Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту
Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації «Теорія множин» (з практикумом)

до практичних занять, організації самостійної роботи

для здобувачів освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Одеса – 2024

УДК 510.3

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» протокол № 1 від 22 серпня 2024 року

Рецензенти:

Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики, ОДАБА
Болдарєва О. М., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і статистики, Державний заклад «Південноукраїнський національний університет імені К.Д. Ушинського»

Укладачі:
Яковлєва О. М., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і статистики
Дудко А. І., PhD (111 Mathematics), викладач кафедри вищої математики і статистики

Методичні рекомендації «Теорія множин» (з практикумом) до проведення практичних занять, організації самостійної роботи для здобувачів освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)**. Одеса : Університет Ушинського, 2024. 49 с.

Методичні рекомендації «Теорія множин» (з практикумом) до практичних занять, організації самостійної роботи для здобувачів освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)** містять загальний теоретичний матеріал з теорії множин, приклади рішення завдань, пропоновані вправи для самостійного розв’язання.

Рекомендовано для здобувачів освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)** з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

Зміст

Передмова

Поняття множини відноситься до первинних (неозначуваних) понять в математиці, тобто до таких, яким не дають означення. Прикладами таких понять є поняття точки, прямої, площини в геометрії, поняття числа 1 в алгебрі. Це пов'язано з тим, що деякі поняття в математиці мають бути початковими, служити тією «цеглою», з якої будується загальна теорія відповідного розділу математики. Слова «сукупність», «сімейство», «система», «набір» – синоніми поняття «множина». В повсякденному житті та практичній діяльності часто доводиться говорити про деякі сукупності/набори/сімейства різних об'єктів: предметів, будов, понять, чисел, символів, істот тощо.

Теорія множин виникла в XIX ст. і досягла значного розвитку і широкого визнання в XX ст. Теорія множин і зараз знаходиться у стані активного розвитку. Теорія множин, будучи сама одним з розділів математики, в той же час разом з математичною логікою є основою для всіх її інших розділів, зокрема алгебри, геометрії, функціонального аналізу, топології тощо.

Методичні рекомендації «Теорія множин» (з практикумом) до проведення практичних занять, організації самостійної роботи призначено для здобувачів освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика), зокрема, до проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни *«Теорія множин і лінійна алгебра»* для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)** і навчальної дисципліни **«***Наукові засади сучасного курсу алгебри та початків аналізу в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)***»** для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика).

§ 1. Множина та способи її завдання

Одним з основних математичних понять, якому не дають означення, є множина. Синонімом слова множина в математиці є слова: набір, система, сукупність, клас елементів; у побуті – колекція, зібрання тощо. Таким чином, під множиною будемо розуміти сукупність об'єктів (предметів, символів або понять), об'єднаних між собою деякою спільною для них ознакою.

Об'єкти, з яких складається множина, будемо називати елементами цієї множини. Множини будемо позначати великими, а їх елементи – малими латинськими буквами з індексами чи без них. Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a \in A$. Коли ж елемент a не належить множині A, то пишуть $a \notin A$. Знак $\in$ називається знаком належності. Вважається, що один елемент належить даній множині тільки один раз, тобто якщо з множини вилучити елемент a, то в ній цього елементу вже не буде. Один елемент може належати декільком множинам.

За кількістю елементів множини розрізняють на скінченні множини, нескінченні множини та порожню множину. Множину, що має скінчену кількість елементів, називають скінченою. Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою множиною, вона позначається символом $\emptyset$. Непорожня множина називається нескінченою, якщо вона не є скінченою. Прикладами нескінчених числових множин є множини натуральних чисел, дійсних чисел тощо. Нескінченою множиною є, наприклад, множина прямих на площині.

Як можна задати множину?

Множину можна задати *переліком її елементів*, якщо множина є скінченою. Елементи множини при такому способі завдання записують у фігурних дужках. Наприклад, якщо A – множина натуральних дільників числа 12, то $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Якщо множина має тільки один елемент a, то пишуть $A = \{a\}$.

Множину можна задати за допомогою *характеристичної властивості*, тобто властивості, яка притаманна елементам цієї множині, і тільки ім.

Наприклад, характеристичною властивістю множини всіх простих чисел є те, що кожний елемент цієї множини – це натуральне число, яке має тільки два натуральних дільника.

Приклад 1. Знайти елементи наступних множин:

а) Множина A містить натуральні числа, які більше 2 і менші чи рівні 5, тобто $A = \{3, 4, 5\}$.

б) Множина B – множина двозначних натуральних чисел, таких що при діленні на 12 дають остачу 5.

Найменше двозначне натуральне число – 10, найбільше – 99. Ми шукаємо числа вигляду $12k + 5, k \in \mathbb{N}$.

Перше таке число 17 (при $k = 1$), далі 29 (при $k = 2$), далі $41, 53, 65, 77, 89, 101, \dots$, тому $B = \{17, 29, 41, 53, 65, 77, 89\}$.

Множину можна задати *аналітичним способом або формально*, тобто за допомогою формули.

Наприклад, якщо A – множина натуральних дільників числа 12, то її можна записати аналітично так: $A = \{x |\, x \in \mathbb{N}, 12 \vdots x\}$. Цей запис прочитується наступним чином: «A – множина, яка складається з таких елементів, які є натуральними числами і є дільниками числа 12».

Приклад 2. Задати множину $A = \{x |\, x \in \mathbb{Z}, 2x^2 - 3x - 5 = 0\}$ переліком елементів.

A – множина, яка складається з таких цілих чисел, які є коренями рівняння $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Розв'яжемо його.

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{3 - 7}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2}$$

$x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \notin \mathbb{Z}$, тому переліком елементів множина записується $A = \{-1\}$.

Приклад 3. Задати наступні множини аналітично:

1. $A = \{\, 5; 8; 11; 14; \dots \}$.
2. $B = \{8;\ 4;\ 1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16}; \dots \}$.

1. Слід зазначити, що кожне наступне число даної множини більше попереднього на три. Елементи множини A – це члени арифметичної прогресії, де $a_1 = 5$ і $d = 3$. Тому ми можемо зробити висновок, що числа даної послідовності – це числа виду $2 + 3k$, де $k \in \mathbb{N}$.

Отже $A = \{x \mid x = 2 + 3k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

2. Кожне наступне число послідовності менше попереднього в чотири рази. Тому ми можемо зробити висновок, що числа даної послідовності – це члени геометричної прогресії, де $b_1 = 8$ і $q = \frac{1}{4}$.

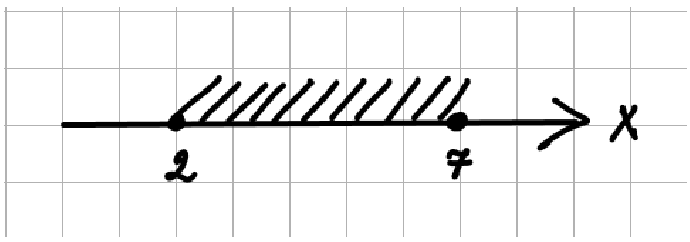
Отже $B = \{x \mid x = 8 \cdot (0{,}25)^n$, де $n \in \mathbb{N}\}$.

Множину можна задати *графічно*.

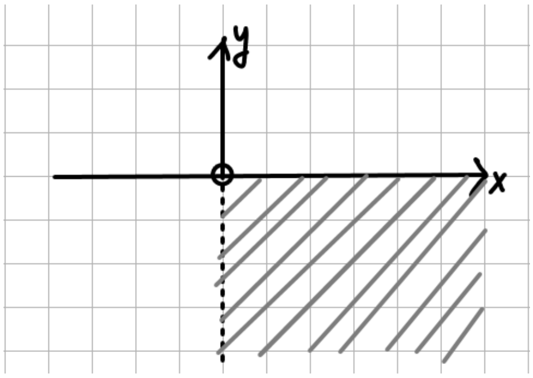
Приклад 4. Задати множини графічно:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 \le x \le 7\}$ – множина дійсних чисел від 2 до 7.

Дійсні числа ми зображуємо точками на координатній осі, тому множина A – це відрізок дійсної осі.

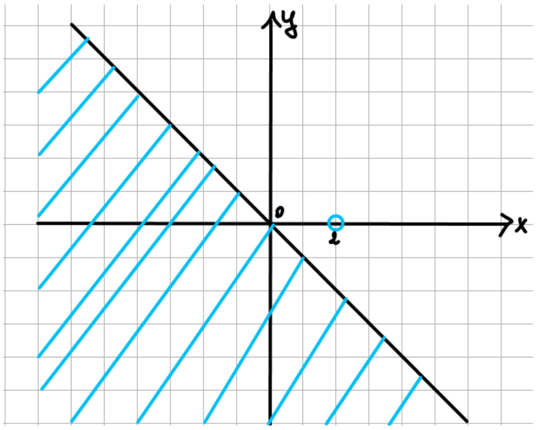


$B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x \ge 0,\ y < 0\}$ – це множина точок площини, перша координата яких невід’ємна, а друга – від’ємна.



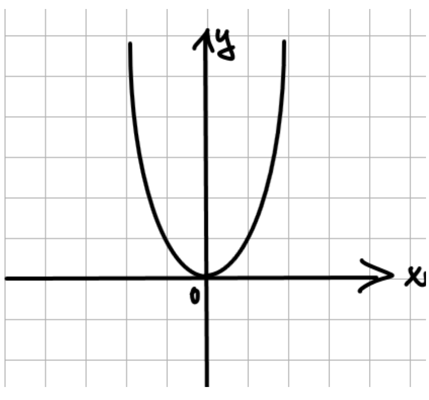
$C = \{(x, y)|\ x, y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0\}$

Побудуємо спочатку границю нашої області – пряму $x + y = 0$. Пряма розбиває площину на дві півплощини, тому шукана множина є одною з двох півплощин, включаючи границю (нерівність нестрога). Візьмемо для перевірки будь-яку точку в одній з півплощин, наприклад, візьмемо точку з координатами (2,0), яка не лежить на границі області. Підставляємо координати точки в задану умову: $2 + 0 \leq 0$ – невірно, тому множина C є іншою півплощиною.



$D = \{(x, y)|\ x, y \in \mathbb{R},\ \ y = x^2\}$

Шукана множина точок є графіком функції $y = x^2$ (параболою).



Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Обрати з поданих тверджень вірні:

1. $135 \in \mathbb{N}$; $21\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$; $-7 \in \mathbb{Q}$; $e \in \mathbb{R}$.
2. $30\frac{5}{7} \notin \mathbb{N}$; $0 \in \mathbb{Z}$; $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$; $5{,}1248 \in \mathbb{R}$.
3. $0 \in \mathbb{N}$; $-15{,}1 \in \mathbb{Z}$; $-70 \notin Q$; $5\sqrt{3} \in \mathbb{R}$.
4. $-30 \notin \mathbb{N}$; $-10{,}3 \in \mathbb{Z}$; $0{,}51 \in \mathbb{Q}$; $2,(34) \notin \mathbb{R}$.
5. $1 \in \mathbb{N}$; $-1{,}54 \notin \mathbb{R}$; $-14{,}2 \in \mathbb{Z}$; $\pi \in \mathbb{Q}$.
6. $14 \notin \mathbb{N}$; $14 \in \mathbb{Z}$; $22\dfrac{7}{8} \notin Q$; $-14 + \sqrt{3} \notin \mathbb{R}$.
7. $2\frac{2}{5} \in \mathbb{N}$; $18 \in \mathbb{R}$; $-14{,}2 \notin \mathbb{Z}$; $1 + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
8. $-3 \in \mathbb{R}$; $0 \in \mathbb{N}$; $22\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z}$; $-22{,}32 \in \mathbb{Q}$.

Завдання 2. Назвати елементи множини A:

1. A – множина правильних чотирикутників.
2. A – множина трикутників, у яких дві сторони рівні.
3. A – множина чотирикутників, у яких дві сторони паралельні, а дві інших – не паралельні.
4. A – множина точок площини, рівновіддалених від даної точки площини.
5. A – множина точок простору, рівновіддалених від даної точки простору.
6. A – множина точок площини, рівновіддалених від двох даних точок площини.
7. A – множина чотирикутників, у яких протилежні сторони рівні.
8. A – множина чотирикутників, у яких всі стороні рівні.

Завдання 3. Задати множини переліком елементів:

1. а) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4{,}5\}$; б) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, (2x + 7)(x - 2) = 0\}$.
2. а) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3{,}2 < x \leq 1{,}2\}$; б) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 - 16 = 0\}$.
3. а) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 0\}$; б) $\{x \mid x \in \mathbb{Q},\ 4x + 5 = 4(x - 7)\}$.

4. а) $\{x|\ x \in \mathbb{Q},\ x^2 - x - 3 = 0\ \}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{N}, x \leq 13$ та $x \vdots 3\}$.

5. а) $\{x|\ x \in \mathbb{N}, \log_3 x^2 = 2\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{Z}, 4x^2 - 7x + 3 = 0\}$.

6. а) $\{x|\ x \in \mathbb{N}, x \leq 30$ та $x \vdots 6\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{Q}, (x^2 - 3)(3x + 5) = 0\}$.

7. а) $\{x|\ x \in \mathbb{N}, x > 12$ та $x \vdots 10\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{Z},\ x^4 - 7x^2 + 12 = 0\}$.

8. а) $\left\{x|\ x \in \mathbb{Q},\ \ \log_8 x = \frac{1}{2}\right\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{Z}, 7(x - 2) = 7x - 14\}$.

Завдання 4. Задати множини графічно:

1. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, x < -1{,}5\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 6\}$;
   в) $\left\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = \sqrt{x-1}\right\}$; г) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ 3x - y \leq 1\ \}$.
2. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, -2{,}5 \leq x \leq 1{,}3\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, x > 4\}$;
   в) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = x^2 - 2\}$; г) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2\ < 1\}$.
3. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, -1 < x < 5\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, x \leq 3{,}5\}$;
   в) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = |\log_3 x|\}$; г) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ x < 2\}$.
4. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, -10 < x \leq -0{,}5\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, x > -5\}$;
   в) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = |x+1|\}$; г) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + y^2 = 0\ \}$.
5. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 5\}$;
   в) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = (x-2)^2\}$; г) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ x - 2y > 4\}$.
6. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, -2{,}8 \leq x \leq 0\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R},\ x > 7\}$;
   в) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = (x-1)^2 + 2\}$; г) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ x + 3y \leq 2\}$.
7. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, x > 5{,}4\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 6\}$;
   в) $\left\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = -\log_{0,2} x\right\}$; г) $\left\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R}, y = \sqrt{x}\ + 2\right\}$.
8. а) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, x < -8\}$; б) $\{x|\ x \in \mathbb{R}, 3 < x \leq 5\}$;
   в) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ \ y = |x-2| + 3\}$; г) $\{(x,y)|\ x,y \in \mathbb{R},\ y \geq -1\}$.

Завдання 5. Задати множини переліком елементів:

1. Множина двозначних натуральних чисел, які містять у запису цифри 1 та 3.
2. Множина тризначних натуральних чисел, які містять у запису цифри 2;4;5, причому ніякі з цих цифр не повторюються у запису числа.

3. Множина тризначних натуральних чисел, що містять у запису цифри 1;3;5, причому будь-які дві сусідні цифри в запису числа різні.
4. Множина натуральних дільників числа 42.
5. Множина двозначних натуральних чисел, сума цифр яких кратна 9.
6. Множина двозначних натуральних чисел менших 40 і кратних 2 та 3 одночасно.
7. Множина двозначних натуральних чисел, кратних 23.
8. Множина двозначних натуральних чисел, які при діленні на 17 дають остачу 8.

Завдання 6. Задати множини аналітично:

1. $\{0; 4; 8; 12; 16; 20; \dots\}$.
2. $\{1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots\}$.
3. $\{-\frac{4}{9}; -\frac{5}{18}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; \frac{2}{9}; \dots\}$.
4. $\{\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; 1\frac{1}{3}; 1\frac{5}{6}; 1\frac{2}{3}; 2\frac{5}{6}; \dots\}$.
5. $\{27; 81; 243; 729; \dots\}$.
6. $\{15\frac{7}{8}; 6\frac{1}{4}; 2\frac{1}{2}; 1; \frac{2}{5}; \frac{4}{25}; \dots\}$.
7. $\{-14; -13\frac{1}{6}; -12\frac{1}{3}; -11\frac{1}{2}; -10\frac{2}{3}; \dots\}$.
8. $\{-16;\ -8;\ -4;\ -2;\ -1; \dots\}$.

§2. Підмножини. Рівні множини

Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B. В цьому разі пишуть $A \subset B$ і кажуть, що множина A міститься у множині B (включається у множину B), або, що A – це підмножина множини B.

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Наприклад, якщо A – множина двозначних натуральних чисел, B – множина парних двозначних натуральних чисел, то легко помітити, що кожне число множини B міститься у множині A. Отже, $B \subset A$. Якщо К – множина квадратів, а P – множина прямокутників, то, вочевидь, кожен квадрат є прямокутником, тоді $K \subset P$.

Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B і, навпаки, кожен елемент множини B є елементом множини A, то множини A і B називають *рівними* і записують: A=B.

$$A = B \iff (\forall\, a \in A \implies a \in B \text{ і } \forall\, b \in B \implies b \in A).$$

Рівні множини складаються з одних і тих же елементів.

Приклад 5. З'ясувати, чи рівні множини $A = \{x |\, x \in \mathbb{N}, x^2 - x - 2 = 0\}$ і $B = \left\{x |\, x \in \mathbb{R}, \log_{16} x = \frac{1}{4}\right\}$.

Задамо множини переліком елементів.

Коренями рівняння $x^2 - x - 2 = 0$ є числа -1 та 2, натуральним коренем рівняння є число 2, тому $A = \{2\}$.

Розв'яжемо рівняння $\log_{16} x = \frac{1}{4}$. $x = 16^{\frac{1}{4}} = 2$. Тому $B = \{2\}$.

Множини A і B рівні.

Для наочності оперування з множинами використовують їх графічні зображення за допомогою так званих *діаграм Ейлера-Венна*. При цьому множини зображують деякими зв'язними (суцільними) геометричними фігурами, найчастіше кругами (рис. 1).

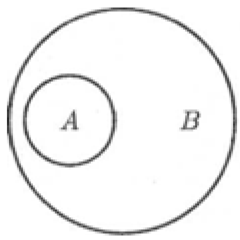


Рис.1. $A \subset B$

Кожна непорожня множина має хоча б дві підмножини – порожню підмножину (порожня множина вважається підмножиною будь-якої множини) і сама множина вважається своєю підмножиною. Ці підмножини називаються *невласними*. Якщо у множини існують підмножини, відмінні від невласних підмножин, то такі підмножини називаються *власними*.

Наприклад, якщо множина $A = \{1; 2\}$, то її підмножинами будуть $\emptyset$, A (невласні підмножини) та $\{1\}, \{2\}$ (власні підмножини). Сукупність підмножин даної множини називається *булеаном* множини. Булеан множини A записуємо так $B(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}\}$.

Приклад 6. Множина M деяких трикутників задана довжинами сторін цих трикутників. Знайти підмножини: $Г$ – гострокутних трикутників, P – прямокутних трикутників, T – тупокутних трикутників множини M.

$M = \{(18,3,16); (8; 7; 10); (6,8,10)\}$

Згадаємо, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут трикутника. За теоремою косинусів маємо:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Оберемо у кожній трійці більшу довжину сторони даного трикутника. Позначимо її через c, а довжини двох інших сторін – через a і b. Обчислимо $\cos C$.

$(18,3,16)$, $c = 18$ – більша сторона

$\cos C = \frac{16^2 + 3^2 - 18^2}{2 \cdot 16 \cdot 3} = -\frac{59}{96} < 0.$ Тому $\angle C$ – тупий.

Трикутник зі сторонами 18, 3, 16 – тупокутний.

$(8; 7; 10), c = 10$ – більша сторона

$\cos C = \frac{8^2 + 7^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{13}{112} > 0.$ Тому $\angle C$ – гострий.

Трикутник зі сторонами 8, 7, 10 – гострокутний.

$(6,8,10), c = 10$ – більша сторона

$\cos C = \frac{8^2 + 6^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = 0.$ Тому $\angle C$ – прямий.

Трикутник зі сторонами 8, 6, 10 – прямокутний.

$\Gamma = \{(8,7,10)\}.$

$P = \{(6,8,10)\}$.

$T = \{(18,3,16)\}$.

Приклад 7. Які відношення включення або рівності мають місце для множин P і K, якщо:

1. $P = \emptyset,\ K = \{m; p; l\}$.
2. $P = \{\{a\}; b; \emptyset\},\ K = \{a\}$.
3. $P = \{a | a \in \mathbb{Z}, a^2 \leq 4\},\ K = \{b | b \in \mathbb{Z}, -2 \leq b < 3\}$.

1. $P \subset K$, так як порожня множина є підмножиною будь-якої множини.
2. $K \subset P$.
3. $P = \{a | a \in \mathbb{Z}, a^2 \leq 4\}$, задамо множину P переліком елементів.

$a^2 \leq 4$,

$|a| \leq 4$,

$-2 \leq a \leq 2, a \in \mathbb{Z}$,

$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$K = \{b | b \in \mathbb{Z}, -2 \leq b < 3\}$,

$K = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Отже, $P = K$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Які відношення включення або рівності мають місце для множин P і K?

1. $P = \{a | a \in \mathbb{N}, a > 5\}, K = \{b | b \in \mathbb{N}, b > 2\}$.
2. $P = \{n | n \in \mathbb{R},\ n^2 > 4\}, K = \{m | m \in \mathbb{R},\ m^2 \geq 5\}$.
3. $P = \{x | x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 12 < 0\}, K = \{y | y \in \mathbb{R}, -2 \leq y < 4\}$.
4. P – множина многокутників з периметром 4, K – множина квадратів, площа яких дорівнює 1.

5. P – множина рівнобедрених трикутників, K – множина рівносторонніх трикутників.

6. P – множина квадратів, K – множина ромбів.

7. P – множина ромбів, K – множина паралелограмів.

8. $P = \{x|\ x = 3n,\ n \in \mathbb{N}, n \leq 25\}$, $K = \{x|\ x = 6n, n \in \mathbb{N}, n \leq 28\}$.

9. $P = \left\{x|\ x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}, n \leq 8\right\}$, $K = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}\right\}$.

10. P – множина точок площини, віддалених від точки M не більше як на 2 см, K – множина точок площини, рівновіддалених від точки M на 1 см.

Завдання 2. Дано множину трикутників M, сторони яких відомі. Виділити підмножини множини M:

P – підмножину гострокутних трикутників;

C – підмножину прямокутних трикутників;

K – підмножину тупокутних трикутників.

1. $(6; 10; 13)$, $(3; 5; 4)$, $\left(6\sqrt{2}; 14; 12\right)$, $(35; 41; 52)$.
2. $(5; 8; 12)$, $(12; 18; 21)$, $(7; 24; 25)$, $(8; 17; 15)$.
3. $(3; 8; 10)$, $\left(5\sqrt{6}; 8; 11\right)$, $(14; 18; 14)$, $(9; 23; 16)$.
4. $\left(2; \sqrt{7}; \sqrt{11}\right)$, $(2{,}5; 6; 6{,}5)$, $(35; 26; 37)$, $(12; 15; 9)$.

Завдання 3. Дано множину M. Виписати підмножини множини M:

P – підмножину простих чисел;

C – підмножину непарних чисел;

D – підмножину парних чисел;

K – підмножину чисел, кратних 3;

L – підмножину чисел, кратних 9;

S – підмножину чисел, кратних 4.

Чи вірно, що $C \subset P,\ P \subset C,\ K \subset C,\ K \subset L, C \subset S,\ S \subset D$?

1. $M = \{25, 42, 53, 84, 93, 17, 21, 37, 36, 123\}$.

2. $M = \{47, 26,34, 25, 18, 36, 28, 45,105, 504\}$.

3. $M = \{16, 18, 33, 58, 23, 27, 60, 97, 126, 64\}$.

4. $M = \{29, 46, 21, 63, 56, 61, 50, 96, 25, 237\}$.

5. $M = \{38, 12, 47, 25, 81, 45, 232, 108, 125, 105\}$.

6. $M = \{19, 22, 15, 34, 98, 7, 39, 104, 78, 225\}$.

7. $M = \{43, 78, 27, 35, 46, 55, 61, 87, 124, 153\}$.

8. $M = \{5, 13, 28, 33, 45, 56, 69, 72, 183, 194\}$.

§ 3. Перетин, об'єднання та віднімання множин

3.1. Операція перетину множин

Перетином множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, кожен з яких належить як множині A, так і множині B (рис.2). Позначають: $C = A \cap B$.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A\ i\ x \in B)$$

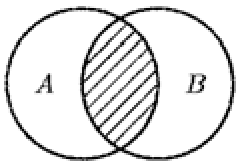


Рис.2. $A \cap B$

Тобто, перетин множин містить спільні елементи цих множин.

Для довільних множин A, B, C операція перетину множин має властивості:

1) $A \cap B = B \cap A$ (переставна властивість або комутативність).

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (сполучна властивість або асоціативність).

3) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4) $A \cap A = A$.

5) $A \cap B \subseteq A$ і $A \cap B \subseteq B$.

Приклад 8. Знайти перетин множин $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ та $B = \{b, d, e, g, h\}$.

Обом множинам належать елементи b, d, e. Тому $A \cap B = \{b, d, e\}$.

Приклад 9. Знайти $A \cap B$, якщо:

$A = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}$ і $B = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\right\}$.

Зобразимо множини A та B на числовій прямій (рис.3). Множина A зображується відрізком з кінцями $-\frac{2}{3}$ та $\frac{7}{4}$, а множина B – відрізком з кінцями $-\frac{1}{4}$ та 2.

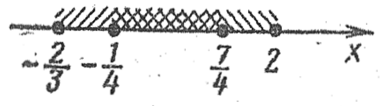


Рис.3

Перетин $A \cap B$ – частина числової прямої, де є обидва штрихування, тобто відрізок $\left[-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right]$.

$$A \cap B = \left[-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right] = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}.$$

Приклад 10. Які геометричні фігури належать перетину даних множин:

1) множині правильних многокутників та множині трикутників;

2) множині ромбів та множині прямокутників?

1) Перетином цих множин є множина правильних трикутників;

2) Перетином цих множин є множина ромбів, які є прямокутниками, тобто, – множина квадратів.

Приклад 11. Знайти перетин множин натуральних чисел, які при діленні на 5 дають остачу 2, і при діленні на 6 дають остачу 4.

Маємо наступні множини.

Перша множина A містить числа виду $5k + 2, k = 0, 1, 2, \ldots$, тобто

$$A = \{2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}.$$

Друга множина B містить числа виду $6m + 4, m = 0, 1, 2, \ldots$, тобто

$$B = \{4, 10, 16, 22, 28, \ldots\}.$$

Нам потрібно знайти спільні елементи цих множин. Множина B містить тільки деякі парні числа, множина A містить ті парні числа, що закінчуються на 2. Першим спільним числом буде число 22 і, якщо продовжити пошук спільних чисел далі, то наступне спільне число – 52.

$$52 - 22 = 30 = 5 \cdot 6.$$

Перетином множин A і B є числа, що дають остачу 22 при діленні на 30, тобто числа виду $30t + 22$, $A \cap B = \{22, 52, 82, \dots\}$.

3.2. Операція об'єднання множин

Об'єднанням множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать або множині A, або множині B (рис. 4). Позначають: $C = A \cup B$.

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ або } x \in B)$$

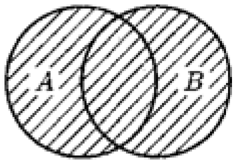


Рис.4. $A \cup B$

Для довільних множин A, B, C операція об'єднання множин має властивості:

1) $A \cup B = B \cup A$ (переставна властивість або комутативність).

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (сполучна властивість або асоціативність).

3) $A \cup \emptyset = A$.

4) $A \cup A = A$.

5) $A \subseteq A \cup B$ і $B \subseteq A \cup B$.

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ і $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (розподільні властивості або дистрибутивність)

Приклад 12. Знайти $A \cup B$, якщо

$A = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}$ і $B = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\right\}$.

Якщо зобразити дані множини на числовій прямій (повернемось до рис.3),

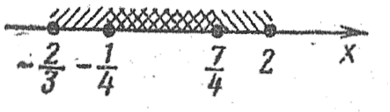


Рис. 3

то об'єднанням $A \cup B$ є частина числової вісі, де є хоча б одне штрихування, тобто відрізок $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$.

$$A \cup B = \left[-\frac{2}{3}; 2\right] = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\right\}.$$

Приклад 13. Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) A – множина рівнобедрених трикутників, B – множина рівносторонніх трикутників;
2) A – множина простих чисел, B – множина складених чисел;
3) A – множина простих чисел, B – множина непарних чисел.

1) Об'єднанням множин A і B буде множина рівнобедрених трикутників (множина A), бо множина рівносторонніх трикутників (множина B) є підмножиною множини A (кожний рівносторонній трикутник є рівнобедреним)

   $A \cup B = A$.

2) Об'єднанням множин простих чисел і складених чисел буде множина натуральних чисел без числа 1, так як число 1 не є ані простим, ані складеним.

   $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$.

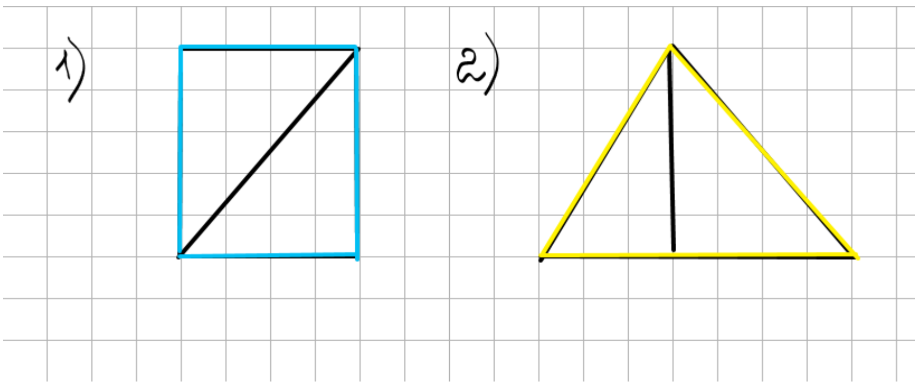
3) Об’єднанням множин простих чисел і непарних чисел буде об’єднання множини непарних чисел і числа 2, тому що 2 – це єдине парне просте число, всі інші прості числа – непарні числа, більші за 1.

$A \cup B = \{1,2,3,5,7,9,11,\dots\}$.

Приклад 14. Накресліть два трикутники так, щоб їхнім об’єднанням був:

1) чотирикутник;

2) трикутник.



3.3. *Операція віднімання множин*

Різницею множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів множини A, які не належать множині B (рис. 5).

Позначають: $C = A \setminus B$. Символ «\» є знаком теоретико-множинного віднімання.

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ і } x \notin B)$$

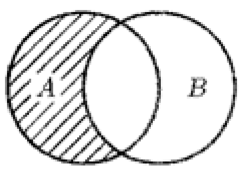


Рис.5. $A \setminus B$

Для довільних множин A, B, C операція віднімання множин має властивості:

1) $A\backslash\emptyset = A$.
2) $A\backslash A = \emptyset$.
3) $A\backslash B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
4) $(A\backslash B) \cap C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$ (розподільна властивість або дистрибутивність).

Симетричною різницею множин A і B називається множина, яка позначається як $A\Delta B$ і визначається наступним чином:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Приклад 15. Знайти $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$, якщо $A = \{1,3,5,18\}$, $B = \{1,3,7,12\}$.

$A \setminus B = \{5, 18\}$

$B \setminus A = \{7, 12\}$

$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$=$\{5, 18\} \cup \{7, 12\} = \{5, 7, 12, 18\}$.

Приклад 16. Знайти $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$, якщо

$$A = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4}\right\}; B = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \le x \le 2\right\}.$$

Різницею $A \setminus B$ є частина відрізку (знову рис.3), що зображує частину множини A, яка не є частиною множини В, тобто півінтервал $[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4})$.

Іншими словами, $A \setminus B = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{4}\right\}$ (точка $x = -\frac{1}{4}$ належить множині B, тому не належить множині $A \setminus B$).

Аналогічно $B \setminus A = (\frac{7}{4}; 2] = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, \frac{7}{4} < x \le 2\right\}$(точка $x = \frac{7}{4}$ належить множині A, тому не належить множині $B \setminus A$).

$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = [-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4}; 2]$.

Приклад 17. Нехай A – прості числа, менші за число 40, B – непарні числа, більші за число 14, але менші за число 29. Знайти $A \setminus B,\ B \setminus A,\ \ A \cup B, A \cap B$.

Задамо множини A та B переліком елементів.

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$,

$B = \{15, 17, 19, 21, 23, 25, 27\}$.

За означенням:

$A \setminus B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 29, 31, 37\}$,

$B \setminus A = \{15, 21, 25, 27\}$,

$A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 37\}$,

$A \cap B = \{17, 19, 23\}$.

Приклад 18. На рисунку 6 зображено два трикутники ΔABC і ΔADC. Множину точок трикутника ΔABC позначимо через PP, а множину точок трикутника ΔADC – через Q. Потрібно відмітити штриховою лінією наступні множини: а) $P \cup Q$; б) $P \cap Q$; в) $P \setminus Q$; г) $Q \setminus P$.

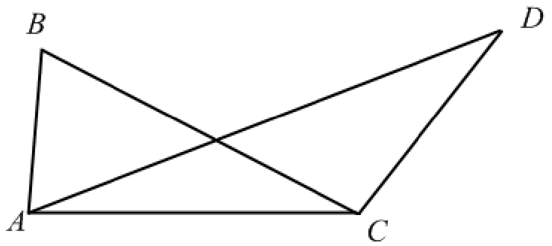
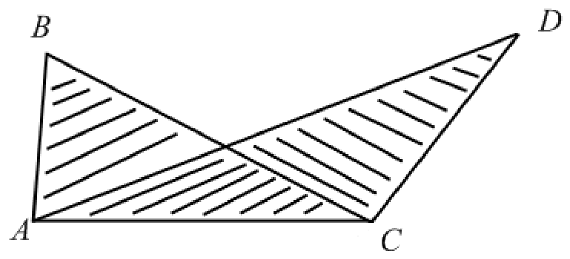
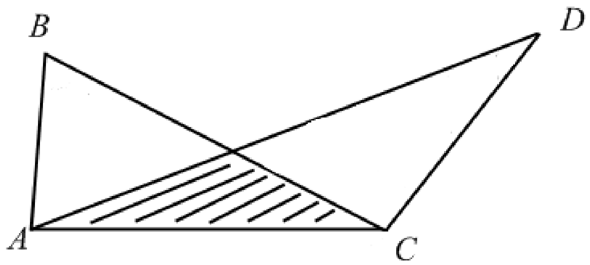


Рис.6

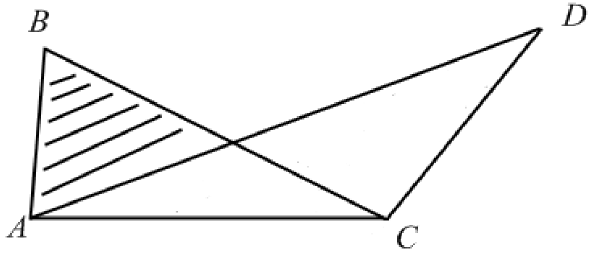
а) *Об'єднанням* множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, які входять або в множину A, або в множину B. Тому, маємо $P \cup Q$:



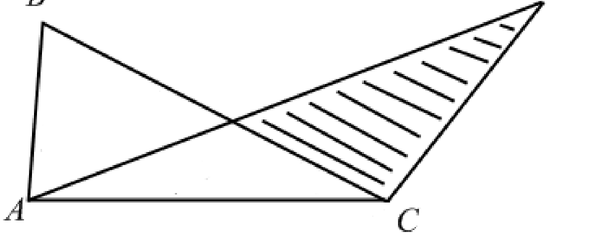
б) За означенням, до перетину двох множин входять ті та тільки ті елементи, які одночасно входять до обох множин, отже $P \cap Q$:



в) За означенням різниці множин маємо, що $P \setminus Q$:



г) Аналогічно, $Q \setminus P$:



Приклад 19. Дано множини:

$A = \{x | x \in \mathbb{R}, |x| \leq 4\}$ і $B = \{x | x \in \mathbb{R}, |x - 1| \geq 3\}$.

Знайти: $A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cup B,\ A \cap B$.

1) Нерівність $|x| \le a$ має розв'язок $x \in [-a; a]$, нерівність $|x| \ge a$ має розв'язок $x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ при $a > 0$. Запишемо множини у вигляді числових проміжків.

$|\text{x}| \le 4$

$-4 \le \text{x} \le 4$

$x \in [-4; 4]$

$A = [-4; 4]$

$|x - 1| \ge 3$

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 \ge 3 \\ x - 1 \le -3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x \le -2 \end{array}\right.$$

$x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

$B = (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

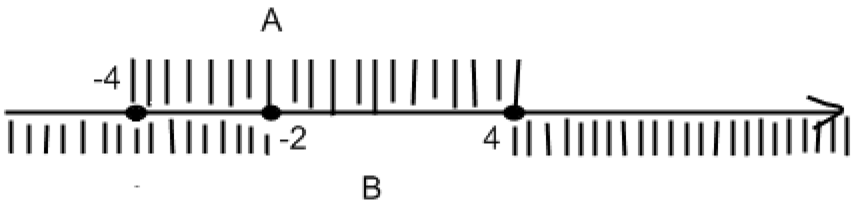


Рис. 7

За рисунком 7:

$$A \setminus B = (-2; 4),$$

$$B \setminus A = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty),$$

$$A \cup B = (-\infty; \infty),$$

$$A \cap B = [-4; -2] \cup \{4\}.$$

Приклад 20. Дано множини: P – множина паралелограмів; M – множина прямокутників; R – множина ромбів; K – множина квадратів. Охарактеризувати множини: $M \cap R$, $M \setminus R$, $R \setminus K$.

$M \cap R$ – це множина, яка містить прямокутники, які є ромбами, тобто – квадрати, $M \cap R = K = K$.

$M \setminus R$ – це множина, яка містить прямокутники, які не є ромбами, тобто прямокутники, у яких довжина та ширина різні.

$R \setminus K$ – це множина, яка містить ромби, які не є квадратами, тобто ромби, які не мають прямих кутів.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти множини $A \cap B$, $B \setminus \mathrm{C}$, $A \cap C$, $(B \cup C) \setminus A$, якщо:

1) A – множина цілих чисел від -5 до 10,
   B – множина натуральних чисел від 3 до 15,
   C – множина парних натуральних чисел, які не перевищують числа 12.
2) A – множина простих двозначних натуральних чисел, які не перевищують числа 35,
   B – множина всіх непарних натуральних чисел, більших за число 25,
   C – множина дільників числа 48.
3) A – множина двозначних натуральних чисел, кратних 12,
   B – множина двозначних натуральних чисел, кратних 18,
   C – множина двозначних натуральних чисел, кратних 15.
4) A – множина дільників числа 120,
   B – множина двозначних натуральних чисел, кратних 15,
   C – множина натуральних чисел, які не перевищують числа 10.
5) A – множина натуральних чисел, які діляться на 4 і не перевищують число 21;
   B – множина натуральних чисел, які діляться на 6,
   C – множина парних натуральних чисел, які не перевищують числа 11.
6) A – множина дільників числа 18,

B – множина дільників числа 24,

С – множина простих чисел, які не перевищують числа 20.

7) A – множина парних натуральних чисел,

B – множина непарних натуральних чисел,

С – множина простих чисел.

8) A – множина цілих чисел,

B – множина натуральних чисел,

С – множина парних цілих чисел.

Завдання 2. Для множин A, B знайти множини $A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cup B, A \cap B$.

1) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, x < -1{,}5\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, 1 \le x < 6\}$.

2) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, -2{,}5 \le x \le 1{,}3\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, x > 1\}$.

3) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, -1 < x < 4\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, x \le 2{,}5\}$.

4) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, -9 < x < -\frac{1}{2}\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, x > -2\}$.

5) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, x \le 3\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, -1 \le x < 4\}$.

6) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, -2{,}7 \le x \le 0\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, x > 6\}$.

7) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, x > 3{,}2\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, 0 \le x < 5\}$.

8) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, x < -7\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, 2 < x \le 5{,}5\}$.

Завдання 3. Знайти множини $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ та $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$, якщо:

1) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, |x| > 1\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 4 \le 0\}$.

2) $A = \{x|x \in \mathbb{Z}, |x + 3| \le 2\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{Z}, \frac{x^2+3x}{x+2} \ge -2\}$.

3) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, |x - 1| \ge 2\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, |5 - 2x| \le 3\}$.

4) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, \frac{x+5}{3} - 2x \ge 1 - \frac{3x}{4}\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, 1 - x^2 < 0\}$.

5) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, \frac{x}{2} - 6 \le \frac{x}{8}\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, 4 - \frac{x-1}{3} \ge x\}$.

6) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \le 0\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, |x + 1| \le 2\}$.

7) $A = \{x|x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 \ge 0\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} - 3 \le 0\}$.

8) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leq 4\}$; $\qquad B = \{x | x \in \mathbb{R}, \frac{x+5}{x(x^2+1)} > 0\}$.

Завдання 4. Множини A та B точок площини задано аналітично. Побудувати на площині ці множини та зобразити множини $A \cap B$, B\ A.

1) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x - y \geq 2\}$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x < -3\}$.
2) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 3x - y \geq 1\}$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x - y < 3\}$.
3) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x + 3y \geq 6$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x < 1\}$.
4) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 5x + y \geq 2\}$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 2y \leq -1\}$.
5) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 2x + 4y > -3\}$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x - 2y \leq 9\}$.
6) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x - 3y \geq 2\}$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y < 2\}$.
7) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 3x - y < 6\}$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x \geq -2\}$.
8) $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x + 2y \leq 1\}$;
   $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y > 5\}$.

§ 4. Доведення тотожностей. Діаграми Ейлера-Венна

Приклад 21. Довести, що якщо $A \subset B$, то $A \cup B = B$.

Доведення

Множини рівні, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Покажемо, що якщо $A \subset B$, то множини $A \cup B$ і B складаються з одних і тих же елементів.

Нехай $x \in A \cup B$. Це означає, що $x \in A$ або $x \in B$ (за визначенням об'єднання множин).

Якщо $x \in A$, то з умови $A \subset B$ випливає, що $x \in B$, тобто в обох випадках кожен елемент множини $A \cup B$ є елементом множини B, значить, $A \cup B \subset B$.

Якщо $x \in B$, тоді за визначенням об'єднання множин $x \in A \cup B$. Отже, кожен елемент множини B є елементом множини $A \cup B$, тобто $B \subset A \cup B$.

Тоді $(A \cup B) \subset B$ і $B \subset (A \cup B)$, а це і означає, що множини $A \cup B$ і B рівні, що і потрібно було довести.

Приклад 22. Довести, що для будь-яких множин A, B, C виконується властивість (дистрибутивность операції об'єднання відносно операції перетину множин):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доведення

Щоб довести рівність множин $A = B$, треба довести, що:

1) якщо $x \in A$, то $x \in B$;

2) якщо $x \in B$, то $x \in A$.

1. Припустимо, що елемент $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді або $x \in A$ або $x \in B \cap C$.

а) Якщо $x \in A$, то $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$. Отже, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

б) Якщо $x \in B \cap C$, то $x \in B$ і $x \in C$, тому $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$. Звідки слідує, що, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Припустимо, що елемент $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, тоді $x \in A \cup B$ і одночасно $x \in A \cup C$.

а) Якщо $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$, і твердження доведене.

б) Якщо $x \notin A$, то $x \in B$ і $x \in C$, тобто, $x \in B \cap C$. Але тоді $x \in A \cup (B \cap C)$, і твердження доведене.

Доведено, що з умови $x \in A \cup (B \cap C)$ слідує $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, а з мови $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) - x \in A \cup (B \cap C)$. Властивість доведено.

Вірність рівностей можна проілюструвати за допомогою діаграм Ейлера-Вена. Такі ілюстрації, взагалі кажучи, не є строгими доведеннями тверджень, але вони можуть використовуватись для доказу невірності тверджень.

Приклад 23. Проілюструвати на діаграмах Ейлера-Венна справедливість властивості з прикладу 21.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

На рис. 8 і 9 зображено формування лівої частини рівності − $A \cup (B \cap C)$.

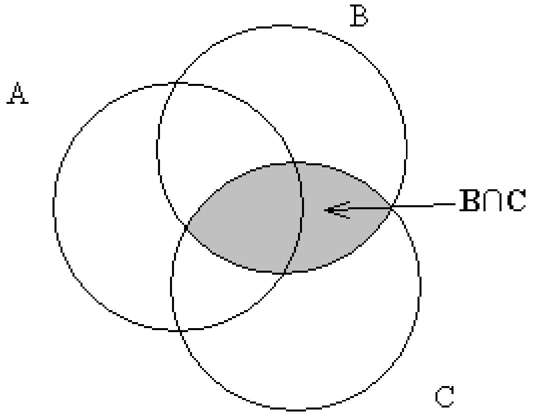


Рис. 8

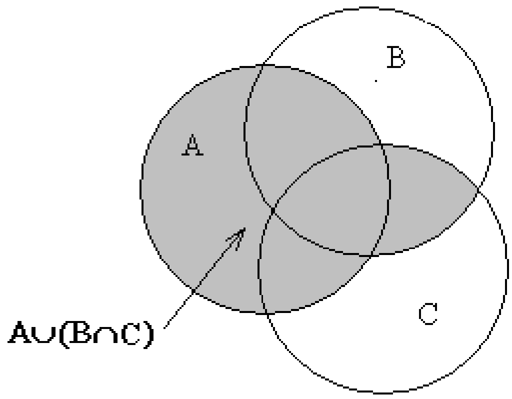


Рис.9

На рис. 10, 11 і 12 зображено формування правої частини рівності − $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

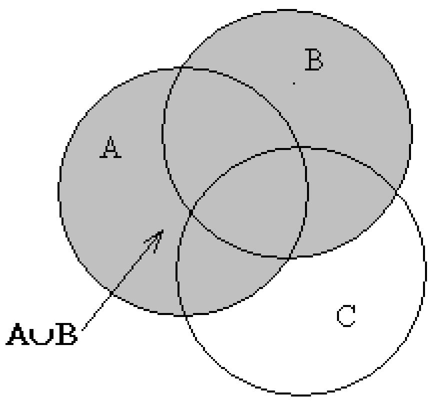


Рис. 10

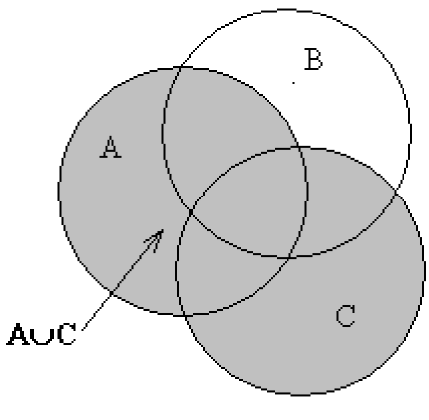


Рис. 11

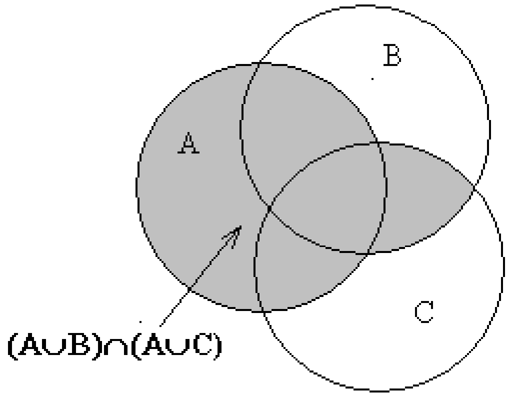


Рис. 12

Ми бачимо, що заштриховані множини на рисунках 9 і 12 є рівними, з чого робимо висновок, що дана рівність є вірною.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. З'ясувати за допомогою діаграм Ейлера-Венна, чи вірні наступні рівності для будь-яких множин A, B та C:

1) $(A \cup B) \setminus B = A$;
2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
3) $(A \setminus B) \cup B = A$;
4) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;
5) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$;
6) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
7) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
8) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
9) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
10) $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Завдання 2. Довести, що:

1) $A \cup B = B \cup A$;
2) $A \cap B = B \cap A$;

3) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

4) $A \cup \emptyset = A$;

5) якщо $A \subset B,$ то $A \cap B = A$;

6) якщо $A \subset B,$ то $A \cup B = B$;

7) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

8) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

10) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

§ 5. Універсальна множина. Доповнення до множини

У будь-якому конкретному завданні доводиться мати справу з підмножинами деякої, фіксованої для цього завдання, множини. Її прийнято називати *універсальною* (універсумом) і позначати символом U. Наприклад, нехай дано множини: A – множина ромбів, B – множина прямокутників, C – множина трапецій. Для множин A, B, C универсальною є множина U – множина чотирикутників.

Якщо ми в конкретній задачі розглядаємо множину A, яка включає в себе студентів, які навчаються на першому курсі університету, і множину B, яка включає в себе студентів, які навчаються на другому курсі університету, то в якості універсальної множини U можна розглядати множину всіх студентів університету.

Зауважимо, що універсальну множину іноді можна визначити декількома способами.

Приклад 24. Знайти універсальну множину для множин A і В, якщо A = {1, 2, 5, 7} і B = {2, 6, 7, 9}.

Якщо U – універсальна множина для множин A і B, то $A \subset U$ і $B \subset U$, тобто $A \cup B \subset U$.

Знайдемо об'єднання множин A і B: $C = A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$.

Вибір універсальної множини можна виконати не єдиним способом. Наприклад, для множин A і B у якості універсальної множини можна взяти наступну множину $U = \{x |\ x \leq 10,$ де $x \in \mathbb{N}\}$. Також множину U можемо визначити, наприклад, як множину натуральних чисел $\mathbb{N}$. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ також є універсальною множиною для заданих множин A і B.

При графічному зображенні множин і відношень між ними зручно використовувати діаграми Ейлера-Венна, на яких універсальну множину U зазвичай представляють у вигляді прямокутника, а інші множини у вигляді овалів, що розташовані усередині цього прямокутника (рис. 13):

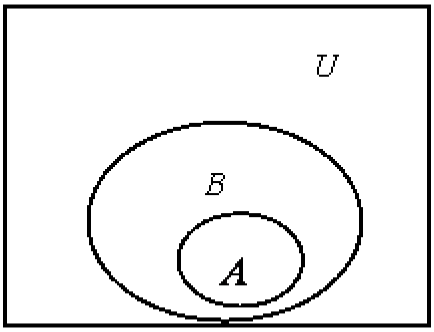


Рис. 13

Множину $U \backslash A$ називають *доповненням* множини A до універсальної множини U і позначають символом $\overline{A}$ (рис. 14).

$$\overline{A} = U \backslash A$$

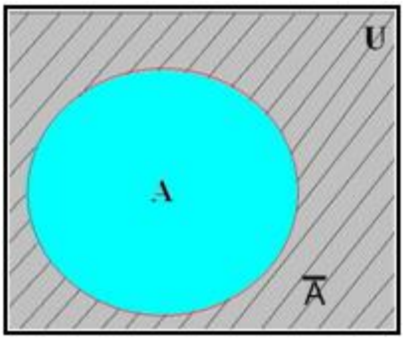


Рис. 14

Приклад 25. Дано множину $A = \{2, 3\}$. Знайти $\overline{A}$, якщо: 1) $U = \mathbb{N}$; 2) $U = \mathbb{Z}$; 3) $U = \mathbb{R}$.

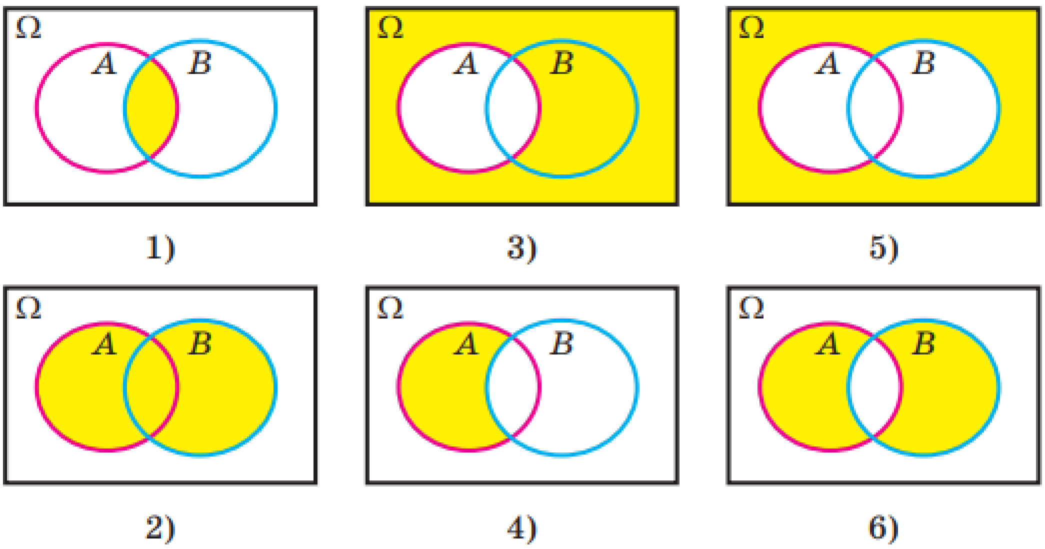
Згідно з визначенням доповнення до універсальної множини, маємо:

1) $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A = \{1; 4; 5; 6; \ldots\}$
2) $\overline{A} = \mathbb{Z} \setminus A = \{\ldots -2; -1; 0; 1; 4; 5; 6; \ldots\} = \{0; \pm 1; -2; -3; \pm 4; \pm 5; \ldots\}$
3) $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$ – цей випадок зобразимо на координатній прямій.

Остаточно маємо: $\overline{A} = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Приклад 26. Розглянемо одну задачу, в цій задачі наочно встановлюється зв'язок між операціями над подіями і операціями над множинами.

15.11.° **Серед членів спортклубу вибирають навмання одну людину. Подія A полягає в тому, що вибрана людина відвідує заняття в тренажерному залі, а подія B — у тому, що вона відвідує басейн. У чому полягає подія, проілюстрована на діаграмі (рис. 15.8)?**



1) $A \cap B$. Подія полягає у тому, що людина відвідує заняття і в тренажерному залі, і в басейні;

2) $A \cup B$. Людина відвідує заняття хоча би в тренажерному залі або в басейні;

3) $\overline{A}$. Людина не відвідує заняття в тренажерному залі;

4) $A\backslash B$. Людина відвідує заняття тільки в тренажерному залі;

5) $\overline{A \cup B}$. Людина не відвідує заняття в тренажерному залі і в басейні;

6) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Подія полягає у тому, що людина відвідує заняття або тільки в тренажерному залі, або тільки в басейні.

Для довільних підмножин A і B універсальної множини U виконуються наступні властивості:

1) $A \cup U = \mathrm{U}$;
2) $A \cap U = A$;
3) $A \cup \overline{A} = U$;
4) $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
5) $\bar{\bar{A}} = A$;
6) якщо $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$;
7) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
8) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Властивості 7) і 8) носять назву законів де Моргана. Огастес де Морган (1806-1871 рр) – британський математик, логік.

Доведемо один із законів де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Доведення

1) Якщо $x \in \overline{A \cup B}$, то це означає, що $x \notin A$ і $x \notin B$. Якщо $x \notin A$, то $x \in \bar{A}$, якщо $x \notin B$, то $x \in \bar{B}$. Якщо $x \notin A$ і $x \notin B$, то звідки слідує, що $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.
2) Якщо $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, то це означає, що $x \notin A$ і $x \notin B$. Тобто $x \in \overline{A \cup B}$. ■

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дано множину A і універсальну множину U. Знайти множину $\overline{A}$.

1) $A = [-1; 4)$, $U = \mathbb{R}$.
2) $A = \{0; 2\}$, $U = \mathbb{Z}$.
3) $A = [1; 2)$, $U = \mathbb{R}+$.
4) $A = \{-2; 0; 1\}$, $U = \mathbb{R}$.
5) $A = [-1; 3)$, $U = \mathbb{R}$.
6) $A = \{-2; 5\}$, $U = \mathbb{Z}$.
7) $A = \{1; 6\}$, $U = \mathbb{N}$.
8) A – прості числа, $U = \mathbb{N}$.
9) A – парні числа, $U = \mathbb{N}$.
10) A – раціональні числа, $U = \mathbb{R}$.
11) $A = \{x | x = 3k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.
12) $A = \{x | x = 4k + 3,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.
13) A – множина гострокутних трикутників, U – множина трикутників.
14) A – множина ромбів, U – множина паралелограмів.
15) A – множина прямокутних трапецій, U – множина трапецій.

Завдання 2. Нехай U – множина студентів деякого університету. Визначимо її підмножини: A – множина студентів-відмінників, B – множина студентів, які вивчають німецьку мову, C – множина студентів, які мають спортивний розряд, D – множина студентів, які співають у хорі. Задайте формулами наступні множини студентів цього університету:

1) множина відмінників, які мають спортивний розряд;
2) множина студентів, які не є відмінниками і не співають у хорі;
3) множина студентів, які не співають у хорі, але вивчають німецьку мову;
4) множина студентів, які співають у хорі і вчать німецьку мову;

5) множина студентів, які співають у хорі і, або є відмінниками, або вивчають німецьку мову;
6) множина вивчаючих німецьку мову студентів, які не є ні відмінниками, ні спортсменами;
7) множина студентів-спортсменів, які або не вчяться на «відмінно», або не співають у хорі;
8) множина вивчаючих німецьку мову відмінників, які співають у хорі, але не мають спортивного розряду.

Завдання 3. Нехай U – множина учнів деякого 11 класу. Визначимо її підмножини: A – множина учнів цього класу, які додатково займаються програмуванням, B – множина учнів цього класу, які додатково займаються математикою. Опишіть множини: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap \bar{B}$; 3) $B \cap \bar{A}$; 4) $\overline{A \cup B}$.

§ 6. Формула включень-виключень

Потужність множини (кардинальне число) – поняття теорії множин, яке узагальнює на довільні множини поняття «число елементів». Потужність множини в літературі може позначатися декількома символами: $n\ (A)$ або $|A|$ (читаємо – потужність множини A). Ми будемо позначати потужність множини A символом $|A|$. Вважають, що $|\emptyset| = 0$.

Дві множини A і B називаються *рівнопотужними*, якщо між ними можна встановити *взаємно-однозначну відповідність*, тобто відповідність, при якій кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B і, навпаки, кожному елементу множини В відповідає один і тільки один елемент множини A.

В такому випадку пишуть, що $A \sim B$, тоді $|\, A \,| = |B|$.

Приклад 27. Установіть взаємно-однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 5.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$A = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$

Взаємно-однозначну відповідність між множинами $\mathbb{N}$ і A можна задати за допомогою відображення $f(n) = 5n, n \in \mathbb{N}$. Відображення множини A на $\mathbb{N}$ тоді визначається як $g(a) = \frac{1}{5}a, a \in A$.

$1 \leftrightarrow 5$

$2 \leftrightarrow 10$

$3 \leftrightarrow 15$

$4 \leftrightarrow 20$

тощо.

Кожна множина має потужність, але потужність скінченних і нескінченних множин різного роду. Потужність скінченної множини виражається натуральним числом і співпадає з кількістю елементів цієї множини. Наприклад, якщо $A = \{1, 3, 5, 7\}$, то $|A| = 4$.

Коли виникає необхідність говорити про потужність скінченої множини, то говорять про кількість елементів множини.

Для скінченних множин справедливе наступне твердження.

Правило суми.

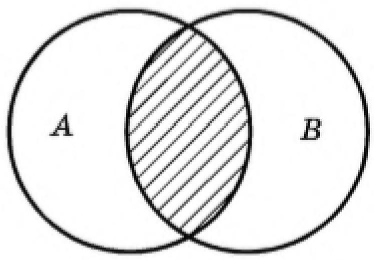
Якщо A і B – скінчені множини і $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Якщо A і B – скінчені множини і $A \cap B \neq \emptyset$, то $|A \cup B| < |A| + |B|$.

Теорема. Потужність об'єднання двох скінченних множин можна знайти за формулою:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Цю формулу називають *формулою включень-виключень*.



Дійсно, в формулі в суму $|A| + |B|$ двічі входить число елементів, що належить перетину множин A і B, тому, щоб отримати число елементів в об'єднанні множин A і B, потрібно записати:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 28. З 30 учнів в класі 23 учням подобаються уроки алгебри, 20 – уроки фізики, 17 учням – уроки алгебри і фізики. Скільком учням в класі не подобаються а ні уроки алгебри, а ні уроки фізики?

Нехай А – множина учнів, яким подобаються уроки алгебри, $|\mathrm{A}| = 23$, Ф – множина учнів, яким подобаються уроки фізики, $|\Phi| = 20$, з умови задачі $|\mathrm{A} \cap \Phi| = 17$. За формулою включень-виключень:

$|\mathrm{A} \cup \Phi| = |\mathrm{A}| + |\Phi| - |\mathrm{A} \cap \Phi| = 23 + 20 - 17 = 26.$

26 учням в класі подобаються або уроки алгебри, або уроки геометрії.

В класі 30 учнів, $|\mathrm{U}| = 30,$ тому $30 - 26 = 4$ учням не подобаються ані уроки алгебри, ані уроки фізики.

Відповідь: 4 учням.

Приклад 29. Зі 130 студентів факультету 105 вивчають англійську мову, 30 – німецьку мову, 13 студентів вивчають тільки французьку мову. Скільки студентів одночасно вивчають англійську і німецьку мову?

Нехай А – множина студентів, які вивчають англійську мову, $|\mathrm{A}| = 105$, В – множина студентів, які вивчають німецьку мову, $|\mathrm{B}| = 30$. Зі 130 студентів не вивчають англійську і німецьку мову 13 студентів. Отже, 130-13=117 студентів вивчають хоча б одну з мов (англійську або німецьку).

Тоді $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = 117$. Тоді за формулою включень-виключень маємо:

$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|.$

$|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = 105 + 30 - 117 = 18.$

Отже, 18 студентів одночасно вивчають англійську і німецьку мову.

Відповідь: 18 студентів.

Формулу включень-виключень можна узагальнити на випадок будь-якого скінченого числа множин.

Теорема. Для трьох скінченних множин A, B, C справедлива формула:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад 30. Вибрано деяку підмножину множини натуральних чисел. Відомо, що серед обраних натуральних чисел 100 чисел кратні 2; 115 чисел кратні 3; 120 чисел кратні 5; 45 чисел кратні 6; 38 чисел кратні 10; 50 чисел кратні 15; 20 чисел кратні 30. Скільки чисел в обраній множині?

Нехай A – множина чисел, кратних 2, $|A| = 100$, B – множина чисел, кратних 3, $|B| = 115$, C – множина чисел, кратних 5, $|C| = 120$.

Числа, які кратні 6, належать множині $A \cap B$, бо ці числа діляться і на 2, і на 3, тому $|A \cap B| = 45$.

Числа, які кратні 10, належать множині $A \cap C$, $|A \cap C| = 38$.

Числа, які кратні 15, належать множині $B \cap C$, $|B \cap C| = 50$.

Числа, які кратні 30, належать множині $A \cap B \cap C$, $|A \cap B \cap C| = 20$.

Тоді:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 100 + 115 + 120 - 45 - 38 - 50 + 20 = 222.$$

Відповідь: 222 числа.

Приклад 31. В одній групі студентів 10 чоловік знають англійську мову, 10 – німецьку мову, 6 – італійську мову. Одночасно знають англійську і німецьку мову 6 чоловік, німецьку і італійську мову – 4 людини, англійську і італійську мову – 3 людини. Одна людина знає всі три мови. Скільки студентів в групі? Скільки студентів знають тільки англійську мову?

Нехай А – множина студентів, які знають англійську мову, $|A| = 10$, В – множина студентів, які знають німецьку мову, $|B| = 10$, С – множина студентів, які знають італійську мову, $|C| = 6$.

Студенти, які знають англійську і німецьку мову відносяться до множини $A \cap B$, тому $|A \cap B| = 6$ – кількість студентів, які знають англійську і німецьку мову.

Студенти, які знають німецьку і італійську мову відносяться до множини $B \cap C$, тому $|B \cap C| = 4$ – кількість студентів, які знають німецьку і італійську мову.

Студенти, які знають англійську і італійську мову відносяться до множини $A \cap C$, тому $|A \cap C| = 3$ – кількість студентів, які знають англійську і італійську мову.

$A \cap B \cap C -$ множина студентів, які знають всі три мови, тому $|A \cap B \cap C| = 1$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 10 + 10 + 6 - 6 - 4 - 3 + 1 = 14$ студентів у групі.

$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 10 - 6 - 3 + 1 = 2$ студентів знають тільки англійську мову.

Відповідь: всього у групі 14 студентів, 2 студенти студентів знають тільки англійську мову.

Приклад 32. 35 студентів складали основи інформатики, дискретну математику та основи програмування під час сесії. По 26 студентів вдало склали кожен з іспитів. Основи інформатики і дискретну математику склали 23 студентів, дискретну математику і програмування – 21 студент, основи інформатики і програмування – 25 студенти. Скільки студентів пішло перескладати хоча б один іспит?

Нехай A – множина студентів, які склали основи інформатики, $|\mathrm{A}| = 26$, B – множина студентів, які склали дискретну математику, $|\mathrm{B}| = 26$, C – множина студентів, які склали основи програмування, $|\mathrm{C}| = 26$.

Студенти, які склали основи інформатики і дискретну математику відносяться до множини $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, тому $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 23$ – кількість студентів, які склали основи інформатики і дискретну математику.

Студенти, які склали дискретну математику і програмування відносяться до множини $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$, тому $|\mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = 21$ – кількість студентів, які склали дискретну математику і програмування.

Студенти, які склали основи інформатики і програмування відносяться до множини $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$, тому $|\mathrm{A} \cap \mathrm{C}| = 25$ – кількість студентів, які склали основи інформатики і програмування.

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C} -$ множина всіх студентів, тому $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}| = 35$.

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| + |\mathrm{C}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| - |\mathrm{B} \cap \mathrm{C}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{C}| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}|$$

$|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = 35 - 26 - 26 - 26 + 23 + 21 + 25 = 26$ студентів склали всі три іспити.

$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = 35 - 26 = 9$ студентів відправились перескладати хоча б один іспит.

Відповідь: 9 студентів відправились перескладати хоча б один іспит.

Наведемо рішення однієї історичної задачі, яку називають задачею Льюїса Керола. *Lewis Carroll*, справжнє ім'я Чарльз Латвідж Доджсон (1832-1898 рр) – британський письменник, математик, філософ, логік, англіканський клірик і фотограф. Найвідоміші літературні твори Керролла: «Пригоди Аліси у Дивокраї» і продовження «Аліса в задзеркаллі».

Задача Льюїса Керола. В жорсткому бою 70 зі 100 піратів втратили одне око, 75 – одне вухо, 80 – одну руку, 85 – одну ногу. Яка мінімальна кількість тих, хто втратив одночасно глаз, вухо, руку і ногу?

Нехай U – множина всіх піратів, $|U| = 100$, A – множина піратів, які втратили одне око, $|A| = 70$, B – множина піратів, які втратили одне вухо, $|B| = 75$, C – множина піратів, які втратили одну руку, $|C| = 80$, D – множина піратів, які втратили одну ногу, $|D| = 85$.

$$|\bar{A}| = |U \backslash A| = 100 - 70 = 30.$$

$$|\bar{B}| = |U \backslash B| = 100 - 75 = 25.$$

$$|\bar{C}| = |U \backslash C| = 100 - 80 = 20.$$

$$|\bar{D}| = |U \backslash D| = 100 - 85 = 15.$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10.$$

Отже, не менше ніж 10 піратів одночасно втратили і око, і вухо, і руку, і ногу.

Завдання для самостійної роботи

1. На олімпіаді з математики було запропоновано три задачі: з алгебри, планіметрії і стереометрії. Зі 100 учасників задачу з алгебри розв'язали 80 учасників, з планіметрії – 70 учасників, а зі стереометрії – 60 учасників. При цьому задачі з алгебри і планіметрії розв'язали 60 учасників, з алгебри і стереометрії – 50 учасників, з планіметрії і стереометрії – 40 учасників. Усі три задачі розв'язали 30 учасників. Чи були учасники, що не розв'язали жодної задачі, і якщо так, то скільки їх?
2. У класі 25 учнів. З них 11 шахістів, 8 плавців і 12 велосипедистів, причому кожен спортсмен займається тільки двома видами спорту і вчиться на 3 або на 4. У класі 6 відмінників. Скільки в класі спортсменів? Скільки в класі невстигаючих?
3. У музичному ансамблі використовується 4 інструменти. Для кожного інструменту в ансамблі є 4 музиканти, що володіють цим інструментом, грою на двох інструментах володіють 3 музиканти, грою на 3 інструментах – 2 музиканти. 1 музикант володіє усіма чотирма інструментами. Скільки музикантів в ансамблі?

4. Протягом 30 днів вересня були 8 дощових, 12 вітряних, 5 холодних, 5 дощових і вітряних, 3 дощових і холодних, 2 вітряних і холодних дня, а один день був і дощовий, і вітряний, і холодний. Протягом скількох днів у вересні була гарна погода?
5. У одному селі 500 жінок дивляться бразильський серіал. З них 155 переживають за Марію–Антонію, 108 цікавляться життям Педро, 134 хвилює доля Хосе-Ігнасіо, 48 жінок переживають за стосунки Марії-Антонії і Хосе Ігнасіо, 35 − хвилюються за Марію-Антонію і Педро, 17 − підозрюють про родинні зв'язки Хосе-Ігнасіо і Педро, 23 жінки вірять в щастя усіх трьох головних героїв. А скільки жінок в селі, що дивляться серіал, взагалі ні за кого з головних героїв не переживають і не вірять в їх щастя?
6. Під час сесії 24 студенти групи повинні здати три заліки: з фізики, педагогіки і програмування. 18 студентів здали залік з фізики, 21 – з педагогіки, 20 – з програмування, 16 – з фізики і педагогіки, 19 – з фізики і програмування, 18 – з педагогіки і програмування. Скільки студентів здали усі три заліки? Скільки студентів не здали хоча б один залік?
7. Опитування групи студентів показало, що 70 % з них люблять ходити в кіно, 60 % – в театр, 30 % – на концерти. У кіно і театр ходять 40 % студентів, в кіно і на концерти – 20 %, в театр і на концерти – 10 %. Скільки студентів (у %) ходять в кіно, театр і на концерти?

§7. Короткий нарис розвитку теорії множин

Теорія множин – розділ математики, в якому вивчаються загальні властивості множин. Теорія множин лежить в основі більшості математичних дисциплін; вона зробила глибокий вплив на розуміння основ самої математики. Перший нарис теорії множин належить Бернарду Больцано (Парадокси нескінченного, 1850 р). У цій роботі розглянуто довільні числові множини, і для їх порівняння визначено поняття взаємно-однозначної відповідності.

В аксіоматичних теоріях дати визначення новому поняттю означає виразити це поняття через раніше визначені. При цьому мають бути деякі базові поняття, які формально не визначені. Множина якраз одне з таких понять. У 1870 німецький математик Георг Кантор розробив свою програму стандартизації математики, у рамках якої будь-який математичний об’єкт повинен був виявлятися тією або іншою «множиною». Цей підхід був викладений в двох його статтях, опублікованих в 1879-1897 роках у відомому німецькому журналі «Математичні аннали». Самому Кантору належить наступне визначення поняття «множина»: «Множина – це об'єднання певних, різних об'єктів, званих елементами множини, в єдине ціле». Це цілком відповідало умонастрою самого Кантора, що підкреслено називав свою програму не теорією множин (цей термін з'явився багато пізніше), а вченням про множини.

Програма Кантора викликала різкі протести з боку багатьох сучасних йому математиків. Особливо виділявся своїм несхвальним до неї відношенням Леопольд Кронекер, що вважав, що математичними об'єктами можуть вважатися лише натуральні числа і те, що до них безпосередньо зводиться (відома його фраза про те, що «бог створив натуральні числа, а усе інше – справа рук людських»). Повністю відкинули теорію множин і такі авторитетні математики, як Герман Шварц і Анри Пуанкаре. Проте, інші математики, зокрема, Готлоб Фреге, Рихард Дедекінд і Давид Гільберт, підтримали Кантора в його намірі перекласти усю математику на теоретико-множинну мову. Теорія множин стала фундаментом теорії міри, інтеграла, топології, функціонального аналізу і багатьох інших розділів математики.

Проте незабаром з’ясувалося, що установка Кантора на необмежене свавілля при операціях з нескінченними множинами є невірною. А саме, були виявлені ряд теоретико-множинних антиномій (парадокси). Наведемо деякі з них.

Антиномія Рассела формулюється наступним чином: Нехай K – множина всіх множин, які не містять себе у якості свого елементу. Чи містить K само себе у якості елементу? Якщо так, то, за визначенням K, воно не має бути елементом K – протиріччя. Якщо ні – то, за визначенням K, воно має бути елементом K – знову протиріччя. Існує багато популярних формулювань цього парадоксу. Одне з них традиційно називається *парадоксом цирульника* і звучить так: Одному сільському цирульникові наказали: «Голити всякого, хто сам не голиться, і не голити того, хто сам голиться». Як він повинен поступити з собою?

Після виявлення антиномії Рассела частина математиків (наприклад, Л. Брауер та його школа) вирішила повністю відмовитися від теорії множин. Інша ж частина математиків, очолена Д. Гільбертом, зробила ряд спроб строго обґрунтувати ту частину теорії множин, яка здавалася їм найбільш відповідальною за виникнення антиномій, це стосувалось використання поняття множина всіх множин.

Логічний аппарат теорії множин удосконалив Бертран Рассел в роботах, пізніше зібраних в його монографії «Підстави математики» (1910-1913 рр). У 1904-1908 рр. Ернст Цермело запропонував першу версію аксіоматичної теорії множин.

Нині найбільш поширеною аксіоматичною теорією множин є ZFC – теорія Цермело-Френкеля, яка містить так звану аксіому вибору. Не усіма математикам аксіома вибору приймалась беззастережно. Так, наприклад Е. Борель і А. Лебег вважали, що докази, отримані за допомогою цієї аксіоми, мали іншу пізнавальну цінність, ніж докази, незалежні від неї. Інші ж математики, такі як Ф. Хаусдорф і А. Френкель, приймали аксіому вибору беззастережно, визнаючи за нею ту ж міру очевидності, що і за іншими аксіомами Цермело-Френкеля.

Аксіоми ZFC:

1. Аксіома об'ємності. Дві множини A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають одні і ті ж елементи.

2. Аксіома порожньої множини. Існує множина без жодного елементу. Ця множина зазвичай позначається сиволом $\emptyset$.

3. Аксіома пари. Для будь-яких множин A і B існує множина C така, що A і B є його єдиними елементами. Множина C позначається $\{A, B\}$ і називається неврегульованою парою A і B. Якщо $A = B$, то множина C складається з одного елементу.

Досі в якості існуючої у нас була тільки одна множина, яка не має елементів. Аксіома пари дозволяє нам сконструювати інші множини. По-перше, аксіомою затверджується існування множини, яка має елемент. Порожня множина є множиною і, таким чином, об'єктом, і по цій аксіомі ми можемо утворити множину $\{\emptyset\}$, чиїм єдиним елементом буде порожня множина $\emptyset$. Так що тепер є дві множини – $\emptyset$ і $\{\emptyset\}$. Аксіома пари затверджує існування множин $\{\{\emptyset\}\}$ і $\{\{\emptyset\},\emptyset\}$. Таким чином, у нас є вже чотири множини. Повторне застосування аксіоми затверджує існування усіх множин пар з цих чотирьох об'єктів і, крім того, множин, що містять дані чотири об'єкти у якості свого єдиного елемента. Повторення цього процесу дає яке завгодно скінчене число множин, кожна з яких містить один або два елементи.

4. Аксіома об'єднання. Для будь-якого сімейства A множин існує множина, звана об'єднанням множин A, що складається з тих і тільки тих елементів, які містяться в елементах множини A.

Ця аксіома стверджує існування множин, що містять будь-яке число елементів. Наприклад, об'єднання пар множин, що не мають загальних елементів, коли одна множина містить два елементи, а друга – один елемент, дає множину з трьох елементів.

5. Аксіома нескінченності.

Аксіоми з 1 по 4 надають обмежені можливості для формування нових множин. Введемо визначення: множина називається *індуктивною*, якщо вона містить порожню множину і містить послідовник (тобто елемент) кожного свого елементу.

Аксіома нескінченності стверджує, що індуктивні множини існують.

Аксіома нескінченності стверджує існування, принаймні, однієї нескінченної множини, з якої можуть бути породжені інші нескінченні множини.

6. Аксіома виділення. Будь-якій множині A і властивості ω відповідає множина B, елементами якої є ті і тільки ті елементи A, які мають властивість ω.

Аксіома виділення є найбільш характерною рисою аксіоматичної системи Цермело-Френкеля. Аксіома виділення покликана обмежити припущення Кантора про те, що завжди можна зібрати разом в одну сукупність усі речі, що задовольняють осмисленому опису. Аксіомою виділення створюються лише такі підмножини множини, існування яких гарантоване іншими аксіомами. Таким чином, уникаються парадокси «наївної» теорії множин.

7. Аксіома множини підмножин. Для будь-якої множини A існує множина B, що складається з тих і тільки тих елементів, які є підмножинами множини A. Множина підмножин множини A позначається $P(A)$.

8. Схема підстановки. Нехай $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ – така формула, що при будь–якому x_0 з множини X існує, і притому єдиний, об'єкт y_0 такий, що вираз $\varphi(x_0\ , y_0\ )$ істинний. Тоді об'єкти c, для кожного з яких існує $d \in X$ такий, що $\varphi(d, c)$ істинно, утворюють множину.

9. Аксіома основи. Кожна непорожня множина S містить елемент a такий, що $a \in S \wedge a \cap S = \emptyset$.

10. Аксіома вибору. Для кожного сімейства A непорожніх множин, що не перетинаються, існує множина B, що має один і тільки один спільний елемент з кожним елементом їз множини X, що належать A.

Аксіома вибору має статус, відмінний від статусу інших аксіом. Вона є найбільш спірною аксіомою теорії множин, і при доведенні теорем теорії множин вказується, чи отриманий цей результат за допомогою аксіоми вибору або ні. Сам Цермело вважав цю аксіому логічним принципом, і цієї точки зору дотримуються також багато сучасних математиків, оскільки знаходять аксіому вибору інтуїтивно правдоподібною. Проблема полягає в тому, що ця аксіома має несподівані наслідки, деякі з яких вважаються такими, що суперечать інтуїції. З цієї причини, широке коло математиків вважає, що слід уникати, якщо це можливо, використання цієї аксіоми. У зв'язку з цим говорять про «обмежену теорію множин» без аксіоми вибору, в протилежність «стандартній теорії множин», яка містить цю аксіому.

Якщо проаналізувати парадокси теорії множин, то можна зробити висновок, що всі вони обумовлені необмеженим застосуванням так званого принципу абстракції (або принципу згортання), згідно з яким для будь-якої властивості $P(x)$ існує відповідна множина елементів x, які мають властивість $P(x)$. Якщо відкинути це припущення, то всі відомі парадокси теорії множин стають неможливими.

Питання про несуперечність теорії ZFC залишається невирішеним.

Список використаної літератури

1. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: теорія множин, математична логіка, комбінаторика, теорія графів / Л.Є. Базилевич. Математичний практикум. Львів, 2013.
2. Завало С.Т. Алгебра и теорія чисел. ч.1. / С.Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. І. Хацет. Київ : Вища школа, 1977.
3. Капітонова С.Л. Основи дискретної математики / С. Л. Капітонова, О.А. Кривий, Г.М. Летичевський, М.Б. Луцький, М.К. Печурін. Київ : Наукова думка, 2002.
4. Михалін Г. О. Елементи теорії множин і теорії чисел / Г. О. Михалін, Л. І. Дюженкова. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003.
5. Попов М. М. Аксіоматична теорія множин. Частина I. Система аксіом ZFC і вступ до теорії моделей / М. М. Попов. Чернівці : Рута, 2011.