

Міністерство освіти і науки України
Південноукраїнський національний педагогічний університет

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Райлян Анастасія Андріївна

УДК 519.177

ДИСЕРТАЦІЯ

**«Обернена задача знаходження форми графу та
узагальнення теореми Амбарцумяна»**

111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело.

Науковий керівник:

**Пивоварчик Вячеслав
Миколайович**

доктор фізико-математичних
наук, професор

Одеса – 2024

Аннотація

Райлян (Чернишенко) А.А. Оборнена задача знаходження форми графу та узагальнення теореми Амбарцумяна. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. - ДЗ "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського". Міністерство освіти і науки України, Одеса, 2024.

Дисертаційна робота присвячена прямим та оберненим спектральним задачам, які виникають при розгляді квантовомеханічних систем на метричних графах. Такі задачі описують, наприклад, рух квантовомеханічної частинки у тонкому хвильоводі, що має форму графу. З точки зору математики йдеться про задачі, породжені диференціальними рівняннями квантової механіки, що задані на метричних графах.

Дисертаційна робота складається з п'яти розділів, перший з яких є вступ, висновків до кожного розділу і загальних висновків, та списку використаних джерел, що містить 91 найменування. У вступі визначено об'єкт і предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовано мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, практичну значимість, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У другому розділі коротко описана історія обернених спектральних задач Штурма-Ліувілля на інтервалі, на зірковому графі, на довільному метричному дереві і на простому звязному графі. Зазначено, що існують дві постановки обернених задач на графах. В першій постановці даними є форма графу та спектр або спектри задач Штурма-Ліувілля на цьому графі, треба знайти потенціали на ребрах. У другій постановці оберненої задачі відомий спектр (або спектри), а треба знайти форму графу. В даній дисертаційній роботі розглянуті обернені задачі у першій постановці (розділ 3) та у другій постановці (розділ 4, розділ 5).

У третьому розділі розв'язана, по-перше, пряма задача з трьома спектрами, яку можна розглядати як задачу на графі P_3 . Це задача про взаємне розташування власних значень задачі Штурма-Ліувілля на інтервалі з умовою Неймана на одному кінці та умовою Діріхле на другому кінці та власних значень задач, породженим тим же рівнянням Штурма-Ліувілля на лівій половині цього інтервалу та на правій половині цього інтервалу. Доведено, що власні значення задачі на всьому інтервалі чергуються з елементами об'єднання спектрів задач на половинах інтервалу.

Також, в цьому розділі розв'язана обернена задача за трьома спектрами, тобто задача відновлення потенціалу рівняння Штурма-Ліувілля, виходячи з відомих спектра задачі Штурма-Ліувілля на цьому інтервалі та спектрів задач на половинах цього інтервалу. Доведено, що якщо власні значення задачі на всьому інтервалі чергуються з елементами об'єднання спектрів задач на половинах цього інтервалу у строгому сенсі, то розв'язок такої оберненої задачі єдиний.

Розглянуто особливий випадок, в якому для знаходження потенціалу достатньо знати не три вищезгадані спектри, а тільки два та одне власне значення з третього. Цей випадок є аналогом ситуації в якій справедлива класична теорема Амбарцумяна.

У четвертому та п'ятому розділах розглянуті задачі відновлення форми графів, виходячи зі спектрів крайових задач. У четвертому розділі розглянута спектральна задача, породжена рівняннями Штурма-Ліувілля на простих зв'язних рівнобічних метричних графах зі стандартними умовами у вершинах. Під стандартними умовами маємо крайові умови Неймана на висячих вершинах та умови неперервності та Кірхгофа у внутрішніх вершинах. Знайдені асимптотичні формули для власних значень таких задач, причому показано, що в той час, як головний член асимптотики, добре відомий, як вейлівський (див. рівняння (4.11) нижче), залежить тільки від довжини ребра та кількості ребер, другі члени асимптотики є різними для різних підпоследовностей спектра. Коефіцієнти при других членах асимптотики, як це доведено в роботі, взаємнооднозначно пов'язані з власними

значеннями нормованого Лапласіану цього графу і не залежать від потенціалів на ребрах графу (мається на увазі, що ці потенціали є дійсними L_2 -функціями). Це означає, що отримані з експерименту другі коефіцієнти у підпоследовностях, з яких складається спектр, дають можливість знайти власне значення дискретного Лапласіану графа. Далі задача звелася до проблеми відновлення форми графа, виходячи з власних значень дискретного Лапласіану (та відомої кількості ребер графу, яку можна знайти з вейлівської формули для першого члена). Розглянуто всі прості зв'язні графи кількість вершин у яких не перевищує п'яти. Знайдено визначники їх нормованих Лапласіанів і порівняно між собою ті з них, котрі мають однакову кількість ребер. Виявилось, що всі вони різні. Це означає, що серед простих зв'язних рівнобічних графів з кількістю вершин не більше п'яти немає коспектральних. Тут, під коспектральними маються на увазі неізоморфні графи з однаковим спектром задачі Штурма-Ліувілля зі стандартними умовами у вершинах. Відомо, що існує пара коспектральних графів з шістьма вершинами. Отже, отриманий результат не можна поширити на графи з кількістю вершин більше п'яти. Окремо розглянуто випадок дерев. Для рівнобічних дерев доведено, що, якщо кількість вершин не перевищує восьми, то визначники всіх дискретних Лапласіанів різні, тобто не існує коспектральних у нашому сенсі графів серед рівнобічних дерев з кількістю вершин ≤ 8 . Відомо, що існує пара коспектральних графів з дев'ятьма вершинами. Отже, нащ результат не можна поширити на випадок дерев з кількістю вершин більше восьми. Для знаходження форми графу виходячи з визначника дискретного Лапласіану слід скористатися тим, що графам зображеним на рисунку 3 відповідають характеристичні многочлени, тобто визначники дискретних Лапласіанів наведені на сторінках 47-48. Деревам, зображеним на рисунках 4 та 5 відповідають характеристичні многочлени, представлені на сторінках 48-50. Таким чином, обернена задача відновлення форми простого зв'язного рівнобічного графу, виходячи зі спектру задачі Штурма-Ліувілля на цьому графі з стандартними умовами у вершинах має єдиний розв'язок, якщо кількість вершин у графі не

перевищує п'яти. Обернена задача відновлення форми рівнобічного дерева, виходячи зі спектру задачі Штурма-Ліувілля на цьому дереві з стандартними умовами у вершинах має єдиний розв'язок, якщо кількість вершин у графі не перевищує восьми.

У п'ятому розділі розглянута обернена задача знаходження форми графу, виходячи зі спектру задачі, породженої рівнянням Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі зі стандартними умовами на внутрішніх вершинах і умовами Діріхле на висячих вершинах. Показано, що в деяких випадках (це залежить від форми графу) спектр однозначно визначає форму графу, але, як показано на прикладах, в інших випадках це не відбувається, тобто існують коспектральні графи.

Abstract

Railian (Chernyshenko) A.A. Inverse problem of recovering the shape of a graph and generalizations of Ambarzuvian's theorem. Qualifying work on the right of a manuscript. Thesis for a degree of Doctor of Philosophy in specialty 111 Mathematics. South - Ukrainian national pedagogical university named after K.D. Ushinsky. Ministry of Education and Science of Ukraine, Odesa, 2024. The thesis is devoted to direct and inverse spectral problems which occur when quantum mechanical problems are considered on metric graphs. Such problems describe a quantum particle motion in a thin waveguide. From mathematical point of view these are problems generated by differential equations of quantum mechanics defined on metric graphs. In the introduction the object, the subject and the subject-matter of the investigation are described, relevance of the topic and its novelty are proved, practical importance is shown. The approbation is described and the structure and the main content are given. In Section 2 a brief history of direct and inverse spectral Sturm-Liouville problems on an interval, on a star graph, on an arbitrary tree and on a simple connected metric graph is presented. There exist two settings of inverse problem on a graph. In the first setting the shape of a graph is given as well as the spectrum of a spectral problem or spectra of spectral problems and it necessary to find the potentials on the edges. In the second setting of inverse problem on graphs the spectrum (or spectra) is given, we need to find the shape of the graph. In the third section the first setting of the inverse problem is considered while in the fourth and in the fifth – the second.

In the third section first of all the direct three spectra problem is considered which is a problem on the P_3 graph. This is the problem of mutual arrangement of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem on an interval with the Neumann condition at one of the ends and the Dirichlet condition at the other end, the eigenvalues of the Sturm-Liouville problems on the left half and on the right half of the interval. It is proved that the eigenvalues of the problem on the whole interval interlace with the elements of the union of

the sets of eigenvalues of the problems on the parts of the interval. The three spectra inverse problem is considered in this section also. This is the problem of recovering the potential of the Sturm-Liouville equation using the spectrum of the problem on the whole interval and the spectra of the problems on the left and the right halves of the interval. It is proved that if the eigenvalues of the problem on the whole interval strictly interlace with the elements of the union of the spectra of the problems on the halves of the interval then the solution of the three spectra inverse problem is unique. A special case is considered in which not three but two spectra and one eigenvalue of the third spectrum uniquely determine the potential. This case is an analogue of the situation where Ambarzumian's theorem is true.

In the fourth and fifth sections problems of recovering the shape of graphs using the spectra of boundary value problems are considered. In the fourth section the Sturm-Liouville problem on simple connected equilateral metric graphs is considered with the standard conditions at the vertices. By standard the Neumann conditions at the pendant vertices and Kirchhoff's and continuity conditions at the interior vertices are meant. Asymptotic formulae for the eigenvalues of such problems are obtained. It is shown that the main term of these asymptotics known as Weyl's term (see equation (4.11)) depends only on the number of edges and on the length of an edge. The second term of the asymptotics is different for different subsequences of the spectrum. It is proved that the coefficients in the second terms are in one-to-one correspondence with the eigenvalues of the normalized Laplacian of the graph and does not depend on the potentials on the edges (it is assumed that these potentials are real and belong to $L_2(0, l)$). Thus, the coefficients of the second terms in asymptotics of the spectrum subsequences enable to find eigenvalues of the normalized Laplacian. Then the problem is reduced to the problem of recovering the shape of a graph using eigenvalues of the normalized Laplacian (and the number of edges which can be obtained from the Weyl's formula for the first term of the asymptotics). For all the simple connected graphs with the number of vertices not exceeding five the determinants of the normalized Laplacians are found.

Those of them which has the same number of edges are compared. It appeared that all of them are different. This means that there are no cospectral among simple connected equilateral graphs with the number of vertices less or equal five. By cospectral we mean nonisomorphic graphs with the same spectra of the Sturm-Liouville problem with the standard conditions at the vertices. It is known that there exists a pair of cospectral graphs on six vertices. Thus, this result can't be extended to the case of more than five vertices. The case of trees is considered separately. It is proved that if the number of the vertices in equilateral trees does not exceed eight then the determinants of the normalized Laplacians are different and therefore there are no cospectral in our sense equilateral trees with the number of vertices not exceeding eight. It is known that there exists a pair of cospectral trees on nine vertices. Thus, this result can't be extended to the case of trees of more than eight vertices. To find the shape of a graph using the normalized Laplacian determinant one should use the fact that graphs of Fig. 3 of the thesis are in one-to-one correspondence with the characteristic polynomials, i.e. determinants of the normalized Laplacians given at pages 47-48. The trees shown at Fig. 4 and 5 are in one-to-one correspondence with the characteristic polynomials given at pages 48-50. Thus, the inverse problem of recovering the shape of a simple connected equilateral graph using the spectrum of the Sturm-Liouville problem on this graph with the standard conditions at the vertices possesses a unique solution if the number of the vertices does not exceed five. The inverse problem of recovering the shape of an equilateral tree using the spectrum of the Sturm-Liouville problem on this graph with the standard conditions at the vertices possesses a unique solution if the number of the vertices does not exceed eight. In the fifth section the problem of recovering the shape of a simple connected graph using the spectrum of the Sturm-Liouville problem on this graph with standard conditions at the interior vertices and the Dirichlet conditions at the pendant vertices is considered. It is shown that in some cases (it depend on the shape of the graph) the spectrum uniquely determines the shape of the graph but in other cases there exist cospectral graphs.

Зміст

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Вступ | 11 |
| 2 | Історія обернених задач Штурма - Ліувілля | 14 |
| 2.1 | Висновки до розділу 2 | 20 |
| 3 | Задача з трьома спектрами | 21 |
| 3.1 | Постановка задачі | 21 |
| 3.2 | Пряма задача з трьома спектрами | 23 |
| 3.3 | Обернена задача за трьома спектрами | 29 |
| 3.4 | Випадок Амбарцумяна | 35 |
| 3.5 | Висновки до розділу 3 | 37 |
| 4 | Геометричні задачі теорії квантових графів | 38 |
| 4.1 | Історія питання | 38 |
| 4.2 | Постановка задачі | 40 |
| 4.3 | Співвідношення між неперервним і дискретним лапласіанами | 41 |
| 4.4 | Асимптотика власних значень для простих зв'язних графів, що не є деревами | 43 |
| 4.5 | Асимптотика власних значень для випадку дерев | 45 |
| 4.6 | Обернена задача | 46 |
| 4.7 | "Геометрична"теорема Амбарцумяна | 51 |
| 4.8 | Висновки до розділу 4 | 54 |
| 5 | Спектральні задачі з різними умовами на висячих верши- нах | 55 |
| 5.1 | Історія | 55 |
| 5.2 | Постановка задач | 58 |
| 5.3 | Допоміжні результати | 59 |
| 5.4 | Спектральна задача у випадку умов Неймана на висячих вер- шинах графа | 61 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.5 | Спектральна задача з крайовими умовами Діріхле на висячих вершинах | 76 |
| 5.6 | Висновки до розділу 5 | 83 |
| 6 | Загальні висновки | 84 |
| | Література | 86 |

РОЗДІЛ 1

1 Вступ

Актуальність теми. Теорія квантових графів, тобто спектральна теорія диференціальних рівнянь квантової механіки, заданих на класі одновимірних областях (метричних графах) останнім часом перетворилась на окремих розділ математичної фізики, який швидко розвивається. Підтвердженням цього є публікація великої кількості статей і таких монографій, як [6], [52]. Особливе місце в цій спектральній теорії займають обернені задачі, тобто задачі відновлення рівнянь квантової механіки або крайових умов, або форми графу виходячи з відомого спектру або спектрів крайових задач на цьому графі. У випадку некомпактного графу замість спектру використовують так звану S-функцію, яка може бути знайдена використовуючи данні розсієння з експерименту.

Таким чином, оскільки, рівняння квантової механіки на графах є актуальними у дизайні квантових мікросхем, а також у теорії синтезу електричних ланцюгів тема дисертації є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема затвержена на засіданні вченої ради університету Ушинського від 21.10.2021, протокол 4. Дисертаційне дослідження виконано відповідно до плану науково-дослідної роботи кафедри вищої математики і статистики фізико-математичного факультету Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського" та здійснено в межах науково-дослідної роботи за темами

1. "Скінченновимірна та нескінченновимірна теорія операторів та операторних зв'язок на графах". Державний реєстраційний номер 01119U002030 (2018-2023)

2. "Обернені задачі у теорії квантових графів". Державний реєстраційний номер 0124U000180 (2024-2028)

3. "Обернені задачі знаходження форми графів за спектральними да-

ними". Державний реєстраційний номер: 0124U000818, 2024-2026

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є розв'язання геометричної оберненої задачі, тобто задачі відновлення форми графу, виходячи зі спектру крайової задачі на цьому графі, а також з'ясування чи є розв'язок цієї задачі єдиним. У випадку, коли розв'язок не є єдиним, цілком було знаходження коспектральних графів.

Методи дослідження. У роботі були знайдені і використані асимптотичні формули для власних значень спектральної задачі Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному метричному графі, а також такі формули для випадку дерева.

Був використаний зв'язок між коефіцієнтами у других членах асимптотичних розвинень власних значень спектральної задачі Штурма-Ліувілля на рівнобічному графі з власними значеннями дискретного лапласіану відповідного комбінаторного графу.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані в дисертації наукові результати є новими. Хоча задача Штурма - Ліувілля за трьома спектрами розглядалася раніше [72], [36], але з іншими крайовими умовами. Випадок Амбарцумяна в оберненій задачі за трьома спектрами раніше не розглядався.

Результати відносно єдиності розв'язку геометричної спектральної задачі Штурма-Ліувілля на графі раніше були відомі тільки для випадку графу P_2 , тобто для графу, що є сегментом з двома вершинами.

Практичне значення одержаних результатів. Ця дисертаційна робота має теоретичний характер, тому її результати становлять інтерес у галузі математичної фізики, диференціальних рівнянь та їх застосувань. Також ці результати можуть бути використані у дизайні квантових мікросхем та теорії синтезу електричних ланцюгів.

Ключові слова. Обернена задача, граф, дерево, коспектральний, рівняння Штурма-Ліувілля, метричний граф, висяча вершина, ребро, потенціал, власні значення, спектр, крайова умова Діріхле, крайова умова Неймана, корінь, матриця суміжності, головна підматриця, нормований лапла-

сіан, початкова задача, степінь вершини, асимптотика, характеристична функція, оператор Штурма-Ліувілля, пряма задача.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно. Постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику В.М. Пивоварчику.

Апробація результатів дисертації. Основні положення, висновки і результати дисертаційного дослідження обговорювалися та отримали позитивну оцінку та були також представлені на всеукраїнських математичних конференціях:

1. Міжнародна конференція молодих математиків 1–3 червня 2023 Інститут математики НАН України, Київ, Україна, "Про обернену задачу трьох спектрів і теорему Амбарцумяна".

2. AGMA(Algebraic and geometric methods of analysis) may 29 - June 1, 2023 Одеса "Знаходження форми квантових графів за умов Діріхле на висячих вершинах".

А.А. Райлян постійно приймає участь у роботі міжнародного наукового семінару кафедри «Quantum Graphs and Related Topics», де успішно презентувала деякі результати своєї дисертації.

Публікації. Основні положення дисертаційного дослідження викладені у 3 наукових працях, які індексуються у наукометричних базах даних Scopus (див. [23], [24], [25], де [25] - переклад статті [91]).

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з п'яти розділів, перший з яких є вступом, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел, що містить 91 найменування. Загальний обсяг тексту дисертації - 94.

РОЗДІЛ 2

2 Історія обернених задач Штурма - Ліувілля

Історія обернених задач Штурма-Ліувілля починається зі статті Амбарцумяна [1] де була розглянута наступна спектральна задача на скінченному інтервалі довжини l ,

$$-y'' + q(x) = zy, \quad (2.1)$$

,

$$y'(0) = y'(l) = 0, \quad (2.2)$$

тут z спектральний параметр.

В.А. Амбарцумян розглядав цю задачу за умови, що q є неперервною дійсною функцією на сегменті $[0, l]$. Вочевидь, якщо $q(x) \equiv 0$, то власні значення цієї задачі становлять нескінченну послідовність $0, \frac{\pi^2}{l^2}, \frac{4\pi^2}{l^2}, \dots, \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \dots$. Амбарцумян поставив питання: якщо спектр задачі (2.1), (2.2) незбурений, тобто складається з власних значень $0, \frac{\pi^2}{l^2}, \frac{4\pi^2}{l^2}, \dots, \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \dots$, то чи можна вважати, що $q(x) \equiv 0$. Ним була сформульована наступна теорема

Теорема 2.1 *Якщо спектр задачі (2.1), (2.2) має вигляд $\{\frac{\pi^2(n-1)^2}{l^2}\}_{n \in N}$, де $N = 1, 2, 3, \dots$, то $q(x) \equiv 0$.*

Строге доведення цієї теореми було дано у статті Борга [9]. В цих статтях було доведено, що випадок спектральної задачі Штурма-Ліувілля, розглянутої Амбарцумяном, в якому спектр задачі однозначно визначає потенціал (тобто функцію $q(x)$) задачі Штурма-Ліувілля, є виключенням. Якщо змінити хоча б одну з умов (2.2), або взяти потенціал $q(x) \not\equiv 0$, то спектр не визначає потенціал однозначно. Для однозначного визначення потенціалу потрібні два спектра. Наприклад, спектри задач

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad (2.3)$$

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (2.4)$$

та

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad (2.5)$$

$$y(0) = y'(l) = 0. \quad (2.6)$$

Умови $y(0) = 0$ та $y(l) = 0$ називають умовами Діріхле, а $y'(l) = 0$ умовою Неймана. Саме ці дві задач розглянуті у монографії В.А. Марченка [61]. Борґ довів єдиність потенціалу, що відповідає спектрам двох задач, але не запропонував методу відновлення потенціалу виходячи зі спектрів цих двох задач. Спосіб відновлення потенціалу був запропонований пізніше належить видатному українському математику, академіку В.А. Марченко. Цей метод викладений у його вищезгаданій монографії [61]

Було багато публікацій присвячених узагальненню цього методу, дивись, наприклад [40], [60]. У деякому сенсі узагальненням цієї теорії було також розв'язання оберненої задачі Штурма-Ліувілля за трьома спектрами [72], [36].

Ця задача формулювалась наступним чином. Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля на сегменті довжини l

$$-y'' + q(x) = zy, \quad (2.7)$$

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (2.8)$$

і дві задачі на частинах сегменту $[0, l]$

$$-y'' + q(x) = zy, \quad (2.9)$$

$$y(0) = y\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (2.10)$$

$$-y'' + q(x) = zy, \quad (2.11)$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y(l) = 0, \quad (2.12)$$

породжені спільним потенціалом $q(x)$, котрий є дійсною функцією з простору $L_2(0, l)$. Спектри цих задач позначимо через $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^\infty$, $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^\infty$, відповідно. Пряма задача за трьома спектрами полягає в знаходженні взаємозв'язку між цими трьома спектрами. Такий зв'язок має існувати, тому що ці три задачі породжені спільним потенціалом $q(x)$. Як виявилось [72], цей зв'язок полягає у нестрогому чергуванні елементів послідовності $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ з елементами послідовності $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty = \{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^\infty \cup \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^\infty$. Ми ну-меруємо елементи послідовності $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ у неспадаючому порядку.

Обернена задача за трьома спектрами полягає у відновленні потенціалу $q(x)$, виходячи з трьох спектрів $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^\infty$, $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^\infty$. У [72] був знайдений метод відновлення потенціалу $q(x)$, який включав в себе класичні результати по оберненій задачі Штурма-Ліувілля В. А. Марченка [61]. Відмітимо, що задача за трьома спектрами тісно пов'язана з так званою задачею Хохштадта-Лібермана. Задача Хохштадта-Лібермана формулюється наступним чином: відомий спектр задачі

$$-y'' + q(x) = zy, \quad (2.13)$$

$$-y'(0) + hy(0) = y'(l) + Hy(l) = 0 \quad (2.14)$$

(або задачі (2.3), (2.4)) та потенціал $q(x)$ на сегменті $[0, \frac{l}{2}]$. Треба знайти потенціал $q(x)$ на сегменті $[\frac{l}{2}, l]$. Крайові умови (2.14) називають умовами Робена. Саме такі умови розглядалися у статті [43]. Але можна розглядати таку задачу і з іншими крайовими умовами [63].

Відзначимо, що задачу за трьома спектрами можна розглядати як задачу на метричному графі P_3 , тобто простому зв'язному графі, що має три вершини та два ребра.

У дисертації розглянута задача за трьома спектрами з крайовими умовами, котрі відрізняються від умов (2.8), (2.10), (2.12), а саме на лівому кінці та у центральній точці накладені умова Неймана замість умов Діріхле. Доведено, що у цьому випадку достатньою інформацією для відновлення потенціалу є відповідні три спектри без одного власного значення. Також розглянутий аналог випадку Амбарцумяна, де, як виявилось "півтора" спектри є достатньою інформацією.

У класичній теорії графів обернена задача виникла у зв'язку з існуванням у 50-ті роки минулого сторіччя гіпотези про те що спектр матриці суміжності однозначно визначає форму класичного графу [26]. Але дуже швидко виявилось, що ця гіпотеза не є вірною, тобто були знайдені так звані коспектральні (ізоспектральні) графи.

У класичній теорії графів коспектральними вважають неізоморфні графи з однаковим спектром матриці суміжності (див. [28], Розділ 6.1). У [26] був наведений перший приклад коспектральних графів (див. рис. 1)

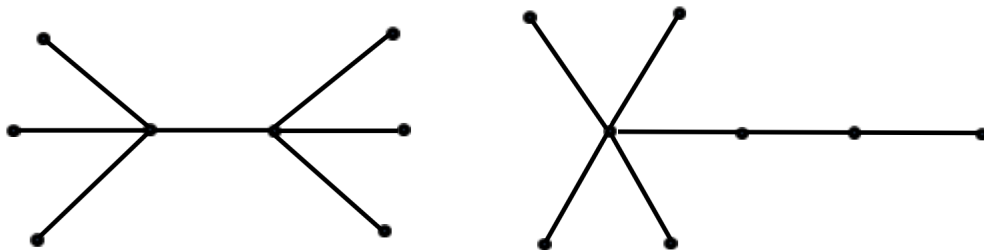


Рис. 1: Неізоморфні графи з однаковими спектрами матриці суміжності.

У багатьох випадках (у теорії квантових графів) більш важливу роль ніж матриця суміжності відіграє дискретний лапласіан. Існують різні означення дискретного лапласіана, котрий ще називають нормованим лапласіаном (див. [33], С.2). Ми розуміємо під дискретним лапласіаном матрицю $D^{-1/2}AD^{-1/2}$, де A - матриця суміжності графа, а $D = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$ - матриця степенів вершин, $d(v_j)$ - степінь вершини v_j . Це означення відрізняється від того, яке дано в [33] зсувом спектрального параметра $\lambda \rightarrow \lambda + 1$. Незважаючи на те, що спектри матриць

суміжності графів, зображених на Рис. 1 співпадають, спектри дискретних лапласіанів цих графів - різні: вони є множинами коренів многочленів $16z^8 - 25z^6 + 9z^4$ та $20z^8 - 33z^6 + 13z^4$, відповідно.

У теорії квантових графів розглядають спектральні задачі, породжені рівняннями Штурма-Ліувілля на рівнобічних (метричних графах, з ребрами однакової довжини) з крайовими умовами Неймана або Діріхле на висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана (стандартними умовами, тобто умовами неперервності і Кірхгофа) у внутрішніх вершинах. Тут також виникає проблема коспектральності.

У [5] було показано, що існують коспектральні графи (неізометричні графи з однаковим спектром задачі Штурма-Ліувілля зі стандартними умовами у вершинах) у квантовій теорії графів. Приклад двох коспектральних неізоморфних рівнобічних графів роботи [5] показаний на рис. 2.

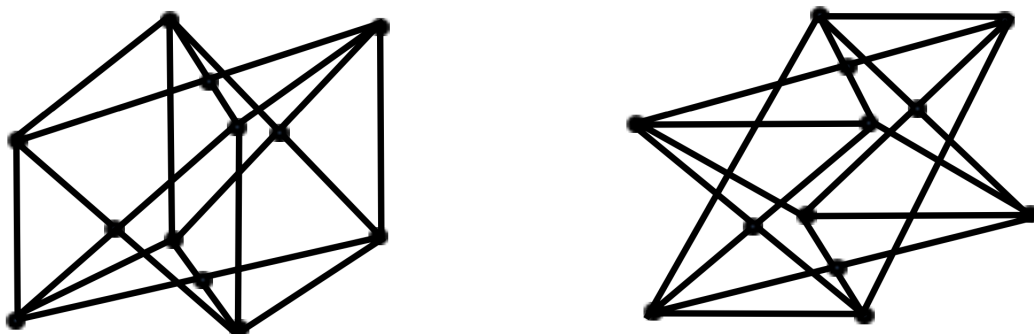


Рис. 2: Неізоморфні графи з однаковими спектрами дискретного лапласіана і однаковими спектрами задачі Штурма-Ліувілля.

Слід зауважити, що у випадку графа з несумірними довжинами ребер спектр однозначно визначає форму графа [38]. Відмітимо, що графи рисунку 2 - регулярні (тобто всі їх вершини мають однаковий степінь) і мають однакову кількість ребер. Не важко впевнитись, що два неізоморфні регулярні графи з нульовими потенціалами на ребрах з однаковою кількістю вершин мають однаковий спектр дискретного лапласіана тоді і тільки то-

ді, коли вони мають однаковий спектр матриці суміжності. Але це вірно тільки для регулярних графів.

Спектр задачі теорії квантових графів зв'язаний з дискретним лапласіаном відповідного комбінаторного графа наступним чином: власні значення дискретного лапласіана взаємно однозначно пов'язані з другими членами асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля з узагальненими умовами Неймана на вершинах цього графа (див. [23], де використані результати [19], [30] та [17]). Це дає змогу отримати інформацію про форму графа користуючись асимптотикою власних значень.

У роботах [73], [74] була розглянута обернена задача на зірковому рівнобічному графів в іншій постановці: форма графу вважалася відомою, а треба було знайти потенціали рівнянь Штурма-Ліувілля на ребрах. В якості даних задачі були використані спектр задачі на цьому графі з умовами Діріхле на висячих вершинах та умовами неперервності та Кіргофа в центральній вершині, а також спектри задач породжених тими ж рівняннями Штурма-Ліувілля на ребрах з умовами Діріхле на обох кінцях. Були знайдені умови на числові послідовності, достатні для того, щоб ці послідовності були спектрами вищеописаних задач. Також, було доведено, що, якщо спектри задач Діріхле на окремих ребрах не перетинаються, то розв'язок такої оберненої задачі - єдиний. Якщо ж вони перетинаються, то не єдиний. В той же час виявилось, що і у випадку зіркового графу можна довести аналог теореми Амбарцумяна. Тобто, якщо на висячих вершинах графу задані умови Неймана, а не Діріхле та спектр задачі на всьому зірковому графі містить підпослідовність $\{\frac{\pi^2 k^2}{l^2}\}_{k=0}^{\infty}$, то потенціали на ребрах дорівнюють нулю майже всюди [75]. Слід відмітити, що аналог теореми Амбарцумяна для довільного рівнобічного дерева був отриманий у роботі [18]. Нарешті для довільних зв'язних графів також справедлива теорема типу Амбарцумяна (див.[85], [50]).

2.1 Висновки до розділу 2

В цьому розділі коротко розглянута історія обернених задач Штурма-Ліувілля на метричних графах. Описано дві постановки оберненої задачі Штурма-Ліувілля на графі: (1) відома форма графу та спектри задач Штурма-Ліувілля на ньому, треба знайти потенціали на ребрах, (2) відомий спектр задачі Штурма-Ліувілля на графі, треба знайти форму графу.

РОЗДІЛ 3

3 Задача з трьома спектрами

3.1 Постановка задачі

Єдиний випадок, коли спектр самоспряженої задачі Штурма-Ліувіля на скінченному інтервалі однозначно визначає потенціал, це випадок Амбарцумяна [1], тобто наша теорема 2.1 (див. [8] для доведення та [56] для простого доведення).

Узагальнення теореми Амбарцумяна були отримані в [20], [21], [22], [42] (див. також [11] для несамоспряженого випадку). Зокрема, відомо [42], що можна послабити вихідну гіпотезу, припускаючи, що $q \in L_1[0, a]$, та

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - k^2 \pi^2 a^{-2}) = 0, \quad z_k \geq 0.$$

У всіх інших самоспряжених випадках потрібно знати два спектри крайових задач, щоб знайти потенціал [8], [60], [61].

Задача Хохштадта-Лібермана [43] полягає в наступному. Знаючи спектр $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ крайової задачі на інтервалі $[0, a]$ і звуження потенціалу на півінтервалі $[0, a/2]$, знайти звуження потенціалу на півінтервал $(a/2, a)$. У [43] були обрані крайові умови Робена, а у [36], [40], [63], [81], [84] умови Неймана і Діріхле. Ці статті містять узагальнення результатів [43].

Ми розглянемо випадок умови Неймана на лівому кінці та умови Діріхле на правому кінці

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad x \in [0, a] \tag{3.1}$$

$$y'(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$y(a) = 0, \tag{3.3}$$

де $q \in L_2(0, a)$ дійсна функція (потенціал). У нашому випадку проблема Хохштадта-Лібермана полягає в наступному: відовий спектр задачі (3.1)–

(3.3) та звуження потенціалу $q(x)$ на півінтервал $[0, a/2]$, треба знайти $q(x)$ на $(a/2, a]$.

Так звана проблема трьох спектрів [2], [10]–[12], [36]–[37], [45], [72], [83], [89] полягає у відновленні потенціалу $q(x)$ на $[0, a]$ використовуючи спектр задачі (3.1)–(3.3) і спектри задач на інтервалах $[0, \frac{a}{2}]$ та $[\frac{a}{2}, a]$. Самоспряжені крайові умови для цих задач можна вибрати різними способами, але нас цікавлять задачі на півінтервалах виду:

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad x \in [0, \frac{a}{2}], \quad (3.4)$$

$$y'(0) = 0, \quad (3.5)$$

$$y'(\frac{a}{2}) = 0, \quad (3.6)$$

та

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad x \in [\frac{a}{2}, a], \quad (3.7)$$

$$y'(\frac{a}{2}) = 0, \quad (3.8)$$

$$y(a) = 0. \quad (3.9)$$

І проблема Хохштадта-Лібермана, і проблема трьох спектрів призводять до функціонального рівняння

$$c(\lambda, a) = c(\lambda, a/2)\tilde{c}_2(\lambda, a) + \tilde{s}_2(\lambda, a)c'(\lambda, a/2)$$

де $\lambda = \sqrt{z}$ та через $c(\lambda, x)$ позначено розв'язок рівняння Штурма-Ліувілля (3.1), який задовольняє умови $c(\lambda, 0) = 1$, $c'(\lambda, 0) = 0$, через $\tilde{c}_2(\lambda, x)$ розв'язок (3.4), який задовольняє умови $\tilde{c}_2(\lambda, a/2) = 1$ та $\tilde{c}'_2(\lambda, a/2) = 0$ та через $\tilde{s}_2(\lambda, x)$ розв'язок (3.7), який задовольняє умови $\tilde{s}_2(\lambda, a/2) = 0$ та $\tilde{s}'_2(\lambda, a/2) = 1$.

У задачі Хохштадта-Лібермана звуження потенціалу на $(0, a/2)$ (або на $(a/2, a)$) відомо і тому $c(\lambda, a)$ та $c'(\lambda, a/2)$ (чи $\tilde{c}_2(\lambda, a)$ та $\tilde{s}_2(\lambda, a)$) відомі. Крім того, знаючи спектр задачі (3.1)–(3.3), ми можемо знайти $c(\lambda, a)$ (використовуючи (3.39) нижче). Треба знайти $\tilde{c}_2(\lambda, a)$ та $\tilde{s}_2(\lambda, a)$ (або $c(\lambda, a/2)$ та $c'(\lambda, a/2)$).

У оберненій задачі за трьома спектрами $c(\lambda, a)$ однозначно визначається даними задачі та може бути побудована так як і $c(\lambda, a/2)$ та $c'(\lambda, a/2)$ (або $\tilde{c}_2(\lambda, a)$ та $\tilde{s}_2(\lambda, a)$), а шуканими невідомими є $\tilde{c}_2(\lambda, a)$ та $\tilde{s}_2(\lambda, a)$ (або $c(\lambda, a/2)$ та $c'(\lambda, a/2)$).

Слід зазначити, що деякі загальні властивості функціональних рівнянь у класі функцій типу синусів розглядалися в [67].

У підрозділі 3.2 ми розглядаємо пряму задачу з трьома спектрами, тобто описуємо взаємне розташування спектрів задач (3.1)–(3.3), (3.4)–(3.6) та (3.7)–(3.9).

У підрозділі 3.3 ми розглядаємо наступну обернену спектральну задачу за трьома спектрами: дані спектри задачі (3.1)–(3.3), задачі (3.7)–(3.9) і всі, крім одного, власні значення задачі (3.4)–(3.6), треба знайти $q(x)$. Ситуація, коли одне власне значення не потрібне, є звичайною (див. [76]). Знайдені достатні умови на три послідовності чисел достатні для того, щоб вони були спектрами задач (3.1)–(3.3) та (3.4)–(3.6) і всіма, крім одного, власними значеннями задачі (3.7)–(3.9).

У підрозділі 3.4 ми показуємо, що існує окремий випадок, коли достатньо двох спектрів: спектрів задач (3.1)–(3.3) та (3.7)–(3.9) та ще одного власного значення, щоб однозначно визначити потенціал на всьому інтервалі. Цей випадок пов'язаний із проблемою Амбарцумяна.

Слід зазначити, що інший вид задачі трьох спектрів, пов'язаної з проблемою Амбарцумяна, розглядався в [77].

3.2 Пряма задача з трьома спектрами

У цьому розділі нам будуть потрібні наступні означення

Означення 3.1 \mathcal{L}^a є класом Пелі-Вінера цілих функцій $f(z)$ експоненціального типу $\leq a$, які належать $L_2(-\infty, \infty)$ для дійсних z .

За теоремою Пелі-Вінера \mathcal{L}^a -функції є образами Фур'є всіх сумовуваних з квадратом функцій, які відмінні від нуля на $[-a, a]$.

Означення 3.2 Функція ω є невалінівською функцією (\mathcal{N} -функцією) якщо:

- (i) ω є аналітичною у півплощинах $\text{Im}z > 0$ та $\text{Im}z < 0$;
- (ii) $\omega(\bar{z}) = \overline{\omega(z)}$ якщо $\text{Im}z \neq 0$;
- (iii) $\text{Im}z \text{Im}\omega(z) \geq 0$ для $\text{Im}z \neq 0$.

Означення 3.3 (i) Клас \mathcal{N}^{ep} суттєво додатних невалінівських функцій є множиною всіх функцій $\omega \in \mathcal{N}$ які є аналітичними в $C \setminus [0, \infty)$ за можливим винятком скінченної кількості полюсів.

(ii) Клас \mathcal{N}_+^{ep} є множиною всіх функцій $\omega \in \mathcal{N}^{ep}$ таких, що для деяких $\gamma \in \mathbb{R}$ маємо $\omega(z) > 0$ для всіх $z \in (-\infty, \gamma)$.

Лемма 3.1 Якщо $\omega_1 \in \mathcal{N}$, ($\omega_1 \in \mathcal{N}^{ep}$, $\omega_1 \in \mathcal{N}_+^{ep}$) та $\omega_2 \in \mathcal{N}$ ($\omega_2 \in \mathcal{N}^{ep}$, $\omega_2 \in \mathcal{N}_+^{ep}$), тоді $(\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{N}$, $((\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{N}^{ep}$, $(\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{N}_+^{ep}$).

Доведення Оскільки

$$\text{Im} \left(\frac{1}{\omega_1(z)} + \frac{1}{\omega_2(z)} \right)^{-1} = \frac{-\text{Im} \frac{1}{\omega_1(z)} - \text{Im} \frac{1}{\omega_2(z)}}{\left| \frac{1}{\omega_1(z)} + \frac{1}{\omega_2(z)} \right|^2} = \frac{\frac{\text{Im} \omega_1(z)}{|\omega_1(z)|^2} + \frac{\text{Im} \omega_2(z)}{|\omega_2(z)|^2}}{\left| \frac{1}{\omega_1(z)} + \frac{1}{\omega_2(z)} \right|^2},$$

ми робимо висновок, що

$$\text{Im} z \text{Im} \left(\frac{1}{\omega_1(z)} + \frac{1}{\omega_2(z)} \right)^{-1} \geq 0.$$

Нехай $\omega_1(z) > 0$ та $\omega_2(z) > 0$ для $z \in (-\infty, \gamma)$. Тоді також $\left(\frac{1}{\omega_1(z)} + \frac{1}{\omega_2(z)} \right)^{-1} > 0$ для $z \in (-\infty, \gamma)$. \square

Розглядаючи спектральні задачі на інтервалі $[0, a]$ та на його півінтервалах, зручніше вимірювати відстань на правій половині інтервалу у зворотньому напрямку. Тоді ми можемо переписати нашу основну задачу (3.1)–(3.3) наступним чином:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda^2 y_j, \quad x \in [0, a/2], \quad j = 1, 2, \quad (3.10)$$

$$y_1'(0) = 0, \quad (3.11)$$

$$y_2(0) = 0, \quad (3.12)$$

$$y_1(a/2) = y_2(a/2), \quad (3.13)$$

$$y_1'(a/2) + y_2'(a/2) = 0. \quad (3.14)$$

Буде зручно використовувати інший спектральний параметр: $\lambda^2 = z$. Позначимо через $s_j(\lambda, x)$ розв'язок рівняння Штурма-Ліувілля (3.10), який задовольняє умови $s_j(\lambda, 0) = 0$, $s_j'(\lambda, 0) = 1$ та через $c(\lambda, x)$ розв'язок (3.10), який задовольняє умови $c_j(\lambda, 0) = 1$, $c_j'(\lambda, 0) = 0$. Позначимо власні значення задачі (3.10)–(3.14) через $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ ($\lambda_{-k} = -\lambda_k$). Загальновідомо, що

$$-\infty < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \dots < \lambda_k^2 < \dots$$

Розглянемо також такі задачі на підінтервалах:

1. Задача Неймана-Діріхле:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda^2 y_j \quad x \in [0, a/2], \quad (3.15)$$

$$y_j'(0) = 0, \quad (3.16)$$

$$y_j(a/2) = 0. \quad (3.17)$$

Спектр $\{\mu_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ ($\mu_{-k}^{(j)} = -\mu_k^{(j)}$), $(\mu_k^{(j)})^2 < (\mu_{k+1}^{(j)})^2$ цієї задачі співпадає з множиною коренів характеристичної функції

$$c_j(\lambda, \frac{a}{2}) = \cos \lambda \frac{a}{2} + A_j \frac{\sin \lambda \frac{a}{2}}{\lambda} + \frac{\psi_{j,1}(\lambda)}{\lambda},$$

де $A_j \stackrel{def}{=} \int_0^{\frac{a}{2}} q_j(x) dx$, $\psi_j \in \mathcal{L}^{\frac{a}{2}}$, $\psi_{1,j}(0) = 0$.

2. Задача Неймана-Неймана:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda^2 y_j, \quad x \in [0, a/2], \quad (3.18)$$

$$y_j'(0) = 0, \quad (3.19)$$

$$y_j'(a/2) = 0, \quad (3.20)$$

спектр $\{\zeta_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty} \cup \{\zeta_{+0}^{(j)}, \zeta_{-0}^{(j)}\}$, ($\zeta_{-k}^{(j)} = -\zeta_k^{(j)}$), $(\zeta_k^{(j)})^2 < (\zeta_{k+1}^{(j)})^2$ якої співпадає з множиною коренів характеристичної функції

$$c_j'(\lambda, \frac{a}{2}) = -\lambda \sin \lambda \frac{a}{2} + A_j \cos \lambda \frac{a}{2} + \psi_{j,2}(\lambda),$$

де $\psi_{2,j} \in \mathcal{L}^{\frac{a}{2}}$.

3. Задача Діріхле-Діріхле:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda^2 y_j, \quad x \in [0, a/2], \quad (3.21)$$

$$y_j(0) = 0, \quad (3.22)$$

$$y_j(a/2) = 0, \quad (3.23)$$

спектр $\{\nu_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ ($\nu_{-k}^{(j)} = -\nu_k^{(j)}$, $(\nu_k^{(j)})^2 < (\nu_{k+1}^{(j)})^2$) якої співпадає з множиною нулів характеристичної функції

$$s_j(\lambda, \frac{a}{2}) = \frac{\sin \lambda \frac{a}{2}}{\lambda} - A_j \frac{\cos \lambda \frac{a}{2}}{\lambda^2} + \frac{\psi_{j,3}(\lambda)}{\lambda^2},$$

де $\psi_{j,3} \in \mathcal{L}^{\frac{a}{2}}$ і $\psi_{j,3}(0) = A_2$, $\phi'_{j,3}(0) = 0$.

4. Задача Діріхле-Неймана:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda^2 y_j, \quad x \in [0, a/2], \quad (3.24)$$

$$y_j(0) = 0, \quad (3.25)$$

$$y_j'(a/2) = 0, \quad (3.26)$$

спектр $\{\kappa_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ ($\kappa_{-k}^{(j)} = -\kappa_k^{(j)}$, $(\kappa_k^{(j)})^2 < (\kappa_{k+1}^{(j)})^2$) якої співпадає з множиною коренів характеристичної функції

$$s'_j(\lambda, \frac{a}{2}) = \cos \lambda \frac{a}{2} + A_j \frac{\sin \lambda \frac{a}{2}}{\lambda} + \frac{\psi_{j,4}(\lambda)}{\lambda},$$

де $\psi_{j,4} \in \mathcal{L}^{\frac{a}{2}}$ та $\psi_{j,4}(0) = 0$.

Будемо шукати розв'язок задачі (3.10)–(3.14) у вигляді $y_1 = C_1 c_1(\lambda, x)$, $y_2 = C_2 s_2(\lambda, x)$, де C_j константи. Тоді з (3.13) та (3.14) випливає

$$C_1 c_1(\lambda, a/2) = C_2 s_2(\lambda, a/2),$$

$$C_1 c'_1(\lambda, a/2) + C_2 s'_2(\lambda, a/2) = 0.$$

Ця система рівнянь відносно C_1 та C_2 має нетривіальний розв'язок у коренях характеристичної функції

$$\Phi(\lambda) := c_1(\lambda, a/2)s'_2(\lambda, a/2) + s_2(\lambda, a/2)c'_1(\lambda, a/2). \quad (3.27)$$

Множина коренів $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ цієї функції є спектром задачі (3.10)–(3.14). Відмітимо, що задача (3.10)–(3.14) є задачею Неймана–Діріхле на всьому інтервалі, а тому

$$\Phi(\lambda) = \cos \lambda a + A_0 \frac{\sin \lambda a}{\lambda} + \frac{\psi_0(\lambda)}{\lambda},$$

де $A_0 = A_1 + A_2$, $\psi_0 \in \mathcal{L}^a$ та $\psi_0(0) = 0$.

Ми будемо використовувати наступний простий результат.

Пропозиція 3.1 [див [61], Лемма 3.4.2]

$$-\infty < (\kappa_1^{(2)})^2 < (\nu_1^{(2)})^2 < (\kappa_2^{(2)})^2 < (\nu_2^{(2)})^2 < \dots \quad (3.28)$$

Пропозиція 3.2 Елементи об'єднання

$\{\theta_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty} \stackrel{def}{=} \{\mu_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty} \cup \{\nu_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ можна впорядкувати так, щоб вони чергувалися з власними значеннями $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ задачі (3.10)–(3.14) в наступному сенсі:

(i)

$$-\infty < \lambda_1^2 < \theta_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \theta_2^2 \leq \dots \quad (3.29)$$

(ii) Всі λ_k прості і для $k > 0$ $\lambda_k = \theta_k$ тоді і тільки тоді, якщо $\lambda_k = \theta_{k-1}$.

Доведення (i) Використовуючи (3.27) ми отримуємо

$$\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{\Phi(\sqrt{z})} = \left(\left(\frac{c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \right)^{-1} + \left(\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \right)^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.30)$$

Відомо (див. наприклад [76]), що

$$(\zeta_0^{(1)}) < (\mu_1^{(1)})^2 < (\zeta_1^{(1)})^2 < (\mu_2^{(1)})^2 < \dots$$

та

$$(\kappa_1^{(2)})^2 < (\nu_1^{(2)})^2 < (\kappa_2^{(2)})^2 < (\nu_2^{(2)})^2 < \dots$$

і таким чином $\frac{c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}$ та $\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}$ є суттєво додатніми невалінівськими функціями. Крім того, оскільки $\frac{c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} +0$ та $\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} +0$ ми маємо $\frac{c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \in \mathcal{N}_+^{ep}$ and $\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \in \mathcal{N}_+^{ep}$.

Отже, за лемою 3.1 маємо $\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{\Phi(\sqrt{z})} \in \mathcal{N}_+^{ep}$, що за наслідком 5.2.3 з [68] означає справедливість (3.29).

(ii) Покладемо $\lambda_k = \theta_k$. Тоді $\Phi(\theta_k) = 0$ та або $\theta_k = \mu_r^{(1)}$ для деякого r , або $\eta_k = \nu_s^{(2)}$ для деякого s . Нехай $\theta_k = \mu_r^{(1)}$, тоді $c_1(\theta_k, \frac{a}{2}) = 0$ і ми отримуємо з (3.27), що $c_1'(\theta_k, \frac{a}{2})s_2(\theta_k, \frac{a}{2}) = 0$. Оскільки $c_1'(\theta_k, \frac{a}{2}) \neq 0$ ми приходимо до $s_2(\theta_k, \frac{a}{2}) = 0$ та $\theta_k = \nu_s^{(2)}$ для деякого s . Тому $\lambda_k = \theta_k = \theta_{k-1}$.

Для випадку $\eta_k = \nu_s^{(2)}$ доведення є аналогічним. \square

Пропозиція 3.3 *Власні значення $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ задачі (3.10)–(3.14) чергуються з впорядкованими елементами об'єднання*

$\{\eta_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty \cup \{\eta_{+0}, \eta_{-0}\} \stackrel{def}{=} \{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty \cup \{\zeta_{+0}, \zeta_{-0}^{(1)}\} \cup \{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ в наступному сенсі:

(i)

$$-\infty < \eta_{+0}^2 \leq \lambda_1^2 \leq \eta_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots \quad (3.31)$$

(ii) *Всі λ_k прості і для $k > 1$ $\lambda_k = \eta_k$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_k = \eta_{k-1}$.*

Доведення (i) Відомо, що $\frac{c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}$ та $\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}$ є суттєво додатними невалінівськими функціями. Тому

$$\frac{\Phi(\sqrt{z})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} = \frac{c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} + \frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}.$$

Як ми бачили в доведенні пропозиції 3.2, $\frac{c_1(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \in \mathcal{N}_+^{ep}$ та $\frac{s_2(\sqrt{z}, \frac{a}{2})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \in \mathcal{N}_+^{ep}$ та, тому, $\frac{\Phi(\sqrt{z})}{s_2'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})c_1'(\sqrt{z}, \frac{a}{2})} \in \mathcal{N}_+^{ep}$ що означає (3.31) за наслідком 5.2.3 з [68].

(ii) Покладемо $\lambda_k = \eta_k$. Тоді $\Phi(\eta_k) = 0$ та або $\eta_k = \zeta_r^{(1)}$ для деякого r , або $\eta_k = \kappa_s^{(2)}$ для деякого s . Нехай $\eta_k = \zeta_r^{(1)}$, тоді $c_1'(\eta_k, \frac{a}{2}) = 0$ і ми отримуємо з (3.27), що $c_1(\eta_k, \frac{a}{2})s_2'(\eta_k, \frac{a}{2}) = 0$. Оскільки, $c_1(\eta_k, \frac{a}{2}) \neq 0$ ми отримуємо, що $s_2'(\eta_k, \frac{a}{2}) = 0$ та $\eta_k = \kappa_s^{(2)}$ для деякого s та, отже, $\lambda_k = \eta_k = \eta_{k-1}$. \square

Пропозиція 3.4 [[61], Теорема 1.5.1] *Якщо потенціали $q_j \in L_2(0, a/2)$ - дійсні, тоді послідовності $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$, $\{\mu_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$, $\{\nu_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$, $\{\kappa_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ та $\{\zeta_k^{(j)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty \cup \{\zeta_{+0}^{(j)}\} \cup \{\zeta_{-0}^{(j)}\}$ поводяться асимптотично при $k \rightarrow +\infty$ наступним чином*

$$\lambda_k = \frac{\pi(k - 1/2)}{a} + \frac{A_0}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k}, \quad (3.32)$$

$$\zeta_k^{(1)} = \frac{2\pi k}{a} + \frac{A_1}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k}, \quad (3.33)$$

$$\kappa_k^{(2)} = \frac{\pi(2k-1)}{a} + \frac{A_2}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k}, \quad (3.34)$$

де A_0, A_1, A_2 - це сталі, $A_0 = A_1 + A_2$, послідовності $\{\beta_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ у (3.32)–(3.34) різні, але всі належать l_2 .

3.3 Обернена задача за трьома спектрами

В цьому розділі розглядається задача відновлення потенціалів q_1 та q_2 використовуючи спектри $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty, \{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty, \{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$.

Означення 3.4 [див., напр. [59] Розділ 1, або [68] Означення 11.2.5]

Ціла функція ω додатного експоненціального типу називається функцією типу синуса, якщо

(i) існує $h > 0$ таке, що всі корені ω лежать у смужці $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < h\}$,

(ii) існують $h_1 \in \mathbb{R}$, додатні числа m, M ($m < M$), такі що $m \leq |f(\lambda)| \leq M$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ з $|\operatorname{Im}\lambda| = h_1$,

(iii) експоненціальний тип ω в нижній півплощині збігається з експоненціальним типом ω у верхній півплощині.

Теорема 3.1 Нехай три послідовності дійсних i , можливо, чисто уявних чисел

$\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty, \{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty, \{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ ($\lambda_{-k} = -\lambda_k, \zeta_{-k}^{(1)} = -\zeta_k^{(1)}, \kappa_{-k}^{(2)} = -\kappa_k^{(2)}, \lambda_k^2 < \lambda_{k'}^2, (\zeta_k^{(1)})^2 < (\zeta_{k'}^{(1)})^2, (\kappa_k^{(2)})^2 < (\kappa_{k'}^{(2)})^2$ для $k < k'$) поводяться асимптотично, як у (3.32)–(3.34), де $A_1 + A_2 = A_0$.

Нехай елементи послідовності $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ чергуються з елементами порядкованого об'єднання $\{\theta_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty \cup \{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ у строгому сенсі:

$$-\infty < \lambda_1^2 < \theta_1^2 < \lambda_2^2 < \theta_2^2 < \dots \quad (3.35)$$

Тоді існує єдина пара дійсних функцій $q_1(x) \in L_2(0, a/2), q_2(x) \in L_2(0, a/2)$, таких що задача (3.10)–(3.14) має спектр $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$, задача

(3.24)–(3.26) з $j = 2$ має спектр $\{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ і $\{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ є власними значеннями задачі (3.18)–(3.20) з $j = 1$.

Доведення Розглянемо функції

$$\phi(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\pi(k - \frac{1}{2})} \right)^2 (\lambda_k^2 - \lambda^2), \quad (3.36)$$

$$\phi_2(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2\pi(k - \frac{1}{2})} \right)^2 ((\kappa_k^{(2)})^2 - \lambda^2), \quad (3.37)$$

$$\phi_1(\lambda) = \frac{a}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2\pi k} \right)^2 ((\zeta_k^{(1)})^2 - \lambda^2). \quad (3.38)$$

Тоді згідно [61] (Лема 3.4.2) маємо

$$\phi(\lambda) = \cos \lambda a + A_0 \frac{\sin \lambda a}{\lambda} + \frac{\psi_0(\lambda)}{\lambda} \quad (3.39)$$

де $\psi_0 \in \mathcal{L}^a$,

$$\phi_2(\lambda) = \cos \lambda \frac{a}{2} + A_2 \frac{\sin \lambda \frac{a}{2}}{\lambda} + \frac{\psi_2(\lambda)}{\lambda}, \quad (3.40)$$

$$\phi_1(\lambda) = \frac{\sin \lambda \frac{a}{2}}{\lambda} - A_1 \frac{\cos \lambda \frac{a}{2}}{\lambda^2} + \frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda^2}, \quad (3.41)$$

де $\psi_j \in \mathcal{L}^{\frac{a}{2}}$ ($j = 1, 2$). Оскільки через (3.35) ми маємо $\phi_1(\kappa_k^{(2)}) \neq 0$, то можемо розглянути наступну послідовність

$$a_k \stackrel{def}{=} \frac{\phi(\kappa_k^{(2)})}{\phi_1(\kappa_k^{(2)})} + \kappa_k^{(2)} \sin \frac{\kappa_k^{(2)} a}{2} - A_2 \cos \frac{\kappa_k^{(2)} a}{2}. \quad (3.42)$$

Використовуючи (3.39), (3.41) і (3.34), ми отримуємо

$$\phi(\kappa_k^{(2)}) = -1 + \frac{\beta_k}{k},$$

$$\phi_1(\kappa_k^{(2)}) = (-1)^{k-1} \frac{a}{\pi k} + \frac{\beta_k}{k^2},$$

$$\kappa_k^{(2)} \sin \frac{\kappa_k^{(2)} a}{2} - A_2 \cos \frac{\kappa_k^{(2)} a}{2} = (-1)^{k-1} \frac{\pi k}{a} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

як і раніше, $\{\beta_k\}$ у наведених вище трьох рівняннях можуть бути різними, але всі належать до l_2 . Тому, з (3.42) випливає, що $\{a_k\} \in l_2$.

Припустимо, що $\phi_2(0) \neq 0$, інакше ми можемо замінити спектральний параметр $\lambda^2 \rightarrow \lambda^2 + c$. Завдяки (3.40), приходимо до висновку, що $\phi_2(\lambda)$ є функцією типу синуса і з (3.35) випливає, що всі її корені - прості. Тоді ми можемо використати множину $\{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ коренів ϕ_2 як вузли інтерполяції для побудови $\mathcal{L}^{a/2}$ - функція $\tilde{\psi}_2$. Значення цієї функції у вузлах задаються формулою (3.42). За теоремою А з [58] (див. також теорему 11.3.14 в [68]) сума

$$\tilde{\psi}_2(\lambda) = \phi_2(\lambda) \sum_{-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{a_k}{\frac{d\phi_2(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\kappa_k^{(2)}} (\lambda - \kappa_k^{(2)})} \quad (3.43)$$

збігається рівномірно на будь-якому компактї комплексної площини і в нормі $L_2(-\infty, \infty)$ на дійсній осі до функції з $\mathcal{L}^{a/2}$.

Тепер побудуємо

$$Y(\lambda) = -\lambda \sin \lambda \frac{a}{2} + A_2 \cos \lambda \frac{a}{2} + \tilde{\psi}_2(\lambda). \quad (3.44)$$

Позначимо через $\{\zeta_{+0}^{(1)}, \zeta_{-0}^{(1)}\} \cup \{\nu_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ корені $Y(\lambda)$ занумеровані так, що $\zeta_{-0}^{(1)} = -\zeta_{+0}^{(1)}$, $\nu_{-k}^{(2)} = -\nu_k^{(2)}$,

$$(\zeta_{+0}^{(1)})^2 \leq (\nu_1^{(2)})^2 \leq (\nu_2^{(2)})^2 \leq \dots \quad (3.45)$$

Оскільки $\tilde{\psi}_2(\kappa_k) = a_k$, то з рівняння (3.44) випливає що

$$\frac{\phi(\kappa_k^{(2)})}{\phi_1(\kappa_k^{(2)})} = Y(\kappa_k^{(2)}). \quad (3.46)$$

Завдяки (3.44) (див., напр. [68])

$$\nu_k^{(2)} = \frac{2\pi k}{a} + \frac{A_2}{\pi k} + \frac{\beta_k^{(2)}}{k}. \quad (3.47)$$

Покладемо $\kappa_r^{(2)} = \theta_p$. Тоді $\phi(\kappa_r^{(2)}) = \phi(\theta_p)$. Оскільки $\lambda_p < \theta_p < \lambda_{p+1}$ рівняння (3.36) означає, що $(-1)^p \phi(\kappa_r^{(2)}) = (-1)^p \phi(\theta_p) > 0$. Відповідно до (3.35), в інтервалі $(-\infty, (\theta_p)^2)$ є рівно $p - r$ елементів послідовності $\{(\zeta_k^{(1)})^2\}_{k=1}^{\infty}$, і таким чином з (3.38) випливає $(-1)^{p-r} \phi_1(\kappa_r^{(2)}) > 0$, тобто

$$\frac{\phi(\kappa_1^{(2)})}{\phi_1(\kappa_1^{(2)})} < 0, \quad \frac{\phi(\kappa_2^{(2)})}{\phi_1(\kappa_2^{(2)})} > 0, \quad \frac{\phi(\kappa_3^{(2)})}{\phi_1(\kappa_3^{(2)})} < 0, \dots$$

Використовуючи (3.46) ми отримуємо

$$(-1)^k Y(\kappa_k^{(2)}) > 0.$$

З рівняння (3.44) також маємо, що $Y(\lambda) \xrightarrow{\lambda^2 \rightarrow -\infty} +\infty$.

Оскільки елементи послідовності $\{\zeta_{-0}^{(1)}, \zeta_{+0}^{(1)}\} \cup \{\nu_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ занумеровані відповідно (3.45) і мають асимптотику (3.47), робимо висновок, що $\{(\nu_k^{(2)})^2\}_{k=1}^\infty$ строго чергуються з $\{(\kappa_k^{(2)})^2\}_{k=1}^\infty$:

$$-\infty < (\zeta_{+0}^{(1)})^2 < (\kappa_1^{(2)})^2 < (\nu_1^{(2)})^2 < (\kappa_2^{(2)})^2 < (\nu_2^{(2)})^2 < \dots \quad (3.48)$$

Завдяки (3.35) маємо, що $\phi_2(\zeta_k^{(1)}) \neq 0$, і, отже, ми можемо позначити

$$b_k \stackrel{def}{=} \frac{\phi(\zeta_k^{(1)})}{\phi_2(\zeta_k^{(1)})} = \cos \frac{\zeta_k^{(1)} a}{2} - A_1 \frac{\sin \frac{\zeta_k^{(1)} a}{2}}{\zeta_k^{(1)}}. \quad (3.49)$$

Використовуючи (3.39), (3.40) та (3.33) ми отримуємо

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_k^{(1)}) &= -1 + \frac{\beta_k}{k}, \\ \phi_2(\zeta_k^{(1)}) &= (-1)^{k-1} + \frac{\beta_k}{k}, \\ \cos \frac{\zeta_k^{(1)} a}{2} + A_1 \frac{\sin \frac{\zeta_k^{(1)} a}{2}}{\zeta_k^{(1)}} &= (-1)^{k-1} + O\left(\frac{1}{k}\right), \end{aligned}$$

де $\{\beta_k\}$ різні в різних формулах, але кожна належить до l_2 . Тому, з рівняння (3.49) вивливає, що $\{b_k\} \in l_2$. Оскільки $\hat{\phi}_1(\lambda) := \lambda \phi_1(\lambda)$ це функція типу синуса, всі корені якої прості, то ми можемо використовувати $\{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty \cup \{0\}$ як вузли інтерполяції, $\{b_k\}$, що задані рівнянням (3.49), як значення $\mathcal{L}^{a/2}$ -функції $\tilde{\psi}_1$ у вузлах $\zeta_k^{(1)}$, а 0 як значення $\tilde{\psi}_1$ в $\lambda = 0$. Тоді сума

$$\tilde{\psi}_1(\lambda) = \hat{\phi}_1(\lambda) \sum_{-\infty, k \neq 0}^\infty \frac{b_k}{\frac{d\hat{\phi}_1(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\zeta_k^{(1)}} (\lambda - \zeta_k^{(1)})} \quad (3.50)$$

збігається рівномірно на будь-якому компактї комплексної площини і в нормі $L_2(-\infty, \infty)$ на дійсній осі до функції з $\mathcal{L}^{a/2}$.

Потім будуюмо

$$X(\lambda) = \cos \lambda \frac{a}{2} + A_1 \frac{\sin \lambda \frac{a}{2}}{\lambda} + \frac{\tilde{\psi}_1(\lambda)}{\lambda}. \quad (3.51)$$

Позначимо корені цієї функції через $\{\mu_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$, де індексація така, що

$$(\mu_1^{(1)})^2 \leq (\mu_2^{(1)})^2 \leq (\mu_3^{(1)})^2 \leq \dots$$

Ці корені поведуться асимптотично наступним чином

$$\mu_k^{(1)} = \frac{\pi(2k-1)}{a} + \frac{A_1}{\pi k} + \frac{\beta_k^{(1)}}{k}, \quad (3.52)$$

де $\{\beta_k^{(1)}\} \in l_2$.

В рівняннях (3.49), (3.50) мається на увазі, що $\tilde{\psi}_1(\zeta_k^{(1)}) = b_k$. Тоді, використовуючи (3.51), ми отримуємо

$$\frac{\phi(\zeta_k^{(1)})}{\phi_2(\zeta_k^{(1)})} = X(\zeta_k^{(1)}). \quad (3.53)$$

Пара функцій (X, Y) є розв'язком функціонального рівняння

$$\phi(\lambda) = \phi_2(\lambda)X(\lambda) + \phi_1(\lambda)Y(\lambda). \quad (3.54)$$

Цей розв'язок є єдиним у класі функцій наступного виду

$$X(\lambda) = \cos \lambda \frac{a}{2} + A_1 \frac{\sin \lambda \frac{a}{2}}{\lambda} + \frac{\tau_1(\lambda)}{\lambda}, \quad \tau_1 \in \mathcal{L}^{\frac{a}{2}},$$

$$Y(\lambda) = -\lambda \sin \lambda \frac{a}{2} + A_2 \cos \lambda \frac{a}{2} + \tau_2(\lambda), \quad \tau_2 \in \mathcal{L}^{\frac{a}{2}}$$

тому що (3.43) та (3.50) здійснюють взаємно однозначну відповідність між l_2 і $\mathcal{L}^{\frac{a}{2}}$.

Покладемо $\zeta_r^{(1)} = \theta_p$. Тоді $\phi(\zeta_r^{(1)}) = \phi(\theta_p)$. Оскільки $\lambda_p < \theta_p < \lambda_{p+1}$, рівняння (3.35) означає, що $(-1)^p \phi(\zeta_r^{(1)}) = (-1)^p \phi(\theta_p) > 0$. Відповідно до (3.35), на інтервалі $(-\infty, (\theta_p)^2)$ існує рівно $p - r$ елементів послідовності $\{(\zeta_k^{(1)})^2\}_{k=1}^{\infty}$ і таким чином, з (3.38) вивливає, що $(-1)^{p-r} \phi_1(\zeta_r^{(1)}) > 0$, і

$$\frac{\phi(\zeta_1^{(1)})}{\phi_2(\zeta_1^{(1)})} < 0, \quad \frac{\phi(\zeta_2^{(1)})}{\phi_2(\zeta_2^{(1)})} > 0, \quad \frac{\phi(\zeta_3^{(1)})}{\phi_2(\zeta_3^{(1)})} < 0 \dots$$

Використовуючи (3.53), ми отримуємо

$$(-1)^k X(\zeta_k^{(1)}) > 0.$$

Оскільки елементи послідовності $\{\mu_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ занумеровані, як показано в (3.45) і мають асимптотику (3.47), ми робимо висновок, що елементи послідовності $\{(\mu_k^{(1)})^2\}_{k=1}^\infty$ чергуються з елементами послідовності $\{(\zeta_k^{(1)})^2\}_{k=1}^\infty$:

$$-\infty < (\mu_1^{(1)})^2 < (\zeta_1^{(1)})^2 < (\mu_2^{(1)})^2 < (\zeta_2^{(1)})^2 < \dots \quad (3.55)$$

Таким чином послідовності $\{\nu_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ та $\{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ задовольняють умови теореми 3.4.1 з [61], і, отже, існує єдина дійсна функція $q_2(x) \in L_2(0, \frac{a}{2})$, котра породжує задачі Діріхле-Діріхле та Діріхле-Неймана на $[0, \frac{a}{2}]$ зі спектрами $\{\nu_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ та $\{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$, відповідно.

Ми можемо знайти $q_2(x)$ через процедуру з [61] описану нижче. Не втрачаючи загальності припустимо, що це $\kappa_1^2 > 0$, інакше застосуємо зсув спектрального параметру. Будуємо функцію

$$\tilde{\phi}_2(\lambda) = \frac{a}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2\pi k} \right)^2 ((\nu_k^{(2)})^2 - \lambda^2) \quad (3.56)$$

і, використовуючи її, функцію

$$e(\lambda) = (\phi_2(\lambda) + i\lambda\tilde{\phi}_2(\lambda))e^{-i\lambda\frac{a}{2}},$$

яка є так званою функцією Йоста відповідної задачі Штурма-Ліувілля на півосі $[0, \infty)$:

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda^2 y, \quad x \in [0, \infty), \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

з

$$q(x) = \begin{cases} q_2(x) & x \in [0, a/2] \\ 0 & x \in (a/2, \infty) \end{cases}.$$

Потім ми будемо S-функцію цієї задачі на півосі:

$$S(\lambda) = \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)}$$

і функцію

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda)) e^{i\lambda x} dx.$$

Розв'язуючи рівняння Марченка,

$$K_2(x, t) + F(x + t) + \int_x^{\infty} K_2(x, s) F(s + t) dp = 0,$$

ми знаходимо $K_2(x, t)$ і потенціал:

$$q_2(x) = 2 \frac{dK_2(x, x)}{dx},$$

який є дійсною функцією і належить $L_2(0, a/2)$. Цей потенціал породжує задачу Діріхле-Діріхле з характеристичною функцією $\tilde{\phi}_2(\lambda)$ і задачу Діріхле-Неймана з характеристичною функцією $\phi_2(\lambda)$.

Тепер побудуємо q_1 . Оскільки елементи послідовності $\{\mu_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ мають асимптотику (3.33), елементи $\{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ мають асимптотику, (3.33) то ці послідовності чергуються, як у (3.55). Отже, ми приходимо до висновку, що послідовності $\{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ та $\{\mu_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ задовольняють умови теореми 3.1 з [76], яка стверджує, що існує дійсний потенціал $q_1 \in L_2(0, \frac{a}{2})$ такий, що задача (3.15)–(3.17) з $j = 1$ та з q_1 має спектр $\{\mu_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ та $\{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ є власними значеннями задачі (3.18)–(3.20) з $j = 1$ та цим самим q_1 . Спосіб знаходження q_1 дивись у доведенні теореми 3.1 [76]. \square

3.4 Випадок Амбарцумяна

У попередньому підрозділі ми бачили, що два спектри $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$, $\{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ і підпослідовність $\{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ спектру $\{\zeta_k^{(1)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty} \cup \zeta_{+0}^{(1)} \cup \zeta_{-0}^{(1)}$ однозначно визначають потенціали $\{q_1, q_2\}$. У цьому підрозділі ми покажемо, що існує окремий випадок, коли потрібні лише два спектри $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$, $\{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ і один елемент $\zeta_{+0}^{(1)}$ третього спектру.

Теорема 3.2 Нехай $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ - це спектр задачі (3.10)–(3.14) та $\{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ спектр задачі (3.24)–(3.26) з $j = 2$. Нехай константи A_0, A_2 з рівнянь (3.32), (3.34) задовольняють

$$A_0 = A_2. \quad (3.57)$$

Нехай найменше власне значення $\zeta_{+0}^{(1)}$ задачі (3.18)–(3.20) з $j = 1$ дорівнює 0.

Тоді $q_1(x) \stackrel{a.e.}{=} 0$ і дані $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}, \{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ і $\zeta_{+0}^{(1)}$ цієї теореми однозначно визначають q_1 та q_2 .

Доведення З рівняння (3.57) маємо $A_1 = A_0 - A_2 = 0$. Тоді для задачі (3.18)–(3.20) з $j = 1$ маємо

$$\int_0^{\frac{a}{2}} q_1(x) dx = 0. \quad (3.58)$$

Позначимо через L самоспряжений оператор, визначений таким чином:

$$Ly = -y'' + q_1(x)y, \quad D(L) = \{y \in W_2^2(0, \frac{a}{2}), y'(0) = y'(\frac{a}{2}) = 0\}.$$

Пам'ятаючи, що найменше власне значення L дорівнює нулю ми застосовуємо принцип мінімаксу для нашого диференціального оператора L . Для y з області L маємо

$$0 = \zeta_{+0}^{(1)} = \min_{\|y_1\|=1} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} y_1' \overline{y_1'} dx + \int_0^{\frac{a}{2}} q_1(x) |y_j|^2 dx \right). \quad (3.59)$$

Стала функція $y_0 \equiv 1$ знаходиться в $D(L)$. Тому порівнюючи (3.59) та (3.57) отримуємо, що 0 є власним значенням L з власною функцією $y_0 \equiv 1$. Доведення завершуємо зауважуючи що рівняння $Ly_0 = 0$ дає $q_1(x) \stackrel{a.e.}{=} 0$.

Тепер ми робимо висновок, що спектр задачі (3.18)–(3.20) з $j = 1$ є $\{\frac{2\pi k}{a}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty} \cup \{0, 0\}$. Таким чином, за узагальненням Теореми 1.1 згаданим у підрозділі 3.1, застосованим до задачі Штурма-Ліувіля з умовами Неймана на кінцях інтервалу $[0, a/2]$ потенціал $q_1 \stackrel{a.e.}{=} 0$ однозначно визначається двома спектрами $\{\lambda_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}, \{\kappa_k^{(2)}\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ і одним власним значенням $\{\zeta_0^{(1)}\}$ третього спектру.

Тепер розглянемо наступну задачу Хохштадта-Лібермана: заданий спектр задачі (3.10)–(3.14), а також потенціал $q_1 = 0$ на інтервалі $[0, a/2]$, треба знайти потенціал на інтервалі $[a/2, a]$. Така задача має єдиний розв'язок [43]. \square

Приклад Нехай спектр задачі (3.10)–(3.14) є $\{sign(k) \frac{\pi}{a}(|k| - 1/2)\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$, спектр задачі (3.24)–(3.26) з $j = 2$ є $\{sign(k) \frac{\pi}{a}(2|k| - 1)\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ і покладемо $\zeta_{+0}^{(1)} = 0$, де $\zeta_{+0}^{(1)}$ є відповідним власним значенням задачі (3.18)–(3.20) з $j = 1$. Тоді згідно з теоремою 3.2 потенціал $q_1(x) \stackrel{a.e.}{=} 0$. Тоді за пропозицією 3.2 спектр задачі (3.18)–(3.20) є $\{sign(k) \frac{\pi}{a}(2|k| - 1)\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$. Це відповідає $q_2(x) \stackrel{a.e.}{=} 0$.

3.5 Висновки до розділу 3

У цьому розділі розв'язані так звані задачі з трьома спектрами (пряма та обернена), котру можна розглядати як задачу на графі P_3 (на простому ланцюгу, що має 3 вершини). Пряма задача полягала в описі спектрів задачі на всьому графі та на підграфах цього графу, котрі відповідають його ребрам. Обернена задача полягала у знаходженні потенціалів на ребрах, виходячи з відомих спектрів задачі на всьому графі і задач на ребрах. Показано, що у випадку задачі з трьома спектрами існує "амбарцумянівській" випадок, тобто трьох вищезгаданих спектрів забагато для знаходження потенціалів, якщо потенціал на одному з ребер тотожно дорівнює нулю.

РОЗДІЛ 4

4 Геометричні задачі теорії квантових графів

4.1 Історія питання

Прямі спектральні задачі та задачі розсіювання на компактних і некомпактних метричних (кожне ребро має довжину) графах, відповідно, розглядалися в багатьох публікаціях (див., напр. [6], [31], [32],[64], [15]). Обернені задачі на графах досліджуються не так інтенсивно (див., напр. [35], [79], [41], [16], [55], [54], [80]).

Питання ідентифікації об'єкта за спектральними даними виникає в різних областях фізики. У квантовій теорії графів (теорії операторів Шредінгера або операторів Штурма-Ліувіля, що діють на метричних графах) одночасно з'явилися дві статті з майже однаковою назвою «Чи можна почути форму мережі?» [5] і «Чи можна почути форму графу?» [38] зі згадкою про відому статтю М. Каца «Чи можна почути форму барабана?» [46]. Відповідь негативна в першій із цих робіт, тому що ребра графа сумірні, а в другій відповідь позитивна для графів з несумірними ребрами (дивись також [55]). Таким чином, цей варіант оберненої задачі можна сформулювати так: задано спектр крайової задачі на графі, знайти форму графу. Інший варіант оберненої задачі: за спектром спектральної задачі та формою графу знайти потенціали на ребрах. Найпростішим результатом тут є теорема Амбарцумяна, про яку йшлося у розділі 3.

В роботі [7] було доведено «геометричну» версію теореми Амбарцумяна, яка стверджує, що якщо спектр такий, як у випадку задачі Неймана на інтервалі з нульовим потенціалом, то граф є P_2 , тобто інтервалом, а потенціал дорівнює нулю майже всюди на ньому. У роботі [23] доведено геометричну теорему Амбарцумяна для простих зв'язних графів із кількістю вершин ≤ 5 і для дерев з кількістю вершин ≤ 8 .

У підході квантової теорії графів (див[6]) розглядаються спектральні

задачі, породжені рівняннями Штурма-Ліувіля на рівнобічних графах з крайовими умовами Неймана у висячих вершинах графів і неперервності та умови Кірхгофа у його внутрішніх вершинах. В нашій роботі потенціали $q_j \in L_2(0, l)$ на ребрах дійсні.

У підрозділі 4.2 ми формулюємо спектральні задачі Штурма-Ліувіля на простих зв'язних графах і вводимо відповідні характеристичні функції.

У підрозділі 4.3 ми наведемо деякі допоміжні результати. Як було показано в [19], [30], [34], у випадку рівнобічних графів з однаковим потенціалом на ребрах, який є симетричним відносно середини ребра, спектральну задачу можна асоціювати з спектральною задачею для лінійної матричної операторної зв'язки $\lambda B - A$, що діє в C^p , де p – кількість вершин, $B = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$ є матрицею степенів вершин, а A є матрицею суміжності графа. Оскільки $I - B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ є так званим дискретним лапласіаном (див. напр. [33], [39], [13]) спектр $\lambda B - A$ є спектром дискретного лапласіана.

В [23] отримано загальні результати для асимптотики власних значень спектральних задач на рівнобічних графах (див. також [7] для асимптотики у випадку нерівнобічних графів). Показано, що у випадку однакового потенціалу на ребрах можна більш точно описати асимптотику.

У підрозділі 4.4 розглянуто асимптотику власних значень задачі Штурма-Ліувіля на простому зв'язному рівнобічному графі, що не є деревом. Показано що, якщо потенціали на ребрах не дорівнюють 0, то власні значення асимптотично близькі до власних значень незбуреного випадку, тобто випадку $q_j(x) \equiv 0$ тотожно для всіх j .

У підрозділі 4.5 розглянуто асимптотику власних значень задачі Штурма-Ліувіля на рівнобічному дереві. Показано що, якщо потенціали на ребрах не дорівнюють 0, то власні значення асимптотично близькі до власних значень незбуреного випадку, тобто випадку $q_j(x) \equiv 0$ тотожно для всіх j .

У підрозділі 4.6 показано, що для всіх простих зв'язних рівнобічних графів з кількістю вершин $p \leq 5$ і потенціалами $q_j \in L_2(0, l)$ асимпто-

тика спектра задачі Штурма-Ліувіля однозначно визначає форму графа. Показано, що для всіх рівнобічних дерев з кількістю вершин, що менша чи дорівнює восьми і дійсними потенціалами $q_j \in L_2(0, l)$ асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувіля однозначно визначає форму дерева.

У підрозділі 4.7 доведена геометрична теорема Амбарцумяна, тобто доведено, що, якщо підпоследовності спектру задачі Штурма-Ліувіля на простому зв'язному графі з кількістю вершин, що менше чи дорівнює п'яти, наближаються до последовностей власних значень такої задачі з $q_j \equiv 0$ для всіх j , то асимптотика спектру однозначно визначає форму графа і потенціали на ребрах, як такі, що $q_j \equiv 0$ майже при всіх x і всіх j .

4.2 Постановка задачі

Нехай G метричний зв'язний рівнобічний (всі ребра однакової довжини) граф з g ребрами. Позначимо через v_i вершини, через p їх кількість через $d(v_i)$ їх степені, через e_j ребра та через l довжину кожного ребра. Напрявляємо ребра, які інцидентні висячим вершинам у напрямі від висячих вершин. Орієнтація решти ребер довільна. Позначимо через $d^+(v_i)$ кількість ребер, що входять у вершину v_i і через $d^-(v_i) = d(v_i) - d^+(v_i)$ кількість ребер, що виходять з вершини v_i . Позначимо через $W^+(v_i)$ набір індексів j_s ($s = 1, 2, \dots, d^-(v_i)$) ребер, що входять v_i і через $W^-(v_i)$ набір індексів j_s ($s = 1, 2, \dots, d^+(v_i)$) ребер, що виходять з v_i . Локальні координати ребер ототожнюють кожне ребро e_j з інтервалом $[0, l]$ так, що локальна координата зростає в напрямку ребра. Це означає, що кожна висяча вершина має локальну координату 0.

Функції y_j на ребрах задовольняють систему g скалярних рівнянь Штурма-Ліувіля

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad (4.1)$$

де q_j є дійсною функцією, яка належить $L_2(0, l)$. Для ребра e_j інцидентного з висячою вершиною ми накладаємо крайову умову Неймана

$$y_j'(0) = 0. \quad (4.2)$$

Для кожної внутрішньої вершини з вхідними ребрами e_{j_s} ($j_s \in W^-(v_i)$) та вихідними ребрами e_{k_s} ($k_s \in W^+(v_i)$) накладаємо умови неперервності

$$y_{j_1}(l) = \dots = y_{j_{d^-(v_i)}}(l) = y_{k_1}(0) = \dots = y_{k_{d^+(v_i)}}(0), \quad (4.3)$$

і умови Кірхгофа

$$\sum_{k \in W^+(v_i)} y'_k(0) = \sum_{j \in W^-(v_i)} y'_j(l). \quad (4.4)$$

Позначимо через $s_j(\sqrt{\lambda}, x)$ розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля (4.1) на ребрі e_j котрий задовольняє умови $s_j(\sqrt{\lambda}, 0) = s'_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$ та через $c_j(\sqrt{\lambda}, x)$ розв'язок, який задовольняє умови $c_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'_j(\sqrt{\lambda}, 0) = 0$. Тоді *характеристичну функцію*, тобто цілу функцію, набір коренів якої збігається зі спектром задачі, можна виразити через $s_j(\sqrt{\lambda}, l)$, $s'_j(\sqrt{\lambda}, l)$, $c_j(\sqrt{\lambda}, l)$ та $c'_j(\sqrt{\lambda}, l)$. Щоб зробити це ми ввели наступну систему вектор-функцій $\psi_j(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, s_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$ та $\psi_{j+g}(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, c_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$ для $j = 1, 2, \dots, g$. Позначаємо через L_j ($j = 1, 2, \dots, 2g$) лінійні функціонали, створені відвідно до (4.2)–(4.4). Тоді $\Phi(\lambda) = \|L_j(\psi_k(\lambda, x))\|_{j,k}^{2g}$ є характеристична матриця, яка представляє систему лінійних рівнянь, що описують неперервність і умови Кірхгофа для внутрішніх вершин. Таким чином

$$\Delta(\lambda) := \det(\Phi(\lambda))$$

це характеристична *функція* задачі (4.1)–(4.4). Характеристична функція визначається з точністю до сталого множника.

4.3 Співвідношення між неперервним і дискретним лапласіанами

Тут ми представляємо добре відомі результати (див [19], [30],[34]).

Припущення. Далі будемо вважати, що потенціали на ребрах однако-ві, тобто $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv \dots \equiv q_g(x) \stackrel{\text{def}}{=} q(x)$ та симетричні відносно

середини:

$$q(l-x) \stackrel{a.e.}{=} q(x).$$

Відомо, (див. напр. [80], Твердження 2.1) що за цього припущення

$$s'(\sqrt{\lambda}, l) = c(\sqrt{\lambda}, l) \quad (4.5)$$

і, отже, за тотожністю Лагранжа отримуємо

$$c'(\sqrt{\lambda}, l)s(\sqrt{\lambda}, l) = c^2(\sqrt{\lambda}, l) - 1. \quad (4.6)$$

Теорема 4.1 *Нехай $s(\sqrt{\lambda}, l) \neq 0$. Тоді λ є власним значенням задачі (4.1)–(4.4) тоді та тільки тоді, коли $c(\sqrt{\lambda}, l)$ є власним значенням лінійної матричної операторної в'язки $zB - A$, де $B := \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$ та A є матрицею суміжності графа, або, іншими словами, $c(\sqrt{\lambda}, l)$ є власним значенням нормованого лапласіана $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$.*

Доведення Згідно [19], [34] введемо розв'язок (4.1) такої форми

$$f_j(\lambda, x) = \frac{f_j(l) - f_j(0)c(\sqrt{\lambda}, l)}{s(\sqrt{\lambda}, l)}s(\sqrt{\lambda}, x) + f_j(0)c(\sqrt{\lambda}, x), \quad (4.7)$$

де $f_j(0)$ та $f_j(l)$ залежать лише від індексу j на ребрі. Тут передбачається, що λ таке, що $s(\sqrt{\lambda}, l) \neq 0$. Зрозуміло, що

$$f_j(\lambda, 0) = f_j(0), \quad f_j(\lambda, l) = f_j(l). \quad (4.8)$$

Якщо $s(\sqrt{\lambda}, l) \neq 0$, то будь-який розв'язок на ребрі e_j можна представити у вигляді (4.7). Умови неперервності у внутрішній вершині v_i з вхідними ребрами e_j ($j = j_1^-, j_2^-, \dots, j_{d^-(v_i)}^-$) і вихідними ребрами ребра e_j ($j = j_1^+, j_2^+, \dots, j_{d^+(v_i)}^+$) є

$$\begin{aligned} f_{j_1^-}(\lambda, l) &= f_{j_2^-}(\lambda, l) = \dots = f_{j_{d^-(v_i)}^-}(\lambda, l) = \\ f_{j_1^+}(\lambda, 0) &= f_{j_2^+}(\lambda, 0) = \dots = f_{j_{d^+(v_i)}^+}(\lambda, 0) \end{aligned}$$

або завдяки (4.8)

$$f_{j_1^-}(l) = f_{j_2^-}(l) = \dots = f_{j_{d^-(v_i)}^-}(l) = f_{j_1^+}(0) = f_{j_2^+}(0) = \dots = f_{j_{d^+(v_i)}^+}(0) \stackrel{def}{=} Y(v_i),$$

де ми запровадили позначення $Y(v_i)$. Умова Кірхгофа у внутрішній вершині v_i є

$$\sum_{j=j_1^-}^{j_{d^-}(v_i)} f'_j(\lambda, l) - \sum_{j=j_1^+}^{j_{d^+}(v_i)} f'_j(\lambda, 0) = 0,$$

або враховуючи на (4.7) та (4.5)

$$\sum_{j=j_1^-}^{j_{d^-}(v_i)} \frac{f_j(l)s'(\sqrt{\lambda}, l) - f_j(0)}{s(\sqrt{\lambda}, l)} - \sum_{j=j_1^+}^{j_{d^+}(v_i)} \frac{f_{j_1^+}(l) - f_{j_1^+}(0)c(\sqrt{\lambda}, l)}{s(\sqrt{\lambda}, l)} = 0. \quad (4.9)$$

Беручи до уваги (4.5), (4.6) і нерівність $s(\sqrt{\lambda}, l) \neq 0$, ми переписуємо (4.9) як

$$c(\sqrt{\lambda}, l)d(v_i)Y(v_i) - \sum_{v_j \sim v_i} Y(v_j) = 0, \quad (4.10)$$

де сума береться по всіх вершинах v_j суміжних з внутрішньою вершиною v_i . Тоді, якщо λ є власним значенням задачі (4.1) - (4.4), і $s(\sqrt{\lambda}, l) \neq 0$ то $\psi(\lambda) \stackrel{def}{=} \det(c(\sqrt{\lambda}, l)B - A) = 0$.

Зауваження 4.2 *Оскільки сума елементів кожного рядка в матриці $B - A$ дорівнює нулю, зрозуміло, що $z = 1$ є власним значенням $zB - A$. Для зв'язних графів це власне значення є простим (див. лему 1.7 (iv) у [33]).*

4.4 Асимптотика власних значень для простих зв'язних графів, що не є деревами

У цьому розділі ми розглянемо випадок $g \geq p$. Покладемо $q \equiv 0$ тоді $c(\sqrt{\lambda}, l) = \cos \sqrt{\lambda}l$ та $s(\sqrt{\lambda}, l) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}l}{\sqrt{\lambda}}$.

Спектр лінійної операторної в'язки $zB - A$ складається з p (з урахуванням кратностей) власних значень, які є коренями визначника $p \times p$ матриці $zB - A$. Позначимо ці власні значення $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_p$.

Таким чином, якщо $\frac{\sin \sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}} \neq 0$, то λ_k є власним значенням задачі (4.1)–(4.4) тоді і тільки тоді, коли $\cos \sqrt{\lambda_k}l = \alpha_i$ для деякого i , де α_i ($i = 1, 2, \dots, p$) це корені многочлена $\psi(z)$. Якщо $\frac{\sin \sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}} = 0$ та λ_k є власним

значенням задачі (4.1)–(4.4) кратності m , то $\sqrt{\lambda_k} + \frac{2\pi n}{l}$ ($n \in \mathbb{N}$) є власним значенням тієї самої кратності. Беручи до уваги те, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = \frac{\pi^2}{g^2 l^2} \quad (4.11)$$

(див. [65], [4], [69] або [5] Наслідок 1), це означає, що характеристична функція має вигляд

$$\Delta_0(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\sqrt{\lambda}} \right)^{g-p} \psi(\cos \sqrt{\lambda} l). \quad (4.12)$$

Таким чином, власне значення задачі (4.1)–(4.4) є або коренем $s(\sqrt{\lambda}, l)$, або коренем однієї з функцій $c(\sqrt{\lambda}, l) - \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$), де згідно із зауваженням 4.2 $\alpha_p = 1$.

Наступні результати відомі для випадку $q_i \equiv 0$ (див. [5], теорема 1). Зверніть увагу, що ми змінюємо індексацію власних значень.

Теорема 4.2 *Нехай $g \geq p$. У загальному випадку $q_i \neq 0$ власні значення задачі (4.1)–(4.4) можна представити як об'єднання підпоследовностей $\{\sqrt{\lambda_k}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g} \{\sqrt{\lambda_k^{(i)}}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ з наступною асимптотикою ($k = 1, 2, \dots$)*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_{p+1-i} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (4.13)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad i = p+1, p+2, \dots, g, \quad (4.14)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_{i-g} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad i = g+1, g+2, \dots, g+p, \quad (4.15)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } i = g+p+1, g+p+2, \dots, 2g. \quad (4.16)$$

Доведення Завдяки (4.12), у випадку $q_j \equiv 0$ власні значення можуть бути представлені як об'єднання підпоследовностей

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_{p+1-i}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{\pi}{l}, \quad i = p+1, p+2, \dots, g$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_{i-g}, \quad i = g+1, g+2, \dots, g+p$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi k}{l}, \quad i = g+p+1, g+p+2, \dots, 2g.$$

За теоремою 5.4 з [17] ми маємо $|(\lambda_k^{(i)}) - (\tilde{\lambda}_k^{(i)})| = C^{(i)}$, де сталі $C^{(i)} \leq C < \infty$. Це доводить теорему 4.2. \square

З [7] випливає, що асимптотики (4.13)–(4.16) вірні також у випадку, коли $q_j \in L_1(0, l)$.

Оскільки $\alpha_p = 1$ та $\arccos \alpha_p = 0$ приходимо до висновку, що за умов теореми 4.2 існують $g - p + 1$ підпоследовностей з асимптотиками

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{2\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

і ще одна з асимптотикою

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{2\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

4.5 Асимптотика власних значень для випадку дерев

Тепер нехай $g = p - 1$. Оскільки наш граф зв'язний, то він є деревом.

Лемма 4.1 *Якщо зв'язний граф є дводольним, то спектр операторної матричної в'язки $zB - A$ є симетричним відносно початку координат.*

Доведення Якщо $\{a_1, a_2, \dots, a_{p_1}, a_{p_1+1}, \dots, a_p\}$ є власним вектором $zB - A$, що відповідає власному значенню λ , де $\{v_1, v_2, \dots, v_{p_1}\}$ та $\{v_{p_1+1}, \dots, v_p\}$ це дводольне розбиття множини вершин G тоді $\{a_1, a_2, \dots, a_{p_1}, -a_{p_1+1}, \dots, -a_p\}$ є власним вектором $zB - A$, що відповідає власному значенню $-\lambda$. \square

Теорема 4.3 *Нехай T дерево з $p \geq 2$ та $q_i \equiv 0$ для всіх i . Тоді спектр задачі (4.1)–(4.4) збігається з множиною коренів функції*

$$\Delta_0(\lambda) = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l \tilde{\psi}(\cos \sqrt{\lambda} l), \quad \text{де } \tilde{\psi}(z) = (1 - z^2)^{-1} \psi(z).$$

Доведення Завдяки зауваженню 4.2 і леммі 4.1 обидва $\alpha_1 = 1$ та $\alpha_p = -1$ є власними значеннями $zB - A$ для будь-якого дерева. Згідно з теоремою 4.1 рівняння (4.10) справедливе для тих λ для котрих $c^2(\sqrt{\lambda}, l) - 1 \neq 0$. За теоремою 4.1 власні значення задачі (4.1)–(4.4), які не є коренями

$\sin \sqrt{\lambda} l$ є коренями цілої функції $\psi(\cos \sqrt{\lambda} l) \sin^{-2} \sqrt{\lambda} l$. Оскільки кількість (з урахуванням кратності) власних значень на інтервалі $(0, \frac{\pi}{2}]$ дорівнює g (відповідно до (4.11)), ми приходимо до висновку, що характеристична функція має вигляд

$$\Delta_0(\lambda) = \psi(\cos \sqrt{\lambda} l) \frac{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l}{(1 - \cos^2 \sqrt{\lambda} l)} = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l \tilde{\psi}(\cos \sqrt{\lambda} l). \quad \square$$

Теорема 4.4 *Нехай T – дерево. У загальному випадку $q_j \neq 0$ множини власних значень задачі (4.1)–(4.4) можна подати як об'єднання підпоследовностей $\{\sqrt{\lambda_k}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g} \{\sqrt{\lambda_k^{(i)}}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ з наступною асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_{p+1-i} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad i = 2, 3, \dots, p-1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доведення Згідно з теоремою 4.3 у випадку $q_j \equiv 0$ власні значення можна впорядкувати як об'єднання підпоследовностей

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_{p+1-i}, \quad i = 2, 3, \dots, p-1, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.17)$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

За теоремою 5.4 з [23] ми маємо $|(\lambda_k^{(i)}) - (\tilde{\lambda}_k^{(i)})| = C^{(i)}$, де $C^{(i)} \leq C < \infty$. Це доводить теорему 4.4. \square

Зауваження 4.3 З (4.18) ми бачимо, що власні значення $\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(1)}}$ є простими. Якщо ж граф не є деревом, то з (4.16) випливає, що вони кратні. Це дозволяє знаючи спектр, з'ясувати чи є граф деревом.

4.6 Обернена задача

В цьому розділі ми обговорюємо наступне питання: чи спектр задачі (4.1)–(4.4) однозначно визначає форму графу?

Означення 4.1 *Граф називається простим, якщо він не містить петель і кратних ребер.*

Далі ми розглядаємо прості зв'язні графи

Теорема 4.5 *Нехай G простий зв'язний рівнобічний граф з $p \leq 5$. Тоді спектр задачі (4.1)–(4.4) на G з $q_j \equiv 0$ ($j = 1, 2, \dots, g$) однозначно визначає форму графу.*

Доведення Завдяки теоремам 4.2 і 4.4 асимптотики однозначно визначають константи $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$.

Усі прості зв'язні графи з двома, трьома, чотирма та п'ятьма вершинами зображені на рис. 3. (див. [27]).

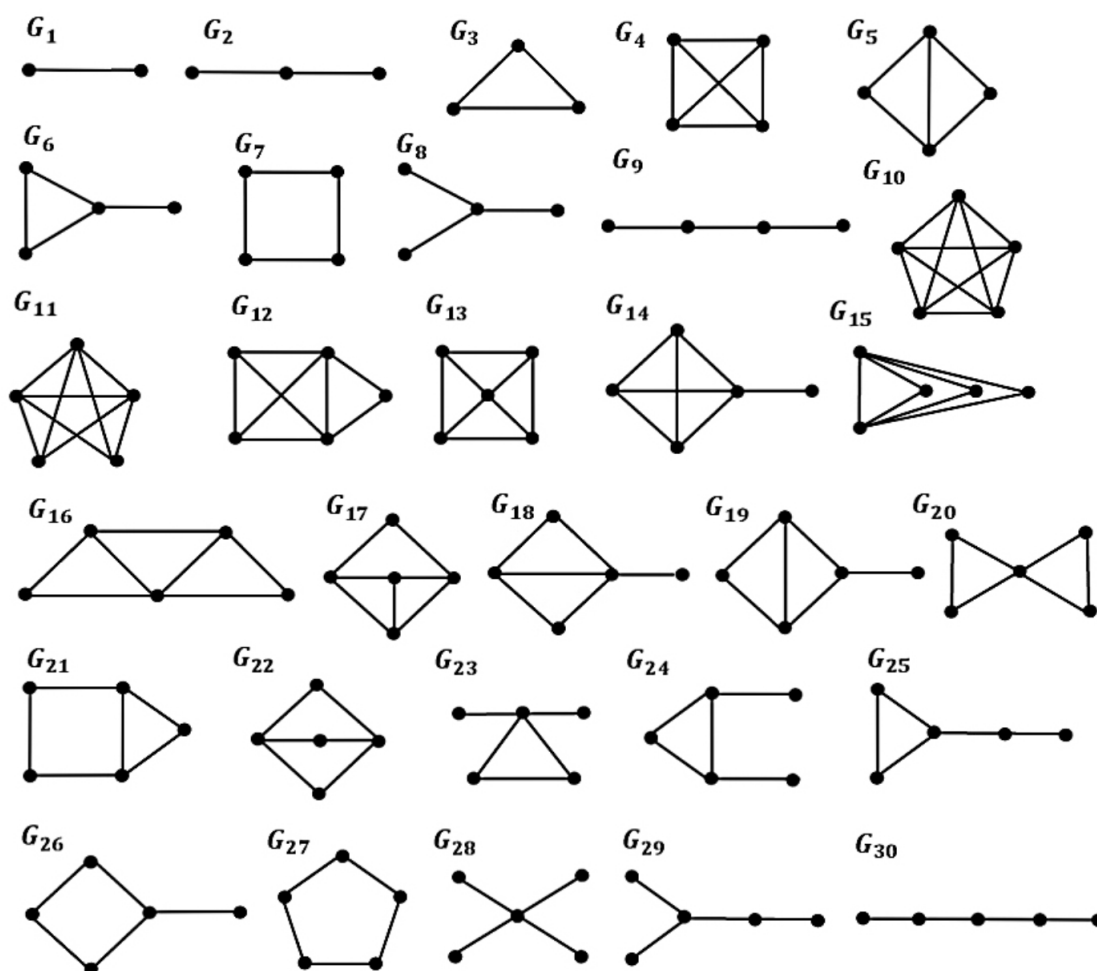


Рис. 3: Прості зв'язні графи з кількістю вершин $p \leq 5$

Відповідні характеристичні функції є

$$\begin{aligned} \phi_1 &= z^2 - 1, & \phi_2 &= -2z^3 + 2z, & \phi_3 &= -8z^3 + 6z + 2, & \phi_4 &= 81z^4 - 54z^2 - 24z - 3, \\ \phi_5 &= 36z^4 - 28z^2 - 8z, & \phi_6 &= 12z^4 - 11z^2 - 2z + 1, & \phi_7 &= 16z^4 - 16z^2, \end{aligned}$$

$$\phi_8 = 3z^4 - 3z^2, \quad \phi_9 = 4z^4 - 5z^2 + 1.$$

$$\begin{aligned} \phi_{10} &= -1024z^5 + 640z^3 + 320z^2 + 60z + 4, \quad \phi_{11} = -576z^5 + 396z^3 + 162z^2 + 18z, \\ \phi_{12} &= -288z^5 + 218z^3 + 74z^2 - 2z - 2, \quad \phi_{13} = -324z^5 + 252z^3 + 72z^2, \\ \phi_{14} &= -108z^5 + 90z^3 + 26z^2 - 6z - 2, \quad \phi_{15} = -128z^5 + 104z^3 + 24z^2, \\ \phi_{16} &= -144z^5 + 124z^3 + 32z^2 - 10z - 2, \quad \phi_{17} = -162z^5 + 144z^3 + 24z^2 - 6z, \\ \phi_{18} &= -48z^5 + 44z^3 + 8z^2 - 4z, \quad \phi_{19} = -54z^5 + 54z^3 + 10z^2 - 8z - 2, \\ \phi_{20} &= -64z^5 + 64z^3 + 16z^2 - 12z - 4, \quad \phi_{21} = -72z^5 + 74z^3 + 8z^2 - 10z, \\ \phi_{22} &= -72z^5 + 72z^3, \quad \phi_{23} = -16z^5 + 16z^3 + 2z^2 - 2z, \quad \phi_{24} = -18z^5 + 20z^3 + 2z^2 - 4z, \\ \phi_{25} &= -24z^5 + 30z^3 + 4z^2 - 8z - 2, \quad \phi_{26} = -24z^5 + 28z^3 - 4z, \\ \phi_{27} &= -32z^5 + 40z^3 - 10z + 2, \quad \phi_{28} = -4z^5 + 4z^3, \quad \phi_{29} = -6z^5 + 8z^3 - 2z, \\ \phi_{30} &= -8z^5 + 12z^3 - 4z. \end{aligned}$$

Ми бачимо, що лише графи G_7 і G_8 мають дискретні лапласіани з однаковим спектром. Однак кількість ребер у цих графах різна. Таким чином, спектри задачі (4.1)-(4.4) на цих графах різні. Це означає, що всі прості зв'язні графи з $p \leq 5$ однозначно визначаються асимптотикою їх спектрів.

Теорема 4.6 *Нехай T – рівнобічне дерево з $p \leq 8$. Тоді спектр задачі (4.1)-(4.4) на T з $q_j = 0$ для всіх j однозначно визначає форму дерева.*

Доведення Усі дерева з шістьма, сімома та вісьма вершинами показані на рис.4 та рис.5.

Відповідні характеристичні функції є

$$\begin{aligned} \phi_{31} &= 5z^6 - 5z^4, \quad \phi_{32} = 8z^6 - 11z^4 + 3z^2, \quad \phi_{33} = 9z^6 - 13z^4 + 4z^2, \\ \phi_{34} &= 12z^6 - 19z^4 + 7z^2, \quad \phi_{35} = 12z^6 - 20z^4 + 9z^2 - 1, \quad \phi_{36} = 16z^6 - 28z^4 + 13z^2 - 1 \\ \phi_{37} &= -6z^7 + 6z^5, \quad \phi_{38} = -10z^7 + 14z^5 - 4z^3, \quad \phi_{39}(z) = -12z^7 + 18z^5 - 6z^3, \\ \phi_{40} &= -16z^7 + 26z^5 - 10z^3, \quad \phi_{41} = -16z^7 + 28z^5 - 14z^3 + 2z, \\ \phi_{42} &= -18z^7 + 30z^5 - 12z^3, \quad \phi_{43} = -18z^7 + 32z^5 - 16z^3 + 2z, \end{aligned}$$

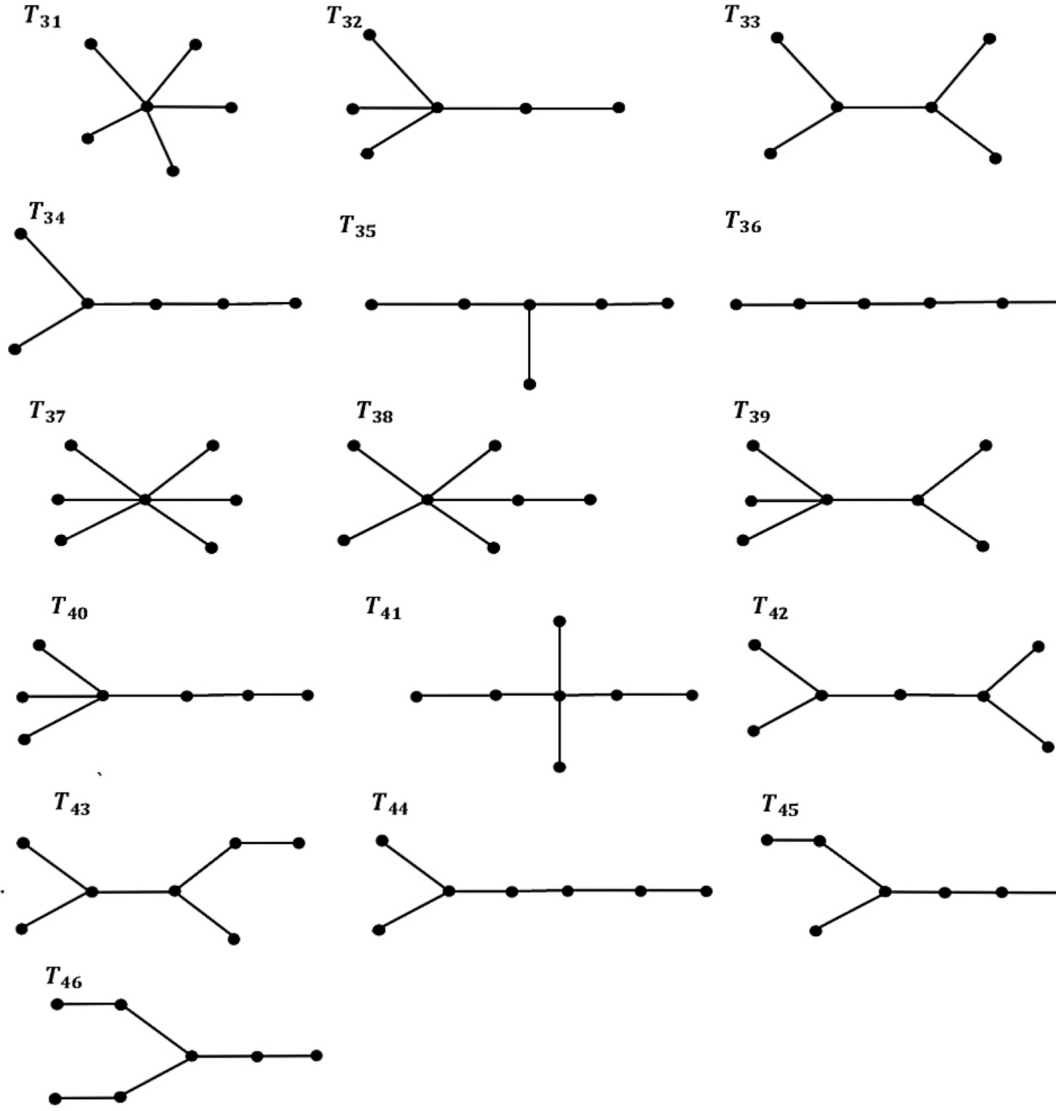


Рис. 4: Дерева з шістью та сімома вершинами

$$\begin{aligned}
\phi_{44} &= -24z^7 + 44z^5 - 22z^3 + 2z, & \phi_{45} &= -24z^7 + 46z^5 - 26z^3 + 4z, \\
\phi_{46} &= -24z^7 + 44z^5 + 2z^4 - 26z^3 - z^2 + 5z, & \phi_{47} &= -32z^7 + 64z^5 - 38z^3 + 6z, \\
\phi_{48}(z) &= 12z^8 - 17z^6 + 5z^4, & \phi_{49}(z) &= 15z^8 - 23z^6 + 8z^4, & \phi_{50}(z) &= 16z^8 - 25z^6 + 9z^4, \\
\phi_{51}(z) &= 20z^8 - 33z^6 + 13z^4, & \phi_{52}(z) &= 20z^8 - 36z^6 + 19z^4 - 3z^2, \\
\phi_{53}(z) &= 24z^8 - 41z^6 + 17z^4, & \phi_{54}(z) &= 24z^8 - 44z^6 + 23z^4 - 3z^2, \\
\phi_{55}(z) &= 24z^8 - 45z^6 + 25z^4 - 4z^2, & \phi_{56}(z) &= 32z^8 - 60z^6 + 31z^4 - 3z^2, \\
\phi_{57}(z) &= 27z^8 - 51z^6 + 28z^4 - 4z^2, & \phi_{58}(z) &= 32z^8 - 64z^6 + 39z^4 - 7z^2,
\end{aligned}$$

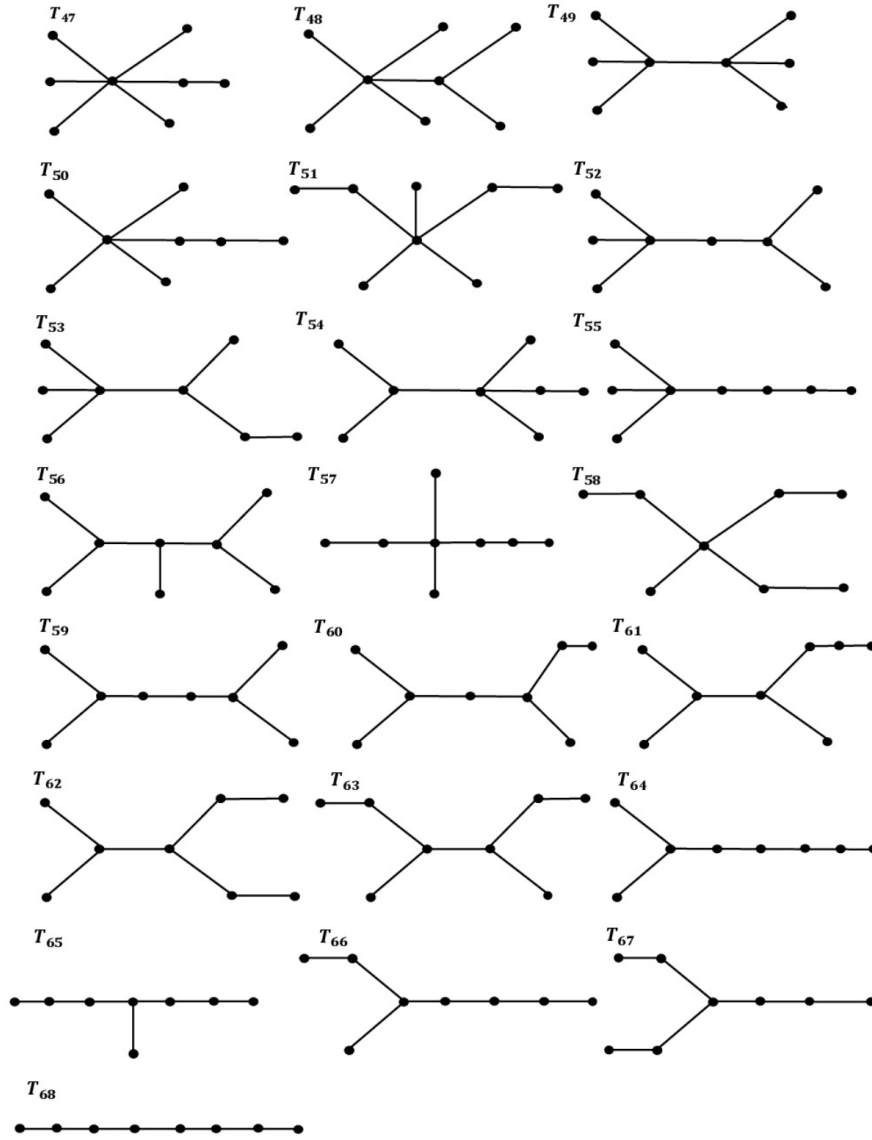


Рис. 5: Дерева з вісьма вершинами

$$\phi_{59}(z) = 32z^8 - 68z^6 + 48z^4 - 13z^2 + 1, \quad \phi_{60}(z) = 36z^8 - 69z^6 + 37z^4 - 4z^2,$$

$$\phi_{61}(z) = 36z^8 - 72z^6 + 43z^4 - 7z^2, \quad \phi_{62}(z) = 36z^8 - 73z^6 + 45z^4 - 8z^2,$$

$$\phi_{63}(z) = 36z^8 - 76z^6 + 51z^4 - 11z^2, \quad \phi_{64}(z) = 36z^8 - 76z^6 + 52z^4 - 13z^2 + 1,$$

$$\phi_{65}(z) = 48z^8 - 100z^6 + 63z^4 - 11z^2, \quad \phi_{66}(z) = 48z^8 - 104z^6 + 71z^4 - 15z^2,$$

$$\phi_{67}(z) = 48z^8 - 104z^6 + 72z^4 - 17z^2 + 1, \quad \phi_{68}(z) = 48z^8 - 108z^6 + 80z^4 - 21z^2 + 1,$$

$$\phi_{69}(z) = 64z^8 - 144z^6 + 104z^4 - 25z^2 + 1, \quad \phi_{70} = 7z^8 - 7z^6.$$

Ми бачимо, що серед цих характеристичних функцій немає пари з однаковими спектрами. Це означає, що всі дерева з $p \leq 8$ однозначно визначаються асимптотикою своїх спектрів. \square

Наслідок 4.1

1. Нехай G простий зв'язний рівнобічний граф з $p \leq 5$. Тоді спектр задачі (4.1)–(4.4) на G однозначно визначає форму графу.

2. Нехай T – рівнобічне дерево з $p \leq 8$. Тоді спектр задачі (4.1)–(4.4) на T однозначно визначає форму дерева.

Доведення Скористаємося тим, що згідно з доведеним у теоремі 5.4 з [17] потенціали $q_j \in L_2(0; l)$ не впливають на перші два доданки в асимптотичних формулах для власних значень, а становлять внески порядку $O(\frac{1}{k})$. Наслідок доведено. \square

4.7 "Геометрична" теорема Амбарцумяна

Історія оберненої задачі Штурма-Ліувіля почалася з теореми Амбарцумяна. Ця теорема полягає в наступному:

Теорема 4.7 [Теорема Амбарцумяна] *Нехай власні значення спектральної задачі*

$$-y'' + q(x)y = zy \tag{4.19}$$

$$y'(0) = y'(a) = 0 \tag{4.20}$$

з дійсним $q \in C[0, a]$ є

$$z_k = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} \tag{4.21}$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$

Тоді $q(x) \equiv 0$.

Пізніше виявилось, що випадок умов Неймана (4.20) на обох кінцях інтервалу та незбуреного спектра є винятком, і в більшості випадків потрібно знати два спектри крайових задач, щоб знайти потенціал q (див., напр. [60], [61], [68]). Однак існують узагальнення теореми Амбарцумяна (див. [20], [21], [22], [42], [44], [47], [82], [78], [86]) [87], [57], [88], [90], [50] в яких

задана форма графу, а мета полягає в тому, щоб довести, що потенціали на ребрах дорівнюють нулю.

В [7] було доведено «геометричну» теорему Амбацумяна, а саме показано, що спектр вигляду (4.21) однозначно визначає не тільки те, що $q_j = 0$ майже всюди на всіх ребрах, але й форму графу, в даному випадку це відрізок .

Теорема 4.8 *Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ($\alpha_p = 1$) корені одного з многочленів ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, 30$) перерахованих в доведенні теореми 4.5. Нехай спектр задачі (4.1)–(4.4) складаються з підпоследовностей ($k = 1, 2, \dots$)*

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad (4.22)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_{p+1-i} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad i = 2, 3, \dots, p, \quad (4.23)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{\pi}{l} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad i = p+1, p+2, \dots, g, \quad (4.24)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_{i-g} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } i = g+1, g+2, \dots, g+p-1, \quad (4.25)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(g+p)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad (4.26)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } i = g+p+1, g+p+2, \dots, 2g. \quad (4.27)$$

де $\lambda_1^{(1)} = 0$ є найменшим власним значенням.

Тоді граф є одним з графів G_j показаних на рис. 3 і $q_j \equiv 0$ ($j = 1, 2, \dots, g$).

Доведення Завдяки (4.22), (4.26), (4.27) та $\lambda_1^{(1)} = 0$ умови теореми 1.2 з [48], [50] задовільняються, таким чином $q_j = 0$ майже для всіх x та всіх j . Тому,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_k^{(1)}} &= \frac{2\pi(k-1)}{l}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_{p+1-i} \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, p, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{\pi}{l} \quad \text{for } i = p+1, p+2, \dots, g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_{i-g} \quad \text{for } i = g+1, g+2, \dots, g+p-1, \\ \sqrt{\lambda_k^{(g+p)}} &= \frac{2\pi k}{l}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi k}{l} \quad \text{for } i = g+p+1, g+p+2, \dots, 2g.\end{aligned}$$

Таким чином, ми можемо визначити форму графа за допомогою теореми 4.2. \square

Приклад Якщо $\lambda_1^{(1)} = 0$ є найменшим власним значенням і $\{\sqrt{\lambda_k}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty = \bigcup_{i=1}^{14} \{\sqrt{\lambda_k^{(i)}}\}_{-\infty, k \neq 0}^\infty$ з наступною асимптотикою ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_k^{(1)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + o\left(\frac{1}{k}\right), \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{\pi}{2l} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{for } i = 2, 3 \\ \sqrt{\lambda_k^{(4)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right), \\ \sqrt{\lambda_k^{(5)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right), \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{\pi}{l} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } i = 6, 7, \\ \sqrt{\lambda_k^{(8)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right), \\ \sqrt{\lambda_k^{(9)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right), \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{\pi}{2l} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{for } i = 10, 11, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } i = 12, 13, 14.\end{aligned}$$

Тоді граф є G_{15} та $q_j = 0$ для $j = 1, \dots, 14$.

Теорема 4.9 *Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ($\alpha_p = 1$) корені будь-якого з многочленів ϕ_j ($j = 31, 32, \dots, 70$) перераховані в доведенні теореми 4.5. Нехай спектр задачі (4.1)–(4.4) на дереві складаються з підпоследовностей (4.17) та (4.18) ($k = 1, 2, \dots$) де $\lambda_1^{(1)} = 0$ є найменшим власним значенням.*

Тоді граф є G_j показаний на рис. 2 або рис. 3 і $q_j = 0$ майже всюди для всіх $j = 1, 2, \dots, g$.

4.8 Висновки до розділу 4

У цьому розділі розглянута обернена задача Штурма-Ліувілля на простих звязних графах. Показано, що, якщо кількість вершин у простому звязному графі не перевищує п'яти, то спектр задачі однозначно визначає форму графу. У випадку дерев, показано, що якщо кількість вершин не перевищує восьми, то спектр задачі однозначно визначає форму графу.

РОЗДІЛ 5

5 Спектральні задачі з різними умовами на висячих вершинах

5.1 Історія

У [54], [7] була доведена “геометрична” теорема Амбарцумяна, котра стверджує, що, якщо спектр задачі Штурма-Ліувілля з крайовими умовами Неймана такий як у випадку задачі на інтервалі з умовами Неймана на кінцях та з тотожно нульовим потенціалом, то цей граф є P_2 і потенціал майже всюду дорівнює нулю. У [23] “геометрична” теорема Амбарцумяна була доведена для всіх зв’язних простих рівнобічних графів, кількість вершин яких не перевищує 5 та для дерев з кількістю вершин ≤ 8 . Зокрема ця теорема стверджує, що у цих випадках спектр задачі Штурма-Ліувілля однозначно визначає форму графа.

Однак, цей результат не може бути поширений на випадок простих зв’язних рівнобічних графів з шістьма вершинами. Так графи, зображені на рис. 6 мають однакові перший і другий члени асимптотики власних значень, тобто, наприклад, у випадку нульових потенцілів на ребрах ці графи є коспектральними у квантовомеханічному сенсі (див. нижче теорему 5.6). Цікаво, що ці графи можна отримати розділенням вершини у графі K_5 на дві і отже вони належать до класу так званих пухнастих куль (fuzzy balls, див. [13]).

Виявляється, що співпадіння спектрів дискретних лапласіанів, ще не означає співпадіння першого і другого членів асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля. Додатково потрібно щоб була однаковою кількість ребер графа. Наприклад, графи, зображені на рис. 7 мають однакові спектри дискретних лапласіанів $\{-1, 0, 0, 1\}$, але різні перший і другий члени асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля, бо в них рі-

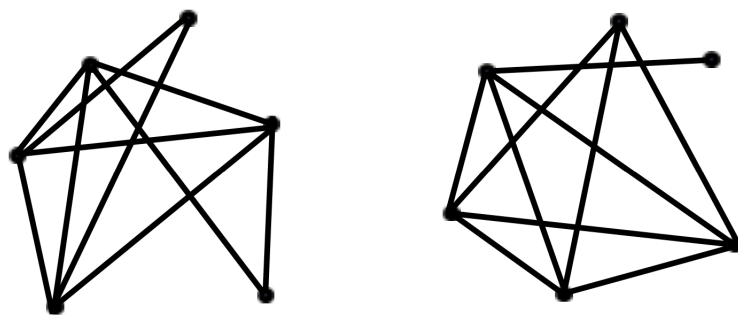


Рис. 6: Неізоморфні графи з 6 вершинами і з однаковими першим і другим членами асимптотики власних значень задачі Штурма - Ліувілля. Див. теорему 5.6

зна кількість ребер. Тому в подальшому, шукаючи коспектральні графи, ми будемо розглядати прості зв'язні рівнобічні графи з однаковою кількістю ребер і однаковими спектрами дискретних лапласіанів.

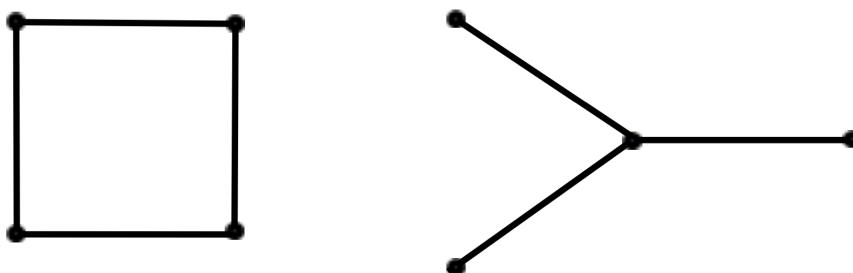


Рис. 7: Неізоморфні графи з однаковим спектром дискретного лапласіана, не коспектральні у квантовомеханічному сенсі

Відомо [23], що власні значення дискретного лапласіана можна знайти з асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля на графі не тільки у випадку “амбарцумянівської” асимптотики. Тому припускаючи, що потенціали на ребрах - дійсні L_2 функції, ми залишаємо їх поза увагою і ставимо питання: чи можемо ми знайти форму простого зв'язного рівнобічного графа, використовуючи асимптотику власних значень задачі Штурма-Ліувілля з умовами Неймана на висячих вершинах і узагальнени-

ми умовами Неймана на внутрішніх вершинах? Також нас цікавить яку інформацію про форму графа можна отримати з асимптотики власних значень у випадку задачі Штурма-Ліувілля з умовами Діріхле на висячих вершинах. Слід зазначити, що проблема коспектральності для задач з умовами Діріхле на деяких з вершин розглядалася у [3] та [70], де запропонований метод побудови сімей коспектральних графів який використовує лінійні зображення скінченних груп.

У підрозділі 5.2 ми описуємо спектральну задачу Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі з узагальненими умовами Неймана на внутрішніх вершинах та умовами Неймана на висячих вершинах і другу задачу, котра відрізняється від першої умовами Діріхле на висячих вершинах.

У підрозділі 5.3 ми наводимо деякі допоміжні результати. Ми розглядаємо асоційовану скінченновимірну спектральну задачу і показуємо зв'язок між спектром задачі Штурма-Ліувілля на метричному графі і спектром дискретного лапласіана цього графа у випадку задачі з умовами Неймана на висячих вершинах. Також ми описуємо зв'язок між спектром задачі Штурма-Ліувілля та спектром модифікованого дискретного лапласіана внутрішнього підграфа у випадку задачі з умовами Діріхле на висячих вершинах.

У підрозділі 5.4 ми нагадуємо, що для простих зв'язних рівнобічних графів з кількістю вершин $p \leq 5$ перший та другий члени асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля з умовами Неймана на висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана у внутрішніх вершинах однозначно визначають форму графа. Такий же результат справедливий для дерев, кількість вершин у яких не перевищує 8. Ми показуємо, що серед простих зв'язних рівнобічних графів з 6 вершинами існує тільки одна пара з однаковими першим і другим членами асимптотики власних значень.

У підрозділі 5.5 ми розглядаємо спектральну задачу Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі з умовами Діріхле на висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана у внутрішніх вершинах. Тіль-

ки у деяких випадках (подвійна зірка) перший і другий члени асимптотики однозначно визначають форму графа. Однак, більше інформації ми можемо отримати щодо форми внутрішнього підграфа, тобто підграфа, отриманого видаленням всіх вершин разом з інцидентними з ними ребрами (листами).

5.2 Постановка задач

Нехай G - простий зв'язний рівнобічний граф з g ребрами довжини l кожне, p вершинами, p_{pen} висячими вершинами. Позначимо через v_i вершини, через $d(v_i)$ їх степені, через e_j ребра графа. Спрямуємо ребра, інцидентні з висячими вершинами від висячих вершин. Орієнтація всіх інших ребер нехай буде довільною. Так, для внутрішньої вершини v_i ми розглядаємо її степінь входу $d^+(v_i)$ і степінь виходу $d^-(v_i) = d(v_i) - d^+(v_i)$. Позначимо через $W^-(v_i)$ множину індексів j_s ($s = 1, 2, \dots, d^-(v_i)$) ребер, що виходять з v_i , а через $W^+(v_i)$ множину індексів k_s ($s = 1, 2, \dots, d^+(v_i)$) ребер, що входять у v_i . Локальні координати на ребрах ототожнюють кожне ребро e_j з інтервалом $[0, l]$ так, що локальна координата зростає у напрямку ребра. Це означає, що кожна висяча вершина має координату 0.

Кожна внутрішня вершина має локальну координату l на кожному вхідному ребрі та координату 0 на кожному вихідному ребрі. Функції y_j на ребрах мають задовольняти g скалярних рівнянь Штурма-Ліувілля

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad (j = 1, 2, \dots, g), \quad (5.1)$$

де q_j - дійсні $L_2(0, l)$ -функції. У внутрішній вершині v_i з вихідними ребрами e_j ($j \in W^-(v_i)$) та вхідними ребрами e_k ($k \in W^+(v_i)$) накладаємо умови неперервності

$$y_j(0) = y_k(l), \quad (5.2)$$

та умову Кірхгофа

$$\sum_{k \in W^+(v_i)} y'_k(l) = \sum_{j \in W^-(v_i)} y'_j(0). \quad (5.3)$$

Накладаємо умови Неймана:

$$y'_j(0) = 0, \quad (5.4)$$

у висячих вершинах v_j ($j = r + 1, r + 2, \dots, p_{pen}$) та умови Діріхле

$$y_j(0) = 0 \quad (5.5)$$

у решті висячих вершин v_j ($j = 1, 2, \dots, r, 0 \leq r \leq p_{pen}$).

Позначимо через $s_j(\sqrt{\lambda}, x)$ розв'язок рівняння Штурма-Ліувілля (5.1) на ребрі e_j , який задовольняє умови $s_j(\sqrt{\lambda}, 0) = s'_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$, а через $c_j(\sqrt{\lambda}, x)$ розв'язок, який задовольняє умови $c_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'_j(\sqrt{\lambda}, 0) = 0$. Тоді *характеристична функція* $\phi(\lambda)$, тобто ціла функція, множина чийх коренів співпадає зі спектром задачі (5.1)-(5.5) може бути виражена через $s_j(\sqrt{\lambda}, l)$, $s'_j(\sqrt{\lambda}, l)$, $c_j(\sqrt{\lambda}, l)$ та $c'_j(\sqrt{\lambda}, l)$. Для цього розглянемо систему вектор-функцій $\psi_j(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, s_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$ та $\psi_{j+g}(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, c_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$ для $j = 1, 2, \dots, g$. Позначимо через L_j ($j = 1, 2, \dots, 2g$) лінійні функціонали породжені рівняннями (5.1)-(5.5). Тоді $\Phi(\lambda) = \|L_j(\psi_k(\lambda, l))\|_{j,k}^{2g}$ - це характеристична матриця, яка представляє систему лінійних рівнянь, що описують умови неперервності та умови Кірхгофа у внутрішніх вершинах. Тоді назвемо

$$\phi(\lambda) := \det(\Phi(\lambda))$$

характеристичною функцією задачі (5.1)-(5.5).

5.3 Допоміжні результати

Для простого графа матриця $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^p$ де $A_{i,i} = 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, p$, а для всіх

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i \text{ та } v_j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{якщо не суміжні,} \end{cases}$$

називається матрицею *суміжності*.

Нехай

$$D = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$$

матриця степенів вершин. Тоді

$$\tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2}$$

назвемо *дискретним лапласіаном*.

Нехай G - простий зв'язний рівнобічний граф з $g \geq 2$ ребрами. Нехай r ($0 \leq r \leq p_{pen}$) - кількість висячих вершин з умовою Діріхле. Ми накладаємо умову Неймана на решті висячих вершин. Позначимо через \hat{G} граф, отриманий шляхом видалення висячих вершин, на яких накладені умови Діріхле, та інцидентних з ними ребер. Для зручності позначимо вершини графа \hat{G} через $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_p$. Нехай \hat{A} - матриця суміжності графа \hat{G} . Позначимо через $\hat{D}_G = \text{diag}\{d(v_{r+1}), d(v_{r+2}), \dots, d(v_p)\}$, де $d(v_i)$ степінь вершини v_i у графі G . Ми розглянемо многочлен

$$P_{G, \hat{G}}(z) := \det(z\hat{D}_G - \hat{A}).$$

Наступна теорема була доведена у [66] (теорема 6.4.2).

Теорема 5.1 *Нехай G - простий зв'язний рівнобічний граф з не менше ніж двома ребрами з довжиною ребра l та з однаковим потенціалом на ребрах, симетричним відносно середини ребра ($q(l-x) = q(x)$).*

Тоді спектр задачі (5.1)–(5.5) співпадає з множиною коренів характеристичної функції

$$\phi_D(\lambda) = s^{g-p+r}(\sqrt{\lambda}, l)P_{G, \hat{G}}(c(\sqrt{\lambda}, l)),$$

де $s(\sqrt{\lambda}, x)$ та $c(\sqrt{\lambda}, x)$ - розв'язки рівняння Штурма-Ліувілья на ребрі, які задовольняють умови $s(\sqrt{\lambda}, 0) = s'(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$ та $c(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'(\sqrt{\lambda}, 0) = 0$.

5.4 Спектральна задача у випадку умов Неймана на висячих вершинах графа

В цьому розділі ми розглядаємо випадок умов Неймана на всіх висячих вершинах ($r = 0$), тобто задачу (5.1)–(5.4).

Теорема 5.2 (Теорема 4.1 у [23]). *Нехай $g \geq p$. Власні значення задачі (5.1)–(5.4) можна подати як об'єднання підпоследовностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{p+g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ з наступною асимптотикою ($k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$).*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p, \quad (5.6)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p, \quad (5.7)$$

i, якщо $g > p$,

$$\sqrt{\lambda_k^{(2p+i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, g - p, \quad (5.8)$$

де $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ - власні значення дискретного лапласіана.

Тепер з'ясуємо, яку інформацію про форму графу можна отримати з асимптотики власних значень.

Теорема 5.3 *Нехай $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ - це спектр задачі (5.1)–(5.4) ($r = 0$) для простого зв'язного рівнобічного графа, який складається з підпоследовностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{p+g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p)}} = \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p,$$

та, якщо $g > p$,

$$\sqrt{\lambda_k^{(2p+i)}} = \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, g - p$$

де $0 < p \leq 5$, $p \leq g$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Тоді цей спектр однозначно визначає форму графу та довжину його ребра.

Доведення З теореми 5.4 статті [23] випливає, що $|\lambda_k^{(j)} - \tilde{\lambda}_k^{(j)}| \leq C < \infty$, де $\tilde{\lambda}_k^{(j)}$ - власні значення задачі (5.1)–(5.4) на тому ж графі з $q_j \equiv 0$ для всіх j , тому присутність потенціалів не впливає на перший і другий члени асимптотики власних значень. За умов нашої теореми $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{p+g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ - спектр задачі (5.1)–(5.4) на простому зв'язному графі, тому спектр такої задачі з тотожно нулевими потенціалами на ребрах може бути поданий, як об'єднання підпоследовностей з асимптотикою

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i+p)}} = \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p,$$

та, якщо $g > p$,

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(2p+i)}} = \frac{\pi k}{l} \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, g-p.$$

Всі можливі спектри задачі (5.1)–(5.4) на простих зв'язних графах з асимптотиками (5.6)–(5.8) описані у [23], де $\gamma_i = \frac{1}{l} \arccos \alpha_i$, а $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ - власні значення відповідних дискретних лапласіанів. Відповідні графи представлені на рис.3.

Таким чином, множина $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ та кількість ребер g однозначно визначає форму графа, якщо $p \leq 5$. Множину $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ та кількість ребер g , а також довжину ребра l можна знайти з асимптотики. \square

Теорема 5.4 (Теорема 5.3 з [23]) *Нехай T - дерево. Власні значення задачі (5.1)–(5.4) ($r = 0$) можна подати як об'єднання підпоследовностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2p-3} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ з наступною асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad (5.9)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p-2)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad (5.10)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (5.11)$$

Тут $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p = -1$ - власні значення дискретного лапласіана \tilde{A} .

Доведення наступної теореми повторює доведення Теореми 5.3 з відповідними змінами.

Теорема 5.5 *Нехай спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачі (5.1)–(5.4) на простому зв'язному рівнобичному графі складається з підпоследовностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{2p-3} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1,$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p-2)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1,$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

з $0 < p \leq 8$.

Тоді цей граф - дерево, множина $\{\alpha_i\}_{i=2}^{p-1}$, де $\alpha_i = \cos \gamma_i l$, та довжина ребра l , отримана з першого члена асимптотики, однозначно визначають форму дерева.

Всі можливі спектри, що відповідають деревам з кількістю вершин $p \in \{6, 7, 8\}$ складаються з підпоследовностей (5.9)–(5.11), де $\gamma_i = \frac{1}{l} \arccos \alpha_i$, а $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ - власні значення відповідного дискретного лапласіана, тобто корені одного з многочленів, наведених нижче. Відповідні дерева показані у рисунках 4 та 5.

З доведення теореми 5.3 зрозуміло, що, дивлячись на перші два члени асимптотики, ми не можемо розрізнити два графи, лише якщо кількість вершин однакова, кількість ребер однакова та множини $\{\alpha_k\}_{k=1}^p$ для цих двох графів збігаються. Це означає, що характеристичний многочлен $\det(zI - \tilde{A})$, який відповідає одному з графів, є кратним характеристичному многочлену іншого. Усі прості зв'язні графи, крім дерев із 6 вершинами, показані на рисунках 8-11.

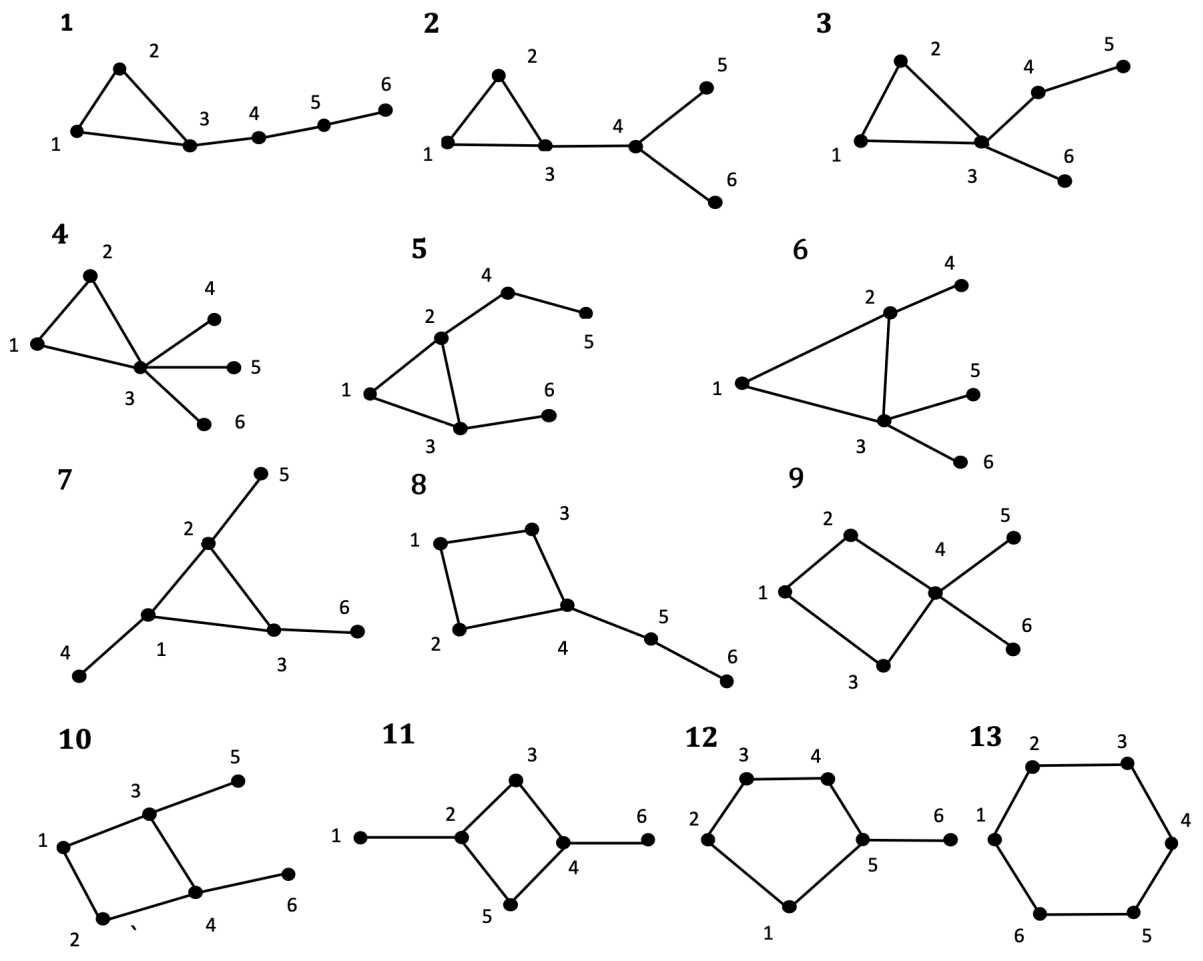


Рис. 8: Прості звязні графи з шістьома вершинами, котрі мають один цикл

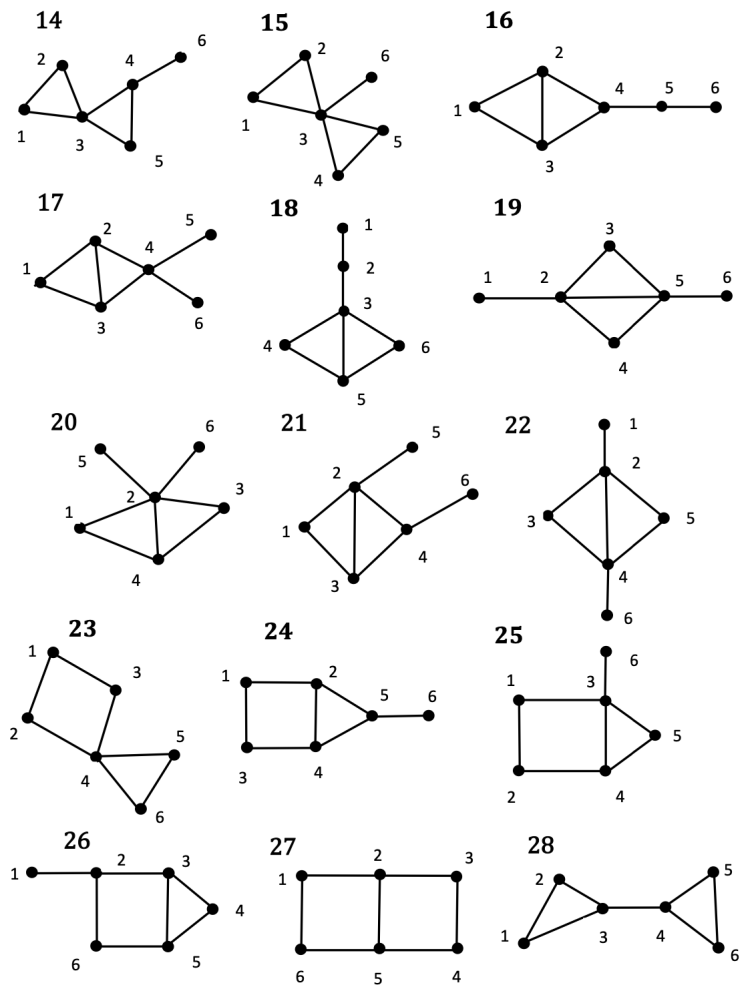


Рис. 9: Прості звязні графи з шістьма вершинами, котрі мають два цикли

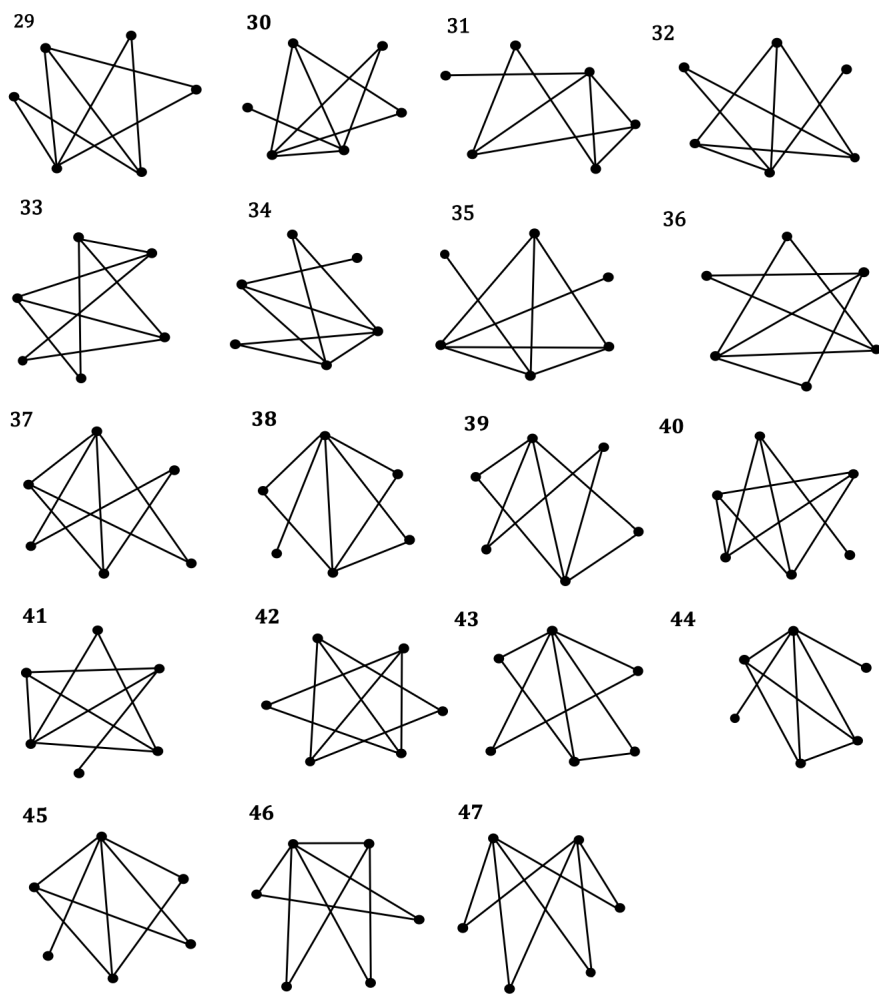


Рис. 10: Прості звязні графи з шістьома вершинами, котрі мають три цикли

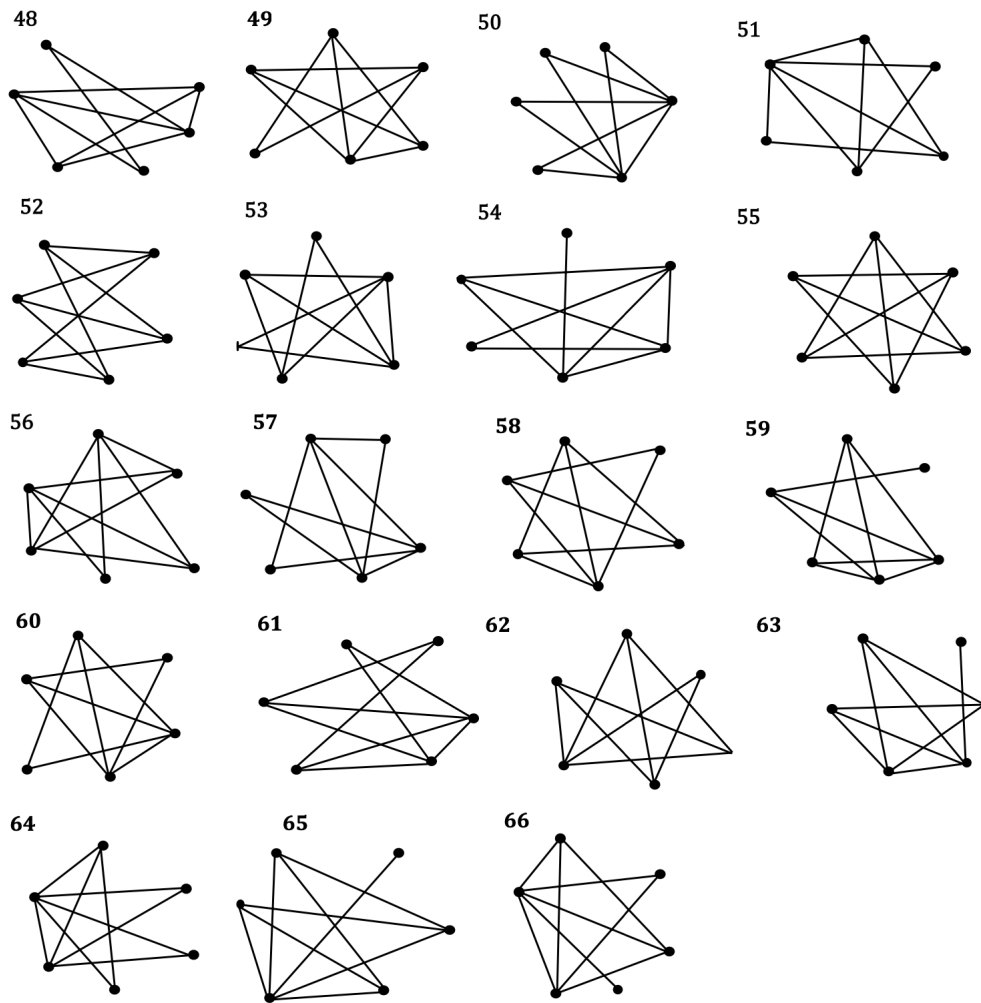


Рис. 11: Прості звязні графи з шістьома вершинами, котрі мають чотири цикли

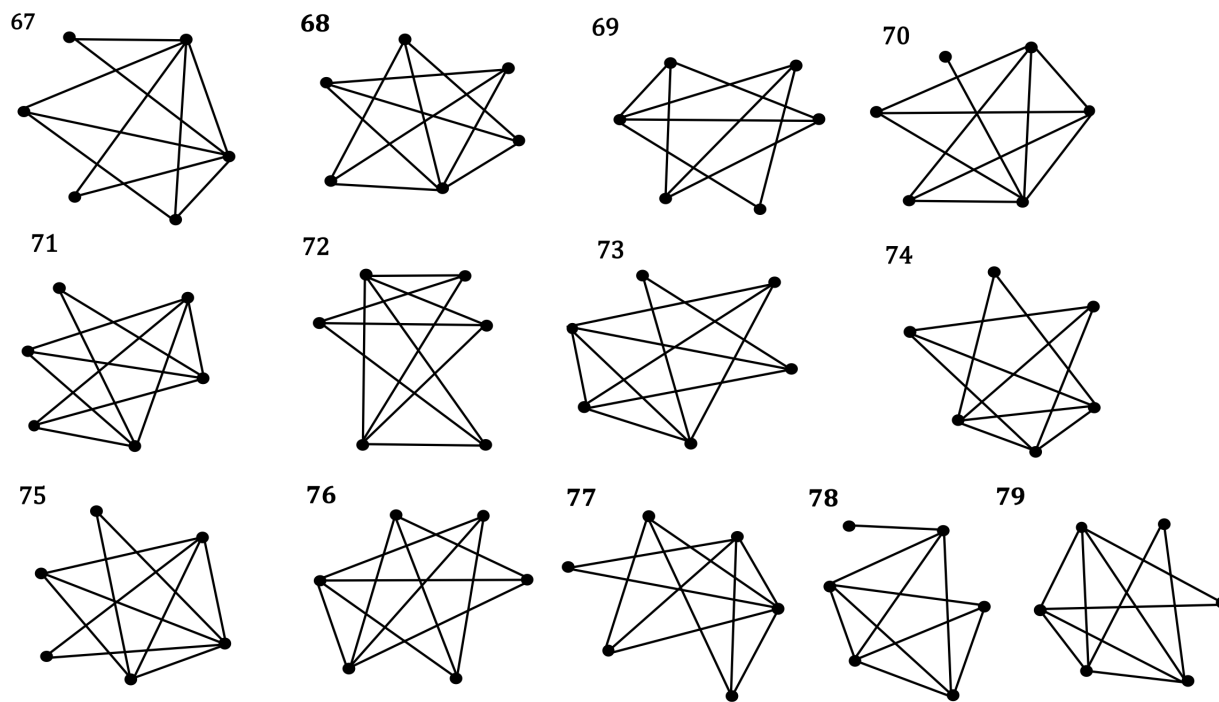


Рис. 12: Прості звязні графи з шістьма вершинами, котрі мають п'ять циклів

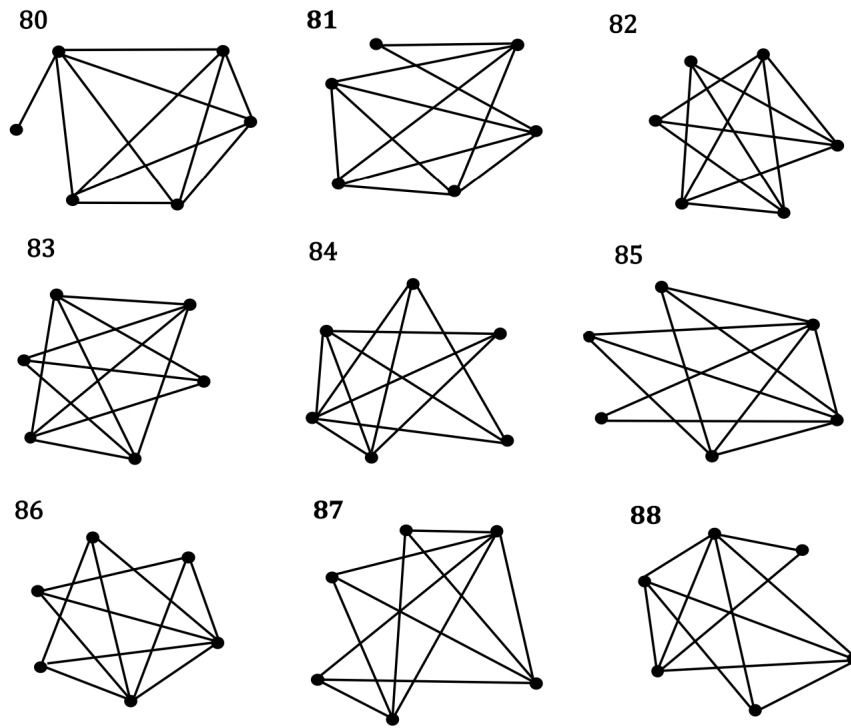


Рис. 13: Прості звязні графи з шістьма вершинами, котрі мають шість циклів

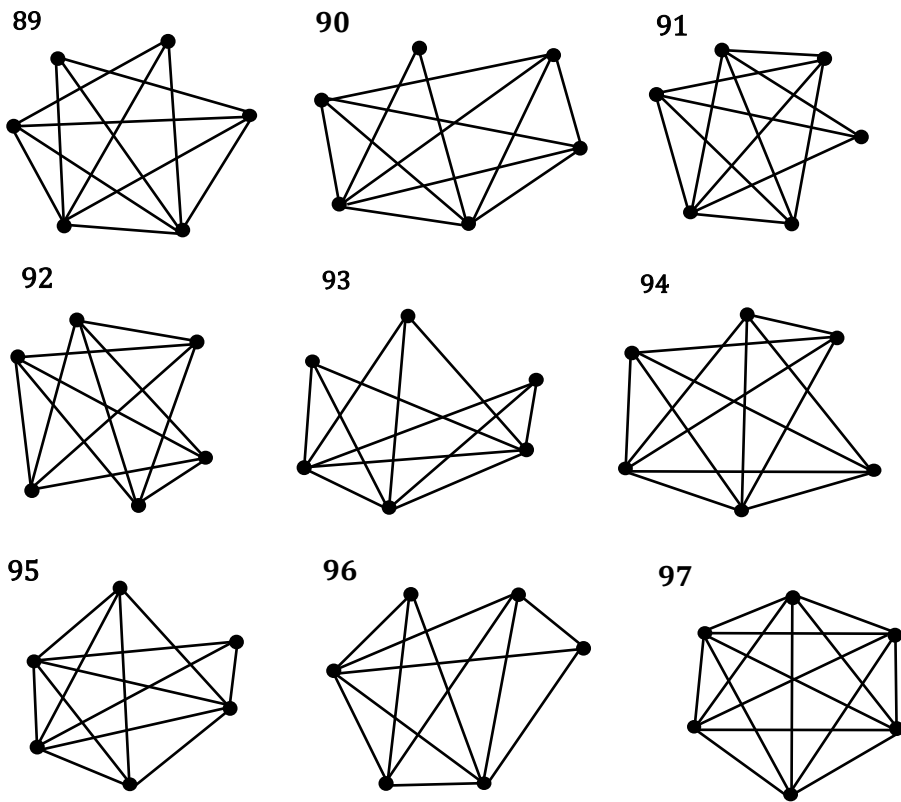


Рис. 14: Прості звязні графи з шістьма вершинами, котрі мають сім, вісім, дев'ять та десять циклів

Нижче наведено відповідні визначники дискретних лапласіанів

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 48z^6 - 72z^4 - 8z^3 + 27z^2 + 6z - 1, \\ \phi_2 &= 36z^6 - 49z^4 - 6z^3 + 15z^2 + 4z, \\ \phi_3 &= 32z^6 - 44z^4 - 4z^3 + 15z^2 + 2z - 1, \\ \phi_4 &= 20z^6 - 21z^4 - 2z^3 + 3z^2, \\ \phi_5 &= 36z^6 - 52z^4 - 4z^3 + 19z^2 + 2z - 1, \\ \phi_6 &= 24z^6 - 29z^4 - 2z^3 + 7z^2, \\ \phi_7 &= 27z^6 - 36z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 1, \\ \phi_8 &= 48z^6 - 72z^4 + 24z^2, \\ \phi_9 &= 32z^6 - 40z^4 + 8z^2, \\ \phi_{10} &= 36z^6 - 49z^4 + 14z^2 - 1, \\ \phi_{11} &= 36z^6 - 49z^4 - 6z^3 + 15z^2 + 4z, \\ \phi_{11} &= 36z^6 - 48z^4 + 12z^2, \\ \phi_{12} &= 48z^6 - 68z^4 - 4z^3 + 21z^2 - z - 1, \\ \phi_{13} &= 64z^6 - 96z^4 - 36z^2 - 4, \\ \phi_{14} &= 96z^6 - 116z^4 - 20z^3 + 33z^2 + 8z - 1, \\ \phi_{15} &= 80z^6 - 88z^4 - 16z^3 + 21z^2 + 4z - 1, \\ \phi_{16} &= 108z^6 - 114z^4 + 44z^2 + 12z, \\ \phi_{17} &= 72z^6 - 88z^4 - 16z^3 + 21z^2 + 4z - 1, \\ \phi_{18} &= 96z^6 - 124z^4 - 16z^3 + 36z^2 + 8z, \\ \phi_{19} &= 64z^6 - 68z^4 - 8z^3 + 12z^2, \\ \phi_{20} &= 60z^6 - 60z^4 - 8z^3 + 8z^2, \\ \phi_{21} &= 72z^6 - 83z^4 - 10z^3 + 20z^2 + 2z - 1, \\ \phi_{22} &= 81z^6 - 99z^4 - 12z^3 + 27z^2 + 4z - 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{23} &= 128z^6 - 160z^4 - 16z^3 + 40z^2 + 8z, \\
\phi_{24} &= 108z^6 - 135z^4 - 8z^3 + 35z^2, \\
\phi_{25} &= 96z^6 - 112z^4 - 8z^3 + 25z^2 - 1, \\
\phi_{26} &= 108z^6 - 132z^4 - 12z^3 + 33z^2 + 4z - 1, \\
\phi_{27} &= 144z^6 - 184z^4 + 41z^2 - 1, \\
\phi_{28} &= 144z^6 - 160z^4 - 36z^3 + 43z^2 + 17z + 1, \\
\phi_{29} &= 288z^6 - 308z^4 - 24z^3 + 44z^2, \\
\phi_{30} &= 192z^6 - 196z^4 - 36z^3 + 35z^2 + 6z - 1, \\
\phi_{31} &= 216z^6 - 228z^4 - 24z^3 + 36z^2, \\
\phi_{32} &= 216z^6 - 171z^4 - 28z^3 + 7z^2, \\
\phi_{33} &= 324z^6 - 360z^4 + 36z^2, \\
\phi_{34} &= 192z^6 - 204z^4 - 32z^3 + 36z^2 + 8z, \\
\phi_{35} &= 144z^6 - 145z^4 - 28z^3 + 26z^2 + 4z - 1, \\
\phi_{36} &= 288z^6 - 312z^4 - 48z^3 + 68z^2 + 8z - 4, \\
\phi_{37} &= 288z^6 - 296z^4 - 20z^3 + 53z^2 + 5z - 1, \\
\phi_{38} &= 160z^6 - 148z^4 - 24z^3 + 12z^2, \\
\phi_{39} &= 256z^6 - 272z^4 - 32z^3 + 48z^2, \\
\phi_{40} &= 243z^6 - 270z^4 - 36z^3 + 51z^2 + 12z, \\
\phi_{41} &= 216z^6 - 237z^4 - 42z^3 + 51z^2 + 12z, \\
\phi_{42} &= 324z^6 - 360z^4 - 72z^3 + 84z^2 + 24z, \\
\phi_{43} &= 240z^6 - 252z^4 - 56z^3 + 53z^2 + 16z, \\
\phi_{44} &= 135z^6 - 126z^4 - 28z^3 + 15z^2 + 4z, \\
\phi_{45} &= 180z^6 - 176z^4 - 32z^3 + 27z^2 + 2z - 1, \\
\phi_{46} &= 240z^6 - 252z^4 - 56z^3 + 52z^2 + 16z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{47} &= 256z^6 - 256z^4, \\
\phi_{48} &= 576z^6 - 580z^4 - 112z^3 + 92z^2 + 24z, \\
\phi_{49} &= 648z^6 - 648z^4 - 108z^3 + 104z^2 + 8z - 4, \\
\phi_{50} &= 400z^6 - 336z^4 - 64z^3, \\
\phi_{51} &= 540z^6 - 516z^4 - 120z^3 + 77z^2 + 20z - 1, \\
\phi_{52} &= 729z^6 - 729z^4, \\
\phi_{53} &= 576z^6 - 556z^4 - 92z^3 + 69z^2 + 4z - 1, \\
\phi_{54} &= 384z^6 - 360z^4 - 84z^3 + 48z^2 + 12z, \\
\phi_{55} &= 729z^6 - 729z^4 - 108z^3 + 108z^2, \\
\phi_{56} &= 576z^6 - 544z^4 - 64z^3 + 32z^2, \\
\phi_{57} &= 512z^6 - 480z^4 - 112z^3 + 72z^2 + 12z - 4, \\
\phi_{58} &= 648z^6 - 585z^4 - 120z^3 + 35z^2 + 26z, \\
\phi_{59} &= 436z^6 - 435z^4 - 102z^3 + 72z^2 + 30z + 3, \\
\phi_{60} &= 576z^6 - 564z^4 - 144z^3 + 93z^2 + 36z + 3, \\
\phi_{61} &= 576z^6 - 564z^4 - 84z^3 + 60z^2 + 12z, \\
\phi_{62} &= 648z^6 - 639z^4 - 72z^3 + 63z^2, \\
\phi_{63} &= 432z^6 - 411z^4 - 84z^3 + 51z^2 + 12z, \\
\phi_{64} &= 480z^6 - 440z^4 - 96z^3 + 48z^2 + 8z, \\
\phi_{65} &= 405z^6 - 369z^4 - 72z^3 + 36z^2, \\
\phi_{66} &= 360z^6 - 319z^4 - 78z^3 + 32z^2 + 6z - 1, \\
\phi_{67} &= 900z^6 - 736z^4 - 200z^3 + 28z^2 + 8z, \\
\phi_{68} &= 1215z^6 - 1080z^4 - 270z^3 + 120z^2 + 20z - 5, \\
\phi_{69} &= 1296z^6 - 1152z^4 - 288z^3 + 112z^2 + 32z, \\
\phi_{70} &= 720z^6 - 597z^4 - 222z^3 + 15z^2 + 9z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{71} &= 1152z^6 - 1008z^4 - 192z^3 + 48z^2, \\
\phi_{72} &= 1296z^6 - 1161z^4 - 162z^3 + 27z^2, \\
\phi_{73} &= 1152z^6 - 1032z^4 - 228z^3 + 91z^2 + 18z - 1, \\
\phi_{74} &= 1152z^6 - 1016z^4 - 268z^3 + 104z^2 + 28z, \\
\phi_{75} &= 960z^6 - 812z^4 - 224z^3 + 63z^2 + 14z - 1, \\
\phi_{76} &= 1296z^6 - 1161z^4 - 252z^3 + 106z^2 + 12z - 1, \\
\phi_{77} &= 1080z^6 - 933z^4 - 222z^3 + 63z^2 + 12z, \\
\phi_{78} &= 768z^6 - 672z^4 - 192z^3 + 63z^2 + 30z + 3, \\
\phi_{79} &= 1024z^6 - 896z^4 - 252z^3 + 84z^2 + 40z + 4, \\
\phi_{80} &= 1280z^6 - 992z^4 - 352z^3 + 33z^2 + 28z + 3, \\
\phi_{81} &= 2048z^6 - 1664z^4 - 448z^3 + 48z^2 + 16z, \\
\phi_{82} &= 2304z^6 - 1872z^4 - 528z^3 + 80z^2 + 16z, \\
\phi_{83} &= 2304z^6 - 1888z^4 - 480z^3 + 53z^2 + 12z - 1, \\
\phi_{84} &= 2160z^6 - 1743z^4 - 528z^3 + 83z^2 + 28z, \\
\phi_{85} &= 1800z^6 - 1392z^4 - 444z^3 + 24z^2 + 12z, \\
\phi_{86} &= 2025z^6 - 1611z^4 - 576z^3 + 91z^2 + 64z + 7, \\
\phi_{87} &= 2160z^6 - 1728z^4 - 432z^3, \\
\phi_{88} &= 1920z^6 - 1528z^4 - 508z^3 + 73z^2 + 40z + 3, \\
\phi_{89} &= 3600z^6 - 2649z^4 - 996z^3 + 6z^2 + 36z + 3, \\
\phi_{90} &= 3200z^6 - 2328z^4 - 900z^3 - 12z^2 + 36z + 4, \\
\phi_{91} &= 3840z^6 - 2864z^4 - 976z^3 + 16z^2 + 16z, \\
\phi_{92} &= 4096z^6 - 3072z^4 - 1024z^3, \\
\phi_{93} &= 3375z^6 - 2430z^4 - 864z^3 - 81z^2, \\
\phi_{94} &= 6400z^6 - 4416z^4 - 1792z^3 - 192z^2,
\end{aligned}$$

$$\phi_{95} = 6000z^6 - 4095z^4 - 1746z^3 - 180z^2 + 18z + 3,$$

$$\phi_{96} = 1000z^6 - 6400z^4 - 3040z^3 - 528z^2 - 32z,$$

$$\phi_{97} = 15625z^6 - 9375z^4 - 5000z^3 - 1125z^2 - 120z - 5,$$

З доведення теорем 4.2 та 4.4 випливає, що знаючи перший і другий члени асимптотики ми не можемо розрізнити два графа, тільки якщо кількість вершин у цих графах однакова, кількість ребер однакова та множини $\{\alpha_k\}_{k=1}^p$, відповідні цим графам однакові. Останнє означає, що характеристичний многочлен $\det(zI - \tilde{A})$, відповідаючий одному з цих графів дорівнює многочлену, відповідаючому другому графу (можливо, помноженому на ненульову сталу). Порівнюючи ці дані для всіх неізоморфних простих зв'язних графів з 6 вершинами (всі ці графи можна побачити вище) ми приходимо до висновку, що єдина пара коспектральних графів з 6 вершинами з однаковою кількістю ребер та з однаковими наборами $\{\alpha_i\}_{i=1}^6$ - це графи, зображені на рис. 3. Набір $\{\alpha_i\}_{i=1}^6$ є множиною коренів многочлена заданого рівнянням (5.15) (див. нижче). Таким чином, отримуємо наступну теорему.

Теорема 5.6 1. *Нехай спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ задачі (5.1)–(5.4) для простого зв'язного рівнобічного графа складається з підпоследовностей: $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{16} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$, які мають асимптотику*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, 6, \quad (5.12)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+6)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, 6, \quad (5.13)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(12+i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4. \quad (5.14)$$

де набір $\{\alpha_i\}_{i=1}^6 = \{\cos \gamma_i l\}_{i=1}^6$ не співпадає з множиною коренів многочлену

$$P_{G,G}(z) = 256z^6 - 224z^4 - 64z^3 + 21z^2 + 10z + 1 = (z-1)(4z+1)^3(4z^2+z-1). \quad (5.15)$$

Тоді асимптотика (5.12)–(5.14) однозначно визначає форму графа.

2. Два неізоморфних графа, зображені на рис. 6 мають однакові перший і другий члени асимптотики (5.12)–(5.14) і однаковий характеристичний многочлен (5.15). Отже, в цьому випадку перший і другий члени асимптотики власних значень не визначають однозначно форму графа.

5.5 Спектральна задача з крайовими умовами Діріхле на висячих вершинах

В цьому розділі ми розглядаємо спектральну задачу (5.1)–(5.3), (5.5) ($r = p_{pen}$), тобто задачу Штурма-Ліувілля з умовами Діріхле на висячих вершинах. Ребро, інцидентне висячій вершині, назвемо листом, а підграф, отриманий видаленням висячих вершин разом з інцидентними листами, внутрішнім підграфом. Вочевидь, ми не можемо в загальному випадку очікувати єдиності графа, що відповідає заданому спектру задачі (5.1)–(5.3), (5.5). Але у випадку, коли такий граф не єдиний, ми можемо отримати інформацію щодо форми внутрішнього підграфа. Нижче ми розглянемо конкретні випадки задачі (5.1)–(5.3), (5.5).

1. Граф подвійна зірка

Розглянемо граф, зображений на рис. 15.

Теорема 5.7 *Нехай степені внутрішніх вершин m та n графа рисунку 5 задовольняють нерівностям $m \geq 1$, $n \geq 1$ та $mn > 1$. Тоді спектр задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на цьому графі складається з підпоследовностей з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(2)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(3)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(4)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 5, 6, \dots, m+n+1 \quad \text{та } k \in \mathbb{N}.$$

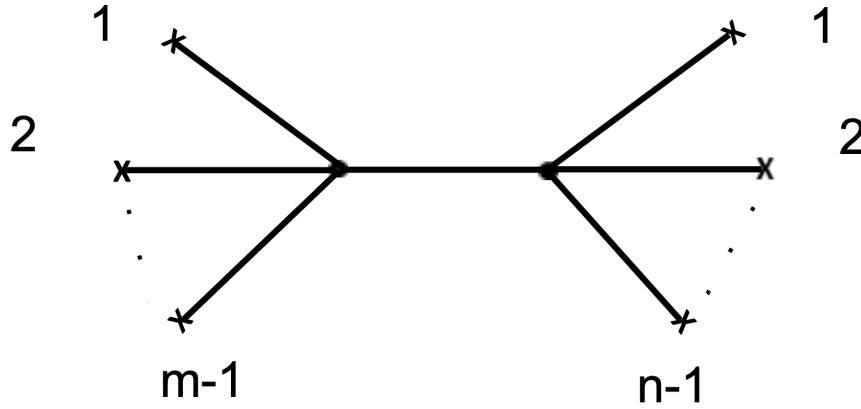


Рис. 15: Граф подвійна зірка. x означає умову Діріхле

Доведення В цьому випадку внутрішній підграф це P_2 , матриця $\hat{D}_G = \text{diag}\{m, n\}$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

та $P_{G, \hat{G}} = 1 - mnz^2$. Отже, $\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{mn}}$ та $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{mn}}$. Використовуючи теорему 5.1, отримуємо

$$\phi_D(\lambda) = s^{m+n-3}(\sqrt{\lambda}l)(1 - mnc^2(\sqrt{\lambda}l)).$$

Використовуючи відомі формули (див. [62])

$$s(\lambda, l) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{=} \frac{\sin \sqrt{\lambda}l}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{e^{|\text{Im}\sqrt{\lambda}l|}}{|\lambda|}\right), \quad c(\lambda, l) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{=} \cos \sqrt{\lambda}l + O\left(\frac{e^{|\text{Im}\sqrt{\lambda}l|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right),$$

отримуємо твердження теореми \square

Тепер з'ясуємо, яку інформацію про форму графу можна отримати з асимптотики власних значень в цьому випадку.

Теорема 5.8 *Нехай спектр задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на простому зв'язному рівнобічному графі складається з підпоследовностей з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_k^{(2)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\
\sqrt{\lambda_k^{(3)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\
\sqrt{\lambda_k^{(4)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\
\sqrt{\lambda_k^{(i)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 5, 6, \dots, s \text{ та } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Тоді ця асимптотика однозначно визначає форму графа як подвійної зірки з кількістю листів інцидентних з внутрішніми вершинами $m-1$ та $n-1$ (див. рис. 15), де натуральні числа m і n становлять розв'язок системи рівнянь

$$m + n = s - 1, \quad mn = (\cos \gamma l)^{-2}. \quad (5.16)$$

Ця система рівнянь має 2 розв'язки, котрі відповідають ізоморфним графам.

Доведення За теоремою 5.4 з [17] ми отримуємо, що $|\lambda_k^{(j)} - \tilde{\lambda}_k^{(j)}| \leq C < \infty$, де $\tilde{\lambda}_k^{(j)}$ - власні значення задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на тому ж графі з $q_j \equiv 0$ для всіх j , і тому присутність потенціалів не впливає на перший і другий члени асимптотики. Отже, за умов теореми спектр $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{m+n+1} \{\tilde{\lambda}_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на простому зв'язному графі з тотожно нульовими потенціалами на ребрах можна подати як об'єднання підпоследовностей з асимптотикою

$$\begin{aligned}
\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(1)}} &= \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\
\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(2)}} &= \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\
\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(3)}} &= \frac{(2k-1)\pi}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\
\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(4)}} &= \frac{(2k-1)\pi}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\
\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} &= \frac{\pi k}{l} \quad \text{для } i = 5, 6, \dots, m+n+1 \text{ та } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Множина $\bigcup_{i=1}^{m+n+1} \{\tilde{\lambda}_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ є спектром задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на графі подвійної зірки, зображеному на рис. 15 з тотожно нульовими потенціалами на ребрах.

Система (5.16) має два розв'язки, але вони відповідають ізоморфним графам, в яких n та m поміняли місцями \square

Нижче ми покажемо, що, якщо граф більш складний, то асимптотика задачі (5.1)–(5.3), (5.5) в деяких випадках не визначає форму графа.

2. Гусеничне дерево

Розглянемо граф рисунку 16.

Теорема 5.9 *Спектр задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на графі рисунку 16 можна подати, як об'єднання підпоследовностей, які мають наступну асимптотику*

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (5.17)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(2)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (5.18)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(3)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (5.19)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(4)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (5.20)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(5)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(k-1/2)\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (5.21)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 6, 7, \dots, s \quad (5.22)$$

де

$$\gamma := \frac{1}{l} \arccos \sqrt{\frac{m_1 + m_3}{m_1 m_2 m_3}}, \quad s = m_1 + m_2 + m_3$$

та m_i ($i = 1, 2, 3$) степені внутрішніх вершин v_1, v_2, v_3 , відповідно.

Доведення В цьому випадку внутрішній підграф - це P_3 ,

$$\hat{D}_G = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\},$$

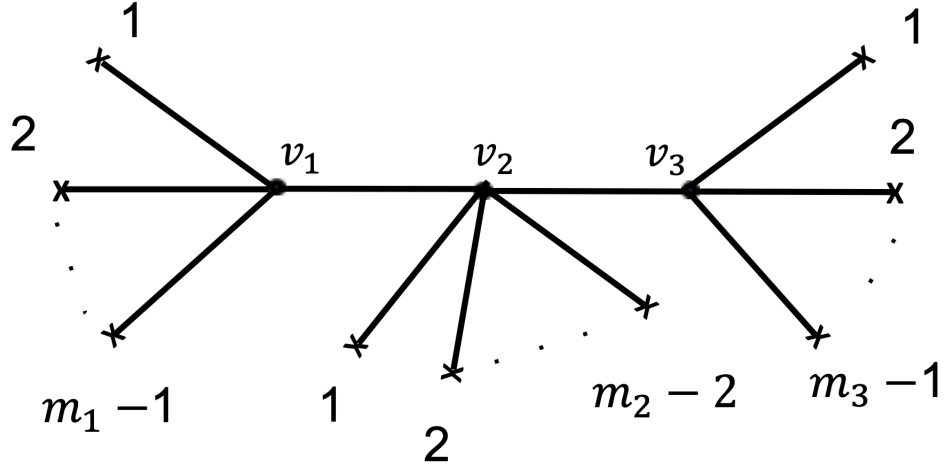


Рис. 16: Граф - гусениця.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

та $P_{G,\hat{G}} = (m_1 + m_3)z - m_1 m_2 m_3 z^3$. Отже, корені цього многочлена це $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{m_1+m_3}{m_1 m_2 m_3}}$, $\alpha_2 = 0$ та $\alpha_3 = \sqrt{\frac{m_1+m_3}{m_1 m_2 m_3}}$. З теореми 5.4 статті [23] випливає, що $|\lambda_k^{(j)} - \tilde{\lambda}_k^{(j)}| \leq C < \infty$, де $\tilde{\lambda}_k^{(j)}$ - власні значення задачі (5.1)–(5.4) на тому ж графі з $q_j \equiv 0$ для всіх j , тому присутність потенціалів не впливає на перший і другий члени асимптотики власних значень. \square

Розглянемо обернену теорему.

Теорема 5.10 *Нехай спектр задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на простому зв'язному рівнобічному графі складається з підпоследовностей з асимптотикою (5.17)–(5.22).*

Тоді граф є графом рис. 16 з внутрішнім підграфом P_3 і з числами листів інцидентних з внутрішніми вершинами $m_1 - 1$, $m_2 - 2$, $m_3 - 1$, де трійка $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 2$, $m_3 \geq 1$ є розв'язок системи

$$m_1 + m_2 + m_3 = s, \tag{5.23}$$

$$\frac{m_1 + m_3}{m_1 m_2 m_3} = \cos^2 \gamma l \tag{5.24}$$

у натуральних числах.

Доведення Доведення повторює з відповідними змінами доведення теореми 5.2 \square

Зауваження 1. В деяких випадках граф, що відповідає заданому γ у (5.17)–(5.22), яке отримане з асимптотики, і заданій кількості ребер $(m_1 + m_2 + m_3 - 2)$, єдиний. Наприклад, якщо кількість ребер $m_1 + m_2 + m_3 - 2 = 5$ і $\gamma = \frac{5}{12}$, то граф має форму, показану на рис. 17.

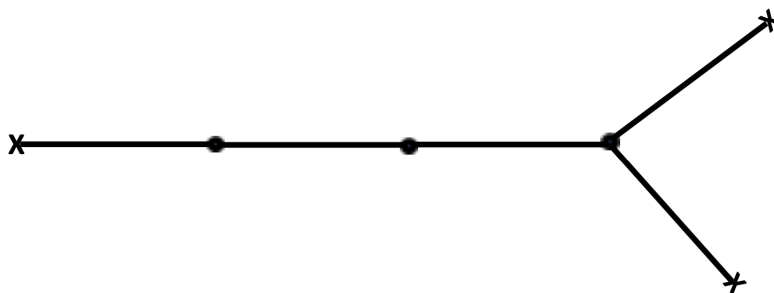


Рис. 17: Граф, що відповідає $\gamma = \frac{1}{l} \arccos \sqrt{\frac{5}{12}}$ з кількістю ребер 5.

2. Якщо кількість ребер $m_1 + m_2 + m_3 - 2 = 18$, а $\gamma = \frac{1}{16}$, то існують два коспектральні графи, зображені на рис. 18, що відповідають $m_1 = m_3 = 8$, $m_2 = 4$ та $m_1 = m_3 = 2$, $m_2 = 16$, відповідно.

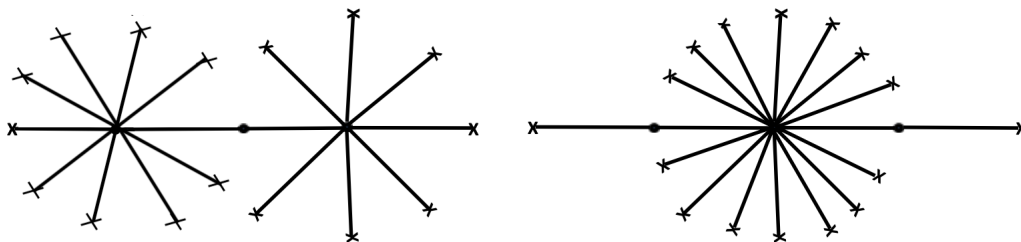


Рис. 18: Граф, що відповідає $\gamma = \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{4}$ з кількістю ребер 18.

3. Граф декорованого трикутника

Графом декорованого трикутника ми називаємо граф зображений на рис. 19.

Теорема 5.11 Спектр задачі (5.1)–(5.3), (5.5) для графа рис. 19 складається з підпоследовностей, які мають наступну асимптотику:

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.25)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N} \quad i = 4, 5, 6 \quad (5.26)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N} \quad i = 7, 8, \dots, s, \quad (5.27)$$

де $s = m_1 + m_2 + m_3$, числа m_i - степені внутрішніх вершин графа, $\gamma_i := \frac{1}{l} \arccos \tau_i$ ($i = 1, 2, 3$), а τ_i - це корені многочлена

$$P_{G, \hat{G}}(z) = m_1 m_2 m_3 z^3 - sz - 2.$$

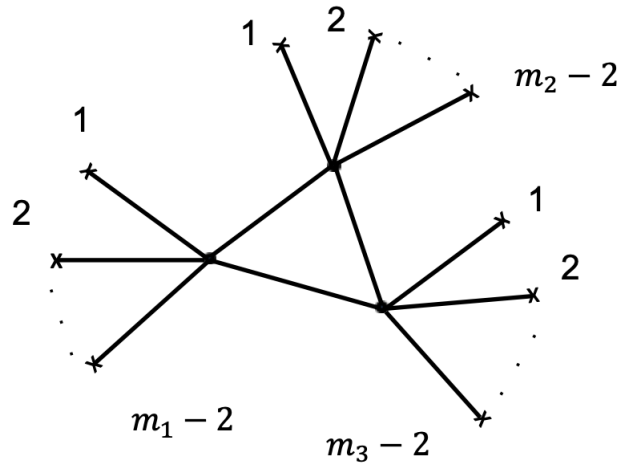


Рис. 19: Декорований граф K_3

Доведення Внутрішній підграф в цьому випадку є C_3 , матриця степенів $\hat{D}_G = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\}$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

та $P_{G, \hat{G}}(z) = 2 + (m_1 + m_2 + m_3)z - m_1 m_2 m_3 z^3$. Для закінчення доведення досить застосувати теорему 4.2 \square

Розглянемо тепер обернену теорему.

Теорема 5.12 *Нехай спектр задачі (5.1)–(5.3), (5.5) на простому зв'язному рівнобічному графі складається з підпоследовностей з асимптотикою (5.25)–(5.27).*

Тоді цей граф є графом декорованого трикутника (внутрішній підграф - це C_3). Степені внутрішніх вершин m_1, m_2, m_3 утворюють розв'язок системи рівнянь

$$m_1 m_2 m_3 = \frac{2}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \quad (5.28)$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = s. \quad (5.29)$$

Доведення Доведення цієї теореми повторює з відповідними змінами доведення теореми 5.2 \square

Зауваження Розв'язок системи (5.28), (5.29) єдиний у випадку $s = 9$ та $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \frac{2}{27}$. В цьому випадку асимптотика (5.25) – (5.27) однозначно визначає форму графа. В цьому випадку кожна внутрішня вершина має один інцидентний лист. У випадку, де $s = 10$ та $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \frac{1}{18}$ розв'язок системи (5.28), (5.29) не єдиний, але ці розв'язки приводять до ізоморфних графів. Таким чином в цьому випадку також асимптотика спектра однозначно визначає форму графа. Однак, у випадку з $s = 14$ та $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \frac{1}{36}$ система (5.28), (5.29) має розв'язки $m_1 = m_2 = 3, m_3 = 8$ та $m_1 = m_2 = 6, m_3 = 2$, які відповідають неізоморфним графам зображеним на рис. 20.

5.6 Висновки до розділу 5

У цьому розділі розглянута обернена задача знаходження форми графу за спектром задачі Штурма-Ліувілля з умовами Діріхле на висячих вершинах. Показано, що в деяких випадках спектр задачі однозначно визначає форму графу, але в інших випадках не визначає, тобто існують коспектральні графи.

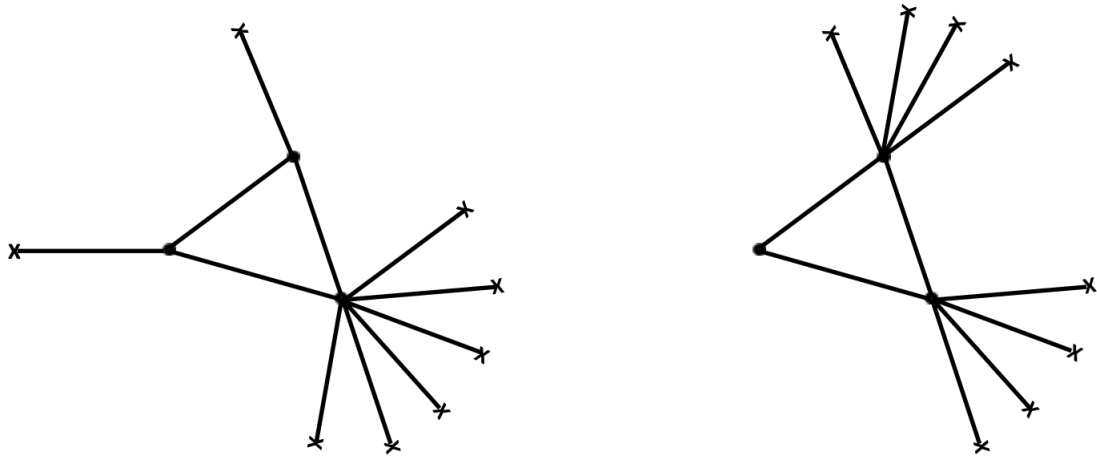


Рис. 20: Неізоморфні графи з однаковими першим і другим членами асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля з умовами Діріхле на тисячох вершинах.

6 Загальні висновки

Отримані в дисертації результати є новими і стосуються прямої і оберненої спектральних задач, породжених рівнянням Штурма-Ліувілля на області, що є метричними графами. Дисертаційна робота містить такі результати:

1. Розв'язана пряма задача про три спектри, тобто задача опису спектрів трьох крайових задач, породжених рівнянням Штурма-Ліувілля на сегменті $[0, a]$ -перша, на сегменті $[0, a/2]$ -друга та сегменті $[a/2, a]$ -третья. Знайдені асимптотики цих трьох задач і доведено, що власні значення першої задачі чергуються з елементами об'єднання спектрів другої та третьої задач.

2. Розв'язана обернена задача Штурма-Ліувілля за трьома спектрами, тобто знаходження потенціалу рівняння Штурма-Ліувілля, виходячи з трьох вищезгаданих спектрів. Доведено, що, якщо власні значення першої задачі строго чергуються з елементами об'єднання спектрів другої та третьої задач, то розв'язок оберненої задачі є єдиним.

3. Запропоновано метод побудови потенціалу рівняння Штурма-

Ліувілля виходячи з трьох вищезгаданих спектрів.

4. Показано, що існує "амбарцумянівський" випадок у якому для знаходження потенціалу Штурма-Ліувілля достатньо знати лише два з трьох вищезгаданих спектрів та перше власне значення третього спектру.

5. Розглянута обернена задача Штурма-Ліувілля у такій постановці: відомий спектр задачі Штурма-Ліувілля на простому рінобічному метричному графі, треба знайти форму графу. Для розв'язання такої оберненої задачі детально вивчена асимптотика власних значень і показано, що головний член асимптотики залежить тільки від загальної кількості ребер та довжини ребра. Показано також, що послідовність власних значень є об'єднанням певних підпослідовностей, для яких в роботі знайдені другі члени асимптотики. Доведено, що коефіцієнти других членів залежить виключно від форми графу та не залежать від потенціалів на ребрах (у припущенні, що всі потенціали на ребрах дійсні і належать до простору $L_2(0, l)$). Всі коефіцієнти взаємнооднозначно пов'язані з власними значеннями дискретного (в інших термінах нормованого) лапласіана.

6. Доведено, що всі прості рівнобічні графи можуть бути коспектральними (неізоморфними і маючими однаковий спектр задачі Штурма-Ліувілля) тільки, якщо вони мають однакову кількість ребер та однакові спектри дискретних лапласіанів.

7. Знайдені характеристичні многочлени дискретних лапласіанів у всіх простих зв'язних графів з кількістю вершин, що не перевищує п'яти. Порівняння цих многочленів показало, що серед них немає двох з однаковою множиною власних значень. Цим доведено, що не існує коспектральних графів серед простих зв'язних рівнобічних графів з кількістю вершин, що не перевищує п'яти. Таким чином, показано, що, якщо кількість вершин у простому зв'язному графі не перевищує п'яти, то спектр задачі однозначно визначає форму графу.

8. Випадок, коли граф є деревом розглянутий окремо. Показано, що якщо кількість вершин у дереві не перевищує восьми то спектр задачі Штурма-Ліувілля однозначно визначає форму графа, тобто не існують ко-

спектральні рівнобічні дерева з кількістю вершин, що не перевищує восьми.

9. Відомо, що існують коспектральні прості звязні рівнобічні графи з шістьма вершинами та рівнобічні дерева з дев'ятьма вершинами. Отже, отримані в дисертаційній роботі доповнюють відомі результати.

10. Розглянута обернена задача знаходження форми графу за спектром задачі Штурма-Ліувілля з умовами Діріхле на висячих вершинах. Для її розв'язання знайдені асимптотики власних значень. Показано, що і в цьому випадку послідовність власних значень можна представити як об'єднання підпоследностей, другі члени асимптотики, яких взаємно-однозначно пов'язані з власними значеннями так званого модифікованого дискретного лапласіану. Показано, що в деяких випадках спектр задачі однозначно визначає форму графу, але в інших випадках не визначає, тобто існують коспектральні графи.

Література

- [1] V.A Ambarzumian, *Über eine range der Eigenwerttheorie*. Z. Phys. 53, 690– 695 (1929)
- [2] Bai Yu and Wei G., *Three-spectra inverse problems for Sturm-Liouville problems with transmission conditions*, Bull. Iranian Math. Soc., **46**, no. 2 (2020), 393-407.
- [3] R. Band, O. Parzanchevski, G. Ben-Shach. *The isospectral fruits of representation theory: quantum graphs and drums*, J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 175202 (42pp) doi:10.1088/1751-8113/42/17/175202
- [4] J. von Below, *A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2 -networks*. Lin. Alg. Appl., **71** (1985), 309-325.
- [5] J. von Below, *Can One Hear the Shape of a Network*, Partial Differential Equations on Multistructures, Lecture Notes in Pure Mathematics, **219**, M. Dekker, NY, (2001), 19-36.

- [6] G. Berkolaiko, P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs*. Math. Surveys, Monographs, **186**, AMS, Providence RI, 2013.
- [7] J. Boman, P. Kurasov, R. Suhr, *Schrödinger operators on graphs and geometry II. Spectral estimates for L_1 -potentials and Ambarzumian's theorem*. Integr. Equ. Oper. Theory, **90:40** (2018), <https://doi.org/10.1007/s00020-018-2467-1>.
- [8] G. Borg. *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math., **78** (1946) 1-96.
- [9] G. Borg, *Uniqueness theorems in the spectral theory of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$* , Proc. 11th Scandinavian Congress of Mathematicians, Johan Grundt Tanums Forlag Oslo, (1952) 276-287.
- [10] O. Boyko, O. Martynyuk, V. Pivovarchik, *Higher order Nevanlinna functions and the inverse three spectra problem*, Opuscula Math., **36**, no. 3 (2016), 301–314.
- [11] O. Boyko, O. Martynyuk, V. Pivovarchik, *Ambarzumian theorem for non-selfadjoint boundary value problems*, J. Operator Theory, **79**, (2018), no. 1, 213–223.
- [12] O. Boyko, V. Pivovarchik, C.-F. Yang, *On solvability of three spectra problem*, Mathematische Nachrichten, **289**, no. 14-15 (2016), 1727–1738.
- [13] S. Butler, J. Grout. *A construction of cospectral graphs for the normalized Laplacian*, Electr. J. Combinatorics. **18** (2011), 231-232.
- [14] M.- C. Drignei, *Numerical reconstruction in a three-spectra inverse Sturm-Liouville problem with mixed boundary conditions*. Inverse Problems in Science and Engineering, **21**, no. 8 (2013), 1368 -1391.
- [15] R. Carlson, *Hill's equation for a homogeneous tree*, Electr. J. Differ. Equ. **23**, (1997), 30pp.

- [16] R. Carlson, Inverse eigenvalue problems on directed graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**, No.10, 4069-4088 (1999).
- [17] R. Carlson, V. Pivovarchik. *Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths* *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, (2008) 145202, 16 pp.
- [18] R. Carlson. V. Pivovarchik, *Ambarzumian's theorem for trees*, *Electr. J. Diff. Equ.*, **2007** (2007), no. 142, 1-9.
- [19] C. Cattaneo, *The spectrum of the continuous Laplacian on a graph*, *Monatsh. Math.* **124**, no. 3 (1997), 215-235.
- [20] N. K. Chakravarty, S. K. Acharaya, *On an extension of the theorem of V.A. Ambarzumyan*, *Proc. Royal Soc. Edinburg* **A 110**, (1988) 79–84.
- [21] H. H. Chern, C. L. Shen, *On the n -dimensional Ambarzumyan's theorem*, *Inverse Problems* **13** (1997), 15–18.
- [22] H. H. Chern, C. K. Law, H. J. Wang, *Corrigendum to: Extensions of Ambarzumyan's Theorem to general boundary conditions*, *J. Math. Anal. Appl.* **309** (2005), 764–768.
- [23] A. Chernyshenko, V. Pivovarchik, *Recovering the shape of a quantum graph*. *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 92, (2020), Art. 23.
- [24] A. Chernyshenko, V. Pivovarchik, *On Three Spectra Problem and Ambarzumian's Theorem* *Mediterranean Journal of Mathematics* **129** (2023), 1–16.
- [25] A. Chernyshenko, V. Pivovarchik. *Cospectral quantum graphs with Dirichlet conditions at pendant vertices*. *Ukrainian Math. J.* **75** (2023) is. 3, 439–455.
- [26] L. Collatz, U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Grafen*. *Abh. Math, Sem. Univ. Hamburg*, Vol. 21 (1957) 63–77.

- [27] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, A. Torgašev, *Recent results in the theory of graph spectra* North Holland, Amsterdam, 1988.
- [28] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs. *Spectra of Graphs. Theory and Applications*. Berlin, 1980. Amsterdam 1988.
- [29] E.B. Davies. *An inverse spectral theorem*, J. Operator Theory, **69**, (2013), no. 1, 195208.
- [30] P. Exner, *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A **66** (1997), 359–371.
- [31] P. Exner, *Weakly Coupled States on Branching Graphs*, Lett. Math. Phys. **38**, (1996), 313-320.
- [32] P. Exner, *Magneto-resonances in a Lasso Graph*, Found. Phys. **27**, (1997), 171-190.
- [33] R. Fan, K.Chung *Spectral graph theory* AMS Providence, R.I. 1997.
- [34] J. Friedman, J.-P. Tillich, *Wave equations for graphs and the edge-based Laplacian*, Pacific J. Math. **216** (2004), no. 2, 229–266.
- [35] N.I. Gerasimenko, *Inverse Scattering Problem on Noncompact Graph*, Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika, **75**, No.2, 187-200 (1988)(in Russian).
- [36] B. Gesztesy, B. Simon, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential. II. Case of discrete spectrum*. Trans. Am. Math. Soc. **352**(6), 2765–2787 (1999)
- [37] Y. Guo, G. Wei, R. Yao, *An inverse three spectra problem for Sturm-Liouville operators*, Bound. Value Probl., no. 68 (2008), 14pp.
- [38] B. Gutkin, U. Smilansky, *Can One Hear the Shape of a Graph?*, J. Phys. A.: Math. Gen. **34** (2001), 6061–6068.

- [39] W. H. Haermers, E. Spence. *Enumeration of cospectral graphs*. European J. Combinatorics, **25** (2004), 199–211.
- [40] O. Hald, *Inverse eigenvalue problem for the mantle*, Geophys. J. R. Astr. Soc. **62** (1980), 41–48.
- [41] M.S. Harmer, *Inverse Scattering for the Matrix Schrödinger Operator and Schrödinger operator on Graphs with General Self-Adjoint Boundary Conditions*, ANZIAM J. **44**, 161-168 (2002).
- [42] E.M. Harrel II, *On the extension of Ambarzumian’s inverse spectral theorem to compact symmetric spaces*, Amer. J. Math. **109** (5) (1987), 787–795.
- [43] H. Hochstadt, B. Lieberman, *An inverse Sturm–Liouville problems with mixed given data*. SIAM J. Appl. Math. 34, 676–680 (1978)
- [44] M.Horváth, *On a theorem of Ambarzumyan*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **A 131** (2001), 899–907.
- [45] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. Part III: Reconstruction by three spectra*, J. Math. Anal. Appl., **284**, no.2, (2003), 626–646.
- [46] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly **73**,II, (1966), 1-8.
- [47] M. Kiss, *An n -dimensional Ambarzumyan type theorem for Dirac operators*, Inverse Problems **20** (2004), 1593–1597.
- [48] M. Kiss, *Spectral determinants and an Ambarzumian type theorem on graphs*. arXiv:1610.0097v2 [math.SP] 1 Mar 2017.
- [49] M. Kiss, *Spectral determinants and an Ambarzumian type theorem on graphs*. Integral Equations and Operator Theory, Vol. 92, art. no.24 (2020).

- [50] M. Kiss, *Spectral determinants and an Ambarzumian type theorem on graphs*, Integr. Equ. Oper. Theory. ... (2020).
- [51] P. Kuchment, *Spectral Geometry on Graphs*. Birkhauser-Springer, 2024.
- [52] P. Kurasov, *Spectral Geometry of Graphs, Oper. Theory: Adv., Appl., Vol. 293*. Birkhäuser/Springer, 2024.
- [53] P. Kurasov, S. Naboko. *Rayleigh estimates for differential operators on graphs*. J. Spectr. Theory 4 (2014), no. 2, 211–219.
- [54] P. Kurasov, M. Nowaczyk, *Inverse Spectral Problem for Quantum Graphs*, J. Phys. A.: Math. Gen. **38**, (2005), 4901- 4915.
- [55] P. Kurasov, F. Stenberg, *On the Inverse Scattering Problem on Branching Graphs*, J. Phys. A.: Math. Gen. **35**, (2002), 101-121.
- [56] N. V. Kuznetsov, *A generalization of a theorem of V. A. Ambartsumyan*, Soviet Math. Doklady, no. 3 (1962), 1475–1478.
- [57] C.-K. Law, E. Yanagida, *A solution to an Ambarzumyan problem on trees*. Kodai Math. J., Vol. 35 (2012), no. 2, 358–373.
- [58] B. Ja. Levin, I. V. Ljubarskii, *Interpolation by entire functions belonging to special classes and related expansions in series of exponentials*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **39**, no. 3 (1975), 657–702, 704 (in Russian); English transl., *Math. USSR-Izv.*, **9**, no. 3 (1975), 621–662.
- [59] B. Ja. Levin, I. V. Ostrovskii, *Small perturbations of the set of roots of sine-type functions*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **43**, no. 1 (1979), 87–110, 238 (in Russian); English transl., *Math. USSR-Izv.*, **14**, no.1 (1980), 79–101.
- [60] B. Levitan, M. Gasymov, *Determination of a differential equation by two of its spectra (Russian)*, Russ. Math. Surveys **19** (2) (1964), 1–64.

- [61] V.A. Marchenko, *Sturm-Liouville operators and applications*, OT **22**, Birkhauser, Basel 1986, 331 pp.
- [62] V.A. Marchenko. *Sturm-Liouville operators and applications, revised edition*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI 2011.
- [63] O. Martynyuk, V. Pivovarchik, *On Hochstadt–Lieberman theorem*. Inverse Prob. 26(3), 035011 (2010)
- [64] Yu.B. Melnikov, B.S. Pavlov, *Two-Body Scattering on a Graph and Application to Simple Nanoelectronic devices*, J. Math. Phys., **36**, (1995) 2813–2838.
- [65] F. Ali Mehmeti, *A characterization of generalized C^∞ -notion on nets*. Integr. Equ. Oper. Theory, **9** (1986), 753–766.
- [66] M. Möller, V. Pivovarchik, *Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs Operator Theory: Advances and Applications*, 283. Birkh?user/Springer, 2020. 359 pp. ISBN: 978-3-030-60483-7; 978-3-030-60484-4 <https://www.springer.com/gp/book/9783030604837>
- [67] M. Möller, V. Pivovarchik, *Functional equations related to sine type functions*, Complex Analysis and Operator Theory, **11**, (2017) 1309–1328.
- [68] M. Möller, V. Pivovarchik. *Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications*. OT **264**, Birkhauser, Basel, 2015, 412 pp.
- [69] S. Nicaise, *Spectre des re’seaux topogiques finis*. Bull. Sc. Math. 2 Se’rie **111** (1987) 401–413.
- [70] O. Parzanchevski, R. Band, *Linear Representations and Isospectrality with Boundary Conditions* J Geom Anal (2010) 20 439 - 471 DOI 10.1007/s12220-009-9115-6

- [71] M.-E. Pistol, *Generating isospectral but not isomorphic quantum graphs*. arXiv: 2104.12885.
- [72] V. Pivovarchik, *An inverse Sturm–Liouville problem by three spectra*. Integr. Eqn. Oper. Theory 34, 234–243 (1999)
- [73] V. Pivovarchik. *Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a simple graph*, SIAM J. Math. Anal. 32, (2000) 801–819.
- [74] V. Pivovarchik. *Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a star-shaped graph*. Math. Nachrichten, Vol.280 (2007), No.13-14, 1595-1619. DOI:10.1002/mana.200410567
- [75] V. Pivovarchik. *Ambartsumyan’s theorem for the Sturm-Liouville boundary value problem on a star-shaped graph*. Funktsional. Anal. I Prilozhen.. 39 (2005), no. 2, 78–81 (Russian); translation in Funct. Anal Appl. 39 (2005), no. 2, 148–151.
- [76] V. Pivovarchik, *An inverse problem by eigenvalues of four spectra*. J. Math. Analysis and Applications, **396**, no.2 (2012), 715-723.
- [77] V. Pivovarchik, *A special case of the Sturm-Liouville inverse problem by three spectra. Uniqueness results*. Proc. Royal Society Edinburgh, **136A** (2006), 181-187.
- [78] V. Pivovarchik, *Ambarzumian’s theorem for the Sturm-Liouville boundary value problem on star-shaped graph*. Funktsional. Anal. Prilozh. (Russian), **39** (2005), No.2, 78-81: English translation in Funct.Anal.Appl. **39** (2005), No.2, 148-151.
- [79] V. Pivovarchik, *Inverse Problem for the Sturm-Liouville Equation on a Simple Graph*, SIAM J. Math. Anal., **32**, No.4, 801-819 (2000).
- [80] V. Pivovarchik, N. Rozhenko. *Inverse Sturm-Liouville problem on equilateral regular tree*, Appl. Anal., **92** (2013), No.4, 784-798.

- [81] L. Sakhnovich, *Half-inverse problem on the finite interval* Inverse Problems **17** (2001), 527-532
- [82] C. L. Shen, *On some inverse spectral problems related to the Ambarzumyan problem and the dual string of the string equation*, Inverse Problems **23** (2007), 2417–2436.
- [83] G. Wei, Xi Wei, *A generalization of three spectra theorem for inverse Sturm-Liouville problems*, Appl. Math. Lett., **35** (2014), 41-45.
- [84] G. Wei and H.-K. Xu, *On the missing eigenvalue problem for an inverse Sturm-Liouville problem* J. Math. Pures Appl. **91** (2009), 468–475.
- [85] C.-F. Yang, X.C. Xu. *Ambarzumian-type theorems on a graphs with loops and double edges*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 444, no. 2 (2016) 1348- 1358.
- [86] C. F. Yang, X. P. Yang, *Some Ambarzumyan-type theorems for Dirac operators*, Inverse Problems **25**, (2009) 095012, 13 pp.
- [87] C.-F. Yang, Z.-Y. Huang, X.-P. Yang. *Ambarzumian-type theorems for the Sturm-Liouville equation on a graph*. The Rocky Mountain Journal of Mathematics Vol. 39, No. 4 (2009).
- [88] C.-F. Yang, V. Pivovarchik, Z.-Y. Huang. *Ambarzumian-type theorems on a graphs*. Operators and Matrices. Vol. 5, no. 1 (2011) 119- 131.
- [89] Y. Yang, G. Wei, *A finiteness result for inverse three spectra Sturm- Liouville problems*, Taiwanese J. Math. **21**, no. 1 (2017), 167-185.
- [90] C.-F. Yang, X.C. Xu. *Ambarzumian-type theorems on a graphs with loops and double edges*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 444, no. 2 (2016) 1348- 1358.
- [91] В. Пивоварчик, А. Чернишенко. *Коспектральні квантові графи за умов Діріхле на висячих вершинах*. Український матем. Ж., 7.75, N 3 (2023), 382-396. DOI: 10.37863/umzh.v75i3.7351