Jamboard у відповідній команді Teams).

Методика навчання теми: «Паралельні прямі. Сума кутів трикутника».

ПЛАН

1. Вступні зауваження.
2. Формування понять.
3. Вивчення тверджень.
4. Характеристика задачного матеріалу.
5. Порівняльний аналіз викладу теми за паралельними підручниками та альтернативними методиками.

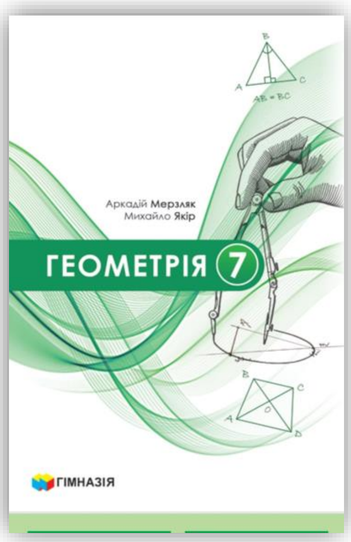
1. Вступні зауваження.

Навчальний матеріал цього параграфу доповнює ознаки рівності трикутників важливим теоретичним апаратом для розв'язування задач і доведення інших теорем і групується навколо трьох основних питань: ознаки і властивості паралельності прямих, сума кутів трикутника. У більшості сучасних підручників ця тема містить пункт «Прямокутний трикутник», методику навчання якого було частково розглянуто на попередній лекції.

Основна мета вивчення теми – ознайомити учнів з теоремою про суму кутів трикутника, ознаками паралельності прямих, властивостями кутів, що утворені при перетині паралельних прямих січною та навчити застосовувати вивчені теореми при розв'язуванні задач, зокрема прикладного характеру.

Під час вивчення даної теми є змога активізувати подальший логічний розвиток учнів. Доцільно ще раз пояснити відмінність між поняттями „означення паралельних прямих" і „ознака паралельних прямих", звернути увагу на те, що теорема про властивість кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є оберненим твердженням до ознаки паралельності прямих. Можна також, якщо вчитель вважає доречним, на прикладі цих теорем роз'яснити зміст понять „необхідна умова", „достатня умова", „необхідна і достатня умова", показати, як можна переформулювати теорему за допомогою таких термінів.

Матеріал, що вивчається в цій теми, відповідає параграфу 3 ***підручника „Геометрія – 7" Мерзляк А.Г., Якір М.С. (2024)*** [1].



У цьому підручнику автори задля більш ефективного розвитку логічної культури учнів включили оповідання щодо ***п'ятого постулата Евкліда***, пояснюючи різницю між поняттями „аксіома" і „теорема".

Тобто, якщо деяке твердження можна довести за допомогою аксіом, то це твердження – теорема, а не аксіома. Вченими на початку XIX ст. було доведено, що п'ятий постулат Евкліда (аксіома паралельних) – це аксіома, а не теорема (тобто його не можна вивести з інших аксіом Евкліда).

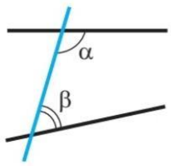
П'ЯТИЙ ПОСТУЛАТ ЕВКЛІДА

У п. 6 ви дізналися, що за аксіоми **приймають очевидні твердження**. Тоді чому б, наприклад, теореми 1.1 і 5.1 не включити до списку аксіом, адже вони також очевидні? Відповідь на це запитання цілком природна: якщо якесь твердження можна довести за допомогою аксіом або вже доведених теорем, то це твердження — теорема, а не аксіома.

Із цих позицій дуже повчальною є історія, пов'язана з п'ятим постулатом Евкліда (нагадаємо, що в оповіданні «З історії геометрії» ми сформулювали чотири перших постулати).

V постулат. І щоб кожного разу, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними односторонні кути, сума яких менша від двох прямих кутів, ці прямі перетиналися по той бік від січної, по який ця сума менша від двох прямих кутів (рис. 242).

Можна показати, що п'ятий постулат і сформульована нами в п. 13 аксіома паралельності прямих рівносильні, тобто з постулату випливає аксіома, і навпаки, з аксіоми випливає постулат.



$\alpha + \beta < 180°$

Рис. 242

Понад двадцять століть багато вчених намагалися довести п'ятий постулат, тобто вивести його з інших аксіом Евкліда. Лише на початку XIX ст. кілька математиків незалежно один від одного дійшли висновку: твердження, що *через дану точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній*, є аксіомою.

Отже, взагалі кажучи, якщо це твердження – домовленість, то його можна замінити протилежним твердженням і отримати нову теорію (що і було зроблено М. І. Лобачевським (1792-1856)).

2. Формування понять.

У цій темі на рівні означення вводяться <u>чотири нових для учнів понять</u> (окрім поняття паралельних прямих, яке не є новим для учнів):

- ✓ *„відстань між двома паралельними прямими”,*
- ✓ *„зовнішній кут трикутника”,*
- ✓ *„гіпотенуза” і*
- ✓ *„катети” прямокутного трикутника*

(в підручнику [1] як означення не виділено). Поняття *„січна”, „односторонні кути”, „різносторонні кути”, „відповідні кути”* вводяться з використанням рисунка (описово).

Крім поняття паралельні прямі, в п. 13 підручника [1] розглядаються також поняття паралельних відрізків, променів, променя і відрізка, відрізка і прямої.

13. Паралельні прямі

Означення. **Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.**

На рисунку 204 зображено паралельні прямі a і b. Записують: $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b»).

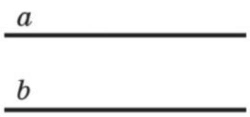


Рис. 204

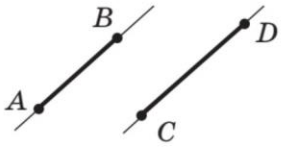


Рис. 205

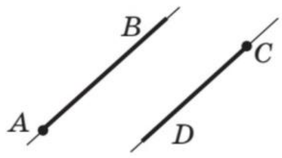


Рис. 206

Якщо два відрізки лежать на паралельних прямих, то їх називають паралельними. На рисунку 205 відрізки AB і CD паралельні. Записують: $AB \parallel CD$.

Також можна говорити про паралельність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 206 зображено паралельні промені AB і CD.

Введенню поняття „відстань між двома паралельними прямими” в тексті підручника [1] передує ключова (опорна) задача:

Задача. Доведіть, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.

Доведення цього факту ґрунтується на властивостях паралельних прямих і методі трикутників, і дозволяє ввести таке означення.

Означення. Відстанню між двома паралельними прямими називається відстань від *будь-якої* точки однієї з прямих до другої прямої.

Якщо дві прямі a і b перетнути третьою прямою c, то утвориться вісім кутів (рис. 216). Пряму c називають **січною** прямих a і b.

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають **односторонніми.**

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають **різносторонніми.**

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають **відповідними.**

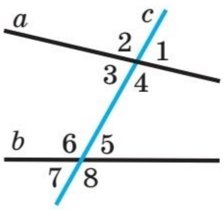


Рис. 216

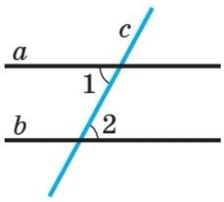


Рис. 217

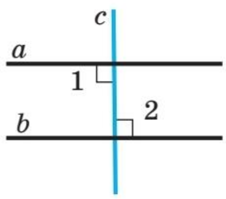


Рис. 218

Для кращого засвоєння *залежностей між кутами, утвореними при перетині двох прямих січною* можна запропонувати такі запитання:

1) Різносторонні кути однієї пари рівні. Порівняйте різносторонні кути іншої пари.

2) Сума односторонніх кутів однієї пари дорівнює 180°. Знайдіть суму односторонніх кутів іншої пари.

3) Сума односторонніх кутів однієї пари менше (більше) 180°. Що можна сказати про суму односторонніх кутів іншої пари?

4) Чому дорівнює сума односторонніх кутів, якщо різносторонні кути рівні?

5) Сума односторонніх кутів дорівнює 180°. Порівняйте різносторонні кути.

При формуванні поняття зовнішнього кута трикутника не можна обмежуватися прикладами зовнішніх кутів лише гострокутного трикутника, оскільки в учнів створиться невірне уявлення, що зовнішній кут трикутника завжди більший, ніж внутрішній, суміжний із ним. Необхідно зображувати також тупокутні, прямокутні трикутники і пропонувати учням визначати зовнішні кути таких трикутників.

3. Вивчення тверджень.

Зауважимо, що при вивченні даної теми за підручником [1] учні знайомляться ще з однією аксіомою – паралельних прямих. Причому, логіка викладу теоретичного матеріалу цієї теми (яка обговорювалася в лекції 2) така, що після введення поняття паралельних прямих, вивчається ознака паралельності прямих (теорема 13.1) (дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні), яка дозволяє за допомогою лінійки і косинця будувати паралельні прямі, і з якої випливає наслідок:

Наслідок. Через дану точку, яка не належить даній прямій, *можна* провести пряму, паралельну даній.

Фактично, наслідок – це задача на побудову, з якої ми одержуємо факт, що *таку пряму провести можна* (тобто вона існує).

А вже далі формулюється ***основна властивість (аксіома) паралельних*** *прямих*, в якій стверджується, що така пряма - єдина:

Аксіома. Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить *тільки одна* пряма, паралельна даній.

Зауваження. В підручнику О. В. Погорєлова, наприклад, було застосовано іншу логіку викладу: в аксіомі паралельних, яка вводилася на початку вивчення курсу, використовувалось формулювання „не більше однієї прямої”; а пізніше, в межах теми „Сума кутів трикутника” розглядалась задача на побудову (через дану точку, яка не належить даній прямій, *можна* провести пряму, паралельну даній). Об'єднання цих двох фактів і давало висновок: можна і тільки одну. До речі, таку ж логіку, «успадковану» від О. В. Погорєлова, прийнято і в підручнику [2] «Геометрія – 7» Єршової А. П. та співавторів.

Після ведення аксіоми в цьому ж пункті 13 підручника [1] розглядається ще одна ознака паралельності прямих: дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні (теорема 13.2). (Чомусь автори для теореми 13.1 зазначають в дужках, що це ознака паралельності прямих, а для теореми 13.2 – не зазначають).

П. 14 присвячений іншим ***ознакам паралельності прямих***, які пов'язані з кутами, утвореними при перетині двох прямих січною. Тут формулюються три теореми:

Теорема 14.1. Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Теорема 14.2. Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Теорема 14.3. Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Доведення першої з цих теорем більш важке, ніж інших двох; тут розглядаються два випадки (коли різносторонні кути дорівнюють по 90° і коли січна не перпендикулярна жодної з даних прямих), а саме доведення ґрунтується на методі трикутників.

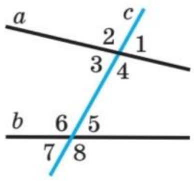


Рис. 216

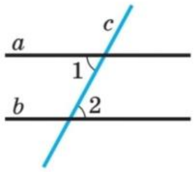


Рис. 217

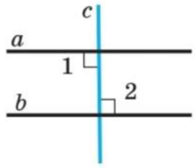


Рис. 218

Теорема 14.1. ***Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

Доведення. На рисунку 217 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо $\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (рис. 218), то паралельність прямих a і b випливає з ознаки паралельності прямих (теорема 13.1).

Нехай тепер пряма c не перпендикулярна до жодної з прямих a і b. Позначимо буквами A і B точки перетину прямої c із прямими a і b відповідно. Позначимо точку M — середину відрізка AB (рис. 219). Із точки M опустимо перпендикуляр ME на пряму a. Нехай пряма ME перетинає пряму b у точці F. Маємо: кути 1 і 2 рівні за умовою; кути 3 і 4 рівні як вертикальні.

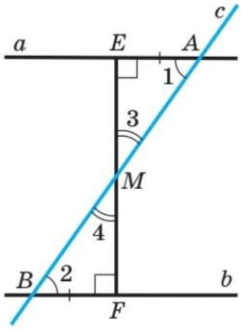


Рис. 219

Отже, трикутники AME і BMF рівні за стороною та двома прилеглими до неї кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AEM = \angle MFB = 90°$. Ми показали, що прямі a і b перпендикулярні до прямої EF; отже, вони паралельні.

В наступному пункті 15 формулюються три теореми, обернених до трьох ознак паралельності прямих; отже, тут формулюються ***властивості паралельних прямих.***

Теорема 15.1. Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні.

Доведення цієї теореми більш важке для сприймання; учитель має довести її самостійно, використовуючи метод від супротивного.

Доведення. ⊙ На рисунку 243 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

Нехай $\angle 1 \neq \angle 2$. Тоді через точку K проведемо пряму a_1 так, щоб $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 243). Кути 3 і 2 є різносторонніми при прямих a_1 і b та січній c. Тоді за ознакою паралельності двох прямих (теорема 14.1) $a_1 \parallel b$. Отримали, що через точку K проходять дві прямі, паралельні прямій b. Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $\angle 1 = \angle 2$. ●

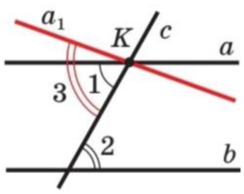


Рис. 243

При доведенні двох інших властивостей можна залучати учнів; вони цілком спроможні відтворити такі неважкі доведення відразу ж після їх вивчення.

Теорема 15.2 (обернена до теореми 14.3). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 244 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

За властивістю паралельних прямих (теорема 15.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c. Але кути 3 й 1 рівні як вертикальні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$. ●

Теорема 15.3 (обернена до теореми 14.2). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.***

Доведення. ⊙ На рисунку 245 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

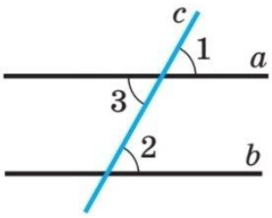


Рис. 244

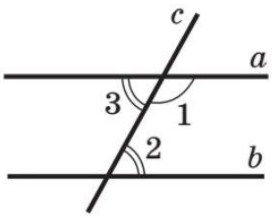


Рис. 245

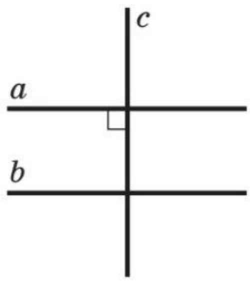


Рис. 246

За властивістю паралельних прямих (теорема 15.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c. Але кути 3 й 1 суміжні, тому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Отже, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ●

Наслідок. ***Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої*** (рис. 246).

Доведіть цей наслідок самостійно.

Як бачимо, доведення наслідку з цих властивостей (*якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої*) автори підручника пропонують учням і ученицям провести самостійно.

Теорема про суму кутів трикутника є одним з фундаментальних тверджень, що стосуються властивостей трикутників. Доведення цієї теореми достатньо просте і можна організувати колективне її доведення. (Також можна запропонувати учням *декілька способів доведення* цієї теореми, що дозволяє надати їй більшої значущості і сприяє розвиткові логічного мислення учнів). Це ж стосується ***теореми про зовнішній кут трикутника***.

Теорема 16.1. ***Сума кутів трикутника дорівнює* 180°.**

Доведення. ⊙ Розглянемо довільний трикутник ABC. Треба довести, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Через вершину B проведемо пряму a, паралельну прямій AC (рис. 267). Маємо: $\angle A$ і $\angle 1$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a й AC та січній AB. Аналогічно можна довести, що $\angle C = \angle 3$. Але кути 1, 2, 3 складають розгорнутий кут з вершиною B. Отже, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. ●

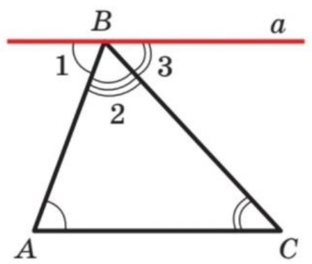


Рис. 267

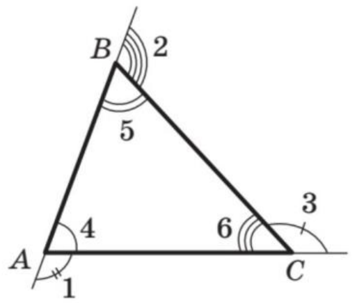


Рис. 268

Наслідок. ***Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Із цього наслідку випливає, що кут при основі рівнобедреного трикутника завжди є гострим.

Теорема 16.2. ***Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.***

Доведення. ⊙ На рисунку 268 кути 1, 2 і 3 — зовнішні кути трикутника ABC. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Доведемо, наприклад, першу із цих трьох рівностей (решту рівностей доводять аналогічно).

За властивістю суміжних кутів $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$. Тоді $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, звідки $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ●

Наслідок. ***Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Ще одна змістовна лінія даної теми – ***прямокутний трикутник****, його властивості та ознаки рівності прямокутного трикутника* (основні положення цієї теми вже було розглянуто у лекції 3 за паралельним інтегрованим підручником О. Школьного і співавторів «Математика - 7»).

Тепер розглянемо розгортання цієї теми за підручником [1], пункт 18.

Ознаки рівності прямокутних трикутників *за двома катетами, за гіпотенузою і гострим кутом, за катетом і прилеглим гострим кутом, за катетом і протилежним гострим кутом* доводяться безпосередньо з ознак рівності трикутників і за допомогою теореми про суму кутів трикутника. Доведення цих ознак у підручнику [1] не дається, тому можна їх провести у вигляді розв’язання вправ за допомогою системи навідних запитань:

1) сформулюйте другу ознаку рівності трикутників;
2) один гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Знайдіть другий гострий кут;
3) гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту іншого прямокутного трикутника. Порівняйте два інших гострих кута;

4) сформулюйте першу ознаку рівності для прямокутних трикутників, взявши в якості двох сторін а) два катети; б) катет і гіпотенузу;
5) сформулюйте другу ознаку рівності для прямокутних трикутників, взявши в якості сторони а) катет; б) гіпотенузу.

Щодо *ознаки рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом*, то її доведення більш важке і автори відносять його до вищого рівня складності (не обов'язкове для вивчення).

Теорема 18.1. Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 288). Треба довести, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

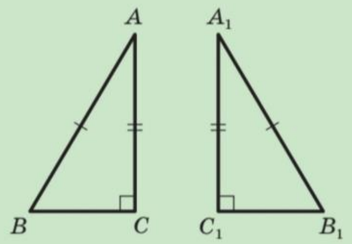


Рис. 288

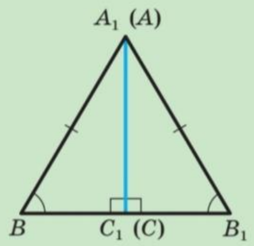


Рис. 289

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина C — з вершиною C_1, а точки B і B_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої A_1C_1 (рис. 289).

Маємо: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90° + 90° = 180°$. Отже, кут BC_1B_1 — розгорнутий, і тому точки B, C_1, B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B і A_1B_1 та висотою A_1C_1 (рис. 289). Тоді відрізок A_1C_1 — медіана цього трикутника, тобто $C_1B = C_1B_1$. Отже, трикутники A_1BC_1 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників.

Автори окремо виділяють пункт 19 під назвою „*Властивості прямокутного трикутника*”.

Тут розглядається *теорема*:

У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет;

і *наслідок* з неї:

Якщо з однієї точки, що не лежить на прямій, до цієї прямої проведено перпендикуляр і похилу, то перпендикуляр менший від похилої (поняття „перпендикуляр" і „похила" в даному підручнику було введено ще в §1).

Важливими для подальшого застосування при розв'язуванні задач є твердження-властивості прямокутного трикутника, сформульовані в підручнику [1] як опорні задачі:

катет, який лежить проти кута, що дорівнює 30°*, дорівнює половині гіпотенузи;*

а також обернене твердження: якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить навпроти цього катета, дорівнює 30°.

Зазначимо, що у межах даної теми у підручнику [1] зустрічаються теореми-властивості, теореми-ознаки, причому їх доведення здебільшого неважкі, автори відносять їх до першого і другого рівня складності. Проте зустрічаються і теореми, доведення яких є важким, а, отже, не обов'язковим для вивчення учнями. Наприклад:

Теорема 17.2. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

При доведенні трьох теорем із дванадцяти, а також одного наслідку з теореми, передбачених в цій темі, послуговуються *методом доведення від супротивного*. Тому учням пропонують повторити алгоритм застосування цього методу і там, де це доцільно, залучають до колективного пошуку доведення відповідно до алгоритму. Це варто зробити при доведенні теореми про паралельність двох прямих, які паралельні третій. Більше того, можливо учні зможуть провести доведення цієї теореми самостійно, відповідаючи на проблемне запитання: Чи можуть перетинатися прямі *a* і *b*, якщо вони паралельні прямій *c*?

На завершенні вивчення теорем теми і наслідків із них доцільно разом із учнями виділити правило-орієнтир до доведення паралельності двох прямих на площині. Щоб довести паралельність двох прямих на площині, досить довести одне з тверджень: 1) внутрішні різносторонні кути рівні; 2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°; 3) відповідні кути рівні; 4) кожна з прямих паралельна третій; 5) кожна з прямих перпендикулярна третій прямій.

4. Характеристика задачного матеріалу.

Теоретичний матеріал теми дає можливість розв’язувати різноманітні задачі всіх типів (на доведення, обчислення, побудову, дослідження).

Наприклад, підручнику [1] зустрічаємо:

<u>На доведення</u> (с. 129, №322): доведіть, що коли будь-яка пряма, яка перетинає пряму a, перетинає і пряму b, то прямі a і b паралельні.

<u>На обчислення</u>: (с. 144, №368): різниця односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть ці кути.

<u>На побудову</u> (с. 167, №481): за допомогою транспортира і лінійки побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 3 см і 4 см.

<u>На дослідження</u> (с. 129, №312): чи можна провести пряму, яка була б паралельна кожній з прямих a і b, що перетинаються?

Також у підручнику [1] в цій темі зустрічаємо вправи на розуміння логічних основ шкільного курсу математики:

375.• Дайте відповідь на запитання.

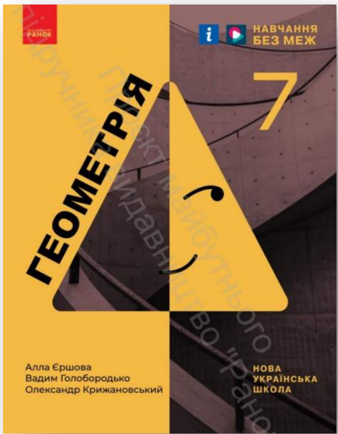
1) Чи можуть обидва односторонніх кути при двох паралельних прямих і січній бути тупими?
2) Чи може сума різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнювати 180°?
3) Чи можуть бути рівними односторонні кути при двох паралельних прямих і січній?

Проте задач на обчислення у підручнику [1] – більшість, причому ціла низка задач вимагає застосування алгебраїчного апарату (за допомогою складання рівняння).

Мета запропонованих у підручнику задач – дати учням додаткову інформацію, яка буде потрібна при подальшому вивченні курсу, сформувати навички застосування одержаних теоретичних відомостей.

5. **Порівняльний аналіз викладу теми за паралельними підручниками та альтернативними методиками.**

Досліджимо відмінності викладу теми „Паралельні прямі. Сума кутів трикутника” у підручниках [1] та [2] (***авторів Єршової А.П., Голобородько В.В., Крижанівського О.Ф. (2024)).***



1. Поняття односторонніх, різносторонніх і відповідних кутів трактуються однаково, проте автори [2] вживають термін «внутрішні».

• **внутрішні різносторонні кути** лежать між прямими *a* і *b* по різні боки від січної: 3 і 6, 4 і 5;

• **внутрішні односторонні кути** лежать між прямими *a* і *b* по один бік від січної: 3 і 5, 4 і 6;

• **відповідні кути** лежать по один бік від січної, причому сторона одного з них є частиною сторони другого: 1 і 5, 3 і 7, 2 і 6, 4 і 8.

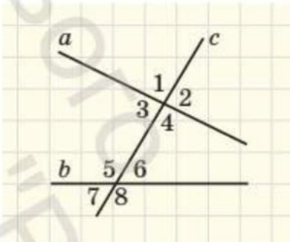


Рис. 118. Пряма *c* перетинає прямі *a* і *b*

2. На початку введення ознаки паралельності двох прямих, які перетинаються січною, автори підручника [2] актуалізують ознаки паралельності прямих, які були вивчено на попередньому етапі навчання:

14.2. Ознаки паралельності прямих

Ви вже вивчили дві теореми, які стверджують, що дві прямі паралельні:

1) якщо дві прямі паралельні третій, то вони паралельні;
2) якщо дві прямі перпендикулярні до третьої, то вони паралельні.

Доведемо ще кілька ознак паралельності прямих.

Теорема (ознака паралельності двох прямих, які перетинаються січною)

Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

Доведення цього теоретичного факту збігається з доведенням, поданим за підручником [1].

3. Наступні дві ознаки паралельності двох прямих, які перетинаються січною, автори підручника [2] формулюють у вигляді наслідків, на відміну від підручника [1], де ці факти надано як окремі, з нумерацією.

Наслідок 1

Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

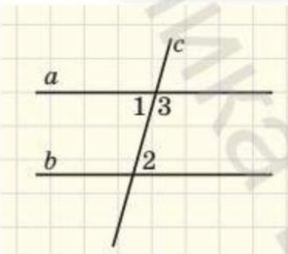


Рис. 120. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, тоді $a \parallel b$

Справді, якщо $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (рис. 120) і за теоремою про суміжні кути $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, то $\angle 1 = \angle 2 = 180° - \angle 3$. Тоді за доведеною теоремою $a \parallel b$.

Наслідок 2

Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

4. По-різному розгортається вивчення теми «Паралельні прямі». Так, у підручнику [2] окремо виділено пункт «Про існування прямої, паралельної даній».

14.3. Про існування прямої, паралельної даній

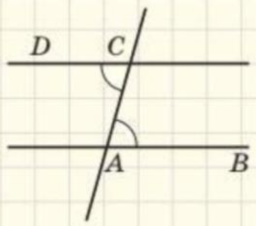


Рис. 123. Пряма CD проходить через точку C і паралельна прямій AB

Доведені ознаки паралельності прямих дозволяють детальніше проаналізувати формулювання аксіоми паралельних прямих (аксіоми Евкліда, п. 4.1). У цій аксіомі стверджувалося про єдиність прямої, яка проходить через дану точку і є паралельною даній прямій, але не стверджувалося про її існування.

На підставі ознаки паралельності прямих факт існування такої прямої можна довести.

Нехай дано пряму AB і точку C, яка не належить цій прямій (рис. 123). Проведемо пряму AC. Від променя CA відкладемо кут ACD, що дорівнює куту CAB, так, як показано на рисунку. Тоді кути ACD і CAB є внутрішніми різносторонніми при прямих AB і CD та січній AC. За доведеною ознакою $AB \parallel CD$, тобто існує пряма, що проходить через точку C паралельно прямій AB.

Отже, ми можемо об'єднати доведений факт із аксіомою паралельних прямих у такій теоремі.

Теорема (про існування і єдиність прямої, паралельної даній)

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну.

Узагалі, аксіома Евкліда й пов'язані з нею твердження були предметом особливої уваги вчених протягом багатьох століть. На початку позаминулого сторіччя видатний математик Микола Іванович Лобачевський створив неевклідову геометрію, у якій аксіома паралельних прямих не справджується.

Нагадаємо, що за концепцією підручника [2] аксіома паралельних формулюється у таких спосіб:

Аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда)

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній[1].

5. Щодо властивостей кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, то у підручнику [2] це подано у формулюванні однієї теореми:

Теорема (властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною)

Якщо січна перетинає дві паралельні прямі, то:
1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;
3) відповідні кути рівні.

6. У підручнику [2], так як і у підручнику [1], можна знайти у тексті параграфу зразки розв’язання задач:

Задача

Сума двох внутрішніх кутів, що утворилися в результаті перетину двох паралельних прямих січною, дорівнює 210°. Знайдіть усі утворені кути.

Розв'язання

Нехай $a \parallel b$, c — січна. Внутрішні кути, про які йдеться в умові, можуть бути односторонніми, різносторонніми або суміжними. Оскільки при перетині паралельних прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°

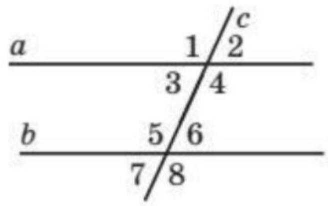


Рис. 134

і сума суміжних кутів також дорівнює 180°, то дані кути — внутрішні різносторонні. Нехай $\angle 4 + \angle 5 = 210°$ (рис. 134). Оскільки $a \parallel b$, то $\angle 4 = \angle 5 = 210° : 2 = 105°$. Тоді: $\angle 1 = 105°$, оскільки кути 1 і 5 відповідні;

$\angle 3 = 180° - 105° = 75°$, оскільки кути 3 і 5 внутрішні односторонні;

$\angle 2 = 75°$, оскільки кути 2 і 3 вертикальні;

$\angle 6 = 75°$, оскільки кути 5 і 6 суміжні;

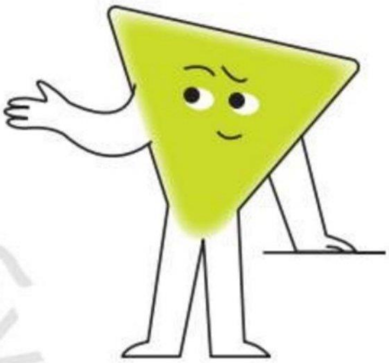
$\angle 7 = 75°$, оскільки кути 7 і 3 відповідні;

$\angle 8 = 105°$, оскільки кути 8 і 4 відповідні.

7. Водночас, у підручнику [2] запропоновано завдання, розроблені згідно концепції НУШ, що відображують реалізацію комптентнісного підходу, нових форм навчання (у парах, групових):

Завдання для виконання на пленері (рівень Б):

427. Прогуляйтеся з однокласниками та однокласницями своїм населеним пунктом. Візьміть із собою на прогулянку набір кольорової крейди та транспортир. Розбийтеся на дві невеличкі команди. Одна команда малює дві паралельні жовті прямі, друга — дві паралельні сині. Далі командам треба перевірити одна одну — чи будуть прямі «суперника» паралельними. Обговоріть, як довести або спростувати паралельність двох прямих. Зробіть висновки. Пригадайте, чим відрізняються ознаки та властивості паралельних прямих. Скориставшись інтернетом, перевірте свою думку. Що саме — властивості чи ознаки — використовувала ваша команда?



Завдання для роботи в групі (рівень В):

428. За даними рис. 140, *а*, *б* визначте, чи паралельні прямі AB і CD.

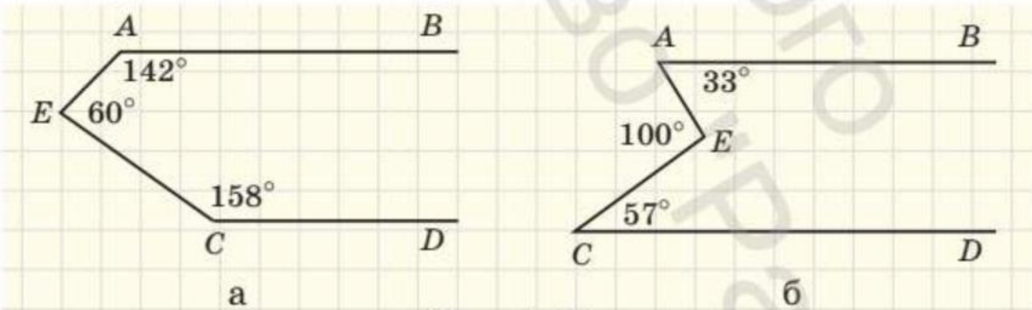


Рис. 140

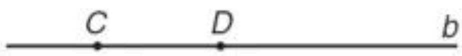
Компетентнісна задача:

418. Перекладіть англійською або іншою іноземною мовою формулювання будь-якої ознаки та відповідної властивості паралельних прямих. За необхідності проконсультуйтеся з учителем іноземної мови.

Розглянемо виклад навчального матеріалу, що стосується даної теми, за методикою проєкту «Інтелект України».

Слід зауважити, що на етапі пропедевтики у 6 класі за даним проєктом розглядалися властивості прямої, питання взаємного розташування прямих, поняття паралельних прямих.

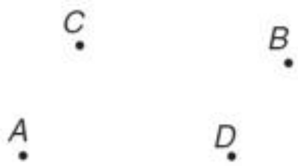
Через будь-які дві різні точки можна провести пряму й до того ж тільки одну.



➤ **Проведи геометричне дослідження.**

а) Чи можна провести пряму через три точки? Скільки розв'язків має задача?

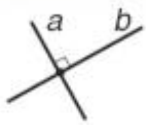
б) На рисунку праворуч позначено чотири точки так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих можна провести через ці точки?



6. **Вивчи інформацію за допомогою методики «Запам'ятовую ефективно».**

Дві прямі, які перетинаються під прямим кутом, є *перпендикулярними прямими*.

Коротко записують так: $a \perp b$ або $b \perp a$.



3. **Прочитай текст. Підкресли головне.**

Будь-які дві прямі на площині або перетинаються, або не перетинаються (рис. 1).

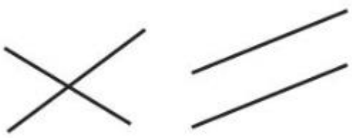


Рис. 1.
Взаємне розміщення прямих

Якщо прямі не перетинаються, то вони є паралельними (рис. 2). Ця назва з грецької означає «ті, що йдуть поруч». Паралельність прямих позначають за допомогою знака «||». Запис «$a \parallel b$» читають так: «Пряма a паралельна прямій b».

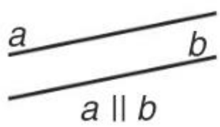
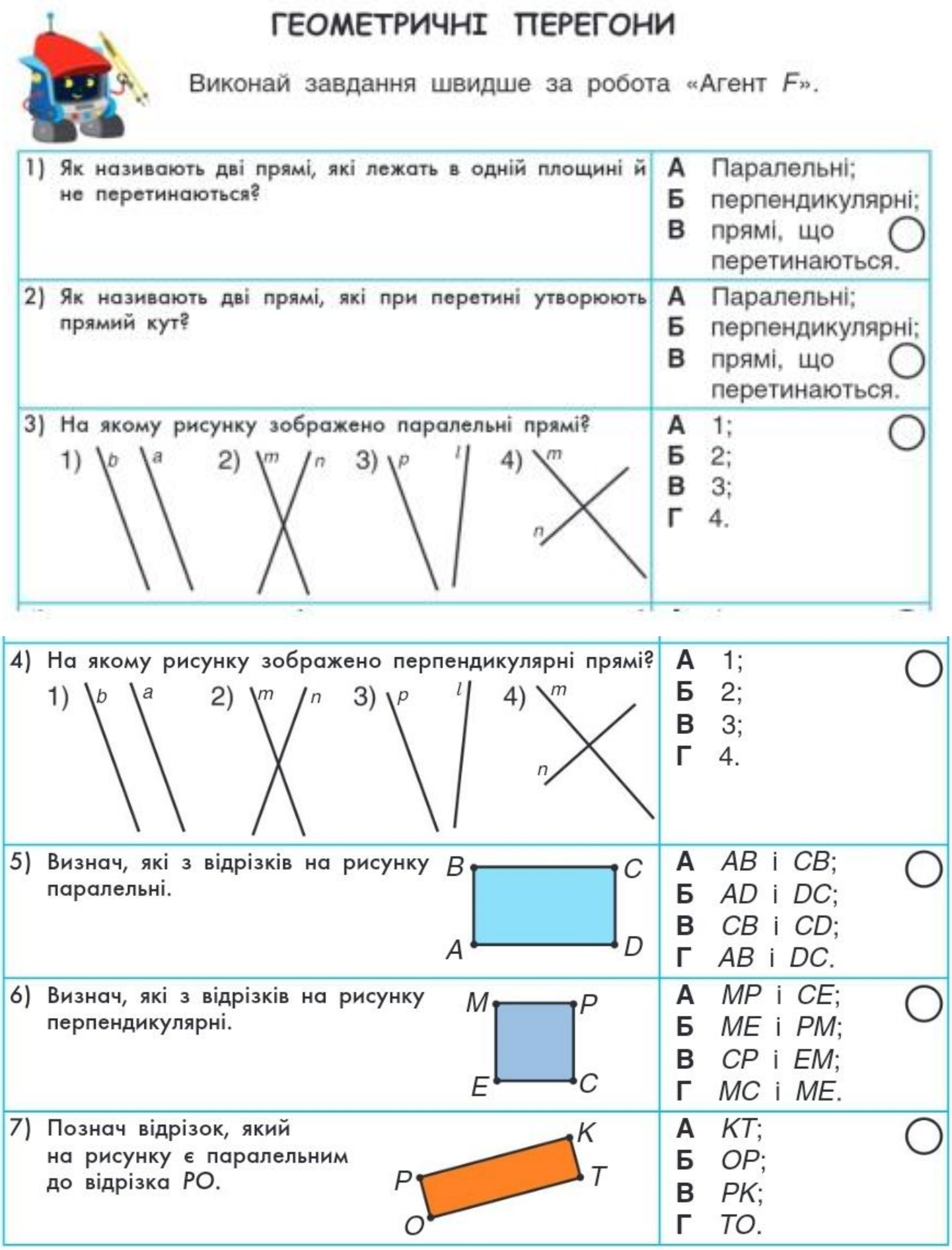


Рис. 2.
Паралельні прямі

Як бачимо, у пропедевтичному викладі теми присутні геометричні дослідження, проблемні запитання; у тексті присутні строгі математичні означення (зокрема, поняття паралельних прямих, перпендикулярних прямих); також сформульовано аксіому проведення прямої, хоча термін «аксіома» на цьому етапі навчання ще не вживається. Дітям пропонується робота з текстом, виділення головного.

Цікавою з точки зору навчання геометричного матеріалу рубрикою в робочих зошитах, розроблених авторами проєкту «Інтелект України», є «Геометричні перегони», за які «відповідає» персонаж-робот «Агент F»:



ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕГОНИ

Виконай завдання швидше за робота «Агент *F*».

1) Як називають дві прямі, які лежать в одній площині й не перетинаються?	А Паралельні; Б перпендикулярні; В прямі, що перетинаються.
2) Як називають дві прямі, які при перетині утворюють прямий кут?	А Паралельні; Б перпендикулярні; В прямі, що перетинаються.
3) На якому рисунку зображено паралельні прямі? 1) *b*, *a* 2) *m*, *n* 3) *p*, *l* 4) *m*, *n*	А 1; Б 2; В 3; Г 4.
4) На якому рисунку зображено перпендикулярні прямі? 1) *b*, *a* 2) *m*, *n* 3) *p*, *l* 4) *m*, *n*	А 1; Б 2; В 3; Г 4.
5) Визнач, які з відрізків на рисунку паралельні. (*B*, *C*, *A*, *D*)	А *AB* і *CB*; Б *AD* і *DC*; В *CB* і *CD*; Г *AB* і *DC*.
6) Визнач, які з відрізків на рисунку перпендикулярні. (*M*, *P*, *E*, *C*)	А *MP* і *CE*; Б *ME* і *PM*; В *CP* і *EM*; Г *MC* і *ME*.
7) Познач відрізок, який на рисунку є паралельним до відрізка *PO*. (*K*, *P*, *T*, *O*)	А *KT*; Б *OP*; В *PK*; Г *TO*.

Якщо аналізувати систематичне вивчення теми «Паралельні прямі. Сума кутів трикутника» у курсі геометрії 7 класу, то можна помітити, по-перше, реалізацію основних методичних ідей авторів проєкту (а саме: впровадження компетентнісного підходу, методики повного засвоєння знань, поетапного формування розумових дій, розвитку критичного мислення); а по-друге – деякі «родзинки», які ми не знайдемо у викладі, зокрема цієї теми, в інших підручниках.

Розглянемо більш детально *серію уроків, присвячених вивченню теми «Сума кутів трикутника».*

ТРИКУТНИК.
СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Урок 1

Під час суперечки народжується істина.
Сократ

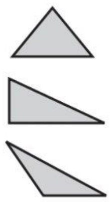
1. Прочитай епіграф. Поясни, як ти його розумієш.
2. За **картою знань 9Г** пригадай усе, що ти знаєш про трикутник. Сформулюй запитання щодо отриманої інформації. Запропонуй однокласникам дати на нього відповідь.
3. Поміркуй та сформулюй гіпотезу щодо суми кутів трикутника. Запиши її.
   Гіпотеза: ____________________

- Запиши види кутів, сума яких дорівнює 180°.

  ____

- Перевір свою гіпотезу за допомогою заготовок на вкладці.

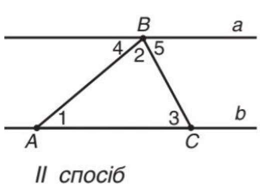
Візьми модель гострокутного трикутника. Відріж кути трикутника. Приклади кути один до одного. Який кут ти отримав / отримала?



- Повтори дослідження для прямокутного та тупокутного трикутників.
- Перевір себе за допомогою презентації.
- Перевір свою гіпотезу та запиши висновок. ____________________

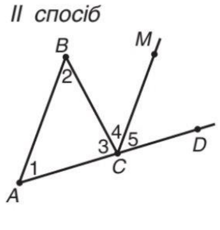
4. Поміркуй, чи існує трикутник, сума кутів якого більша або менша за 180°.
5. Спробуй довести свою гіпотезу за наведеними даними та рисунком.

I спосіб



Дано: $\triangle ABC$;
$\angle A = \angle 1$;
$\angle B = \angle 2$;
$\angle C = \angle 3$.
Довести: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

II спосіб



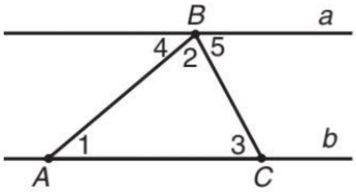
Дано: $\triangle ABC$;
$\angle A = \angle 1$;
$\angle B = \angle 2$;
$\angle C = \angle 3$.
Довести: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

1

6. Розглянь доведення теореми.

Теорема 16 (сума кутів трикутника).

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.



Дано: $\triangle ABC$.

Довести: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Доведення

Позначимо кути трикутника ABC цифрами так, як показано на рисунку. Проведемо через вершину B пряму a, паралельну стороні AC. Кути 1 та 4 — внутрішні різносторонні, оскільки прямі AC й a паралельні, а AB — січна. Кути 3 та 5 — внутрішні різносторонні, оскільки прямі AC й a паралельні, а BC — січна. Тому $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 3$.

Кути 4, 2 та 5 у сумі утворюють розгорнутий кут, одержимо: $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$. Підставимо в цю рівність замість кута 4 рівний йому кут 1, а замість кута 5 — рівний йому кут 3, одержимо: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, або $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Теорему доведено.

З теореми про суму кутів трикутника маємо: якщо в трикутнику один з кутів прямий або тупий, то кожен з двох інших — гострий.

Наслідок. **У трикутнику або всі кути гострі, або два кути гострі, а третій — прямий чи тупий.**

- **Попрацюй у парі. Вивчіть формулювання теореми 16 напам'ять. Розкажіть одне одному.**
- **Спробуй відтворити доведення теореми. Розкажи сусіду/сусідці по парті.**

- **Дай відповідь на запитання усно.**

а) Скільки в трикутнику може бути тупих кутів?

б) Скільки в трикутнику може бути прямих кутів?

в) Чому дорівнює градусна міра кута рівностороннього трикутника?

г) Чому дорівнює сума гострих кутів у прямокутному трикутнику?

д) Чому дорівнює гострий кут прямокутного рівнобедреного трикутника?

7. Хлопчик виміряв кути трикутників та отримав певні результати. Визнач, у яких випадках він помилився, та поясни чому.

а) 70°; 80°; 36°;

б) 33°; 66°; 71°;

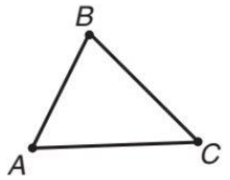
в) 61°; 72°; 83°;

г) $50^\circ\,10'$; $60^\circ\,20'$; $100^\circ\,20'\,20''$.

2

8. Розглянь зразок розв'язування задачі.

Задача. Знайди кут C трикутника ABC, якщо $\angle A = 62^\circ$, $\angle B = 55^\circ$.



Дано: $\triangle ABC$;
$\angle A = 62^\circ$;
$\angle B = 55^\circ$.
Знайти: $\angle C$.

Розв'язання

1) За теоремою про суму кутів трикутника маємо: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

2) Оскільки кути A та B за умовою задачі відомі, отримаємо рівняння та розв'яжемо його.

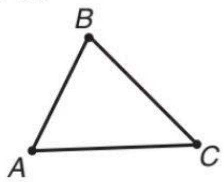
$62^\circ + 55^\circ + \angle C = 180^\circ$;
$117^\circ + \angle C = 180^\circ$;
$\angle C = 180^\circ - 117^\circ$;
$\angle C = 63^\circ$.
Відповідь: $\angle C = 63^\circ$.

➢ **Розв'яжи задачу за зразком вище у робочому зошиті.**

Знайди невідомий кут трикутника, якщо відомі градусні міри його двох кутів: а) 18° та 72°; б) 53° та 94°.

9. Розглянь зразок розв'язування задачі.

Задача. Знайди кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2; 3 та 7.



Дано: $\triangle ABC$;
$\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$.
Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання

1) За теоремою про суму кутів трикутника маємо: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

2) Оскільки кути A, B та C пропорційні числам 2; 3 та 7, то $\angle A = 2x$, $\angle B = 3x$, $\angle C = 7x$. Отримаємо рівняння:

$2x + 3x + 7x = 180^\circ$;
$12x = 180^\circ$;
$x = 180^\circ : 12$;
$x = 15^\circ$.
Отже, $\angle A = 2x = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$, $\angle B = 3x = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $\angle C = 7x = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ$.
Відповідь: $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

➢ **За зразком вище у робочому зошиті обчисли кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 3; 4; 8.**

10. Завдання на дослідження.

На сторонах рівностороннього трикутника назовні побудовано три таких же трикутники. Яка фігура є об'єднанням усіх чотирьох трикутників? Доведи свою гіпотезу.

➢ Виконай завдання **геометричного тренажера 1** (с. 53).

УРОК 1 **ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ**

I. Переглянь презентацію та повтори навчальні одиниці, вивчені на уроці, щоб розповісти їх під час перевірки домашнього завдання.

Вивчи доведення теореми 16. Знайди інший спосіб доведення цієї теореми.

II. Перевір себе. Виконай тестові завдання.

1. Познач, чому дорівнює сума кутів трикутника.

А 180°;
Б 360°;
В 108°;
Г інший варіант відповіді: ____________.

2. Познач, чому дорівнює сума суміжних кутів.

А 180°;
Б 360°;
В 108°;
Г інший варіант відповіді: ____________.

3. Знайди третій кут трикутника, якщо градусні міри двох його кутів 36° та 57°.

А 36°;
Б 57°;
В 87°;
Г інший варіант відповіді: ____________.

4. Знайди невідомі кути рівнобедреного трикутника, якщо градусна міра одного з кутів при основі дорівнює 63°.

А 63° та 63°; **Б** 63° та 126°;
В 63° та 54°; **Г** інший варіант відповіді: ____________.

III. Виконай у робочому зошиті.

1. Знайди невідомий кут трикутника, якщо градусні міри двох його кутів дорівнюють:

а) 57° та 90°;
б) 42° та 111°.

2. Обчисли кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2; 5; 8.

3. Доведи, що якщо в трикутнику MNK $\angle M = \angle N = 60^\circ$, то трикутник MNK — рівносторонній.

Аналізуючи методику роботи з твердженням про суму кутів трикутника, можна зазначити реалізацію основних етапів роботи з твердженням: 1) підготовча робота (геометричне дослідження – експеримент, висування гіпотези); 2) формулювання теореми, робота з рисунком і коротко умовою;

3) доведення теоретичного факту, причому різними способами; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми (на данному етапі - первинне).

На наступних уроках по розгортанню цієї теми можна зустріти третій спосіб доведення теореми про суму кутів трикутника, що можна провести як практичну роботу учениць і учнів:

Урок 3

ТРИКУТНИК. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА. ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1. **Перевірка домашнього завдання.**
2. **Відтвори з пам'яті формулювання теореми 17 щодо зовнішнього кута трикутника.**
   - **Назви теореми, на яких ґрунтується доведення цієї теореми.**
3. **«Перегинаючи» трикутник так, як показано на рисунку, доведи, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.**
   - **Поміркуй, де в житті необхідне знання теореми про суму кутів трикутника.**

Наочно можна переглянути цей спосіб доведення по відео (нижче)

0-02-05-d65b608bb513262099e0e4274921b4b7ab9ad73fec8ee77448435a6ae08e2a7b_fc32760c0e27b796.mp4

Також у цьому уроці надано ***наслідки з теореми про суму кутів трикутника:***

4. **Прочитай текст. Підкресли головне.**

Із теореми про суму кутів трикутника випливають властивості прямокутного трикутника.

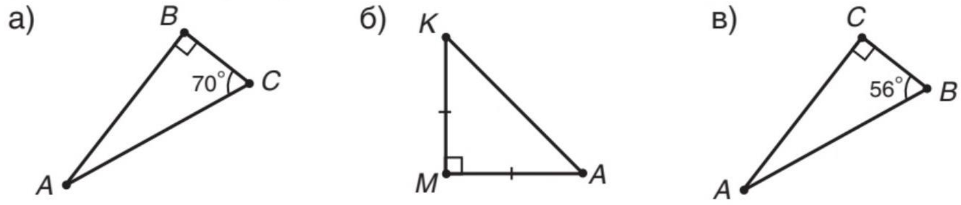
Наслідок 1. **Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.**

Доведення

Прямий кут у прямокутному трикутнику дорівнює 90°. Тому сума двох інших кутів $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

На основі цього наслідку можна знайти один з гострих кутів прямокутного трикутника, якщо відомий інший гострий кут.

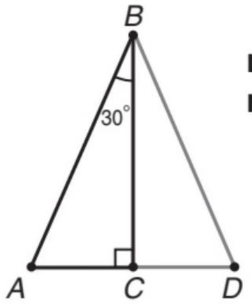
5. Усно назви, чому дорівнює $\angle A$.



6. Розв'яжи задачу в робочому зошиті.

Дано прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C. Знайди $\angle A$, якщо: а) $\angle B = 75^\circ$; б) $\angle B$ більший від $\angle A$ на 15°.

7. Прочитай текст. Підкресли головне.



Наслідок 2. **Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.**

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $\angle B = 30^\circ$.

Довести: $AC = \frac{1}{2}AB$.

Доведення

Прикладемо до трикутника ABC, у якого $\angle C$ — прямий, а $\angle B = 30^\circ$, рівний йому трикутник DBC так, як показано на рисунку. Отримаємо трикутник ABD, у якого $\angle A = \angle B = \angle D = 60^\circ$. Тоді за ознакою рівностороннього трикутника $\triangle ABD$ — рівносторонній. Оскільки $AB = AD$, $AC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$, тоді $AC = \frac{1}{2}AB$.

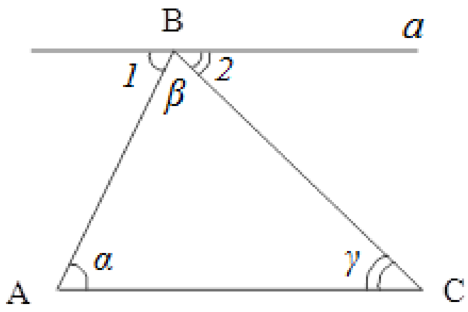
Наслідок 3. **Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.**

Наслідок 4. **Гострі кути рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнюють 45°.**

Завдання для подальшого обговорення

1. Дайте відповідь на запитання:

   Які теоретичні відомості використані при доведенні теореми про суму кутів трикутника за даною опорною схемою?



1) Допоміжна побудова:

$a || AC$, $B \in a$

$\Downarrow$

2) $\angle 1 + \beta + \angle 2 = 180°$

$\Downarrow$

3) $\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = \gamma$

$\Downarrow$

4) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

А	Величина розгорнутого кута, ознака паралельних прямих.
Б	Величина розгорнутого кута, властивість паралельних прямих.
В	Аксіома паралельних прямих, величина розгорнутого кута, властивість паралельних прямих.
Г	Аксіома паралельних прямих, властивість паралельних прямих.

2. Проаналізуйте методичні особливості навчання семикласників і семикласниць темі «Паралельні прямі. Сума кутів трикутника» за ***інтегрованим підручником «Математика – 7. Частина 2» [3] авторів О. Школьний, Є. Нелін, А. Миляник, Ю. Простакова.***

Методика навчання теми «Коло і круг. Геометричні побудови».

ПЛАН

1. Місце і значення теми в курсі планіметрії.
2. Задачі на побудову.
3. Основні побудови.
4. Складніші задачі на побудову.
5. Порівняльний аналіз викладу теми за паралельними підручниками та альтернативними методиками.

1. Місце і значення теми в курсі планіметрії.

Геометричні побудови – одна з провідних змістових ліній ШКГ. Це викликано тим, що виконувати їх доводиться учням при вивченні всього курсу геометрії і в майбутній практичній діяльності працівникам різних галузей (архітекторам, будівельникам, столярам та ін.).

Важливість задач на побудову обумовлюється також особливостями наукової структури курсу геометрії 7-9 кл., провідним компонентом якої є ***конструктивізм:*** значна кількість понять означується конструктивно; доведення всіх теорем спирається на використання фігур, реальне існування яких можна підтвердити побудовою. Отже, задачі на побудову мають розвивати в учнів конструктивний підхід до всього комплексу геометричних знань, а не лише формувати конструктивні навички розв’язування задач.

<u>Розв’язування задач на побудову сприяє:</u>

- ✓ правильному розумінню учнями геометрії як науки про властивості просторових форм;
- ✓ ґрунтовному засвоєнню програмного матеріалу з геометрії;
- ✓ виробленню уміння правильно застосовувати його;
- ✓ розвитку логічного мислення, просторової уяви;

- ✓ формуванню евристичної діяльність.

Важливим є також те, що розв'язування задач на побудову є ефективним засобом підвищення алгоритмічної культури учнів, адже їх особливістю є знаходження і наступне однозначне виконання ланцюга операцій – елементарних або основних побудов, тобто знаходження деякого алгоритму.

Найпростіші геометричні побудови учні виконують вже в початковій школі та в 5-6 класах: проводять прямі, кола, відрізки, рівні даним, будують кути заданої градусної міри, використовуючи транспортир, проводять паралельні і перпендикулярні прямі за допомогою лінійки і косинця, зображують трикутники, квадрати, прямокутники, прямокутний паралелепіпед, циліндр, конус, призму, піраміду.

У систематичному курсі геометрії спеціально виділяються задачі на побудову, які розв'язуються лише за допомогою циркуля і лінійки без поділок*, причому учням треба вмотивувати таке виділення: використання лише циркуля і лінійки у тих випадках, коли відрізки і кути задані геометрично, підвищує точність побудови.*

Геометричні побудови вивчаються наприкінці курсу геометрії 7 кл. в межах окремої теми, що тісно пов'язана з ознаками рівності трикутників, паралельністю прямих, властивостями кола.

У ***підручнику Мерзляк А.Г., Якір М.С. Геометрія -7 (2024)*** [1] тема, що розглядається, вивчається в параграфі 4 „Коло і круг", в якому:

- ✓ вводяться такі поняття, як *геометричне місце точок (ГМТ); коло; круг; радіус, хорда, діаметр кола і круга; дотична до кола; описане і вписане кола трикутника;*
- ✓ вивчаються основні ГМТ; властивості і ознаку дотичної; теореми про існування описаного і вписаного кіл трикутника; властивості кола і його елементів;
- ✓ ознайомлюють з основними задачами на побудову; з методом ГМТ.

Відзначимо, що автори підручника [1] ще при розробці програми з математики для 12-річної школи були прихильниками того, щоб перенести вивчення геометричних побудов на 8 клас, однак, як і за попередньою програмою, дана тема вивчалася у 7 класі. Таке ж місце теми знаходимо у Модельній програмі з вивчення геометрії у 7-9 класів авторів Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С., розробленою згідно Концепції НУШ.

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст навчального предмета	Види навчальної діяльності
IV. Коло та круг		
Учень / учениця: **розпізнає** на рисунках коло, круг; **розрізняє** коло і круг; **співвідносить** реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями кола та круга; **будує** за допомогою циркуля коло та круг; **називає** елементи кола та круга; **позначає** елементи кола та круга; **розуміє** сутність поняття геометричного місця точок (ГМТ); **наводить приклади** ГМТ; **пояснює**, що таке дотична до кола; **розуміє** доведення властивості та ознаки дотичної до кола;	Коло. Властивості діаметра та хорди кола. Круг. Дотична до кола	

властивість дотичних, проведених до кола через одну точку; **застосовує** властивості діаметра та хорди кола, властивості та ознаки дотичної до кола, властивість дотичних, проведених до кола через одну точку, для розв'язування задач; **пояснює**, яке коло називають описаним навколо трикутника та яке коло називають вписаним у трикутник; **розуміє**, яка точка є центром кола, описаного навколо трикутника, і яка точка є центром кола, вписаного в трикутник; **застосовує** властивості центрів описаного та вписаного кіл трикутників для розв'язування задач;	Коло, описане навколо трикутника. Коло, вписане в трикутник	
розуміє, що означає розв'язати задачу на побудову; **знає** правила побудови фігур; **уміє** розв'язувати такі задачі на побудову: поділ відрізка навпіл; побудова серединного перпендикуляра відрізка; побудова кута, що дорівнює даному; побудова бісектриси кута; побудова прямої, перпендикулярної до даної; побудова трикутника за трьома сторонами	Основні задачі на побудову	

***Основна мета вивчення геометричних побудов у школі* – навчити учнів і учениць виконувати основні побудови за допомогою циркуля і лінійки без поділок та розв'язувати нескладні комбіновані задачі, що зводяться до виконання основних побудов.**

На жаль, місце і значення задач на побудову в сучасному ШКГ змінилися порівняно з традиційним курсом у зв'язку зі зменшенням кількості годин, що відводяться на вивчення геометрії.

2. Задачі на побудову.

Розв'язати задачу на побудову – означає знайти скінчену послідовність елементарних побудов, після виконання яких шукана фігура буде вважатися побудованою на основі прийнятих аксіом конструктивної геометрії.

У ШКГ задача на побудову вважається розв'язаною, якщо побудову виконано за допомогою циркуля і лінійки, при цьому елементарними побудовами є:

- Позначити одну чи кілька точок: на площині, на прямій, на колі.
- Провести пряму: довільну; що проходить через дану точку; що проходить через дві дані точки.
- Описати коло: з довільної точки довільним радіусом; з довільної точки заданим радіусом; з даної точки даним радіусом.
- Знайти точку перетину: двох прямих; прямої і кола; двох кіл.

Треба, щоб учні пам'ятали, які побудови можна виконувати за допомогою кожного з цих двох інструментів.

Лінійкою можна провести лише:

- ✓ довільну пряму;
- ✓ довільну пряму, що проходить через дану точку;
- ✓ пряму, що проходить через дві даних точки.

Циркулем можна лише:

- ➢ описати коло, зокрема відкласти на даній прямій від даної точки даний відрізок (з певною довжиною).

Відомо, що задачі на побудову виконують у чотири етапи:

1) *Аналіз задачі*, мета якого – встановити зв’язки між шуканими і даними задачі, знайти план виконання побудови. Припускають, що задача побудована, зображують відповідну фігуру на малюнку-ескізі та вивчають властивості побудованої фігури та її зв‘язки з даними задачі, поки не встановлять послідовність побудов. Заключний момент – стислий запис плану, де перелічуються всі елементарні чи основні побудови.

2) *Побудова за знайденим планом.* Якщо задача нескладна, то побудова фігури зводиться до виконання елементарних побудов. При розв’язуванні більш складних задач описання елементарних побудов стає громіздким, тому побудову зводять до деяких типових комбінацій елементарних побудов, які часто зустрічаються і називаються основними задачами на побудову або основними побудовами.

3) *Доведення*, мета якого – довести, що побудована фігура задовольняє всім вимогам задачі: має задану форму і розміри її елементів. Доведення ґрунтується на загальних положеннях (аксіомах, теоремах, властивостях геометричних фігур).

4) *Дослідження*, мета якого – з’ясувати три питання:

1. Чи при будь-якому виборі даних елементів задача має розв’язок?
2. При якому виборі даних вона не має розв’язку?
3. При якому виборі даних задача має розв’язки і скільки?

Один із способів дослідження – графічний, який полягає в тому, що кожна геометрична фігура визначається сукупністю точок, які можна поділити на відомі та шукані (невідомі). Шукана точка має дві геометричні властивості, за кожною з яких ми відносимо цю точку до певного геометричного місця точок. Визначення всіх випадків взаємного розміщення цих двох геометричних місць і є графічним дослідженням. Задача не матиме розв’язку, якщо відсутні спільні точки геометричних місць, і кожна точка, яка належить одночасно двом геометричним місцям, може привести до розв’язку.

Щодо кількості розв'язків задач на побудову, то це питання вирішується по-різному в залежності від того, маємо ми справу з позиційними задачами або непозиційними. У позиційних задачах указується, як розміщені одні фігури стосовно інших даних фігур; у такому разі шукані побудовані фігури вважаються різними розв'язками. У непозиційних задачах рівні фігури не вважаються різними розв'язками.

Наприклад: Побудувати коло даного радіуса R, яке проходить через дві дані точки A і B.

Задача є позиційною, оскільки положення шуканого кола на площині залежить від положення даних точок. (Скільки розв'язків має така задача?)

В ШКГ недоцільно вимагати від учнів кожного разу при розв'язанні задач на побудову виконувати всі чотири етапи, оскільки по-перше, дослідження може виявитися складнішим, ніж побудова, а, по-друге, в найпростіших задачах на побудову учні можуть знайти план побудови без попереднього аналізу. Крім того, не обов'язково при розв'язанні всіх задач виконувати побудову, якщо основні побудови вже добре відпрацьовані, а задача зводиться до них (тобто достатньо скласти тільки план побудови).

Отже, задачу слід вважати розв'язаною, якщо вказано план побудови і виконано доведення. В складніших задач можна проводити попередній аналіз, у деяких задачах проводити дослідження, якщо воно доступне учням.

3. Основні побудови.

До основних побудов у підручнику [1] віднесено побудови:

1) кута, що дорівнює даному, одна із сторін якого є даним променем;

2) серединного перпендикуляра даного відрізка;

3) поділ відрізка навпіл;

4) перпендикулярної прямої до даної прямої, що проходить через точку, яка не належить даній прямій;

5) перпендикулярної прямої до даної прямої, що проходить через точку, яка належить даній прямій;

6) бісектриси даного кута.

Задача 1. Побудуйте кут, що дорівнює даному, одна зі сторін якого є даним променем.

Розв'язання. На рисунку 351 зображено кут A та промінь OK. Треба побудувати кут, що дорівнює куту A, однією із сторін якого є промінь OK.

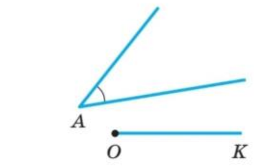


Рис. 351

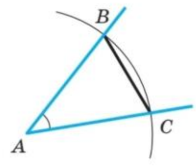


Рис. 352

Проведемо коло довільного радіуса r із центром у точці A. Точки перетину цього кола зі сторонами кута A позначимо B і C (рис. 352). Тоді $AB = AC = r$.

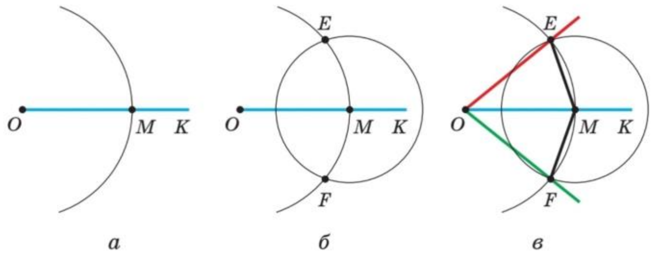


Рис. 353

Проведемо коло радіуса r із центром у точці O. Нехай це коло перетинає промінь OK у точці M (рис. 353, *а*). Потім проведемо коло радіуса BC із центром у точці M. Нехай кола із центрами O і M перетинаються в точках E і F (рис. 353, *б*). Проведемо промені OE та OF (рис. 353, *в*).

Покажемо, що кожний з кутів EOM і FOM — шуканий. Доведемо, наприклад, що $\angle EOM = \angle BAC$.

Розглянемо трикутники ABC (рис. 352) і OEM (рис. 353, *в*). Маємо: $AB = OE = r = AC = OM$. Крім того, за побудовою $EM = BC$. Отже, трикутники ABC і OEM рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогічно можна показати, що $\angle BAC = \angle FOM$. ◄

Ми побудували два кути EOM і FOM, які задовольняють умову задачі. Ці кути рівні. У таких випадках вважають, що задача на побудову має один розв'язок.

Задача 2. Побудуйте серединний перпендикуляр даного відрізка.

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок (рис. 354, *а*). Проведемо два кола із центрами A і B та радіусом AB. Точки перетину цих кіл позначимо M і N (рис. 354, *б*). Проведемо пряму MN (рис. 354, *в*). Доведемо, що пряма MN є шуканою.

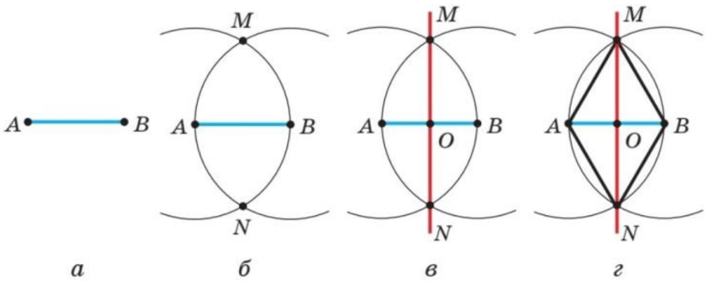


Рис. 354

З побудови випливає, що $MA = MB = AB$ і $NA = NB = AB$ (рис. 354, *г*). Отже, точки M і N належать серединному перпендикуляру відрізка AB. Тоді пряма MN є серединним перпендикуляром відрізка AB. ◀

Зауваження. Оскільки пряма MN перетинає відрізок AB у його середині, у точці O, то тим самим розв'язано таку задачу.

Задача 3. Поділіть даний відрізок навпіл.

Задача 4. Дано пряму та точку, яка їй не належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй не належить. Проведемо коло із центром у точці A так, щоб воно перетинало пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 355).

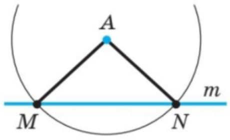


Рис. 355

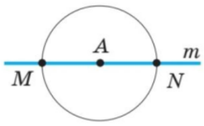


Рис. 356

Оскільки $AM = AN$, то точка A належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Побудувавши цей серединний перпендикуляр (див. задачу 2), ми тим самим розв'яжемо задачу. ◀

Задача 5. Дано пряму та точку, яка їй належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй належить. Проведемо коло довільного радіуса із центром у точці A. Воно перетинає пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 356).

Оскільки $AM = AN$, то ми звели задачу до побудови серединного перпендикуляра відрізка MN. ◀

Задача 6. Побудуйте бісектрису даного кута.

Розв'язання. Нехай A — даний кут. Проведемо коло довільного радіуса із центром у точці A. Це коло перетинає сторони кута у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 357, *а*). Побудуємо кола із центрами M і N з тим самим радіусом. Ці кола перетинаються в точці A і ще в деякій точці K (рис. 357, *б*). Проведемо промінь AK (рис. 357, *в*).

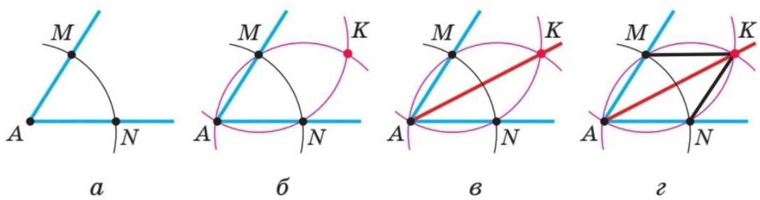


Рис. 357

Доведемо, що промінь AK — шукана бісектриса.

Дійсно, трикутники AMK і ANK (рис. 357, *г*) рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle MAK = \angle NAK$. ◀

При вивченні основних побудов треба скористатися ***алгоритмічним підходом.*** Так, учні повинні засвоїти, що для того, щоб побудувати бісектрису кута, необхідно:

1) описати з вершини кута як із центра коло довільного радіуса;

2) з точок перетину побудованого кола зі сторонами кута описати два кола **тим самим** радіусом і позначити точку їх перетину, відмінну від вершини кута;

3) через вершину кута і точку перетину кіл провести промінь, який і є бісектрисою кута.

Вивчені алгоритми мають бути закріплені достатньою кількістю тренувальних вправ, а введенню відповідного алгоритму мають передувати підготовчі вправи (рис. 1), наприклад, для того, щоб учні самостійно знайшли спосіб побудови бісектриси кута, можна запропонувати такі вправи:

1. Дано: AB=AC, $\angle 1 = \angle 2$. Довести: BD=DC.
2. Дано: AB=BD=DC=AC. Довести: $\angle 1 = \angle 2$.
3. Дано: $\angle A$, AB=AC. Як побудувати бісектрису кута?

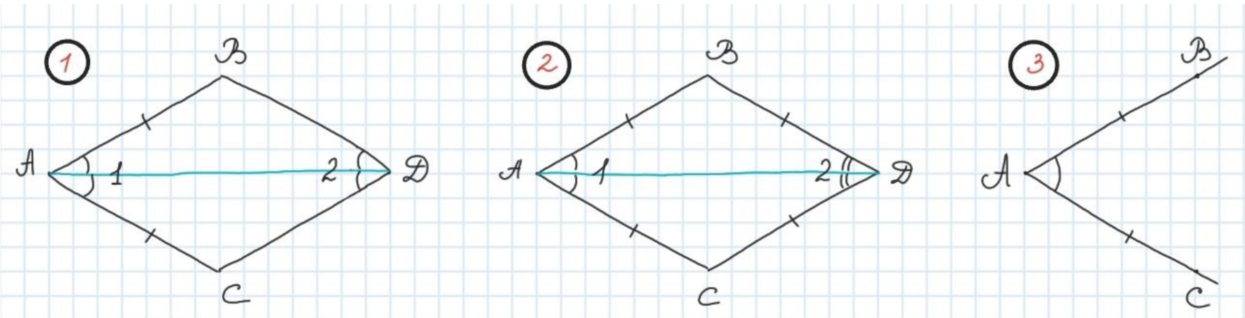


Рис. 1

Задачі на закріплення алгоритму побудови бісектриси кута можуть бути такими:

1. Дано трикутник. Побудувати його бісектриси.
2. Побудувати кут так, щоб дана точка лежала на його бісектрисі.
3. Побудувати точку перетину двох бісектрис ΔABC.
4. Дано рівнобедрений трикутник. Побудувати точку перетину бісектриси кута при основі з бічною стороною.

4. Складніші задачі на побудову.

В ШКГ основними методами розв’язування задач на побудову є: метод геометричних місць, методи геометричних перетворень (симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії), алгебраїчний метод.

У підручнику [1] в §4 п. 20 передбачено ознайомлення з поняттям „геометричне місце точок” і відповідним методом розв’язування задач на побудову у п. 24, застосування якого демонструється на прикладах, зокрема ключової задачі – побудови трикутника за трьома даними його сторонами.

Задача 1. Побудуйте трикутник за трьома даними його сторонами.

Розв’язання. Нехай дано три відрізки, довжини яких дорівнюють a, b, c (рис. 363). Треба побудувати трикутник ABC, у якому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

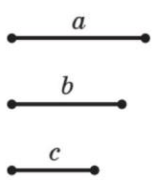


Рис. 363

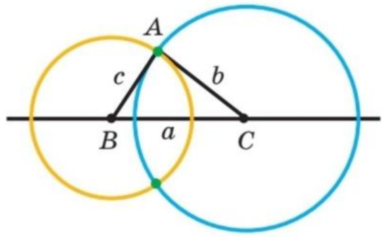


Рис. 364

Проведемо довільну пряму. За допомогою циркуля відкладемо на ній відрізок BC, який дорівнює a (рис. 364). Задача звелася до побудови третьої вершини трикутника, точки A.

Скористаємося тим, що точка A має одразу дві властивості:

1) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки B на відстань c, тобто колу радіуса c із центром у точці B (на рисунку 364 це жовте коло);

2) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки C на відстань b, тобто колу радіуса b із центром у точці C (на рисунку 364 це синє коло).

За точку A можна взяти будь-яку з двох зелених точок, що утворилися.

Отриманий трикутник ABC є шуканим, оскільки в ньому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. ◀

***При розв'язуванні задач на побудову в 8-9 класах** треба звернути увагу учнів на інші можливі методи: осьової симетрії, паралельного перенесення і повороту, для застосування яких сформулювати правила-орієнтири.*

Рівень обов'язкових результатів навчання не передбачає розв'язування складніших задач на побудову. Разом з тим для обдарованих учнів, які цікавляться математикою, такі задачі можна пропонувати як на уроках, так і в позаурочний час.

<u>Розглянемо приклад</u>: Побудуйте трикутник за стороною та проведеними до неї медіаною і висотою.

Розв'язання: По-перше, зазначимо, чи задані елементи однозначно визначають трикутник (є задача на доведення рівності трикутників з такими заданими елементами). Малюємо рисунок-ескіз, бачимо, що ΔCOE - допоміжний, тобто такий, спосіб побудови якого відомий з попередніх задач (побудова прямокутного трикутника за гіпотенузою і катетом: проводиться перпендикулярна пряма, розтином циркуля проводиться висота, з отриманої точки розтином циркуля проводиться гіпотенуза – точка перетину задає трикутник). Так як СЕ – медіана, то від т. Е на прямій ОЕ відкладаємо EA=EB=a/2. ΔABC – шуканий (рис.2). Далі доведення, дослідження (задача непозиційна - метричні дані, тому рішення єдине).

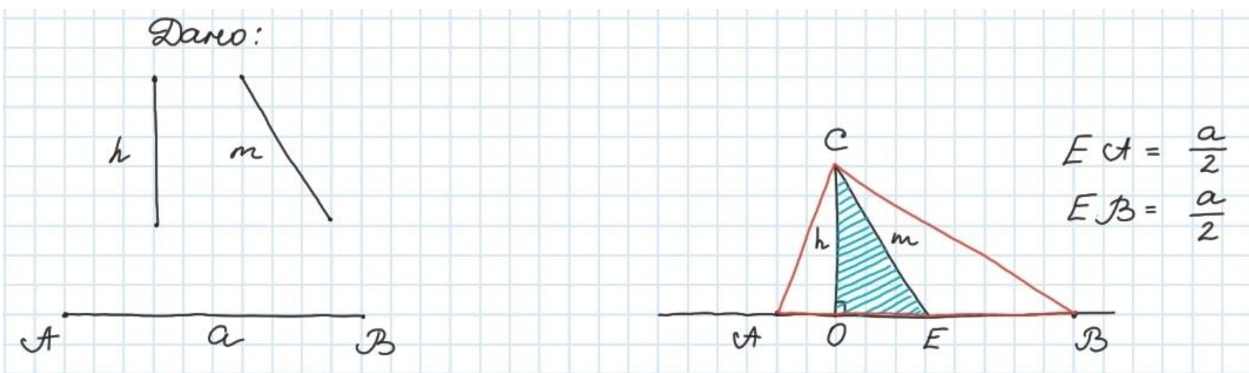


Рис. 2

У підручнику [1] також можна зустріти приклади задач на побудову, що не відносимо до основних, тобто приклади ускладнених задач:

Задача 9. Побудуйте трикутник за кутом, висотою та бісектрисою, проведеними з вершини цього кута.

Розв'язання. Проведемо аналіз задачі на побудову. На рисунку 361 зображено трикутник ABC, у якому відрізок BD — висота, відрізок BK — бісектриса.

Якщо відомі довжини відрізків BD і BK, то прямокутний трикутник BDK можна побудувати за гіпотенузою та катетом. Також зауважимо, що коли відомо кут ABC, то можна побудувати кути ABK і KBC, кожний з яких дорівнює $\frac{1}{2}\angle ABC$. Звідси отримуємо план побудови.

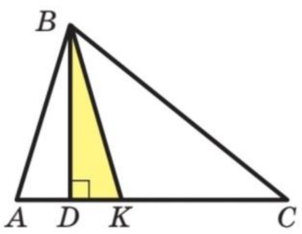


Рис. 361

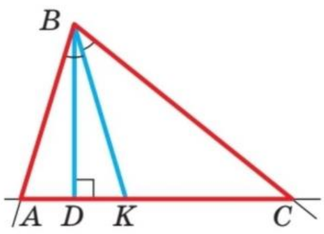
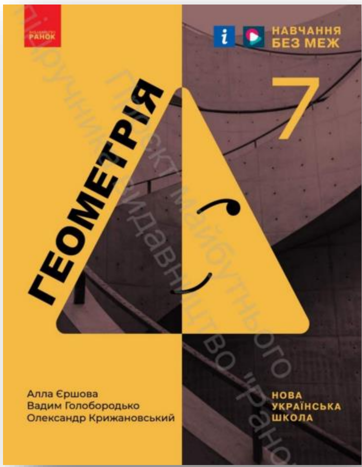


Рис. 362

Будуємо прямокутний трикутник BDK, у якому гіпотенуза BK дорівнює даній бісектрисі, а катет BD — даній висоті (рис. 362). Будуємо два кути, кожний з яких дорівнює половині даного, так, щоби промінь BK був їхньою спільною стороною. На рисунку 362 це кути ABK і KBC. Трикутник ABC — шуканий. ◀

5. Порівняльний аналіз викладу теми за паралельними підручниками та альтернативними методиками.

У підручнику [2] авторів Єршової А. П., Голобородько В. В., Крижановського О. Ф. (2024))



у § 21 (с. 232) розглядаються сім основних задач на побудову:

Отже, **основними задачами на побудову** вважатимемо такі:

1) побудова трикутника за даними сторонами;
2) побудова кута, що дорівнює даному нерозгорнутому куту;
3) побудова бісектриси даного нерозгорнутого кута;
4) побудова прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої;
5) побудова серединного перпендикуляра до даного відрізка;
6) побудова середини даного відрізка;
7) побудова прямої, що проходить через дану точку паралельно даній прямій.

Якщо ці задачі застосовуються як допоміжні під час розв'язування складніших задач, можна докладно не описувати відповідних побудов.

Отже, як бачимо, у цьому підручнику задачу на побудову трикутника за даними сторонами віднесено до основних. Також, відмінністю є те, що автори використовують уточнюючий термін «нерозгорнутого кута». Крім того, автори підручника [2] задачі на побудову перпендикулярної прямої до даної прямої, що проходить через точку, яка НЕ належить даній прямій і перпендикулярної прямої до даної прямої, що проходить через точку, яка належить даній прямій об'єднують в одну (хоча у ході побудови виокремлюються обидва випадки); натомість уводять як основну – задачу на побудову прямої, що проходить через дану точку паралельно даній прямій. Задачу на поділ відрізка навпіл у цьому підручнику називають «побудова середини даного відрізка». Відтак, за концепцією даного підручника термін «серединний перпендикуляр» з’являється тільки в § 21, при вивченні основних побудов.

Зауважимо, що побудована пряма OO_1 перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину. Таку пряму називають **серединним перпендикуляром до відрізка**.

Користуючись описаними побудовами, нескладно розв’язувати задачі **про побудову середини даного відрізка й про побудову прямої, паралельної даній**.

Для побудови середини відрізка AB достатньо провести два кола радіуса AB із центрами в точках A і B (рис. 172). Позначивши точки перетину цих кіл через O і O_1, можна визначити середину відрізка AB як точку перетину прямих AB і OO_1, після чого провести доведення аналогічно попередній задачі.

Для побудови прямої, що проходить через дану точку O паралельно даній прямій a, достатньо провести через точку O пряму b, перпендикулярну до a, і пряму c, перпендикулярну до b (рис. 173). Тоді $a \parallel c$ за теоремою про дві прямі, перпендикулярні до третьої.

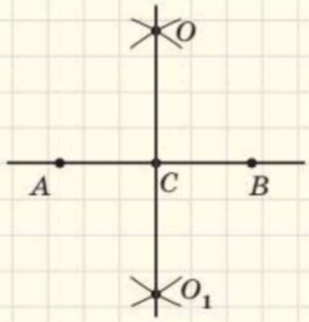


Рис. 172. Побудова середини відрізка

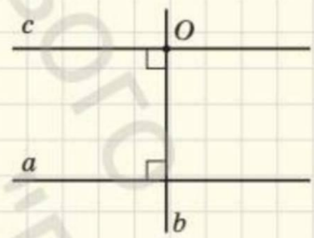
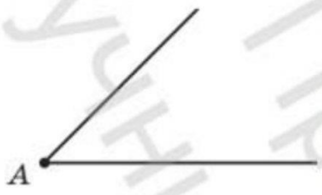
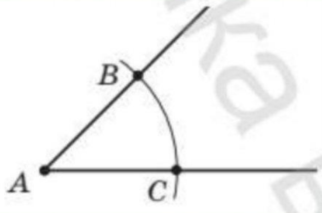
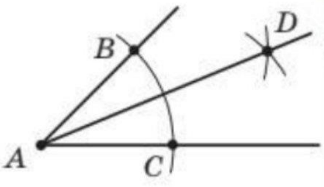
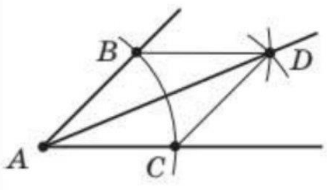


Рис. 173. Побудова прямої, паралельної даній

На наш погляд, у підручнику [2] вдало подаються основні задачі – у вигляді таблиці, структуровано, покроково, що значно спрощує сприйняття семикласниками і семикласницями цього матеріалу:

Побудова бісектриси кута	
	Нехай дано нерозгорнутий кут із вершиною A. Побудуємо його бісектрису.
	За допомогою циркуля побудуємо коло довільного радіуса із центром A. Нехай B і C — точки перетину цього кола зі сторонами даного кута.
	Побудуємо кола того самого радіуса із центрами B і C. Нехай D — точка перетину цих кіл.
	Проведемо промінь AD. За побудовою $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за третьою ознакою). Звідси $\angle BAD = \angle CAD$, тобто AD — бісектриса даного кута A.

У такий самий спосіб автори підручника [2] також виокремлюють етапи розв'язування задач на побудову:

Загальна схема розв'язування задач на побудову		
1	*Аналіз*	Виконання рисунка-ескіза шуканої фігури та встановлення зв'язку між її елементами і даними задачі. Визначення плану побудови шуканої фігури.
2	*Побудова*	Здійснення плану, розробленого в ході аналізу.
3	*Доведення*	Обґрунтування того, що побудована фігура має задану форму, а розміри та розміщення її елементів задовольняють умову задачі.
4	*Дослідження*[1]	Визначення кількості розв'язків і умов існування шуканої фігури або обґрунтування неможливості її побудови.

У цьому підручнику також у тексті параграфа розглядаються приклади задач на побудову:

Задача

Побудуйте трикутник за двома сторонами й медіаною, проведеною до однієї з них.

Розв'язання

Нехай a, b, m_b — дві сторони й медіана трикутника ABC, який необхідно побудувати (рис. 174).

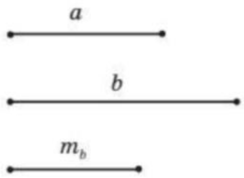


Рис. 174

Аналіз

Припустимо, що трикутник ABC побудовано (рис. 175). Якщо BM — дана медіана трикутника ABC, то в трикутнику ABM відомі довжини трьох сторін ($AB = a$, $BM = m_b$, $AM = \frac{b}{2}$ за умовою задачі). Отже, ми можемо побудувати трикутник ABM і знайти вершини A і B шуканого трикутника. Щоб знайти вершину C, достатньо відкласти на промені AM відрізок MC завдовжки $\frac{b}{2}$.

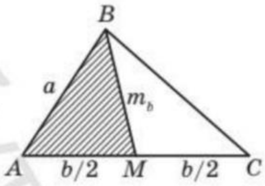


Рис. 175

Побудова

1. Розділимо відрізок b навпіл.
2. Побудуємо трикутник ABM зі сторонами $AB = a$, $BM = m_b$, $AM = \frac{b}{2}$.
3. Відкладемо на промені AM відрізок $MC = \frac{b}{2}$.
4. Сполучимо точки B і C.

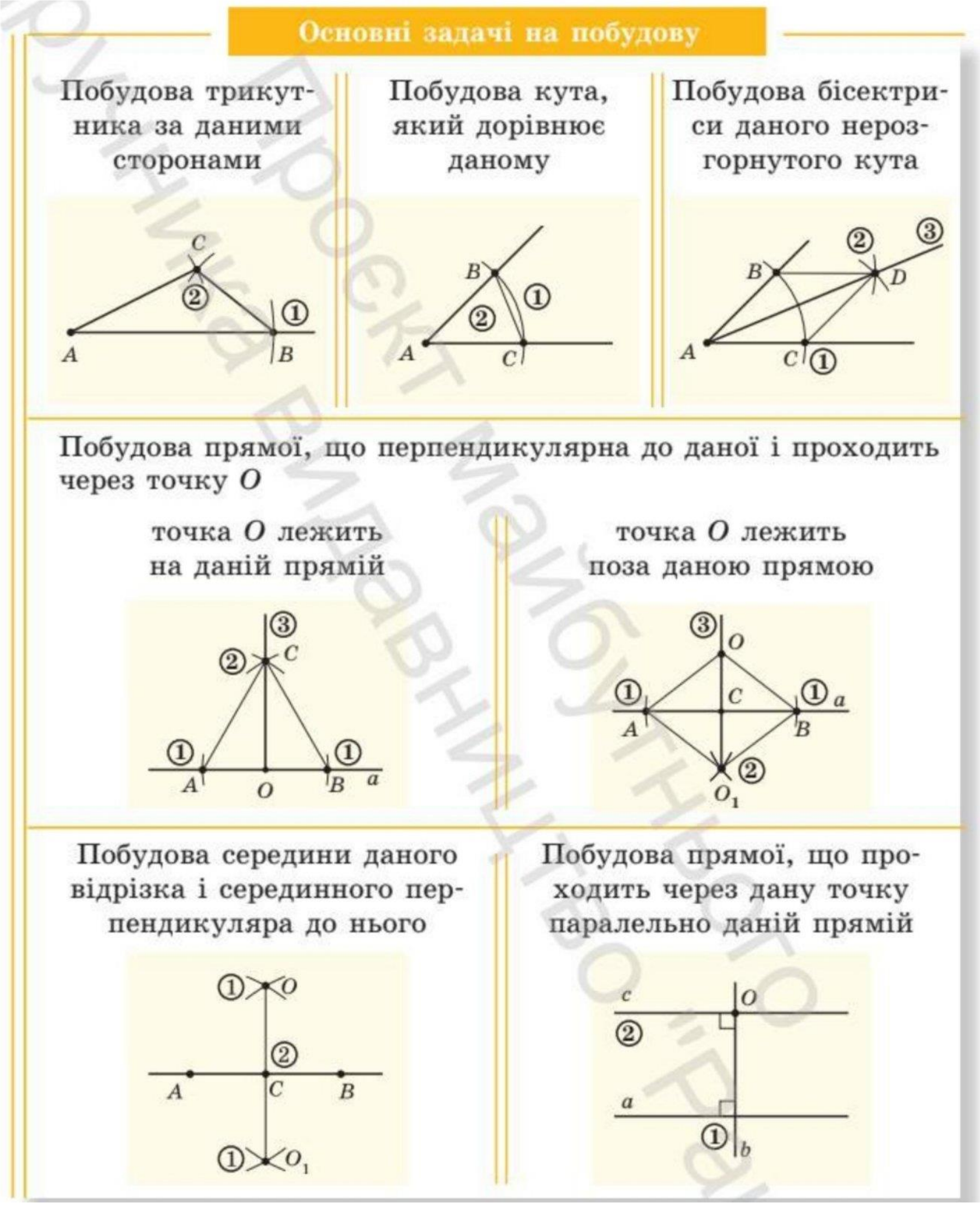
Доведення

У трикутнику ABC $AB = a$, $AC = b$, $BM = m_b$, BM — медіана (за побудовою). Отже, трикутник ABC є шуканим.

Дослідження

Задача має розв'язок за умови існування трикутника ABM, тобто якщо числа a, m_b, $\frac{b}{2}$ задовольняють нерівність трикутника.

Наприкінці розділу III підручника [2] надається систематизуюча таблиця щодо основних побудов, з указанням основних етапів побудови. За такою схемою семикласникам і семикласницям легко повторювати і відтворювати ці задачі:


Основні задачі на побудову

Побудова трикутника за даними сторонами

Побудова кута, який дорівнює даному

Побудова бісектриси даного нерозгорнутого кута

Побудова прямої, що перпендикулярна до даної і проходить через точку O

точка O лежить на даній прямій

точка O лежить поза даною прямою

Побудова середини даного відрізка і серединного перпендикуляра до нього

Побудова прямої, що проходить через дану точку паралельно даній прямій

Розглянемо логіку викладу та методичні особливості вивчення понять «коло» і «круг» за підручником [2].

У § 19 вводяться (а скоріше актуалізуються) означення кола і круга та їх елементів; у рубриці «Графічні вправи» пропонується завдання і використанням комп'ютера, що забезпечує формування інформативної компетентності учнів, мотивує до навчання:

Графічні вправи

571. Засобами програми Geogebra, DG чи іншого графічного редактора накресліть коло із центром O та позначте точку A на колі. Виміряйте відстань OA. Змініть положення точки A так, щоб радіус кола дорівнював би 3 см.

а) Проведіть у цьому колі радіус, діаметр і хорду, яка не є діаметром. Який із цих відрізків не проходить через центр кола?

б) Виділіть на рисунку відрізок, довжина якого дорівнює 6 см.

в) Позначте всередині кола точку, яка не збігається з точкою O. Скільки радіусів, діаметрів, хорд можна провести через позначену точку? Проведіть червоним кольором через цю точку хорду, що не є діаметром.

Властивість діаметра, перпендикулярного до хорди, подається як опорна задача. Також розглядається і обернене твердження:

Опорна задача

Діаметр, перпендикулярний до хорди, проходить через її середину. Доведіть.

Розв'язання

Нехай CD — діаметр кола із центром O, AB — хорда цього кола, $AB \perp CD$. Доведемо, що M — точка перетину відрізків AB і CD — середина відрізка AB.

У випадку, коли хорда AB сама є діаметром, точка M збігається із центром O і твердження задачі є очевидним. Нехай хорда AB не є діаметром (рис. 165). Проведемо радіуси OA і OB.

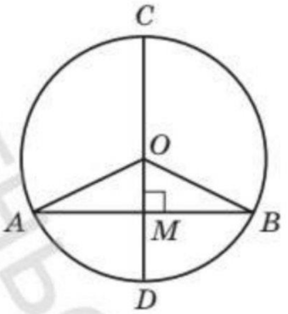


Рис. 165

Тоді в рівнобедреному трикутнику AOB висота OM є медіаною. Отже, $AM = BM$, що й треба було довести.

Доведіть самостійно ще одне твердження **(опорне)**: **діаметр кола, проведений через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.**

У пункті 20.1. вводиться означення січної і дотичної до кола:

20.1. Означення та властивість дотичної

Будь-яка пряма, що проходить через точки кола, називається **січною**; її відрізок, який лежить усередині кола,— це хорда. На рис. 167 хорда CD — відрізок січної b. Розглянемо тепер пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку.

Означення

Дотичною до кола називається пряма, яка має з колом єдину спільну точку.

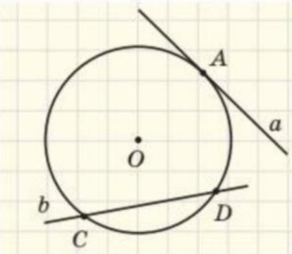


Рис. 167. Січна й дотична до кола

Спільна точка дотичної і кола називається **точкою дотику**. На рис. 167 пряма a є дотичною до кола із центром O. Інакше кажуть так: пряма a дотикається до кола із центром O у точці A.

Визначимо взаємне розміщення дотичної і радіуса кола, проведеного в точку дотику.

Важливо, щоб учні та учениці навчилися розрізняти поняття «січна» і «дотична до кола». Також важливими для подальшого викладу теорії і розв'язування задач є наступні взаємнообернені твердження щодо дотичної (необхідно, щоб діти запам'ятали їх):

Теорема (властивість дотичної)

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Теорема (ознака дотичної)

Якщо пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кола.

У підручнику [2] окремим пунктом параграфу розглядається властивість відрізків дотичних, яку сформульовано як опорну задачу. Доведення її неважке, і можна вимагати від учнів його відтворити:

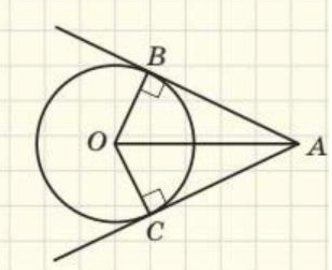


Рис. 170. Відрізки дотичних, проведених до кола з точки A

Опорна задача

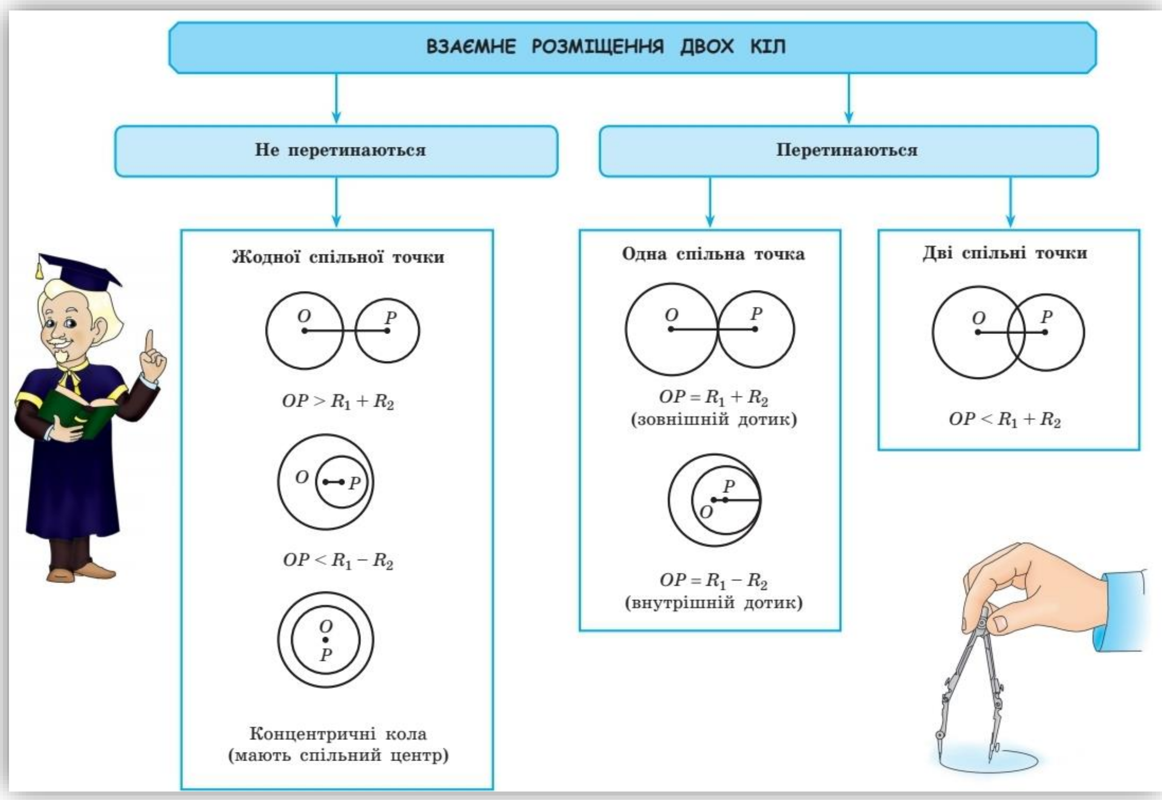
Відрізки дотичних, проведених із даної точки до кола, рівні. Доведіть.

Розв'язання

Нехай AB і AC — відрізки дотичних, проведених до кола із центром O з точки A (рис. 170). Розглянемо трикутники AOB і AOC. За властивістю дотичної $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, тобто ці трикутники є прямокутними зі спільною гіпотенузою AO й рівними катетами ($OB = OC$ як радіуси кола). Отже, $\triangle AOB = \triangle AOC$ за гіпотенузою й катетом, звідки $AB = AC$.

У наступному пункті цього підручника досліджуються питання взаємного розташування двох кіл.

Цікавою, на наш погляд, видається інтелект-карта щодо взаємного розташування кіл, представлених у проєкті «Інтелект України»:

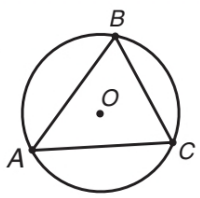


Розглянемо, як вивчаються теми «Вписані та описані кола» за методикою проєкта «Інтелект України».

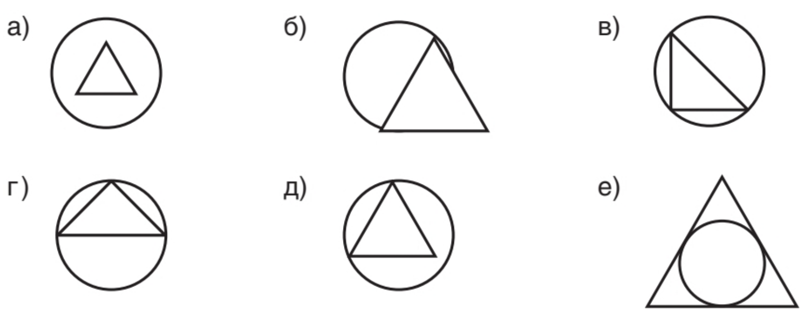
Поняття описаного навколо трикутника кола вводиться традиційно:

7. Вивчи інформацію в рамочці. Відтвори з пам'яті.

Коло називають *описаним навколо трикутника*, якщо всі вершини трикутника лежать на цьому колі.
Трикутник у такому разі називають *вписаним у це коло*.



➢ Познач рисунок, на якому зображено коло, описане навколо трикутника.

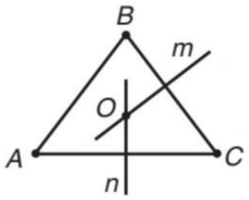


Як помічаємо, слідом за введенням поняття йдуть вправи на підведення під поняття (вправи на розпізнавання).

Далі йде теорема про описане коло:

8. **Розглянь доведення теореми.**

Теорема 25. **Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.**



Дано: $\triangle ABC$.

Довести: навколо трикутника можна описати коло.

Доведення

Проведемо прямі m і n — серединні перпендикуляри до сторін AC і BC. Нехай серединні перпендикуляри перетинаються в точці O. Центр описаного кола — точка, рівновіддалена від вершин трикутника. Доведемо, що точка O є центром описаного кола. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру m до сторони BC, то вона рівновіддалена від точок B і C: $OB = OC$. Точка O належить серединному перпендикуляру n до сторони AC, тоді вона рівновіддалена від точок A і C: $OA = OC$. На підставі цього робимо висновок: $OA = OB = OC$. Отже, точка O — центр описаного кола. Теорему доведено.

- **Розглянь наслідки з теореми 25.**

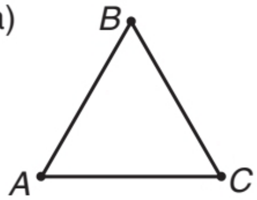
Наслідок 1. **Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.**

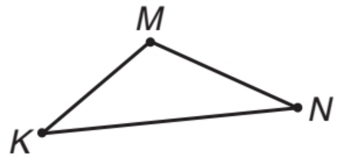
Наслідок 2. **Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.**

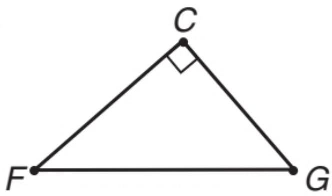
- **Попрацюй у парі. Вивчіть формулювання теореми 25 напам'ять. Розкажіть одне одному.**
- **Спробуй відтворити доведення теореми. Розкажи сусіду/сусідці по парті.**
- **Вивчіть наслідки з теореми 25. Розкажіть одне одному.**

Прослідкуємо, як реалізується методика роботи з твердженнями: 1) підготовча робота реалізована за рахунок формування поняття серединного перпендикуляра; 2) далі йде формулювання теореми, коротка умова, рисунок; 3) представлено доведення (яке можна записати в зошит покроково); 4) пропонується робота по закріпленню доведення (робота в парах); 5) первинне закріплення теореми відбувається під час вирішення завдань цього урока, зокрема на формування графічних навичок і з дослідницьким компонентом:

➢ **Побудуй коло, описане навколо: а) гострокутного трикутника; б) тупокутного трикутника; в) прямокутного трикутника.**

а)


б)


в)


➢ **Зроби висновок щодо розміщення центра кола (усередині трикутника, ззовні трикутника, на стороні трикутника), описаного навколо:**

а) гострокутного трикутника: ________________________________

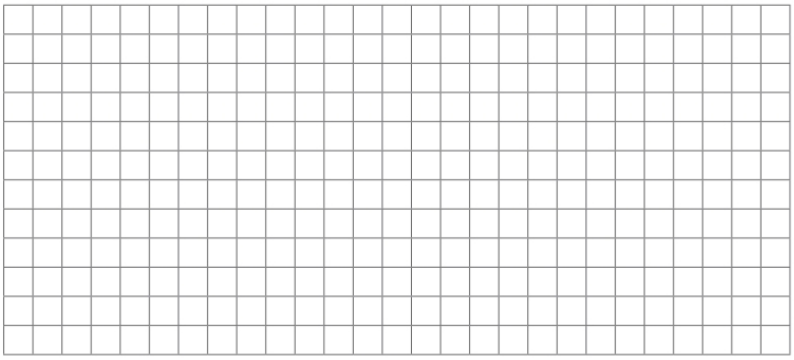
б) тупокутного трикутника: __________________________________

в) прямокутного трикутника: ________________________________

Проєкт «Інтелект України» також реалізує прикладну спрямованість навчання математики, причому використовуючи ідею «навчання через дослідження», застосування якого рекомендує Концепція НУШ і пропонує такі-от завдання:

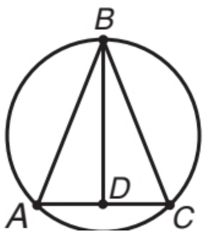
11. **Проведи геометричне дослідження.**

Визнач, у якому місці двору трикутної форми потрібно поставити ліхтар так, щоб усі три кути були освітлені однаково. Розглянь випадки, коли двір має форму: а) гострокутного трикутника; б) прямокутного трикутника; в) тупокутного трикутника.



Письмові вправи уроку також містять завдання на доведення:

7. **Доведи, що центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, лежить на медіані, яка проведена до основи.**



Дано: $\triangle ABC$;
BD — медіана.
Довести: $O \in BD$.

У змісті уроку окрема увага приділяється питанню розміщення центра кола, описаного навколо прямокутного трикутника:

8. Визнач, де розміщений центр описаного навколо трикутника кола, якщо кути трикутника відносяться як:

а) 1 : 2 : 3: ______________________________

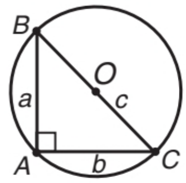
____

б) 3 : 4 : 5: ______________________________

____

9. Вивчи інформацію в рамочці. Відтвори з пам'яті.

Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, знаходиться на середині гіпотенузи.
Радіус дорівнює половині гіпотенузи.

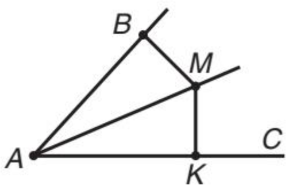


➤ **Розглянь зразок розв'язування задачі.**

Задача. Трикутник зі сторонами 6 см, 8 см та 10 см прямокутний. Визнач, чому дорівнює радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

За проєктом «Інтелект України» введенню поняття «коло, вписане в трикутник», передує така теорема:

Теорема 26. **Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.**



Дано: $\angle BAC$;
AM — бісектриса; $BM \perp AB$; $MK \perp AC$.
Довести: $BM = KM$.

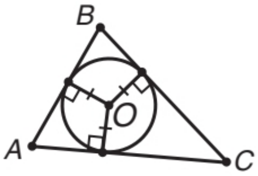
Доведення

$\triangle ABM = \triangle AKM$ за гіпотенузою та гострим кутом, AM — спільна сторона, $\angle BAM = \angle MAK$ за умовою. Звідси $BM = KM$. Теорему доведено.

➤ **Попрацюй у парі. Вивчіть формулювання теореми 26 напам'ять. Розкажіть одне одному.**

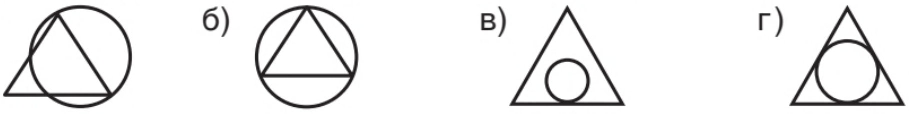
Поняття кола, вписаного в трикутник, уводиться традиційно:

Коло називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх його сторін.
Трикутник у такому разі називають *описаним навколо* цього кола.



➢ Познач рисунок, на якому коло вписане в трикутник.

а) б) в) г)

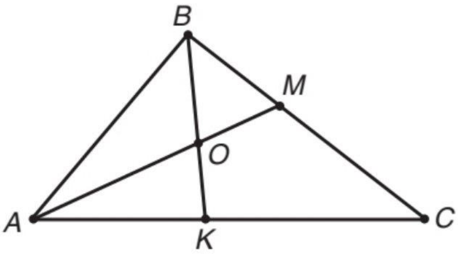


6. Поміркуй, чим відрізняється коло, вписане в трикутник, від кола, описаного навколо трикутника.

І знову помічаємо, що при формуванні поняття автори використовують вправи на підведення під поняття (вправи на розпізнавання).

Подальший виклад матеріалу пов'язано з вивченням теореми, аналогічної до теореми про коло,описане навколо трикутника:

Теорема 27. **У будь-який трикутник можна вписати коло, і тільки одне.**



Дано: $\triangle ABC$;
AM і BK — бісектриси.

Довести: існує єдина точка, яка рівновіддалена від сторін трикутника.

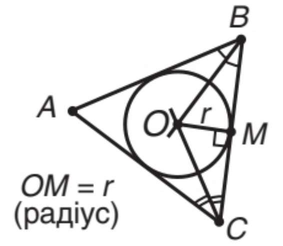
Доведення

Нехай бісектриси AM і BK перетинаються в точці O. Доведемо, що ця точка — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Оскільки точка O належить бісектрисі AM, то вона рівновіддалена від сторін AB і AC. Оскільки точка O належить бісектрисі BK, то вона рівновіддалена від сторін AB і BC. А це означає, що точка O рівновіддалена від сторін трикутника ABC, тобто O — центр вписаного кола. Отже, точка перетину бісектрис трикутника існує, і тільки одна. Отже, у кожний трикутник можна вписати коло, і тільки одне. Теорему доведено.

Автори проєкту намагаються алгоритмізувати ті дії учнів і учениць, які підлягають алгоритмізації. У цьому випадку мова йде про алгоритм побудови кола, вписаного в трикутник.

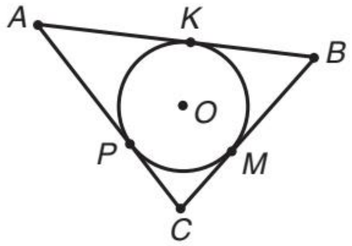
9. Вивчи **алгоритм побудови кола, вписаного в трикутник**.

1. **Побудуй бісектрису кута *B*.**
2. **Побудуй бісектрису кута *C*.**
3. **Знайди точку перетину бісектрис — точку *O*.**
4. **Проведи $OM \perp BC$.**
5. **Побудуй коло (*O*; *OM*).**



Окрім використання Робочого зошиту з друкованою основою, за проєктом передбачається робота школярів і школярок у робочому зошиті в клітинку, як-от щодо завдання 12:

12. **Розв'яжи задачу в робочому зошиті.**



У трикутник *ABC* вписане коло. Точки *K*, *M* та *P* — точки його дотику до сторін *AB*, *BC* та *AC* відповідно. Знайди периметр трикутника *ABC*, якщо $AK + BM + CP = 12$ см.

Як і в темі «Коло, описане навколо трикутника», так і в темі «Коло, вписане в трикутник» пропонуються завдання для формування життєвих компетентностей – задачі практичного змісту:

13. **Розв'яжи задачу в робочому зошиті.**

Узлісся має трикутну форму. Де на узліссі потрібно розкласти багаття, щоб відстань до меж узлісся була однаковою?

- **Пригадай основні правила поведінки під час подорожі до лісу, зокрема правила пожежної безпеки.**
- **Перевір себе за допомогою презентації.**

Під час робот над цією задачею формуються екологічна, інформативно-комунікативна компетентності, акцентується на охороні життя і здоров'я дітей. Дітям пропонується коротке відео щодо правил поведінки під час подорожі до лісу.

Завдання для подальшого обговорення

1. Проаналізувати доведення теореми-властивості та теореми-ознаки дотичної до кола за підручником [2].

2. Проаналізувати структуру і зміст домашнього завдання з теми «Коло, описане навколо трикутника» за проєктом «Інтелект України»; охарактеризувати методику роботи над задачним матеріалом.

УРОК 2 ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

I. За картою знань 18Г вивчи всі навчальні одиниці з теми «Коло, описане навколо трикутника».

II. Перевір себе. Виконай тестові завдання.

1. Визнач, де знаходиться центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника.

   А На середині гіпотенузи;
   Б на середині одного з катетів;
   В в одній з вершин трикутника;
   Г інший варіант відповіді: _________________.

2. Скільки кіл можна описати навколо прямокутного рівнобедреного трикутника?

   А Одне;
   Б безліч;
   В жодного;
   Г інший варіант відповіді: _________________.

3. Скільки можна провести кіл, які дотикаються до даної прямої?

   А Одне;
   Б безліч;
   В жодного;
   Г інший варіант відповіді: _________________.

4. Скільки можна провести кіл, які дотикаються до даної прямої в певній точці?

   А Одне;
   Б безліч;
   В жодного;
   Г інший варіант відповіді: _________________.

III. Виконай у робочому зошиті.

1. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника зі сторонами 13 см, 12 см та 5 см.
2. Визнач, де розміщений центр описаного навколо трикутника кола, якщо кути трикутника відносяться як 1 : 1 : 4.

3.* Поміркуй, як можна відновити рівнобедрений трикутник, якщо залишилися центр описаного навколо нього кола й основа цього трикутника.

Увага! На наступний урок візьми циркуль.

3. Проаналізувати структуру і зміст домашнього завдання з теми «Коло, вписане в трикутник» за проєктом «Інтелект України»; охарактеризувати методику роботи над задачним матеріалом.

УРОК 4 **ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ**

I. Переглянь презентацію та повтори навчальні одиниці, вивчені на уроці, щоб розповісти їх під час перевірки домашнього завдання.

Вивчи доведення теорем 26 та 27.

II. Перевір себе. Виконай тестові завдання.

1. Продовж твердження: «Трикутник називають описаним навколо кола, якщо...»

А коло проходить через усі його вершини;
Б коло дотикається до всіх його сторін;
В коло перетинає всі його вершини;
Г інший варіант відповіді: __________.

2. Скільки кіл можна вписати в прямокутний трикутник?

А Одне; **Б** безліч; **В** жодного;
Г інший варіант відповіді: __________.

3. Продовж твердження: «Щоб знайти центр кола, вписаного в трикутник, потрібно побудувати точку перетину його...»

А бісектрис; **Б** медіан;
В серединних перпендикулярів;
Г інший варіант відповіді: __________.

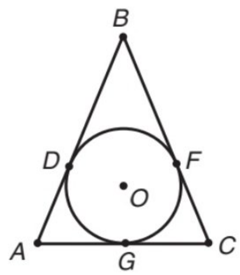
4. Скільки можна побудувати трикутників, описаних навколо кола?

А Один; **Б** безліч;
В жодного; **Г** інший варіант відповіді: __________.

III. Виконай у робочому зошиті.

1. Накресли довільний трикутник. Впиши в нього коло.

2. Точка дотику кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить бічну сторону на відрізки, які дорівнюють 3 см та 4 см, якщо рахувати від основи. Знайди периметр трикутника.



Увага! На наступний урок візьми транспортир.

4. Проаналізувати методичні особливості навчання теми «Коло, круг. Геометричні побудови» за ***інтегрованим підручником «Математика – 7. Частина 2» [3] авторів О. Школьний, Є. Нелін, А. Миляник, Ю. Простакова.***

Додаток 1

Завдання в тестовій формі

1. Розглянемо теорему та її доведення.

Теорема. Якщо x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Доведення. Очевидно, що дискримінант D даного рівняння не може бути від'ємним. Нехай D>0. Застосовуючи формулу коренів квадратного рівняння, запишемо: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Маємо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Зауваження. Теорема є справедливою і тоді, коли D=0. При цьому вважають, що $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Маємо:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

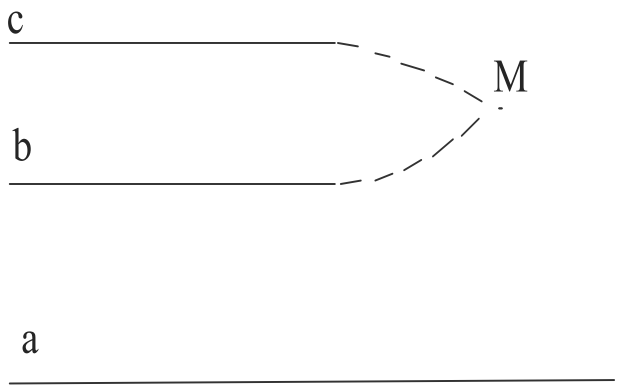
Охарактеризуйте представлене доведення.

А	Синтетичне, пряме, цільне, дедуктивне.
Б	Аналітичне, непряме, по частинах, індуктивне.
В	Синтетичне, пряме, по частинах, індуктивне.
Г	Аналітичне, пряме, по частинах, індуктивне.

2. *Теорема*. Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Доведення: Нехай $b||a$ і $c||a$. Доведемо, що $b||c$.

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а, отже, перетинаються в деякій точці *M*. Тоді виходить, що через точку *M* проходять дві прямі, паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельних прямих. Значить, припущення невірне, а вірно, що $b||c$.



Охарактеризуйте представлене доведення.

А	Синтетичне, непряме, по частинах, дедуктивне.
Б	Синтетичне, непряме, ціле, дедуктивне.
В	Аналітичне, непряме, по частинах, індуктивне.
Г	Аналітичне, пряме, по частинах, індуктивне.

3. Дано твердження: «Вертикальні кути рівні». Чим воно є?

А	теоремою - властивістю
Б	теоремою - ознакою
В	аксіомою
Г	означенням

4. Дано справедливе твердження: «Сума суміжних кутів дорівнює 180°». Переформулюйте його за допомогою слова «достатньо», не порушивши його вірності.

А	Для того, щоб сума суміжних кутів дорівнювала 180°, достатньо, щоб вони були рівні

Б	Якщо градусні міри двох кутів в сумі складають 180°, цього достатньо, щоб вони були суміжними
В	Для того, щоб кути були суміжними, достатньо, щоб їх сума дорівнювала 180°
Г	Для того, щоб сума кутів дорівнювала 180°, достатньо, щоб вони були суміжними

5. «Через будь – які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна».

Чим може бути таке математичне речення?

А	Аксіомою або означенням
Б	Аксіомою або теоремою
В	Теоремою або означенням
Г	Це неправильне математичне твердження

6. Оберіть таке твердження, для якого обернене твердження є хибним.

А	Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.
Б	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
В	У паралелограма протилежні сторони і кути рівні.
Г	Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.

7. Яке з тверджень є вірним?

А	Оскільки у чотирикутника дві сторони паралельні, а дві інші рівні, то цей чотирикутник - паралелограм
Б	Центр симетрії трапеції - точка перетину його діагоналей

В	Існує чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні, однак він не є ромбом
Г	У рівнобедреному трикутнику зі сторонами 3 см і 7 см, основа дорівнює 7 см.

8. Якій з заданих теорем еквівалентна теорема, що має структуру «Якщо *p*, то *q*»?

А	Б	В	Г
«Якщо не *p*, то *q*»	«Якщо не *p*, то не *q*»	«Якщо *q*, то не *p*».	«Якщо не *q*, то не *p*».

9. Яку із представлених логічних структур має теорема: «Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні».

А	$(\forall x \in M)(A_1(x) \wedge A_2(x) \Rightarrow B(x))$
Б	$(\forall x \in M)(A_1(x) \vee A_2(x) \Rightarrow B(x))$
В	$(\forall x \in M)(\exists y): A(x; y) \Rightarrow B(x; y)$
Г	$(\forall x \in M)(A_1(x) \wedge A_2(x) \Rightarrow B_1(x) \wedge B_2(x))$

10. Яке твердження стане невірним, якщо у ньому слово «пряма» змінити словом «площина»?

А	Дві прямі паралельні, якщо кожна з них паралельна третій прямій.
Б	Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна деякій площині, то і інша пряма перпендикулярна цій площині

В	Через будь-яку точку можна провести пряму, перпендикулярну площині і притому тільки одну
Г	Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і інший прямий

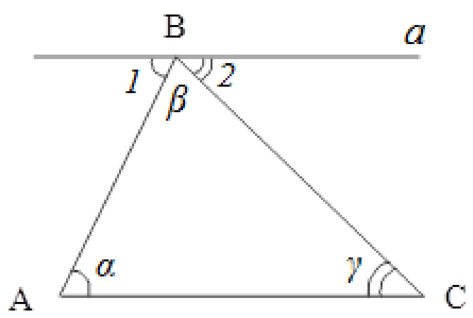
11. Теорема записана у вигляді «Якщо А, то В». Умова А є:

А	необхідною для В
Б	достатньою для В
В	необхідною і достатньою для В
Г	інша відповідь

12. Які з тверджень не є вірними?

А	Паралелограм з діагоналями $\sqrt{6}$ см, $\sqrt{10}$ см і стороною 4 см є ромбом
Б	Існує трикутник зі сторонами c = 0,3 см, $в$ = 0,8 см і $sin\ C$ = 0,4
В	Діаметр, що перпендикулярний до хорди, поділяє її навпіл.
Г	Будь-які два кола подібні між собою

13. Які теоретичні відомості використані при доведенні теореми про суму кутів трикутника за даною опорною схемою?



1) Допоміжна побудова:

$a || AC,\ B \in a$

$\Downarrow$

2) $\angle 1 + \beta + \angle 2 = 180°$

$\Downarrow$

3) $\angle 1 = \alpha,\ \angle 2 = \gamma$

$\Downarrow$

4) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

А	Величина розгорнутого кута, ознака паралельних прямих.
Б	Величина розгорнутого кута, властивість паралельних прямих.
В	Аксіома паралельних прямих, величина розгорнутого кута, властивість паралельних прямих.
Г	Аксіома паралельних прямих, властивість паралельних прямих.

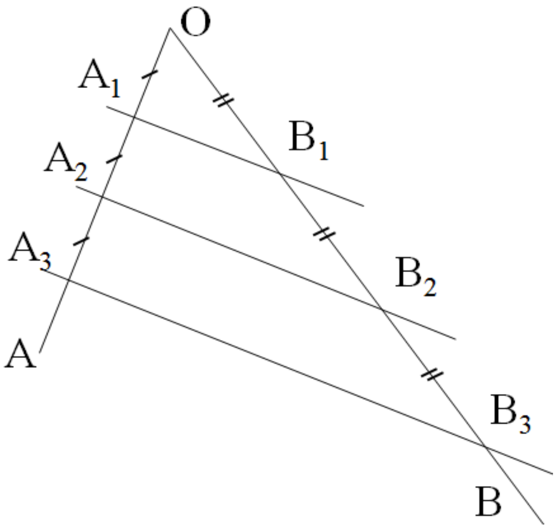
14. Яке твердження є істинним?

А	Фомула для обчислення площі ромба $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, де d_1 і d_1 – діагоналі, є узагальненням формули для обчислення площі паралелограма $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot sin\gamma$, де d_1 і d_1– діагоналі, γ – кут між ними.
Б	Теорема Піфагора є узагальненням теореми косинусів.
В	Теорема синусів є узагальненням теореми Піфагора.
Г	Теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.

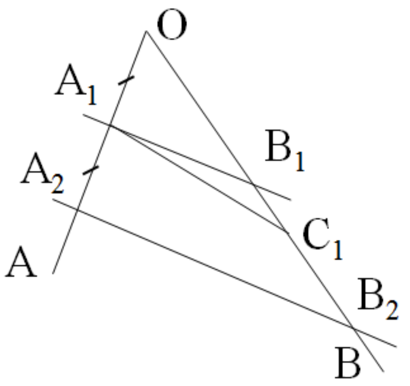
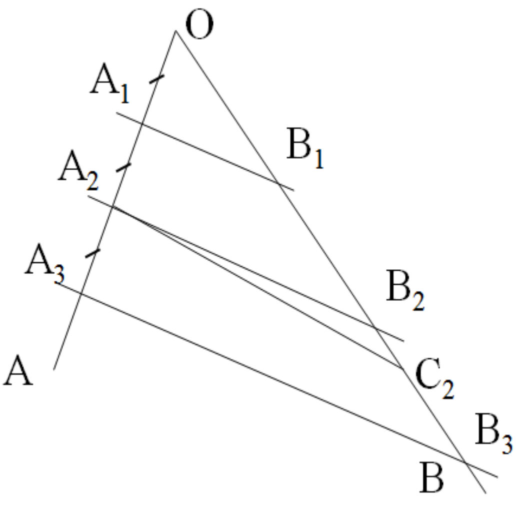
15. Теорема Фалеса.

Дано: $\angle AOB$, $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Довести: $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$



Які теоретичні відомості використані при доведенні теореми Фалеса методом від супротивного за даною опорною таблицею?

<table>
<tr><td>I. $OB_1 = B_1B_2$ (т. B_1 – середина OB_2) - ?</td><td>II. $B_1B_2 = B_2B_3$ -?</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">1) Припустимо
т. C_1 – середина OB_2 т. C_2 – середина B_1B_3</td></tr>
<tr><td>2) A_1C_1 – середня лінія $\triangle A_2OB_2$
$\Downarrow$
$A_1C_1 \parallel A_2B_2$</td><td>2) A_2C_2 – середня трапеції $A_3A_1B_1B_3$
$\Downarrow$
$A_2C_2 \parallel A_3B_3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3)Через т. A_1 / т. A_2 проведені дві прямі паралельні третій (протиріччя)!!!</td></tr>
</table>

4) $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

А	Означення та властивості середньої лінії трикутника, аксіома паралельних прямих.
Б	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
В	Властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
Г	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих

16. «Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°».

Представлене твердження є:

А	Теоремою – ознакою вписаного чотирикутника
Б	Теоремою – властивістю вписаного чотирикутника
В	Невірним математичним твердженням
Г	Критерієм вписаного чотирикутника

17. Яке з тверджень є істинним?

А	Якщо рівняння *f(x)=g(x)* помножити або поділити на один і той самий вираз φ(x), який не дорівнює нулю, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.
Б	Якщо обидві частини рівняння *f(x)=g(x)* помножити або поділити на вираз φ(x), який не дорівнює нулю, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.

В	Якщо обидві частини рівняння *f(x)=g(x)* помножити або поділити на один і той самий вираз φ(x), який має смисл при всіх x із області визначення вихідного рівняння, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.
Г	Якщо обидві частини рівняння *f(x)=g(x)* помножити або поділити на один і той самий вираз φ(x), який має смисл при всіх x із області визначення вихідного рівняння і ніде в цій області визначення не обертається в нуль, то одержане рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ (або $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) рівносильне даному.

18. Яке з тверджень є хибним?

А	Якщо обидві частини нерівності піднести до одного і того самого натурального степеня, і при цьому залишити знак нерівності без змін, то одержана нерівність буде рівносильна даній.
Б	Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і той самий вираз φ(x), який при всіх значеннях x із області визначення вихідної нерівності приймає тільки додатні значення, і при цьому залишити знак нерівності без зміни, то одержана нерівність буде рівносильною даній.
В	Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і той самий вираз φ(x), який при всіх значеннях x із області визначення вихідної нерівності приймає тільки від'ємні значення, і при цьому замінити знак нерівності на протилежний, то одержана нерівність буде рівносильна даній.
Г	Якщо до обох частин нерівності додати одну і ту саму функцію $\varphi(x)$, яка визначена при всіх x із області визначення вихідної

	нерівності, і при цьому залишити знак нерівності без зміни, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

19. Розглянемо рівняння: $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$.

Розв'язання: $3x+4=x-2$, звідки х=-3. Однак перевірка показує, що -3 не є коренем вихідного рівняння.

Відповідь: $\emptyset$.

В чому причина появи стороннього кореня?

А	Невірно застосовано теорему про рівносильність рівнянь
Б	Розширення області визначення
В	Звуження області визначення
Г	Розв'язання невірне

20. Оберіть невірне твердження:

А	Для того, чтоб трапеція була рівнобедреною, необхідно і достатньо, щоб вона була вписана в коло
Б	Якщо паралелограм вписаний в коло, то він є прямокутником
В	В ромб можна вписати коло, тільки якщо він квадрат
Г	Якщо в паралелограм вписане коло, то він є ромбом

21. Розглянемо софізм: *Сума будь-яких двох однакових чисел дорівнює нулю.*

«Доведення»: доведемо, що $a+a=0$.

1) Нехай $a=x$.

2) Помноживши обидві частини цієї рівності на $-4a$, де $a\neq 0$, дістанемо: $-4ax=-4a^2$, або $-4ax+4a^2=0$.

3) Додамо до обох частин рівності x^2, тоді $x^2-4ax+4a^2=x^2$.

4) Або $(x-2a)^2=x^2$.

5) Звідки $x-2a=x$.

6) Але оскільки $x=a$, то a-2a=a, тобто -a=a.

7) Остаточно: a+a=0.

На якому кроці міркувань припущено помилку?

А	Б	В	Г
На 6)	На 2)	На 5)	На 4)

Додаток 2

Завдання для самостійної роботи студентів

1. Доведіть, що якщо $a>0, b>0$, то $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \le \sqrt[4]{ab}$. Який метод доведення було використано?
2. Доведіть, що якщо $a>0, b>0$, то $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. Чи доречно використати непряме доведення?
3. Доведіть теорему – властивість вписаного чотирикутника. Охарактеризуйте проведене доведення за різними ознаками.
4. Доведіть різними способами, у тому числі координатним методом, що в рівнобічній трапеції *ABCD* відрізок *KD* дорівнює середній лінії (*K* – проекція точки *B* на більшу основу трапеції). В якому класі можна розглядати цю задачу?
5. Знайдіть кут між мімобіжними діагоналями двох суміжних граней куба (розв'яжіть задачу векторним методом).
6. Доведіть векторним методом, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і поділяються на цій точці у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.
7. Наведіть приклади декількох задач ШКГ, в яких ознаки рівності трикутників виступають як ключ до розв'язання задачі.
8. Запропонуте карточку-орієнтир для самостійного доведення учнями теореми про середню лінію трикутника іншим способом, відмінним від запропонованого у чинному підручнику.
9. Оформіть доведення теореми про суму кутів трикутника у вигляді таблиці, ліва колонка якої – твердження, права – його обгрунтування.

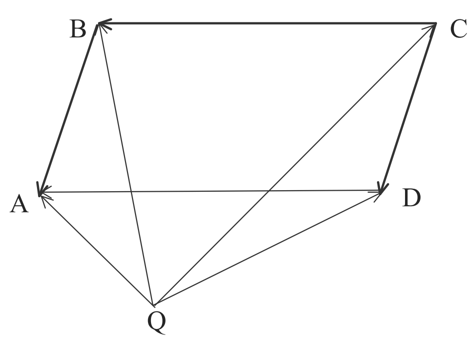
10. Доведіть, що якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кутів, то цей паралелограм – ромб. Охарактеризуйте методику роботи з учнями над цією задачею.
11. Складіть набір достатніх умов поняття прямокутника. Навіщо учням володіти систематизованим набором достатніх умов поняття? Наведіть приклад задачі, у процесі розв'язання якої доцільно пригадати з учнями набір достатніх умов поняття прямокутника.

12. Складіть розгорнутий конспект *позакласного заходу з математики*, мета якого – підвищити інтерес учнів до доказових міркувань і до різних способів доведення теорем шкільного курсу математики.

13. Розгляньте теорему 11.1 (про вписаний кут) за підручником [Мерзляк, 8 кл. поглиб. рів. С. 65]. Проаналізуйте представлене доведення за різними ознаками: *за послідовністю міркувань*; *за загальнологічною основою*; *за формою умовиводу; в залежності від використання математичних теорій.* Виконайте порівняльний аналіз такого доведення з доведенням, поданим у лекції 2

14. Розглянемо твердження:

Чотирикутник ABCD – паралелограм $\Leftrightarrow$ $\forall$ т. $Q\,:\ \overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}$



Доведення:

1) Нехай $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}$. Доведемо, що ABCD – паралелограм.

$\underbrace{\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QB}}_{\overrightarrow{BA}}=\underbrace{\overrightarrow{QD}-\overrightarrow{QC}}_{\overrightarrow{CD}}$, тобто $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|\ \Rightarrow AB=CD.$

$\underbrace{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QD}}_{\overrightarrow{DA}} = \underbrace{\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC}}_{\overrightarrow{CB}}$, тобто $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| \Rightarrow DA = CB.$

$$\left.\begin{aligned} AB = CD \\ DA = CB \end{aligned}\right\} \Rightarrow ABCD - \text{паралелограм за ознакою.}$$

Яку частину твердження було доведено: необхідність або достатність?

Проведіть доведення другої частини вихідного твердження.

Охарактеризуйте проведене доведення за різними ознаками.

15. Охарактеризуйте методику роботи з наступними теоремами (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми):

- *теорема про площу паралелограма;*
- *теорема, обернена до теореми Піфагора;*
- *теорема – ознака паралельності прямих: «Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні перехресні кути рівні, то прямі паралельні»;*
- з *теорема – ознака рівнобедреного трикутника: «Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений»;*
- *теорема – властивість рівнобедреного трикутника, пов'язана з кутами.*

Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу).

16. Наведіть приклади тверджень ШКМ, у процесі доведення яких були б посилання на:

1) теорему, обернену до теореми Піфагора;

2) теорему Вієта;

3) теорему, обернену до теореми Вієта;

4) теорему – властивість описаного чотирикутника;

5) теорему про три перпендикуляри;

6) теорему про рівносильність рівнянь;

7) теорему про рівносильність нерівностей;

8) теорему Фалеса;

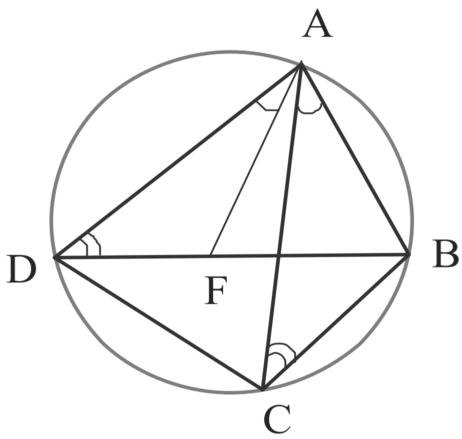
9) теорему – ознаку перпендикулярності прямої і площини;

10) теорему – властивість рівнобічної трапеції.

17. Розглянемо теорему Птолемея та її доведення.

Теорема (Птолемея). Добуток діагоналей чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

Доведення. Нехай чотирикутник ABCD – вписаний в коло (рис. 36). Доведемо, що $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$.



Проведемо відрізок AF (точка F належить відрізку DB) так, щоб кут DAF дорівнював куту CAB.

$\Delta ACB \sim \Delta ADF$ (за двома кутами), тому $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{BC}$, або $AD \cdot BC = AC \cdot DF$ (1).

Оскільки ∠DAC=∠FAB, то

$\Delta DAC \sim \Delta FAB$ (за двома кутами), тому $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{FB}$, або $AC \cdot FB = AB \cdot DC$ (2).

Додамо рівності (1) і (2), одержимо: $AC(DF + FB) = AD \cdot BC + AB \cdot DC$, або $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$.

Теорему доведено.

Охарактеризуйте представлене доведення за різними ознаками.

Затосовуючи теорему Птолемея, розв'яжіть наступну задачу:

Задача. На колі, описаному наколо рівностороннього трикутника ABC, взято довільну точку X. Доведіть, що найбільший з відрізків XA, XB, XC дорівнює сумі двох інших.

18. Розглянемо софізм: "4=5".

«Доведення». Нехай $a=b+c$. Помножимо обидві частини на 5: $5a=5b+5c$. Додавши почленно цю рівність до рівності $4b+4c=4a$, будемо мати: $5a+4b+4c=4a+5b+5c$. Віднявши від обох частин одержаної рівності $9a$, матимемо: $4b+4c-4a=5b+5c-5a$, або $4(b+c-a)=5(b+c-a)$. Звідки 4=5.

Знадіть помилку у наведених міркуваннях.

Чому корисно знайомити учнів на уроках математики з прикладами софізмів?

Додаток 3

QR – словник понятійного апарату

Дедукція

Аналіз

Доведення

Індукція

Методи доведення теорем

Мислення

Синтез

Узагальнення

Теорема

Теза

Навчання учнів доводити твердження

Метод повної індукції

Аргумент

Софізм

Висновки

Представлений навчальний посібник висвітлює актуальні питання навчання сучасного шкільного курсу планіметрії у контексті реформування шкільної математичної освіти на засадах Нової української школи.

Авторка у навчальному посібнику, спрямованому на фахову підготовку здобувачів вищої освіти – майбутніх учителів математики досліджує сучасні підходи до навчання геометрії, реалізованих у нових шкільних підручниках, виданих у 2024 році; аналізує аспекти нових Модельних навчальних програм з геометрії, розроблених у контексті Концепції Нової української школи.

Також авторка звертається до презентації ідей і методів розгортання змісту планіметрії 7 класу, запропонованих експериментальними навчальними проєктами, зокрема «Інтелект України».

Особливу увагу в посібнику приділено можливостям реалізації компетентнісного підходу при навчанні планіметрії у 7 класі, який регламентується Концепцією Нової української школи, формуванню наскрізних умінь семикласників при навчанні планіметрії.

Важливо, що у навчальному посібнику подано систему вправ для здобувачів вищої освіти, які можна обговорювати на практичних заняттях і досліджувати самостійно з метою формування і вдосконалення методичної компетентності.

Зміст посібника чітко структуровано, унаочнено достатньою кількістю рисунків, схем, додаткових матеріалів.

Основна література

1. Науково-методичні засади формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти : монографія / ДЗ «ПНПУ ім. К. Д. Ушинського»; за ред. К. В. Нєдялкової. Одеса : Видавець ФОБ Бойчук, 2021. 279 с.
2. Нєдялкова К. В., Тумбрукакі А. В. Формування вмінь майбутніх учителів математики оцінювати навчальні досягнення учнів: методичні рекомендації. Одеса: ТОВ «Рекламсервіс», 2020. 36 с.
3. Нєдялкова К.В., Кушнірук А.С., Тумбрукакі А.В. Збірник тестових завдань з шкільного курсу математики і методики його навчання. Одеса: ТОВ «Рекламсервіс», 2020.72 с.
4. Нєдялкова К. В. Формування складника методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження. *Педагогічні науки*: зб. наук. праць. Херсон, 2020. Вип. 90. С. 110 – 118.
5. Соколенко Л. О. Наукові основи шкільного курсу математики : Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.

Допоміжна література

1. Byrd G., Byrd L., Pearce C. Cambridge Checkpoint Mathematics Coursebook 7. Cambridge University Press, 2020. 200 p.
2. Byrd G., Byrd L., Pearce C. Cambridge Checkpoint Mathematics Coursebook 8. Cambridge University Press, 2020. 200 p.
3. Byrd G., Byrd L., Pearce C. Cambridge Checkpoint Mathematics Coursebook 9. Cambridge University Press, 2020. 200 p.

4. Niedialkova K. Formation of professional competences of future teachers of mathematics // Eurasian scientific congress. Abstracts of the 3rd International scientific and practical conference. Barca Academy Publishing. Barcelona, Spain. 2020. Pp. 280-285. URL: http://sci-conf.com.ua
5. Бурда М.І. Компетентнісна орієнтація змісту шкільних підручників з математики. *Проблеми сучасного підручника*: зб. наук. праць / за заг.наук. ред. О. М. Топузова. Київ : Педагогічна думка, 2014. Вип. 14. С. 78 –85.
6. Єршова А., Голобородько В., Крижановський О. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2024. 288 с.
7. Коростіянець Т. П., Нєдялкова К. В. Самостійна робота студентів в умовах дистанційного навчання. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.* Серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. Київ, 2021. Вип. 84. Т. 1. С. 84 – 88.
8. Коростіянець Т. П., Нєдялкова К. В. Підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти. *Актуальні питання гуманітарних наук* : міжвуз. зб. наук. праць молодих вчених Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Дрогобич, 2020. Вип. 31. Т. 3. С. 249 – 258.
9. Коростіянець Т.П., Нєдялкова К.В. Вдосконалення методичної підготовки майбутніх учителів математики через використання ситуаційних задач. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова*. Серія 5 Педагогічні науки: реалії та перспективи". Вип. №75, м. Київ, 2020 р. - С.111-115.
10. Коростіянець Т.П., Нєдялкова К.В. Підготовка майбутніх учителів математики до формування понять в учнів: психолого-дидактичний аспект. *Математична освіта: минуле, сьогодення, майбутнє, до 100-річчя від дня народження О. Ф. Семеновича*: монографія / М. І. Бурда та

ін.; за ред. Н. А.Тарасенкової. Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2020. С. 156–162.

11. Кушнір І.А. Геометрія. Школа Бойового мистецтва. Навчальний посібник для учнів 7 – 9 класів. Київ : Факт, 2001. 232 с.
12. Матяш О. І. Формування методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики: дис... д-ра пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Ольга Іванівна Матяш – Київ, 2014. 568 с.
13. Медяник А.І. Учителеві про шкільний курс геометрії. Київ : Рад. шк., 1988.
14. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2024. 272 с.
15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 304 с.
16. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б.,. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 224 с.
17. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 512 с.
18. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 304 с.
19. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч.

для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 272 с.

20. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 240 с.
21. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабіновіч Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2018. 144 с.
22. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабіновіч Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 11 кл. : профільний рівень : збірник самостійних і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2019. 64 с.
23. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабіновіч Ю.М., Якір М.С. Геометрія. 11 кл. : профільний рівень : збірник самостійних і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2019. 64 с.
24. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабіновіч Ю.М., Якір М.С. Геометрія. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2018. 112 с.
25. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 368 с.
26. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
27. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 224 с.

28. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 304 с.
29. Методика навчання математики. Загальна методика: Практикум для організації самостійної роботи студентів: У 4-х ч. / Н.А. Тарасенкова та ін.; за ред. Н.А.Тарасенкової. Черкаси : ЧДУ ім. Б. Хмельницького, 2004.
30. Насенко О. Доведення методом від супротивного у шкільному курсі алгебри. *Математика*. 2006. №21. С. 6-8.
31. Нєдялкова К.В. Загальна методика навчання математики: практичний курс. Навчальний посібник. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.
32. Нєдялкова К.В., Тумбрукакі А.В. Застосування технології QR – кодування в процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики. *Актуальні питання природничо – математичної освіти*. 2019. Вип. 2(14). С. 125 – 132.
33. Скворцова С. О. Математика : підруч. для 6 кл. закл. загал. серед. освіти (у 2-х ч.) / С. О. Скворцова, К. В. Нєдялкова. Харків : Вид-во «Ранок», 2023. 448 с.
34. Школьний О., Нелін Є., Миляник А., Простакова Ю. Математика : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Частина 1. Харків : Ранок, 2024. 317 с.
35. Школьний О., Нелін Є., Миляник А., Простакова Ю. Математика : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Частина 2. Харків : Ранок, 2024. 301 с.

Інформаційні ресурси

1. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт. URL : https://library.pdpu.edu.ua/

2. Державний стандарт загальної базової освіти. URL : https://ru.osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/
3. Концепція НУШ. URL : https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf
4. Модельні навчальні програми. URL : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoyi-ukrayinskoyi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku; https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi)
5. Ресурс підручників. URL: https://pidruchnik.com.ua