

**Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»**

Кафедра вищої математики і статистики

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ПО КУРСУ
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

ТЕМА: Обчислення границь функцій

Одеса - 2018 рік

Укладачі:

Олефір О. І., к. ф.-м. н., старший викладач кафедри вищої математики
і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Сапрікін С. М., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики
і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Рекомендовано до друку засіданням кафедри вищої математики і статистики
ПНПУ імені К. Д. Ушинського протокол № _____ від 2018 року

Ухвалено до друку радою ПНПУ імені К. Д. Ушинського **протокол №** **від**
2018 року

Рецензенти:

Канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики і статистики ПНПУ
імені К. Д. Ушинського М. Г. Волкова

Доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри вищої та прикладної математики ОДЕКУ О. В. Глушков

Методичні рекомендації присвячені обчисленню границь функцій, зокрема, методам розкриття невизначеностей. В роботі детально розглянуті основні питання, пов'язані з засобами розкриття невизначеностей. Разом з теоретичними відомостями розглянуто численні приклади, частина з яких подано з розв'язками, інші для самостійної роботи.

Методичні рекомендації відповідають робочій програмі з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для спеціальностей

Зміст

Вступ	4
1. Обчислення границь функцій у випадку, коли невизначеності не виникає	6
2. Безпосереднє розкриття невизначеностей	
2.1 Розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	7
2.2 Розкриття невизначеності $(\infty - \infty)$	13
2.3 Розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$	15
3. Розкриття невизначеностей за допомогою важливих границь та наслідків з них	
3.1 Використання $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь	21
3.2 Використання $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь	24
3.3 Використання наслідків з важливих границь для розкриття невизначеностей при обчисленні границь	33
3.4 Приклади для самостійного розв'язування	47
Список літератури	51
Вступ	
Довідковий матеріал	

Для обчислення границі функції використовують

1) Арифметичні властивості границь:

Якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ та $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ де } c \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

2) Теорему про границю складної функції:

Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ та $\forall y = f(x) \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$

3) Відомі важливі границі:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Та наслідки, які випливають з цих границь:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$11. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$$

4) Слід пам'ятати, що при обчисленні границь можуть мати місце дві принципово різні ситуації:

По-перше, це випадок, коли не виникає невизначеності. Тоді границю функції, якщо вона існує, можна обчислити одразу за допомогою властивостей границі.

По-друге, це випадок, коли для обчислення границі треба розкрити невизначеність.

Якщо коли $x \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ то для відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ коли

$x \rightarrow a$ має місце невизначеність яку символічно позначають як $\left(\frac{0}{0}\right)$,

коли $x \rightarrow a$ та $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$, то для $\frac{f(x)}{g(x)}$ маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$,

коли $x \rightarrow a$ та $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$, то для добутку $f(x)g(x)$ маємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$,

коли $x \rightarrow a$ та $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$ (або $f(x) \rightarrow -\infty$, $g(x) \rightarrow -\infty$), то для різниці $f(x)-g(x)$ маємо невизначеність $(\infty - \infty)$,

коли $x \rightarrow a$ та $f(x) \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow \infty$, то для степеня $f(x)^{g(x)}$ маємо невизначеність (1^∞) ,

коли $x \rightarrow a$ та $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$, то для виразу $f(x)^{g(x)}$ маємо невизначеність (0^0)

коли $x \rightarrow a$ та $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow 0$, то для $f(x)^{g(x)}$ маємо невизначеність (∞^0)

1. Обчислення границь функцій у випадку, коли невизначеності не виникає

Розглянемо приклади в яких для обчислення границі використовуються властивості границь та функцій.

Приклад 1.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6}{x^3 + 2}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6}{x^3 + 2} = \frac{0^2 + 6}{0^3 + 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Приклад 1.2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x + 22}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x + 22} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 22)} = \sqrt{25} = 5$$

У розглянутому прикладі було використано той факт, що степенева функція неперервна в області визначення тому можливо виконувати граничний перехід під знаком кореня.

Приклад 1.3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 3}{3}$$

В цьому прикладі для обчислення границі також використано неперервність функції $\frac{\sin x}{x}$ в точці $x = 3$

Приклад 1.4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Для обчислення наведеної границі було використано те, що коли $x \rightarrow \infty$ то в чисельнику дробу маємо обмежену величину а в знаменнику нескінченно велику. За властивостями границі в такому випадку границя дорівнює 0.

Приклад 1.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \left(\frac{1}{0} \right)}{x} = \infty$$

В цьому прикладі використано відому властивість границі, яка полягає у тому, що величина обернена до нескінченно малої є нескінченно великою.

2. Розкриття невизначеностей

2.1 Розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Обчислити границі

Приклад 2.1.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 7}{5x + 2}$$

Розв'язок

Так як при $x \rightarrow \infty$ вирази $4x - 7 \rightarrow \infty$ та $5x + 2 \rightarrow \infty$, то маємо невизначеність яка символічно позначається як $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Для розкриття невизначеності в чисельнику та знаменнику дробу винесемо x за дужки та скоротимо чисельник та знаменник на x . Далі використаємо те, що границя частки дорівнює частки границь (бо такі границі існують)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 7}{5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(4 - \frac{7}{x})}{x(5 - \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{7}{x}}{5 - \frac{2}{x}} = \frac{4}{5}$$

Приклад 2.1.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{3x^3 + 2x - 3}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, тому спочатку винесемо в чисельнику та знаменнику дробу x^3 за дужки, а потім скоротимо та використаємо властивість границі частки.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{3x^3 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^3(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \frac{1}{3}$$

Приклад 2.1.3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{3x^2 + 2x - 3}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності в цьому прикладі виконуємо такі ж самі дії, як у попередньому прикладі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{3x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^2(3 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{3 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \infty$$

Для розв'язання наступних прикладів виконуємо всі дії аналогічно попереднім.

Приклад 2.1.4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 4x^2 + x + 6}{3x^3 + 2x - 9}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 4x^2 + x + 6}{3x^3 + 2x - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(1 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{6}{x^5}\right)}{x^3 \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{6}{x^5}\right)}{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^3}} = \infty$$

Приклад 2.1.5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{8x^2 + 6x - 1}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{8x^2 + 6x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(8 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{8 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

Приклад 2.1.6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{x^4 + 2x - 3}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{x^4 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{x \left(1 + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right)} = 0$$

Приклад 2.1.7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{3x^3 + 3x - 7}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{3x^3 + 3x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x^3 \left(3 + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{x^2 \left(3 + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)} = 0$$

Наведені приклади дають просте правило обчислення границь у випадках подібних розглянутим вище:

Якщо $x \rightarrow \infty$ та

- 1) найвищий степінь x у чисельнику більш за найвищий степінь x у знаменнику, то границя дорівнює ∞
- 2) найвищий степінь x у чисельнику менш за найвищий степінь x у знаменнику, то границя дорівнює 0

3) найвищий степінь x у чисельнику дорівнює найвищому степеню x у знаменнику, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при найвищих степенях x

Приклад 2.1.8

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt{5x^2} + \sqrt[4]{9x^8 + 1}}{(x + \sqrt{x}) \sqrt{7 + x + x^2}}$$

Розв'язок

Очевидно маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Найвищий степінь x чисельника дорівнює 2 та найвищий степінь x знаменника дорівнює також 2. Тому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt{5x^2} + \sqrt[4]{9x^8 + 1}}{(x + \sqrt{x}) \sqrt{7 + x + x^2}} = \frac{\sqrt[4]{9}}{1} = \sqrt[4]{9}$$

Приклад 2.1.9

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^8 + 1} - \sqrt[8]{x - 1}}{\sqrt[8]{x^8 + 1} - \sqrt{x - 1}}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Найвищий степінь x чисельника дорівнює 4 та

найвищий степінь x знаменника дорівнює 1. Тому $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^8 + 1} - \sqrt[8]{x - 1}}{\sqrt[8]{x^8 + 1} - \sqrt{x - 1}} = \infty$

Приклад 2.1.10

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^5 - 4} - \sqrt[4]{x^4 + 1}}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Найвищий степінь x чисельника дорівнює 1 та

найвищий степінь x знаменника дорівнює $\frac{5}{3}$. Тому $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^5 - 4} - \sqrt[4]{x^4 + 1}} = 0$

Приклад 2.1.11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 6)^3 - (x + 1)^3}{(2x + 3)^2 + (x + 4)^2}$$

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Щоб відшукати найвищий степінь x чисельника

та знаменника розкриємо в чисельнику та знаменнику дужки та виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} \frac{(x+6)^3 - (x+1)^3}{(2x+3)^2 + (x+4)^2} &= \frac{x^3 + 18x^2 + 108x + 216 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1}{4x^2 + 12x + 9 + x^2 + 8x + 16} = \\ &= \frac{15x^2 + 105x + 215}{5x^2 + 20x + 25} = \frac{3x^2 + 21x + 43}{x^2 + 4x + 5} \end{aligned}$$

Тому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+6)^3 - (x+1)^3}{(2x+3)^2 + (x+4)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 21x + 43}{x^2 + 4x + 5} = 3$$

Зауваження

З останнього прикладу випливає, що при порівнянні степенів x чисельника та знаменника, слід бути уважним.

Приклади для самостійного розв'язку:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 12x + 5}{x^3 + 4x + 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7}{8x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 2x + 3}{x^2 + 5x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 11x + 14}{x^2 + 6x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 7x - 13}{x^2 + 4x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 21x + 30}{x^3 + 14x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 21x + 43}{x^2 + 4x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^7 + 5} - \sqrt{x - 5}}{\sqrt[7]{x^7 + 5} + \sqrt{x - 5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[7]{x+2} - \sqrt[5]{x^5+2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[5]{x^5+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{8x^3+3}}{\sqrt[4]{x+4} - \sqrt[5]{x^5+5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{71x} - \sqrt[3]{64x^6+9}}{(x - \sqrt[3]{x})\sqrt{11+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5\sqrt{x} - \sqrt[3]{27x^6+x^2}}{(x + \sqrt[4]{x})\sqrt{9+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^6+x^2+1} - 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{3x^3+3} + \sqrt[4]{x^5+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3\sqrt{5x^2} + \sqrt[4]{9x^8+1}}{(x + \sqrt{x})\sqrt{7+x+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 9x^2}{3x - \sqrt[4]{9x^8+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^3 + (x+4)^3}{(x+3)^4 - (x+4)^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^3 - (x+5)^3}{(3x-1)^3 + (2x+3)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 + (3x+2)^3}{(2x+3)^3 - (x-7)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 - (2x+3)^3}{(2x+1)^2 + (2x+3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^4 - (x-2)^4}{(x+5)^2 + (x-5)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^3 + (x-2)^3}{x^4 + 2x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-x)^4 - (2-x)4}{(1-x)^4 - (1+x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x+1)^2}{(x-1)^3 - (x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 + (x+2)^3}{(x+4)^3 + (x+5)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+7)^3 - (x+2)^3}{(3x+2)^2 + (4x+1)^2}$$

2.2 Розкриття невизначеності $(\infty - \infty)$

Обчислити границі:

Приклад 2.2.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $((+\infty) - (+\infty))$. Для того щоб позбутися цієї невизначеності виконаємо наступні перетворення

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Звідки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \stackrel{\left(\frac{1}{\infty}\right)}{=} 0$$

Приклад 2.2.2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x(x-1)(x-3)}}{\sqrt{x}}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x(x-1)(x-3)}}{\sqrt{x}} \stackrel{(\infty - \infty)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3 - x(x-1)(x-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x(x-1)(x-3)})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x(x-1)(x-3)})} = \frac{7}{2}$$

Приклад 2.2.3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2})$$

Розв'язок

Для того щоб позбутися невизначеності $(\infty - \infty)$ виконаємо наступні перетворення

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} &= \frac{(\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2})(\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^4})}{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^4}} \\ &= \frac{(x+2)^2 - (x-3)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^4}} = \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 + 6x - 9}{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^4}} = \\ &= \frac{10x - 5}{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^4}} \end{aligned}$$

Тому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 5}{\sqrt[3]{(x+2)^4} + \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^4}} = 0$$

так як найвищий степінь x у чисельнику менш ніж найменший степінь x у знаменнику.

Приклад 2.2.4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{5+8x^3} - 2x)$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{5+8x^3} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt[3]{5+8x^3} - 2x)(\sqrt[3]{(5+8x^3)^2} + 2x\sqrt[3]{5+8x^3} + 4x^2)}{\sqrt[3]{(5+8x^3)^2} + 2x\sqrt[3]{5+8x^3} + 4x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(5+8x-8x^3)}{\sqrt[3]{(5+8x^3)^2} + 2x\sqrt[3]{5+8x^3} + 4x^2} = \infty$$

Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+2)} - \sqrt{x^2-2x+3})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3(\sqrt[3]{x^2(x^6+4)} - \sqrt[3]{x^8-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(\sqrt[3]{5+x^3} - \sqrt[3]{3+x^3})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x(x-1)})$$

2.3 Розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$

Обчислити границі:

Приклад 2.3.1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

Розв'язок

Якщо $x \rightarrow 1$, то $x^2 - 2x + 1 \rightarrow 0$ та $x^3 - x \rightarrow 0$. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$

Очевидно $x = 0$ є корінь виразів чисельника та знаменника, тому при розкладанні їх на множники вираз $(x - 1)$ міститься як в чисельнику так і в знаменнику. Щоб позбутися невизначеності вилучимо у чисельнику та знаменнику одночлен $(x - 1)$ та потім на нього скоротимо дріб:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{x(x + 1)} = \frac{0}{2} = 0$$

Приклад 2.3.2

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$$

Розв'язок

Щоб позбутися невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ розкладемо вирази чисельника та

знаменника на множники. За теоремою Вієта корені чисельника

$x_1 = -2, x_2 = 1$, тому $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, так само корені знаменника

$x_1 = -2, x_2 = 3$ звідки $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{(x + 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

Приклад 2.3.3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

Розв'язок

Так як $x = -1$ є коренем чисельника та знаменника, то для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ вилучимо одночлен з виразів чисельника та знаменника, використовуючи те, що чисельник та знаменник мають націло ділитися на одночлен $(x+1)$. Для ділення застосуємо схему Горнера

	1	5	7	3
-1	1	4	3	0
-1	1	3	0	

Результат ділення показує, що $x = -1$ корінь кратності 2, тому $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)^2(x+3)$

Аналогічно

	1	4	5	2
-1	1	3	2	0
-1	1	2	0	

Звідки $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2(x+2)$

Повертаючись до обчислення границі

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x+3)}{(x+1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2}{1} = 2$$

Приклад 2.3.4

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$$

Розв'язок

Аналогічно попередньому прикладу, за допомогою схеми Горнера в чисельнику та знаменнику вилучаємо одночлен $(x - 3)$

	1	-4	-3	18
3	1	-1	-6	0
3	1	2	0	

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x - 3)^2(-x - 6) = -(x - 3)^2(x + 6)$$

	1	-5	3	9
3	1	-2	-3	0
3	1	1	0	

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x - 3)^2(x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)^2(x + 6)}{(x - 3)^2(x + 1)} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 6}{x + 1} = -\frac{9}{4}$$

Приклад 2.3.5

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

Розв'язок

Для того щоб розкрити невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, спочатку чисельник та

знаменник дробу доповнимо до різниці квадратів, а потім вилучимо вираз $(x - 4)$ та скоротимо на нього дріб:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1 + 2x - 9)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{1 + 2x} + 3)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{1 + 2x} + 3)} = \frac{2(2 + 2)}{3 + 3} = \frac{4}{3}$$

Приклад 2.3.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для її розкриття перетворимо дріб так, щоб у

чисельнику утворилася сума кубів та в знаменнику розкриємо суму кубів:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x^3+8)} = \\ &= \frac{x-6+8}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} \\ &= \frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}\end{aligned}$$

Звідки

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} = \frac{1}{144}$$

Приклад 2.3.7

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ додамо та віднімемо в чисельнику 2 та

потім виконаємо перетворення аналогічні перетворення у попередньому прикладі

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1} \\
& \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - 2 + 2 - \sqrt{3+x^2}}{x-1} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt[3]{7+x^3} - 2)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2} + 2\sqrt[3]{7+x^3} + 4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2} + 2\sqrt[3]{7+x^3} + 4)} + \frac{(2 - \sqrt{3+x^2})(2 + \sqrt{3+x^2})}{(x-1)(2 + \sqrt{3+x^2})} \right) = \\
& = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7+x^3-8}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2} + 2\sqrt[3]{7+x^3} + 4)} + \frac{4-3-x^2}{(x-1)(2 + \sqrt{3+x^2})} \right) = \\
& = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2} + 2\sqrt[3]{7+x^3} + 4)} - \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2 + \sqrt{3+x^2})} \right) = \frac{1+1+1}{\sqrt[3]{8^2} + 2\sqrt[3]{8} + 4} - \\
& \frac{1+1}{2 + \sqrt{4}} = \frac{3}{12} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 + x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^5 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} + \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$$

3. Розкриття невизначеностей за допомогою важливих границь та наслідків з них

3.1 Використання $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь

Обчислити границі:

Приклад 3.1.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x}$$

Розв'язок

Якщо $x \rightarrow 0$, то $3x \rightarrow 0$, тому зробимо заміну змінної

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} [y = 6x] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Приклад 3.1.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

Розв'язок

Виконаємо заміну змінної аналогічно попередньому прикладу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left[\begin{array}{l} y = 3x \\ x = \frac{y}{3} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 3$$

Приклад 3.1.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 7x}$$

Розв'язок

так як $\frac{7x}{\sin 7x} = \left(\frac{\sin 7x}{7x} \right)^{-1}$ та в наслідок неперервності степеневі функції

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 7x}{7x} \right)^{-1} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \right)^{-1} = 1$$

Приклад 3.1.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}$$

Розв'язок

Використовуючи результат попереднього прикладу, отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x \sin 2x}{2x \sin 7x} = \frac{2}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7x}{\sin 7x} \frac{\sin 2x}{2x} \right) = \frac{2}{7}$$

Приклад 3.1.5

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$$

Розв'язок

Так як $x \rightarrow \pi \Rightarrow x - \pi \rightarrow 0$, покладемо $y = x - \pi$ тоді $x = y + \pi$ та

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 4(y + \pi)}{\sin 3(y + \pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(4y + 4\pi)}{\sin(3y + 3\pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 4y}{\sin(3y + \pi)} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 4y}{-\sin 3y} = -\frac{4}{3}$$

Приклад 3.1.6

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sin x - \sin a)(\sin x + \sin a)}{(x - a)(x + a)} = \left[\begin{array}{l} y = x - a \\ x = y + a \\ x \rightarrow a \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + a) - \sin a}{y} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x + \sin a}{x + a} &= \frac{\sin a}{a} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y + 2a}{2}}{y} = \\ &= \frac{\sin a}{a} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y + 2a}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{\sin a \cos a}{a} = \frac{1}{2a} \sin 2a \end{aligned}$$

Приклад 3.1.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ x = \sin y \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

Приклад 3.1.8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$$

Розв'язок

Так як $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \arctg x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 - \frac{\arcsin x}{x})}{x(2 + \frac{\arctg x}{x})} = \frac{1}{3}$$

3.2 Використання $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь

Обчислити границі:

Приклад 3.2.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^x$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^x \stackrel{(1^\infty)}{=} \left[\begin{array}{l} y = -\frac{x}{2} \\ x = -2y \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2y} \right)^{-2y} = \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Для обчислення границі було використано неперервність степеневої функції та теорему про неперервність складної функції.

Приклад 3.2.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{bx+c})^{dx+f}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx+c}\right)^{dx+f} \stackrel{(1^\infty)}{=} \left[\begin{array}{l} \frac{a}{bx+c} = \frac{1}{y} \\ x = \frac{ay}{b} - c \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{ad}{b}y + (f-cd)} =$$

$$= \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right)^{\frac{ad}{b}} \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{f-cd} = e^{\frac{ad}{b}}$$

Результат останнього прикладу надає правило обчислення аналогічних границь

Приклад 3.2.3-3.2.5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{5x+4}\right)^{2x+1} = e^{\frac{6}{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{7x}\right)^{3x-4} = e^{-21}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4x-1}\right)^{-\frac{x}{2}+9} = e^{\frac{1}{4}}$$

Приклад 3.2.6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-7}\right)^{\frac{x}{6}+1}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності (1^∞) в дужках додамо та віднімемо 1 та використаємо результати попередніх прикладів:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-7}\right)^{\frac{x}{6}+1} \stackrel{(1^\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+5}{x-7} - 1\right)^{\frac{x}{6}+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{x-7}\right)^{\frac{x}{6}+1} = e^{\frac{12}{6}} = e^2$$

Приклад 3.2.7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 4x - 1}{4x^2 + 2x + 3} \right)^{1-2x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі в дужках виразу додамо та віднімемо 1 та виконаємо необхідні перетворення:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 4x - 1}{4x^2 + 2x + 3} \right)^{1-2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x^2 + 4x - 1}{4x^2 + 2x + 3} - 1 \right)^{1-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x - 4}{4x^2 + 2x + 3} \right)^{1-2x} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x - 4}{4x^2 + 2x + 3} \right)^{\frac{(4x^2 + 2x + 3)}{(2x - 4)} \cdot \frac{(2x - 4)}{(4x^2 + 2x + 3)} (1-2x)} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 4)(1-2x)}{4x^2 + 2x + 3}} = e^{-1} \end{aligned}$$

Перехід границею в показник можна було зробити, так як показникова функція неперервна.

Приклад 3.2.8

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 6}{3x - 1} \right)^x$$

Розв'язок

Очевидно в цьому випадку невизначеності не виникає, тому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 6}{3x - 1} \right)^x = 0$$

Приклад 3.2.9

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 6}{x - 1} \right)^x$$

Розв'язок

У цьому прикладі, так само як і у попередньому, невизначеності нема. Тому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+6}{x-1} \right)^x = +\infty$$

Приклад 3.2.10

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Розв'язок

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (\cos x - 1) \right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (\cos x - 1) \right)^{\frac{1}{(\cos x - 1)} \cdot \frac{\cos x - 1}{1} \cdot \frac{1}{\sin x}} = \\ e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\sin x}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Приклад 3.2.11

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

Розв'язок

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin 3} - 1 \right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{\sin x - \sin 3}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}} = \\ \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{\sin x - \sin 3}{\sin 3} \right)^{\frac{\sin 3}{(\sin x - \sin 3)} \cdot \frac{(\sin x - \sin 3)}{\sin 3} \cdot \frac{1}{(x-3)}} &= e^{\frac{1}{\sin 3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x - \sin 3}{x-3}} = e^{\frac{1}{\sin 3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \sin \frac{x-3}{2} \cos \frac{x+3}{2}}{x-3}} = \\ e^{\frac{1}{\sin 3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin \frac{x-3}{2} \cos \frac{x+3}{2}}{\frac{x-3}{2}}} &= e^{\frac{\cos 3}{\sin 3}} = e^{\operatorname{tg} 3} \end{aligned}$$

Для розв'язку було використане те, що коли $x \rightarrow 3 \Rightarrow x - 3 \rightarrow 0$

Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 6x}{\sin 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{\arcsin 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin 6x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\sin(2\pi(x + 10))}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + \pi)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\cos x}{\sin(\pi - 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 3x}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(x + a) - \sin(x - a)}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x-7}{6x+4} \right)^{3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+5} \right)^{x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-10}{x+1} \right)^{3x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 + 5x + 1} \right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 1} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 21x - 7}{2x^2 + 18x + 9} \right)^{2x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x}{3x^2 - 5x + 7} \right)^{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 5} \right)^{3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x^2 + 18x - 15}{7x^2 + 11x + 15} \right)^{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 2} \right)^{2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2x + 1} \right)^{3x-7}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 6x + 7}{3x^2 + 20x - 1} \right)^{-x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 4x - 1}{3x^2 + 2x + 7} \right)^{2x+5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x + 7}{2x^2 + 5x + 3} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2 + 3x - 1}{5x^2 + 3x + 3} \right)^{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 7x - 1}{2x^2 + 3x - 1} \right)^{-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\sin 2x \operatorname{tg} 5x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 4x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 4x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{4} - x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{\cos \frac{x}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$$

3.3 Використання наслідків з важливих границь для розкриття невизначеностей при обчисленні границь

Приклад 3.3.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі використаємо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \left[\begin{array}{l} y = 5x \\ x = \frac{y}{5} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \ln(1+y)}{y} = 5 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 5$$

Приклад 3.3.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0} \right)$ використаємо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \left[\begin{array}{l} y = 3x \\ x = \frac{y}{3} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(e^y - 1)}{2y} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^y - 1)}{2y} = \frac{3}{2}$$

Приклад 3.3.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{4x} - 1}{3x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі використаємо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{4x} - 1}{3x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \left[\begin{array}{l} y = 4x \\ x = \frac{y}{4} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5^y - 1}{3 \frac{y}{4}} = \frac{4}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5^y - 1}{y} = \frac{4}{3} \ln 5$$

Приклад 3.3.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$$

Розв'язок

Використаємо те, що коли $x \rightarrow 0$, то $\sin x \rightarrow 0$ та теорему про границю складної функції:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1 + \sin x)}{\sin x \sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 4x} \right) = \frac{1}{4}$$

Приклад 3.3.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{(e^{3x} - 1)^2} \frac{9x^2}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{9x^2}{(e^{3x} - 1)^2} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{9x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{9x^2}{(e^{3x} - 1)^2} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{9 \frac{2}{4} x^2} \right) = \frac{1}{18}$$

Приклад 3.3.6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ доповнимо знаменник дробу до різниці квадратів

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{(1 - \sqrt{x^2 + 1})(1 + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{(1 - x^2 - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2} = \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y + 1)(1 + \sqrt{y + 1})}{y} = 2 \end{aligned}$$

Приклад 3.3.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x + 1)}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x + 1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi x}{2}\right)}{x \ln(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\ln(x + 1)} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x} \right) = \pi$$

Приклад 3.3.8

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\ln(1+(x-1))} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} (x+1) \right) = 2$$

Приклад 3.3.9

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$$

Розв'язок

Для того щоб позбутися невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ винесемо в чисельнику

e^π за дужки та в знаменнику використаємо формулу різниці синусів:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi (1 - e^{x-\pi})}{2 \sin x \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{(1 - e^{x-\pi}) (x - \pi)}{(x - \pi) \sin x} \frac{e^\pi}{2 \cos 4x} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{l} y = x - \pi \\ x = y + \pi \\ x \rightarrow \pi \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^y}{y} \frac{y}{\sin(\pi + y)} \frac{e^\pi}{2 \cos(4y + 4\pi)} \right) = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^y}{y} \frac{y}{\sin y} \frac{e^\pi}{2 \cos 4y} \right) = - \frac{e^\pi}{2} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.10

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі доповнимо чисельник до різниці квадратів та використаємо границю $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$, де $y = x - 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{\ln x (\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{\ln x (\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1) \ln(1+(x-1))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.11

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x}$$

Розв'язок

Невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$ розкриємо за допомогою заміни $y = x - \frac{\pi}{2}$ та границь.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \text{ i } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1:$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \frac{2x}{\pi}}{\sin \frac{5x}{2} \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + (\frac{2x}{\pi} - 1))}{\sin \frac{5x}{2} \cos x} = \left[\begin{array}{l} y = x - \frac{\pi}{2} \\ x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{2y}{\pi})}{\sin(\frac{5y}{2} + \frac{\pi}{4}) \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2y}{\pi} \ln(1 + \frac{2y}{\pi})}{\frac{2y}{\pi} \sin(\frac{5y}{2} + \frac{\pi}{4}) \sin y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + \frac{2y}{\pi})}{\frac{2y}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sin y \sin(\frac{5y}{2} + \frac{\pi}{4})} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.12

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ після перетворень використаємо.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a, \text{ де } a = 2 \text{ та } y = \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln(1 + (\sin x - 1))} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x (\sin x - 1) (2^{\cos^2 x} - 1)}{\cos^2 x (\sin x - 1) \ln(1 + (\sin x - 1))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x} \frac{\sin x - 1}{\ln(1 + (\sin x - 1))} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x - 1} \right) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x} \frac{\sin x - 1}{\ln(1 + (\sin x - 1))} (1 + \sin x) \right) = -2 \ln 2 \end{aligned}$$

Приклад 3.3.13

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{tg 2x} - e^{-s i x 2x}}{\sin x - 1}$$

Розв'язок

Для обчислення границі скористаємося границею $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{tg 2x} - e^{-\sin 2x} \left(\frac{0}{0} \right)}{\sin x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\sin 2x} (e^{tg 2x + \sin 2x} - 1)}{\sin x - 1} = \left[\begin{array}{l} y = x - \frac{\pi}{2} \\ x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\sin(2y + \pi)} (e^{tg(2y + \pi)} - 1)}{\sin(y + \frac{\pi}{2})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2y} (e^{tg 2y} - 1)}{\cos y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2y} (e^{tg 2y} - 1) tg 2y}{\cos y tg 2y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{tg 2y} - 1)}{tg 2y} \frac{e^{\sin 2y} tg 2y}{\cos y} \right) = 0$$

Приклад 3.3.14

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln(4x - 1)}{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0} \right)$ використаємо границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln(4x - 1)}{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1} = \left[\begin{array}{l} y = x - \frac{1}{2} \\ x = y + \frac{1}{2} \\ x \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(4y + 1)}{\sqrt{1 - \cos(\pi y + \frac{\pi}{2})} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(4y + 1)}{\sqrt{1 + \sin \pi y} - 1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(4y + 1)(\sqrt{1 + \sin \pi y} + 1)}{(\sqrt{1 + \sin \pi y} - 1)(\sqrt{1 + \sin \pi y} + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(4y + 1)(\sqrt{1 + \sin \pi y} + 1)}{\sin \pi y} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{4\pi y \ln(4y + 1)(\sqrt{1 + \sin \pi y} + 1)}{4\pi y \sin \pi y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\pi y}{\sin \pi y} \frac{\ln(4y + 1)}{4y} \frac{4(\sqrt{1 + \sin \pi y} + 1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Приклад 3.3.15

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin \frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9}$$

Розв'язок

Для обчислення границі після відповідних перетворень використаємо

границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin \frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin \frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin \frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9} \stackrel{\left[\begin{array}{l} y = x + 2 \\ x = y - 2 \\ x \rightarrow -2 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array}\right]}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{y}{2}}{3^{\sqrt{y+y^2-4y^2+4}} - 9} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{y}{2}}{3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}} - 1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{2}(\sqrt{y^2-3y+4}-2)\arcsin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}(3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1)(\sqrt{y^2-3y+4}-2)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)\arcsin \frac{y}{2}}{(3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1)} \cdot \frac{\frac{y}{2}}{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)\arcsin \frac{y}{2}}{(3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1)} \cdot \frac{\frac{y}{2}(\sqrt{y^2-3y+4}+2)}{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)(\sqrt{y^2-3y+4}+2)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1}{\sqrt{y^2-3y+4}-2}} \cdot \frac{\arcsin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \cdot \frac{\frac{y}{2}(\sqrt{y^2-3y+4}+2)}{y(y-3)} \right) = -\frac{4}{3 \ln 3} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.16

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ спочатку зробимо заміну змінної, поклавши $y = x - \pi$, потім виконаємо перетворення за допомогою формул тригонометрії та використаємо границі $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ і $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin ay}{\sin by} = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(2y + 2\pi)}{\ln \cos(4y + 4\pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2y}{\ln \cos 4y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos 2y - 1))}{\ln(1 + (\cos 4y - 1))} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos 2y - 1)) (\cos 4y - 1)(\cos 2y - 1)}{\ln(1 + (\cos 4y - 1)) (\cos 4y - 1)(\cos 2y - 1)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + (\cos 2y - 1))}{\ln(1 + (\cos 4y - 1))} \frac{1 - \cos 2y}{1 - \cos 4y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + (\cos 2y - 1))}{\ln(1 + (\cos 4y - 1))} \frac{2 \sin^2 y}{2 \sin^2 2y} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.17

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі в чисельнику дробу додамо та віднімемо 1, виконаємо перетворення виразу і використаємо границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$$\text{та } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1:$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \arctg 3x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x(1 - \frac{\arctg 3x}{2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 1 + 1 - 5^{3x}}{2x(1 - \frac{\arctg 3x}{2x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7^{2x} - 1}{2x(1 - \frac{\arctg 3x}{2x})} - \frac{5^{3x} - 1}{2x(1 - \frac{\arctg 3x}{2x})} \right) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} \ln 7 - \frac{3}{2} \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} \ln 5 =$$

$$= -2 \ln 7 + 3 \ln 5 = 3 \ln 5 - 2 \ln 7 = \ln \frac{125}{49}$$

Приклад 3.3.18

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x}$$

Розв'язок

Обчислимо дану границю за допомогою перетворень та границь

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x} = 1:$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x}(e^{5x} - 1)}{\sin x \left(\frac{2 \arcsin x}{\sin x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{5x} - 1)}{5x} \frac{5x}{\sin x} \frac{e^{-2x}}{\left(\frac{2 \arcsin x}{\sin x} - 1 \right)} \right) = 5$$

Приклад 3.3.19

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{2x} - 1)}{2x} \frac{x}{\sin x} \frac{2e^{-x}}{\sin x} \right) = \infty$$

Приклад 3.3.20

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$$

Розв'язок

Невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$ розкриємо за допомогою границі $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$, яку застосуємо після перетворень функції:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(1 + (\operatorname{tg} x - 1))} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(1 + (\operatorname{tg} x - 1))} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\ln(1 + (\operatorname{tg} x - 1))} \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\ln(1 + (\operatorname{tg} x - 1))} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\ln(1 + (\operatorname{tg} x - 1))} \cos x \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.21

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності (1^∞) перетворимо дану функцію так, щоб можна було застосувати границю $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ після чого використаємо

$$\text{границі } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1 \text{ та } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin ay}{\sin by} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{\frac{1}{\sin^2 3x} \frac{\sin^2 3x}{\ln \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln(1 + (\cos x - 1))}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\cos x - 1)}{\ln(1 + (\cos x - 1))} \frac{\sin^2 3x}{\cos x - 1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\cos x - 1)}{\ln(1 + (\cos x - 1))} \frac{\sin^2 3x}{-2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right)} = e^{-18} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.22

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln(1+tg^2 3x)}}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln(1+tg^2 3x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \ln(1+tg^2 3x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2} tg^2 3x}{tg^2 3x \ln(1+tg^2 3x)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{tg^2 3x}{\ln(1+tg^2 3x)} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{tg^2 3x}\right)} = e^{\frac{1}{36}} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.23

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$$

Розв'язок

Очевидно що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$ тому в цьому прикладі невизначеності немає і за

теоремою про границю складної функції маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = 2$$

Приклад 3.3.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x}\right)^{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу. Так

$$\text{як } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x} \right)^{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} = 3^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3^{\sqrt{2}}}$$

Приклад 3.3.25

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{x^2 + 3}$$

Розв'язок

У даному прикладі невизначеності немає, тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{x^2 + 3} = 8$$

Приклад 3.3.26

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + x)}{6x} \right)^{\frac{x}{x+2}}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + x)}{6x} \right)^{\frac{x}{x+2}} = 1$$

Приклад 3.3.27

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності (1^∞) перетворимо дану функцію так, щоб можна було застосувати границю $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ після чого використаємо

$$\text{границю } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1:$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}} &= \lim_{x \rightarrow 1} (1+(1-x))^{\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln(1+(1-x))}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+(1-x))^{\frac{(1-x)}{(1-x)} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln(1+(1-x))}} = \\ &+ e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln(1+(1-x))} \sin \frac{\pi x}{2}} = e^{\sin \frac{\pi}{2}} = e \end{aligned}$$

Приклад 3.3.28

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x+1}{2x} - 1 \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1-x}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)} \frac{1-x}{1-x} \frac{2x}{1-x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \ln(x+2)}{2x \ln(2-x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \ln(x+2)}{2x \ln(1+(1-x))}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{\ln(1+(1-x))} \frac{\ln(x+2)}{2x} \right)} = e^{\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Приклад 3.3.29

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$$

Розв'язок

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}} \stackrel{(1^\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1-x}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)\ln(x+1)}{x\ln(1+(1-x))}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{(1-x)}{\ln(1+(1-x))} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x} \right)} = e^{\ln 2} = 2$$

Приклад 3.3.30

$$\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{\ln x - 1}{x - e} \right)^{\sin \frac{\pi}{2e} x}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку двох попередніх прикладів:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{\ln x - 1}{x - e} \right)^{\sin \frac{\pi}{2e} x} &= \left[\begin{array}{l} y = x - e \\ x = y + e \\ x \rightarrow e \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(e + y)}{y} \right)^{\sin \frac{\pi(y+e)}{2e}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(e(1 + \frac{y}{e}))}{e \frac{y}{e}} \right)^{\sin \frac{\pi(y+e)}{2e}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \ln(1 + \frac{y}{e})}{e \frac{y}{e}} \right)^{\sin \frac{\pi(y+e)}{2e}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y} + \frac{\ln(1 + \frac{y}{e})}{e \frac{y}{e}} \right)^{\sin \frac{\pi(y+e)}{2e}} = \infty \end{aligned}$$

3.4 Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x-5)}{e^{x+3} - e^{x^2+4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln \frac{2x}{\pi}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x - 9} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}} \right)^{\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x^2]{2 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x}{3 - x} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x}{4 + x} \right)^{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{x} \right)^{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6 - x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{51}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}$$

Список літератури

1. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 1981 – 543 с.
2. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966 – 319 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1. – М.: Наука, 1966 – 607 с.
4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1984 – 592 с.
5. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966 – 460 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1984 – 416 с.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 9-е вид. – М.: Наука, 1977 – 527 с.
8. Гунтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. – М.: Гостехиздат, 1949 – 224 с.

Зміст

Вступ	4
1. Обчислення границь функцій у випадку, коли невизначеності не виникає	6
2. Безпосереднє розкриття невизначеностей	
2.1 Розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	7
2.2 Розкриття невизначеності $(\infty - \infty)$	13
2.3 Розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$	15
3. Розкриття невизначеностей за допомогою важливих границь та наслідків з них	
3.1 Використання $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь	21
3.2 Використання $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь	24
3.3 Використання наслідків з важливих границь для розкриття невизначеностей при обчисленні границь	33
3.4 Приклади для самостійного розв'язування	47
Список літератури	51