Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»

Кафедра вищої математики і статистики

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ТЕМА: Обчислення границь функцій

Одеса - 2018 рік

Методичні рекомендації для студентів фізико-математичного факультету спеціальностей математика, інформатика, фізика

Укладачі:

Коваль Т. В., старший викладач кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Олефір О. І., к. ф.-м. н., старший викладач кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Саприкін С. М., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Рекомендовано до друку засіданням кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського протокол №   від 2018 року

Ухвалено до друку радою ПНПУ імені К. Д. Ушинського п**ротокол № від 2018 року**

Рецензенти:

Канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського М. Г. Волкова

Доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри вищої та прикладної математики ОДЕКУ О. В. Глушков

Методичні рекомендації присвячені обчисленню границь функцій, зокрема, методам розкриття невизначеностей. В роботі детально розглянуті основні питання, пов’язані з засобами розкриття невизначеностей. Разом з теоретичними відомостями розглянуто численні приклади, частина з яких подано з розв'язками, інші для самостійної роботи.

Методичні рекомендації відповідають робочій програмі з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для спеціальностей

Зміст

Вступ

Довідковий матеріал

Для обчислення границі функції використовують

1) Арифметичні властивості границь:

Якщо $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$\lim\limits_{x\to a}(cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де $c \in R$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad g(x)\neq 0$$

2) Теорему про границю складної функції:

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ та $\forall y = f(x)$ $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$,то $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$

3) Відомі важливі границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Та наслідки, які випливають з цих границь:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$ ($a > 0,\ a \neq 1$)

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

11 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$

12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$

4) Слід пам'ятати, що при обчислені границь можуть мати місце дві принципово різні ситуації:

По-перше, це випадок, коли не виникає невизначеності. Тоді границю функції, якщо вона існує, можна обчислити одразу за допомогою властивостей границі.

По-друге, це випадок, коли для обчислення границі треба розкрити невизначеність.

Якщо коли $x\to a,\ f(x)\to 0, g(x)\to 0$ то для відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ коли $x\to a$ має місце невизначеність яку символічно позначають як $\left(\dfrac{0}{0}\right)$,

коли $x\to a$ та $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$,то для $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ маємо невизначеність $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$,

коли $x\to a$ та $f(x)\to 0,\ g(x)\to\infty$, то для добутку *f(x)g(x)* маємо невизначеність $(0\cdot\infty)$,

коли $x\to a$ та $f(x)\to+\infty,\ g(x)\to+\infty$ (або $f(x)\to-\infty, g(x)\to-\infty$), то для різниці *f(x)-g(x)* маємо невизначеність ($\infty-\infty$),

коли $x\to a$ та $f(x)\to 1,\ g(x)\to\infty$,то для степеня $f(x)^{g(x)}$ маємо невизначеність (1^∞),

коли $x\to a$ та $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$, то для виразу $f(x)^{g(x)}$ маємо невизначеність (0^0)

коли $x\to a$ та $f(x)\to\infty, g(x)\to 0$, то для $f(x)^{g(x)}$ маємо невизначеність (∞^0)

1. Обчислення границь функцій у випадку, коли невизначеності не виникає

Розглянемо приклади в яких для обчислення границі використовуються властивості границь та функцій.

Приклад 1.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6}{x^3+2}$$

Розв'язок

. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6}{x^3+2}=\frac{0^2+6}{0^2+2}=\frac{6}{2}=3$$

Приклад 1.2

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{3x+22}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{3x+22}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(3x+22)}=\sqrt{25}=5$$

У розглянутому приклади було використано той факт, що степенева функція неперервна в області визначення тому можливо виконувати граничний перехід під знаком кореня.

Приклад1. 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 3}{3}$$

В цьому прикладі для обчислення границі також використано неперервність функції $\frac{\sin x}{x}$ в точці x = 3

Приклад 1.4

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

Для обчислення наведеної границі було використано те. що коли $x\to\infty$ то в чисельнику дробу маємо обмежену величину а в знаменнику нескінченно велику. За властивостями границі в такому випадку границя дорівнює 0.

Приклад1. 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}^{\left(\frac{1}{0}\right)} = \infty$$

В цьому прикладі використано відому властивість границі, яка полягає у тому, що величина обернена до нескінченно малої є нескінченно великою.

2. Розкриття невизначеностей

2.1 Розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Обчислити границі

Приклад 2.1.1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7}{5x+2}$$

Розв'язок

Так як при $x\to\infty$ вирази $4x-7\to\infty$ та $5x+2\to\infty$, то маємо невизначеність яка символічно позначається як $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для розкриття невизначеності в чисельнику та знаменнику дробу винесемо x за дужки та скоротимо чисельник та знаменник на x .Далі використаємо те, що границя частки дорівнює частки границь (бо такі границі існують)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7}{5x+2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x(4-\frac{7}{x})}{x(5-\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{7}{x}}{5-\frac{2}{x}}=\frac{4}{5}$$

Приклад 2.1.2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{3x^3+2x-3}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, тому спочатку винесемо в чисельнику та знаменнику дробу x^3 за дужки, а потім скоротимо та використаємо властивість границі частки.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{3x^3+2x-3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(3+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{1}{3}$$

Приклад 2.1.3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{3x^2+2x-3}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності в цьому прикладі виконуємо такі ж самі дії, як у попередньому прикладі

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{3x^2+2x-3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^2(3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\infty$$

Для розв'язання наступних прикладів виконуємо всі дії аналогічно попереднім.

Приклад 2.1.4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^2+x+6}{3x^3+2x-9}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^2+x+6}{3x^3+2x-9}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^5(1-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{6}{x^5})}{x^3(3+\frac{2}{x^2}-\frac{9}{x^3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{6}{x^5})}{3+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\infty$$

<u>Приклад</u> 2.1.5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{8x^2+6x-1}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{8x^2+6x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^2(8+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{8+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}=\infty$$

<u>Приклад</u> 2.1.6

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{x^4+2x-3}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+8x+1}{x^4+2x-3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^4(1+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{x(1+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4})}\overset{\left(\frac{1}{\infty}\right)}{=}0$$

<u>Приклад</u> 2.1.7

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{3x^3+3x-7}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{3x^3+3x-7}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{2}{x})}{x^3(3+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2(3+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3})}=0$$

Наведені приклади дають просте правило обчислення границь у випадках подібних розглянутим вище:

Якщо $x\to\infty$ та

1) найвищий степінь x у чисельнику більш за найвищий степінь x у знаменнику, то границя дорівнює ∞
2) найвищий степінь x у чисельнику менш за найвищий степінь x у знаменнику, то границя дорівнює 0

3) найвищий степінь x у чисельнику дорівнює найвищому степеню x у знаменнику, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при найвищих степенях x

<u>Приклад</u> 2.1.8

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[4]{9x^8+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7+x+x^2}}$$

Розв'язок

Очевидно маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ Найвищий степінь x чисельника дорівнює 2 та найвищий степінь x знаменника дорівнює також 2. Тому $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[4]{9x^8+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7+x+x^2}}=\frac{\sqrt[4]{9}}{1}=\sqrt[4]{9}$

<u>Приклад</u> 2.1.9

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^8+1}-\sqrt[8]{x-1}}{\sqrt[8]{x^8+1}-\sqrt{x-1}}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Найвищий степінь x чисельника дорівнює 4 та найвищий степінь x знаменника дорівнює 1. Тому $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^8+1}-\sqrt[8]{x-1}}{\sqrt[8]{x^8+1}-\sqrt{x-1}}=\infty$

<u>Приклад</u> 2.1.10

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^5-4}-\sqrt[4]{x^4+1}}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Найвищий степінь x чисельника дорівнює 1 та найвищий степінь x знаменника дорівнює $\frac{5}{3}$. Тому $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^5-4}-\sqrt[4]{x^4+1}}=\mathbf{0}$

<u>Приклад</u> 2.1.11

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}$$

Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.Щоб відшукати найвищий степінь x чисельника та знаменника розкриємо в чисельнику та знаменнику дужки та виконаємо перетворення

$$\frac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}=\frac{x^3+18x^2+108x+216-x^3-3x^2-3x-1}{4x^2+12x+9+x^2+8x+16}=$$

$$=\frac{15x^2+105x+215}{5x^2+20x+25}=\frac{3x^2+21x+43}{x^2+4x+5}$$

Тому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+21x+43}{x^2+4x+5}=3$$

Зауваження

З останнього прикладу випливає, що при порівнянні степенів x чисельника та знаменника, слід бути уважним.

Приклади для самостійного розв'язку:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+12x+5}{x^3+4x+8}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+7}{8x-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+4}{x^2+4x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2x+3}{x^2+5x-5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-11x+14}{x^2+6x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{x+4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+7x-13}{x^2+4x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+21x+30}{x^3+14x-5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+21x+43}{x^2+4x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^2-4x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^7+5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt[7]{x^7+5}+\sqrt{x-5}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[7]{x+2}-\sqrt[5]{x^5+2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[5]{x^5+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{8x^3+3}}{\sqrt[4]{x+4}-\sqrt[5]{x^5+5}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{71x}-\sqrt[3]{64x^6+9}}{(x-\sqrt[3]{x})\sqrt{11+x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{27x^6+x^2}}{(x+\sqrt[4]{x})\sqrt{9+x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^6+x^2+1}-5x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{3x^3+3}+\sqrt[4]{x^5+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[4]{9x^8+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7+x+x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-9x^2}{3x-\sqrt[4]{9x^8+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)^3+(x+4)^3}{(x+3)^4-(x+4)^4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^3-(x+5)^3}{(3x-1)^3+(2x+3)^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3+(3x+2)^3}{(2x+3)^3-(x-7)^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3-(2x+3)^3}{(2x+1)^2+(2x+3)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^4-(x-2)^4}{(x+5)^2+(x-5)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3+(x-2)^3}{x^4+2x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3-x)^4-(2-x)4}{(1-x)^4-(1+x)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x+1)^2}{(x-1)^3-(x+1)^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3+(x+2)^3}{(x+4)^3+(x+5)^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}$$

2.2 Розкриття невизначеності $(\infty-\infty)$

Обчислити границі:

<u>Приклад</u> 2.2.1

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $((+\infty)-(+\infty))$. Для того щоб позбутися цієї невизначеності виконаємо наступні перетворення

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Звідки

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{1}{\infty}\right)}{=}0$$

<u>Приклад</u> 2.2.2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x(x-1)(x-3)}}{\sqrt{x}}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x(x-1)(x-3)}}{\sqrt{x}}\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3-x(x-1)(x-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x(x-1)(x-3)})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+1}{\sqrt{x}(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x(x-1)(x-3)})}=\frac{7}{2}$$

<u>Приклад</u> 2.2.3

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2})$$

Розв'язок

Для того щоб позбутися невизначеності $(\infty-\infty)$ виконаємо наступні перетворення

$$\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}=\frac{(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2})(\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^4})}{\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^4}}$$

$$\frac{(x+2)^2-(x-3)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^4}}=\frac{x^2+4x+4-x^2+6x-9}{\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^4}}=$$

$$\frac{10x-5}{\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^4}}$$

Тому

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2})=\lim_{x\to\infty}\frac{10x-5}{\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^4}}=0$$

так як найвищий степінь x у чисельнику менш ніж найменший степінь x у знаменнику.

Приклад 2.2.4

$$\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x)$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{5+8x}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x)(\sqrt[3]{(5+8x^3)^2}+2x\sqrt[3]{5+8x^3}+4x^2)}{\sqrt[3]{(5+8x^3)^2}+2x\sqrt[3]{5+8x^3}+4x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(5+8x-8x^3)}{\sqrt[3]{(5+8x^3)^2}+2x\sqrt[3]{5+8x^3}+4x^2}=\infty$$

Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4})$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3(\sqrt[3]{x^2(x^6+4)}-\sqrt[3]{x^8-1})$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2(\sqrt[3]{5+x^3}-\sqrt[3]{3+x^3})$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x(x-1)})$$

2.3 Розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$

Обчислити границі:

<u>Приклад</u> 2.3.1

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

Розв'язок

Якщо $x \to 1$,то $x^2-2x+1 \to 0$ та $x^3-x \to 0$.Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$

Очевидно $x = 0$ є корінь виразів чисельника та знаменника, тому при розкладанні їх на множники вираз (x – 1) міститься як в чисельнику так і в знаменнику. Щоб позбутися невизначеності вилучимо у чисельнику та знаменнику одночлен (x – 1) та потім на нього скоротимо дріб:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

<u>Приклад</u> 2.3.2

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$$

Розв'язок

Щоб позбутися невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ розкладемо вирази чисельника та знаменника на множники. За теоремою Вієта корені чисельника $x_1 = -2, x_2 = 1$, тому $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$**,** так само корені знаменника $x_1 = -2, x_2 = 3$звідки $x^2-x-6 = (x+2)(x-3)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

<u>Приклад</u> 2.3.3

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$$

Розв'язок

Так як x = -1 є коренем чисельника та знаменника, то для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ вилучимо одночлен з виразів чисельника та знаменника, використовуючи те. що чисельник та знаменник мають націло ділитися на одночлен (x+1). Для ділення застосуємо схему Горнера

	1	5	7	3
-1	1	4	3	0
-1	1	3	0	

Результат ділення показує, що x = -1 корінь кратності 2, тому

$x^3+5x^2+7x+3=(x+1)^2(x+3)$

Аналогічно

	1	4	5	2
-1	1	3	2	0
-1	1	2	0	

Звідки $x^3+4x^2+5x+2=(x+1)^2(x+2)$

Повертаючись до обчислення границі

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(x+3)}{(x+1)^2(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{2}{1}=2$$

<u>Приклад</u> 2.3.4

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$$

Розв'язок

Аналогічно попередньому прикладу, за допомогою схеми Горнера в чисельнику та знаменнику вилучаємо одночлен ($x - 3$)

	1	-4	-3	18
3	1	-1	-6	0
3	1	2	0	

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x-3)^2(-x-6) = -(x-3)^2(x+6)$$

	1	-5	3	9
3	1	-2	-3	0
3	1	1	0	

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x-3)^2(x+1)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)^2(x+6)}{(x-3)^2(x+1)} = -\lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x+1} = -\frac{9}{4}$$

<u>Приклад</u> 2.3.5

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

Розв'язок

Для того щоб розкрити невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, спочатку чисельник та знаменник дробу доповнимо до різниці квадратів, а потім вилучимо вираз ($x - 4$) та скоротимо на нього дріб:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2(2+2)}{3+3} = \frac{4}{3}$$

<u>Приклад</u> 2.3.6

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$$

Розв'язок

Маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для її розкриття перетворимо дріб так, щоб у чисельнику утворилася сума кубів та в знаменнику розкриємо суму кубів:

$$\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=\frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x^3+8)}=$$

$$\frac{x-6+8}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+}$$

$$=\frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$$

Звідки

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-2}\frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4}=\frac{1}{144}$$

<u>**Приклад**</u> **2.3.7**

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ додамо та віднімемо в чисельнику 2 та потім виконаємо перетворення аналогічні перетворення у попередньому прикладі

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-2+2-\sqrt{3+x^2}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(\sqrt[3]{7+x^3}-2)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)}+\frac{(2-\sqrt{3+x^2})(2+\sqrt{3+x^2})}{(x-1)(2+\sqrt{3+x^2})}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{7+x^3-8}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)}+\frac{4-3-x^2}{(x-1)(2+\sqrt{3+x^2})}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2+\sqrt{3+x^2})}\right)=\frac{1+1+1}{\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4}-$$

$$\frac{1+1}{2+\sqrt{4}}=\frac{3}{12}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-x-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}+\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$$

3. Розкриття невизначеностей за допомогою важливих границь та наслідків з них

3.1 Використання $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь

Обчислити границі:

Приклад 3.1.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}$$

Розв'язок

Якщо $x\to 0$, то $3x\to 0$, тому зробимо заміну змінної

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}[y=6x]=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

Приклад 3.1.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

Розв'язок

Виконаємо заміну змінної аналогічно попередньому прикладу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\begin{bmatrix} y=3x \\ x=\dfrac{y}{3} \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3$$

Приклад 3.1.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x}$$

Розв'язок

так як $\frac{7x}{\sin 7x}=\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)^{-1}$ та в наслідок неперервності степеневої функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)^{-1}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\right)^{-1}=1$$

<u>Приклад</u> 3.1.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 7x}$$

Розв'язок

Використовуючи результат попереднього прикладу, отримуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 7x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{7x2\sin 2x}{2x7\sin 7x}=\frac{2}{7}\lim_{x\to 0}(\frac{7x}{\sin 7x}\frac{\sin 2x}{2x})=\frac{2}{7}$$

<u>Приклад</u> 3.1.5

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$$

Розв'язок

Так як $x\to\pi\Rightarrow x-\pi\to 0$, покладемо $y=x-\pi$ тоді $x=y+\pi$ та

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\sin 4(y+\pi)}{\sin 3(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(4y+4\pi)}{\sin(3y+3\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 4y}{\sin(3y+\pi)}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin 4y}{-\sin 3y}=-\frac{4}{3}$$

Приклад 3.1.6

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to a}\frac{(\sin x-\sin a)(}{(x-a)}\frac{\sin x+\sin a)}{(x+a)}=\begin{bmatrix} y=x-a \\ x=y+a \\ x\to a\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y+a)-\sin a}{y}\lim_{x\to a}\frac{\sin x+\sin a}{x+a}=\frac{\sin a}{a}\lim_{y\to 0}\frac{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y+2a}{2}}{y}=$$

$$=\frac{\sin a}{a}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y+2a}{2}}{\frac{y}{2}}=\frac{\sin a\cos a}{a}=\frac{1}{2a}\sin 2a$$

Приклад 3.1.7

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\begin{bmatrix} y=\arcsin x \\ x=\sin y \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

Приклад 3.1.8

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+arctgx}$$

Розв'язок

Так як $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+arctgx}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x(2-\dfrac{\arcsin x}{x})}{x(2+\dfrac{arctgx}{x})}=\frac{1}{3}$$

3.2 Використання $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = *e* або $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ для розкриття невизначеностей при обчисленні границь

Обчислити границі:

<u>Приклад</u> 3.2.1

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x\overset{(1^\infty)}{=}\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{x}{2} \\ x=-2y \\ x\to\infty\Rightarrow y\to\infty \end{array}\right]=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{2y}\right)^{-2y}=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

Для обчислення границі було використано неперервність степеневої функції та теорему про неперервність складної функції.

<u>Приклад</u> 3.2.2

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{bx+c})^{dx+f}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{bx+c})^{dx+f} \overset{(1^{\infty})}{=} \left[\begin{array}{l} \frac{a}{bx+c}=\frac{1}{y} \\ x=\frac{ay}{b}-c \\ x\to\infty \Rightarrow y\to\infty \end{array}\right] = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{ad}{b}y+(f-cd)} =$$

$$= \left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{\frac{ad}{b}} \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{f-cd} = e^{\frac{ad}{b}}$$

Результат останнього прикладу надає провило обчислення аналогічних границь

<u>Приклад</u> 3.2.3-3.2.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{5x+4}\right)^{2x+1} = e^{\frac{6}{5}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{7x}\right)^{3x-4} = e^{-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{4x-1}\right)^{-\frac{x}{2}+9} = e^{\frac{1}{4}}$$

<u>Приклад</u> 3.2.6

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+5}{x-7})^{\frac{x}{6}+1}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності (1^{∞}) в дужках додамо та віднімемо 1 та використаємо результати попередніх прикладів:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+5}{x-7})^{\frac{x}{6}+1} \overset{(1^{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}(1+\frac{x+5}{x-7}-1)^{\frac{x}{6}+1} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{12}{x-7})^{\frac{x}{6}+1} = e^{\frac{12}{6}} = e^{2}$$

<u>Приклад</u> 3.2.7

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3}\right)^{1-2x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі в дужках виразу додамо та віднімемо 1 та виконаємо необхідні перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3}\right)^{1-2x} \overset{(1^{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3}-1\right)^{1-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-4}{4x^2+2x+3}\right)^{1-2x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-4}{4x^2+2x+3}\right)^{\frac{(4ч^2+2ч+3)}{(2ч-4)}\frac{(2ч-4)}{(4ч^2+2ч+3)}(1-2x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-4)(1-2x)}{4x^2+2x+3}} = e^{-1}$$

Перехід границею в показник можна було зробити, так як показникова функція неперервна.

<u>Приклад</u> 3.2.8

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{3x-1}\right)^{x}$$

Розв'язок

Очевидно в цьому випадку невизначеності не виникає, тому

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{3x-1}\right)^{x} \overset{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}\right)}{=} 0$$

<u>Приклад</u> 3.2.9

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+6}{x-1}\right)^{x}$$

Розв'язок

У цьому прикладі, так само як і у попередньому, невизначеності нема. Тому
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+6}{x-1}\right)^{x} \overset{\left(3^{+\infty}\right)}{=} +\infty$$

Приклад 3.2.10

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}} \overset{\left(1^{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{(\cos x-1)}\frac{\cos x-1}{1}\frac{1}{\sin x}} =$$
$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x}} = e^{0} = 1$$

Приклад 3.2.11

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}} \overset{\left(1^{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 3}\left(1+\frac{\sin x}{\sin 3}-1\right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to 3}\left(1+\frac{\sin x-\sin 3}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}} =$$
$$\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{\sin x-\sin 3}{\sin 3}\right)^{\frac{\sin 3}{(\sin x-\sin 3)}\frac{(\sin x-\sin 3)}{\sin 3}\frac{1}{(x-3)}} = e^{\frac{1}{\sin 3}\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin x-\sin 3}{x-3}} = e^{\frac{1}{\sin 3}\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\sin\frac{x-3}{2}\cos\frac{x+3}{2}}{x-3}} =$$
$$e^{\frac{1}{\sin 3}\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin\frac{x-3}{2}\cos\frac{x+3}{2}}{\frac{x-3}{2}}} = e^{\frac{\cos 3}{\sin 3}} = e^{tg 3}$$

Для розв'язку було використане те, що коли $x\to 3 \Rightarrow x-3\to 0$

Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 7x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 6x}{\sin 7x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg 3x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{tg 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{tg 3x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{tgx}{tg 3x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 6x}{\arcsin 5x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg 2x}{arctg 5x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 6x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - tg^2 x}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{\sin(2\pi(x+10))}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{tg\,\pi x}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2\,2x}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+)}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin(x+a)-\sin(x-a)}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+5x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x\_1}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+21x-7}{2x^2+18x+9}\right)^{2x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7}\right)^{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+5}\right)^{3x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^2+18x-15}{7x^2+11x+15}\right)^{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x+1}{x^3+2}\right)^{2x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+2x+3}{2x^2+2x+1}\right)^{3x-7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{-x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{3x^2+2x+7}\right)^{2x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+5x+7}{2x^2+5x+3}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2+3x-1}{5x^2+3x+3}\right)^{x^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+7x-1}{2x^2+3x-1}\right)^{-x^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 3x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6tgx tg3x}$$

$$\lim_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\sin 2x tg5x}}$$

$$\lim_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{ctgx}{\sin 4x}}$$

$$\lim_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 4x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{4}-x)}}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(ctg\,\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(ctg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{ctg2x}{\sin 3x}}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$$

$$\lim_{x\to 1}(3-2x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$$

3.3 Використання наслідків з важливих границь для розкриття невизначеностей при обчисленні границь

<u>Приклад</u> 3.3.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі використаємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\left[\begin{array}{l} y=5x \\ x=\dfrac{y}{5} \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{5\ln(1+y)}{y}=5\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=5$$

<u>Приклад</u> 3.3.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ використаємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\left[\begin{array}{l} y=3x \\ x=\dfrac{y}{3} \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3(e^{y}-1)}{2y}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(e^{y}-1)}{2y}=\frac{3}{2}$$

Приклад 3.3.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{4x}-1}{3x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі використаємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{4x}-1}{3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\begin{bmatrix} y=4x \\ x=\dfrac{y}{4} \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{5^y-1}{3\frac{y}{4}}=\frac{4}{3}\lim_{y\to 0}\frac{5^y-1}{y}=\frac{4}{3}\ln 5$$

Приклад 3.3.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$$

Розв'язок

Використаємо те, що коли $x\to 0$, то $\sin x\to 0$та теорему про границю складної функції:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(1+\sin x)}{\sin x\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{\sin 4x}\right)=\frac{1}{4}$$

Приклад 3.3.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(e^{3x}-1)^2}\frac{9x^2}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{9x^2}{(e^{3x}-1)^2}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{9x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{9x^2}{(e^{3x}-1)^2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{9\frac{2}{4}x^2}\right)=\frac{1}{18}$$

<u>Приклад</u> 3.3.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ доповнимо знаменник дробу до різниці квадратів

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)(1+\sqrt{x^2+1})}{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)(1+\sqrt{x^2+1})}{(1-x^2-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)(1+\sqrt{x^2+1})}{x^2}=\begin{bmatrix} y=x^2 \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)(1+\sqrt{y+1})}{y}=2$$

<u>Приклад</u> 3.3.7

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(\pi(1+\frac{x}{2}))}{\ln(x+1)}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(\pi(1+\frac{x}{2}))}{\ln(x+1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xtg(\pi+\frac{\pi x}{2})}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(x+1)}\frac{tg\pi x}{x}\right)=\pi$$

<u>Приклад</u> 3.3.8

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\ln(1+(x-1))}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))}(x+1)\right)=2$$

<u>Приклад</u> 3.3.9

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$$

Розв'язок

Для того щоб позбутися невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ винесемо в чисельнику e^{π} за дужки та в знаменнику використаємо формулу різниці синусів:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\pi}(1-e^{x-\pi})}{2\sin x\cos 4x}=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{(1-e^{x-\pi})}{(x-\pi)}\frac{(x-\pi)}{\sin x}\frac{e^{\pi}}{2\cos 4x}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} y=x-\pi \\ x=y+\pi \\ x\to\pi\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1-e^{y}}{y}\frac{y}{\sin(\pi+y)}\frac{e^{\pi}}{2\cos(4y+4\pi)}\right)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\left(\frac{1-e^{y}}{y}\frac{y}{\sin y}\frac{e^{\pi}}{2\cos 4y}\right)=-\frac{e^{\pi}}{2}$$

<u>Приклад</u> 3.3.10

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі доповнимо чисельник до різниці квадратів та використаємо границю $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$, де y = x - 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{\ln x(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1-1}{\ln x(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(\sqrt{x^2-x+1}+1)\ln(1+(x-1))}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{1}{2}$$

<u>Приклад</u> 3.3.11

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}$$

Розв'язок

Невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ розкриємо за допомогою заміни $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ та границь.

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$і $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\frac{2x}{\pi}}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+(\frac{2x}{\pi}-1))}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}=\left[\begin{array}{l} y=x-\frac{\pi}{2}\\ x=y+\frac{\pi}{2}\\ x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0\end{array}\right]=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+\frac{2y}{\pi})}{\sin\frac{5y+\frac{5\pi}{2}}{2}\cos(y+\frac{\pi}{2})}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+\frac{2y}{\pi})}{\sin(\frac{5y}{2}+\frac{\pi}{4})\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2y}{\pi}\ln(1+\frac{2y}{\pi})}{\frac{2y}{\pi}\sin(\frac{5y}{2}+\frac{\pi}{4})\sin y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+\frac{2y}{\pi})}{\frac{2y}{\pi}}\frac{\frac{2y}{\pi}}{\sin y}\frac{1}{\sin(\frac{5y}{2}+\frac{\pi}{4})}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

<u>Приклад</u> 3.3.12

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ після перетворень використаємо.

$\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=\ln a$, де $a=2$ та $y=\cos^2 x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln(1+(\sin x-1))}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x(\sin x-1)(2^{\cos^2 x}-1)}{\cos^2 x(\sin x-1)\ln(1+(\sin x-1))}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\cos^2 x}\frac{\sin x-1}{\ln(1+(\sin x-1))}\frac{1-\sin^2 x}{\sin x-1}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\cos^2 x}\frac{\sin x-1}{\ln(1+(\sin x-1))}(1+\sin x)\right)==-2\ln 2$$

<u>Приклад</u> 3.3.13

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{tg2x}-e^{-six2x}}{\sin x-1}$$

Розв'язок

Для обчислення границі скористаємося границею $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{tg2x}-e^{-six2x}}{\sin x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\sin 2x}(e^{tg2x+\sin 2x}-1)}{\sin x-1}=\begin{bmatrix} y=x-\dfrac{\pi}{2} \\ x=y+\dfrac{\pi}{2} \\ x\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{-\sin(2y+\pi)}(e^{tg(2y+\pi)}-1)}{\sin(y+\dfrac{\pi}{2})}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sin 2y}(e^{tg2y}-1)}{\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sin 2y}(e^{tg2y}-1)tg2y}{\cos y tg2y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{(e^{tg2y}-1)}{tg2y}\frac{e^{\sin 2y}tg2y}{\cos y}\right)=0$$

Приклад 3.3.14

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ використаємо границю $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\begin{bmatrix} y=x-\dfrac{1}{2} \\ x=y+\dfrac{1}{2} \\ x\to\dfrac{1}{2}\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(4y+1)}{\sqrt{1-\cos(\pi y+\dfrac{\pi}{2})}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(4y+1)}{\sqrt{1+\sin\pi y}-1}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(4y+1)(\sqrt{1+\sin\pi y}+1)}{(\sqrt{1+\sin\pi y}-1)(\sqrt{1+\sin\pi y}+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(4y+1)(\sqrt{1+\sin\pi y}+1)}{\sin\pi y}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{4\pi y\ln(4y+1)(\sqrt{1+\sin\pi y}+1)}{4\pi y\sin\pi y}=\lim_{y\to 0}\frac{\pi y}{\sin\pi y}\frac{\ln(4y+1)}{4y}\frac{4(\sqrt{1+\sin\pi y}+1)}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

Приклад 3.3.15

$$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin\frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$$

Розв'язок

Для обчислення границі після відповідних перетворень використаємо границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin\frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\begin{bmatrix} y=x+2 \\ x=y-2 \\ x\to -2\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin\frac{y}{2}}{3^{\sqrt{y+y^2-4y^2+4}}-9}=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin\frac{y}{2}}{3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{2}(\sqrt{y^2-3y+4}-2)\arcsin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}(3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1)(\sqrt{y^2-3y+4}-2)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)}{(3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1)}\frac{\arcsin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\frac{\frac{y}{2}}{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)}{(3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1)}\frac{\arcsin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\frac{\frac{y}{2}(\sqrt{y^2-3y+4}+2)}{(\sqrt{y^2-3y+4}-2)(\sqrt{y^2-3y+4}+2)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{\frac{3^{\sqrt{y^2-3y^2+4-2}}-1}{\sqrt{y^2-3y+4}-2}}\frac{\arcsin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\frac{(\frac{y}{2}(\sqrt{y^2-3y+4}+2))}{y(y-3)}\right)==-\frac{4}{3\ln 3}$$

<u>Приклад</u> 3.3.16

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ спочатку зробимо заміну змінної, поклавши $y = x - \pi$, потім виконаємо перетворення за допомогою формул тригонометрії та використаємо границі $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ і $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin ay}{\sin by} = \frac{a}{b}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \begin{bmatrix} y = x-\pi \\ x = y+\pi \\ x\to\pi \Rightarrow y\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln\cos(2y+2\pi)}{\ln\cos(4y+4\pi)} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln\cos 2y}{\ln\cos 4y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+(\cos 2y-1))}{\ln(1+(\cos 4y-1))} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+(\cos 2y-1))}{\ln(1+(\cos 4y-1))}\frac{(\cos 4y-1)(\cos 2y-1)}{(\cos 4y-1)(\cos 2y-1)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\dfrac{\ln(1+(\cos 2y-1))}{\cos 2y-1}}{\dfrac{\ln(1+(\cos 4y-1))}{\cos 4y-1}}\frac{1-\cos 2y}{1-\cos 4y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\dfrac{\ln(1+(\cos 2y-1))}{\cos 2y-1}}{\dfrac{\ln(1+(\cos 4y-1))}{\cos 4y-1}}\frac{2\sin^2 y}{2\sin^2 2y}\right) = \frac{1}{4}$$

<u>Приклад</u> 3.3.17

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-5^{3x}}{2x - arctg 3x}$$

Розв'язок

Для обчислення границі в чисельнику дробу додамо та віднімемо 1, виконаємо перетворення виразу і використаємо границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ та $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-arctg3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-5^{3x}}{2x(1-\frac{arctg3x}{2x})}=\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-1+1-5^{3x}}{2x(1-\frac{arctg3x}{2x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{7^{2x}-1}{2x(1-\frac{arctg3x}{2x})}-\frac{5^{3x}-1}{2x(1-\frac{arctg3x}{2x})}\right)=\frac{1}{1-\frac{3}{2}}\ln 7-\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}}\ln 5=$$

$$=-2\ln 7+3\ln 5=3\ln 5-2\ln 7=\ln\frac{125}{49}$$

<u>Приклад</u> 3.3.18

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$$

Розв'язок

Обчислимо дану границю за допомогою перетворень та границь $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1, \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin x}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}(e^{5x}-1)}{\sin x(\frac{2\arcsin x}{\sin x}-1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{5x}-1)}{5x}\frac{5x}{\sin x}\frac{e^{-2x}}{(\frac{2\arcsin x}{\sin x}-1)}\right)=5$$

<u>Приклад</u> 3.3.19

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{2x}-1)}{2x}\frac{x}{\sin x}\frac{2e^{-x}}{\sin x}\right)=\infty$$

<u>Приклад</u> 3.3.20

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\ln tgx}$$

Розв'язок

Невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$розкриємо за допомогою границі $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$, яку застосуємо після перетворень функції:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\ln tgx}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\ln(1+(tgx-1))}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\ln(1+(tgx-1))}\frac{tgx-1}{tgx-1}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{tgx-1}{\ln(1+(tgx-1))}\frac{\sin x-\cos x}{tgx-1}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{tgx-1}{\ln(1+(tgx-1))}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{tgx-1}{\ln(1+(tgx-1))}\cos x\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>**Приклад**</u> **3.3.21**

$$\lim_{x\to o}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(1^{\infty}\right)$ перетворимо дану функцію так, щоб можна було застосувати границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ після чого використаємо границі $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$ та $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin ay}{\sin by}=\frac{a}{b}$

$$\lim_{x\to o}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}\overset{\left(1^{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to o}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}\frac{\sin^2 3x}{\ln\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln(1+(\cos x-1))}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(\cos x-1)}{\ln(1+(\cos x-1))}\frac{\sin^2 3x}{(\cos x-1)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(\cos x-1)}{\ln(1+(\cos x-1))}\frac{\sin^2 3x}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\right)}=e^{-18}$$

<u>**Приклад**</u> **3.3.22**

$$\lim_{x\to o}(1-\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{\ln(1+tg^2 3x)}}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\lim_{x\to o}(1-\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{\ln(1+tg^2 3x)}} \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{x\to o}(1-\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\ln(1+tg^2 3x)}} = e^{\lim\limits_{x\to -}\frac{\sin^2\frac{x}{2}tg^2 3x}{tg^2 3x\ln(1+tg^2 3x)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{tg^2 3x}{\ln(1+tg^2 3x)}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{tg^2 3x})} = e^{\frac{1}{36}}$$

Приклад 3.3.23

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$$

Розв'язок

Очевидно що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2$ тому в цьому прикладі невизначеності немає і за теоремою про границю складної функції маємо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} \overset{(2^1)}{=} 2$$

Приклад 3.3.24

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\frac{\pi}{4}+x)}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу. Так як $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=3$, то

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\frac{\pi}{4}+x)} \overset{\left(3^{\cos\frac{\pi}{4}}\right)}{=} 3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$$

<u>Приклад</u> 3.3.25

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$$

Розв'язок

У даному прикладі невизначеності немає, тому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3} \overset{\left(2^3\right)}{=} 8$$

<u>Приклад</u> 3.3.26

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{\frac{x}{x+2}}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{\frac{x}{x+2}} \overset{\left((\frac{1}{6})^0\right)}{=} 1$$

<u>Приклад</u> 3.3.27

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$$

Розв'язок

Для розкриття невизначеності $\left(1^{\infty}\right)$ перетворимо дану функцію так, щоб можна було застосувати границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ після чого використаємо границю $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=1$:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}\overset{\left(1^{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 1}(1+(1-x))^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(1+(1-x))}}=\lim_{x\to 1}(1+(1-x))^{\frac{(1-x)}{(1-x)}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(1+(1-x))}}=$$

$$+e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln(1+(1-x))}\sin\frac{\pi x}{2}}=e^{\sin\frac{\pi}{2}}=e$$

Приклад 3.3.28

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку попереднього прикладу

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}\overset{\left(1^{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x+1}{2x}-1\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1-x}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}\frac{1-x}{2x}\frac{2x}{1-x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\ln(x+2)}{2x\ln(2-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x))\ln((x+2)}{2x\ln(1+(1-x))}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1-x}{\ln(1+(1-x))}\frac{\ln((x+2)}{2x})}=e^{\frac{\ln 3}{2}}=\sqrt{3}$$

Приклад 3.3.29

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$$

Розв'язок

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}\overset{(1^{\infty})}{=}\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)\ln(x+1)}{x\ln(1+(1-x))}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{(1-x)}{\ln(1+(1-x))}\frac{\ln(x+1)}{x}\right)}=e^{\ln 2}=2$$

<u>Приклад</u> 3.3.30

$$\lim_{x\to e}\left(\frac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi}{2e}x}$$

Розв'язок

Розв'язок цього прикладу аналогічний розв'язку двох попередніх прикладів:

$$\lim_{x\to e}\left(\frac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi}{2e}x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\begin{bmatrix} y=x-e \\ x=y+e \\ x\to e\Rightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to0}\left(\frac{\ln(e+y)}{y}\right)^{\sin\frac{\pi(y+e)}{2e}}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{\ln(e(1+\frac{y}{e}))}{e\frac{y}{e}}\right)^{\sin\frac{\pi(y+e)}{2e}}=\lim_{y\to0}\left(\frac{1+\ln(1+\frac{y}{e}))}{e\frac{y}{e}}\right)^{\sin\frac{\pi(y+e)}{2e}}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{1}{y}+\frac{\ln(1+\frac{y}{e}))}{e\frac{y}{e}}\right)^{\sin\frac{\pi(y+e)}{2e}}=\infty$$

3.4 Приклади для самостійного розв'язування:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{tgx-tg2}{\sin\ln(x-1)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{tg\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+4}}$$

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin 2x}-e^{tg2x}}{\ln\frac{2x}{\pi}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-5^{3x}}{arctgx+x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{arctgx-x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(5-\frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{\frac{1}{tg^2 x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{4+x}\right)^{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg\,4x}{x}\right)^{x+2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{tg^2 x}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$$

$$\lim_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{51}{tg5x\sin 2x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6tgxtg3x}$$

Список літератури

1. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 1981 – 543 с.

2. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966 – 319 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1. – М.: Наука, 1966 – 607 с.

4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1984 – 592 с.

5. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966 – 460 с.

6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1984 – 416 с.

7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 9-е вид. – М.: Наука, 1977 – 527 с.

8. Гунтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. – М. : Гостехиздат, 1949 – 224 с.

Зміст