МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту
Кафедра вищої математики і статистики

*Методичні рекомендації*

для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Методологія математики»

Модуль: Загальнонаукові методи пізнання в математиці

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)**

Одеса – 2024

УДК 510.001.8

*Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
протокол № 1 від 22 серпня 2024 року*

Рецензенти:

Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики, ОДАБА
Пивоварчик В. М., д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики і статистики, Державний заклад «Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»

Укладач:
Яковлєва О. М., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни *«Методологія математики»,* модуль: Загальнонаукові методи пізнання в математиці. Одеса : Університет Ушинського, 2024. 30 с.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни *«Методологія математики»,* модуль: Загальнонаукові методи пізнання в математиці містять загальний теоретичний матеріал, приклади рішення завдань, пропоновані вправи для самостійного розв'язання.

Рекомендовано для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)** з метою закріплення, поглиблення та узагальнення знань, одержаних під час навчання.

Зміст

## *§ 1. Огляд загальнонаукових методів пізнання в математиці*

Формування і розвиток наукового знання реалізується за допомогою широкого кола засобів, способів, методів. ***Метод*** у найзагальнішому значенні – це певний спосіб дослідження якоїсь проблеми чи завдання, тобто метод являє собою систему правил, принципів і прийомів підходу до вивчення явищ і закономірностей розвитку природи, суспільства і мислення або практичної перетворюючої діяльності людини. Під ***методологією*** розуміють вчення, науку про методи наукового пізнання. Разом з тим це і сукупність загальних і, в першу чергу, світоглядних принципів, які використовуються для вирішення наукових та практичних завдань.

Методи пізнання науки розбито на три класи: 1) загальнофілософський метод (ним вчені користуються при дослідженні всіх областей дійсності і на всіх етапах кожного конкретного пізнавального процесу, це сукупність загальних принципів, що регулюють пізнавальну і практичну діяльність в цілому); 2) загальнонаукові методи (прийоми і операції, за допомогою яких вирішуються окремі загальнопізнавальні звання); 3) окремі методи (прийоми і операції, за допомогою яких вирішуються специфічні завдання конкретної науки).

Зупинимось на загальнонаукових методах пізнаннях математики, які співпадають із загальнонауковими методами пізнання науки взагалі, але мають свої особливості, про які і буде йти мова.

***Метод абстракції*** застосовується у всіх теоретичних науках, при цьому дослідник відволікається від усіх сторін реального об'єкта, крім кількох, які він вважає суттєвими, що дає змогу дослідити вибрані сторони глибше. Результатом абстракції є поняття. У математиці метод абстракції досягає найвищого рівня, оскільки математика використовує багатоступінчасте абстрагування. Прикладом поняття в математиці є число, функція, група, вектор тощо. Математична абстракція, роблячи відволікання від деяких сторін об'єкта, водночас завжди здійснює його ідеалізацію. Ідеалізація в математиці проводиться до крайніх, граничних рівнів: зменшуючи розміри тіла, зменшуємо їх до нуля, отримуємо точку, яка не має розміру та частин; спрямовуючи межі відрізка в нескінченність, отримуємо пряму.

***Метод аналогій*** полягає у перенесенні знання з більш вивченого на менш вивчений об'єкт на основі схожості їх суттєвих ознак. Один із проявів цього методу у математиці – встановлення ізоморфізму між аналізованими структурами, тобто встановлення взаємно однозначної відповідності між об’єктами, що зберігає основні операції, що доводить подібність їх побудови та якостей. Наприклад, ми можемо встановити ізоморфізм між множиною векторів площини із заданими на ній операціями додавання векторів та множення вектора на дійсне число і можиною впорядкованих пар дійсних чисел з визначеними на ній операціями додавання пар чисел та множення пари чисел на дійсне число. Приклади операцій додавання векторів та множення вектора на число на множині векторів площини представлено на рисунку 1. Приклади операцій додавання впорядкованих пар дійсних чисел та множення впорядкованої пари на дійсне число представлено на рисунку 2.

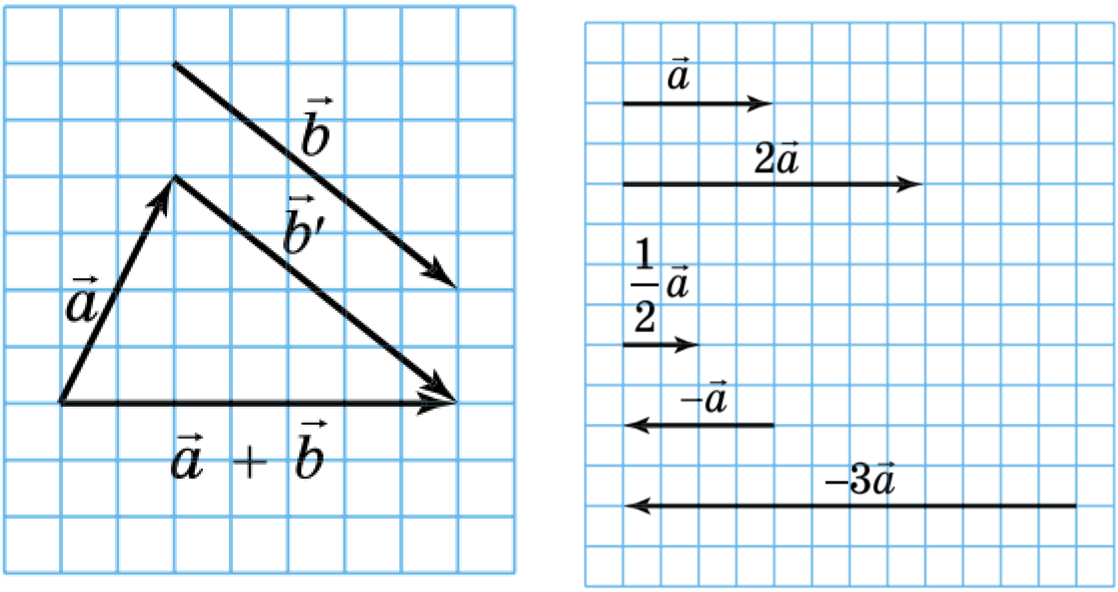


Рис. 1. Приклад додавання векторів за правилом трикутника та множення вектора на число

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$
$$3 \cdot (a; b) = (3a; 3b)$$
$$-0{,}27 \cdot (a; b) = (-0{,}27a; -0{,}27b)$$

Рис. 2. Приклад додавання впорядкованих пар дійсних чисел та множення впорядкованої пари чисел на число

І хоча ці операції визначаються на цих множинах по-різному, між цими множинами можна встановити ізоморфізм, якщо кожному вектору на площині поставити у відповідність певну упорядковану пару дійсних чисел, яку називають координатами вектора. І тоді операції над векторами можна замінювати операціями над їх координатами, що виявляється зручнішим в багатьох задачах, тобто, якщо вектор $\bar{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, вектор $\bar{b}$ має координати $(b_1; b_2)$, то вектор $\bar{a} + \bar{b}$ має координати $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, а вектор $\alpha\bar{a}$ має координати $(\alpha a_1; \alpha a_2)$, де $\alpha -$ дійсне число.

Також прикладом застосування в математиці метода аналогій є встановлення ізоморфізму між векторними просторами лінійних операторів та квадратних матриць, після чого можна вивчати структуру та властивості лінійних операторів за допомогою матриць та операцій над ними.

***Аналіз*** – загальнонауковий метод пізнання, що полягає в уявному розчленуванні об'єкта дослідження на складові елементи. При цьому виділяються та вивчаються окремі властивості, співвідношення об'єкта, його форма, структура. Такий підхід взагалі типовий для вирішення завдання математичними засобами (наприклад, розв'язання текстової задачі по діям, розв'язання рівняння, розв'язання геометричної задачі, доведення теореми тощо).

***Синтез*** – метод, протилежний аналізу, метод, що доповнює аналіз. Він полягає в уявному поєднанні проаналізованих різних сторін об’єкта дослідження в одне ціле.

Аналіз і синтез перебувають у діалектичній єдності, аналіз проводиться для того, щоб синтезувати отримані знання.

***Індукція*** (від латів. inductio – наведення) – загальнонауковий метод пізнання, перехід у процесі пізнання від частинного знання до загального; від знання меншого ступеня спільності до знання більшого ступеня спільності. Іншими словами, це метод дослідження, пізнання, пов'язаний із узагальненням результатів спостережень та експериментів. Основна функція індукції у процесі пізнання – це отримання загальних суджень. Особливістю індукції її імовірнісний характер, тобто. при істинності вихідних посилок висновок індукції в кінцевому результаті може виявитися як істинним, так і хибним. Отже, індукція не гарантує досягнення істини, лише «наводить» на неї, тобто. допомагає шукати істину.

У математиці метод індукції отримав своє вираження у вигляді *методу математичної індукції.*

***Дедукція*** (від латів. deductio – виведення) – загальнонауковий метод пізнання, перехід у процесі пізнання від загального знання про деякий клас предметів та явищ до знання частинного та одиничного. У дедукції загальне знання є вихідним пунктом міркування, що передбачається існуючим. Особливість дедукції як методу пізнання полягає у тому, що істинність її посилок гарантує істинність висновків.

Метод дедукції є основним методом теоретичної математики, це абстрактний і найбільш уживаний метод вивчення математичних систем. Найбільшу досконалість метод дедукції отримав у вигляді *аксіоматичного методу*. Прикладами застосування аксіоматичного методу в математиці є побудовані аксіоматичні теорії геометрії Евкліда, Лобачевського, Гільберта, Рімана, аксіоматична теорія натуральних чисел Пеано та ін.

Французький філософ, математик Рене Декарт (1596 – 1650) вважав, що дедукція веде до відкриття нових істин, якщо вона виводить наслідки з положень достовірних та очевидних, якими є аксіоми математики та математичного природознавства. У роботі «Міркування про спосіб для хорошого напряму розуму та знаходження істини в науках» він сформулював *чотири основні правила будь-якого наукового дослідження*:

1) істинно лише те, що пізнано, перевірено, доведено;

2) розчленовувати складне на просте;

3) підніматися від простого до складного;

4) досліджувати предмет всебічно у всіх деталях.

Методи індукції та дедукції перебувають у діалектичній єдності так само, як аналіз та синтез.

***Спостереження та експеримент.*** Може здатися, що математика як абстрактна наука виключає з системи своїх методів спостереження та експеримент, тому що ніяка апеляція до досвіду нічого не доводить. Проте математики проводять чисельні експерименти, щоб переконатися у правильності припущення, і лише після цього шукають методи його доказу. Спостереження та експеримент використовуються у комп'ютерній математиці.

Широке застосування нині отримав загальнонауковий метод – ***метод математичного моделювання***. З використанням цього методу вивчається не саме явище чи об'єкт у всьому різноманітті властивостей, а відповідна математична модель. Створення математичної моделі відбувається шляхом формалізації змістовної моделі у вигляді рівнянь, систем рівнянь, нерівностей тощо. Подальша робота із створеною моделлю містить її якісний аналіз із метою розробки методів рішення та обґрунтування вибору конкретного методу рішення. Якщо завдання вирішується чисельно, то для цього можна використовувати математичні пакети, наприклад MathCAD або Mathematica.

Основна складність, з якою доводиться стикатися в математичному моделюванні, полягає у забезпеченні адекватності побудованої математичної моделі досліджуваному об'єкту. Необхідно з'ясувати, наскільки точно ця модель відображає реальну ситуацію і наскільки надійні кількісні оцінки можуть бути отримані в процесі роботи з цією моделлю. Застосування конкретних комп'ютерних програм уможливлює проведення обчислювального експерименту, метою якого є перевірка адекватності даної моделі та отримання додаткової інформації.

Метод математичного моделювання є основою застосування математики в інших галузях науки та техніки. Наприклад, математична статистика надає апарат обробки експериментальних даних незалежно від цього, у якій науці вони отримані. Практична корисність математичного моделювання полягає у можливості отримання інформації про якісні властивості та кількісні характеристики досліджуваного об'єкта без проведення (часто складних або дорогих) експериментів, що може виправдовувати витрати на подолання труднощів, що виникають у процесі розробки або при спробах використання математичних моделей.

Центральна ідея методології математики полягає у тому, що ***математика загалом є загальнонауковим методом пізнання***. Математизація є однією з характерних рис розвитку сучасної науки. Математика постає як загальнонауковий метод пізнання для інших наук, служить інструментом побудови теорій досліджень у фізиці, астрономії, біології, інженерній справі, медицині, організації виробництва та багатьох інших галузях теоретичної та прикладної діяльності людства.

### *§ 2. Дедукція в математиці*

Основним дедуктивним методом математики є *аксіоматичний метод*. Аксіоматичний метод пройшов у своєму історичному розвитку три стадії.

*Перша стадія* пов'язана з іменами Платона, Арістотеля та Евкліда, видатними вченими Стародавньої Греції. Платон перший чітко зажадав: математика взагалі і геометрія зокрема мають бути побудовані дедуктивним чином. Інакше висловлюючись, всі твердження (теореми) мають суворо логічно виводитися з небагатьох основних положень – аксіом (твердження, які приймаються без доказів). Основоположником дедуктивного методу пізнання вважається давньогрецький філософ Аристотель (364 – 322 р. до н.е.). Логічні твори Аристотеля об'єднувалися під назвою «Органон» (інструмент пізнання дійсності). «Органон» зазвичай ототожнюється з дедуктивним методом пізнання. Основним математичним твором цього періоду вважається праця «Початки» Евкліда.

«Початки» (грец. Στοιχεῖα, лат. Elementa) – головна праця Евкліда, написана близько 300 р. до н. е. та присвячена систематичній побудові геометрії та теорії чисел, що містить 13 книг. «Початки» вважаються вершиною античної математики, результатом її розвитку та основою для подальших досліджень. У цій праці Евклід зробив спробу аксіоматичної побудови геометрії. Викладення матеріалу у «Початках» ведеться строго дедуктивно.

Кожна книга «Початків» починається означення усіх тих понять, які у ній зустрічаються. Перша книга починається з 23 означень, за ними слідують 5 постулатів та 9 аксіом. Далі слідують теореми. Кожна теорема формулюється, вказується, що дано і що необхідно довести. Далі йдуть доведення із всіма посиланнями на попередні теореми, постулати, аксіоми.

Наведемо для прикладу декілька означень:

*Означення I.* Точка є те, що не має частин.

*Означення II*. Лінія є довжина без ширини.

*Означення III*. Межі ліній називаються точками.

*Означення IV*. Прямою називається така лінія, яка однаково розташована відносно всіх своїх точок.

*Означення V*. Поверхня є те, що має довжину і ширину.

*Означення VI*. Межі поверхні є лінії.

*Означення VII*. Площиною називається поверхня, яка однаково розташована відносно всіх прямих, які на ній лежать.

Далі в книзі 1 слідують *постулати* та *аксіоми*.

*Постулати*

I. Вимагається, щоб з кожної точки до довільної точки можна було провести пряму,

II. і щоб кожну обмежену пряму можна було продовжити невизначено,

III. і щоб з будь-якого центра можна було описати коло довільним радіусом,

IV. і щоб усі прямі кути були рівні,

V. і щоб кожного разу, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними внутрішні односторонні кути, сума яких менша $2d$ *($180^0$)*, ці прямі перетиналися з того боку, з якого ця сума менше $2d$.

Цей останній постулат і є знаменитим *V постулатом про паралельні прямі*. Користуючись ним, можна встановити (що і робить Евклід) *існування лише однієї паралельної до будь-якої прямої, що проходить через точку, яка не лежить на останній.*

*Аксіоми*

I. Рівні окремо третьому рівні між собою,

II. і якщо до них додати рівні, то отримаємо рівні,

III. і якщо від рівних віднімемо рівні, то отримаємо рівні,

IV. і якщо до нерівних додаємо рівні, то отримаємо нерівні,

V. і якщо подвоїмо рівні, то отримаємо рівні,

VI . і половини рівних рівні між собою,

VII. і ті, що суміщаються (величини, образи) рівні,

VIII. і ціле більше частини,

IX. і дві прямі не можуть заключати простору.

Складаючи «Початки», Евклід, буз сумніву, хотів здійснити побудову строгої логічної системи, у якій б все виводилось з означень, постулатів та аксіом. В цьому і полягає одне з головних історичних значень цієї праці Евкліда.

У чому ж полягають основні недоліки евклідових «Початків»?

Основні означення, дані Евклідом, представляють собою найслабше місце книги. Деякі з них нічого не визначають і тому Евклід ніде не може їх використати. Наприклад, Евклід ніде не користується тим фактом, що «точка є те, що не має частин» або що «лінія є довжина без ширини». Визначаючи лінію як «довжину без ширини», Евклід уже припускає відомим, що таке «довжина» і «ширина».

У своїй книзі Евклід користується відношеннями, яких не визначає. Наприклад, говорячи про те, що «точки *A* і *B* лежать по один бік прямої», він не визначає, що означає «по один бік», вважаючи це відношення відомим.

Також суттєвим недоліком є відсутність аксіом неперервності, хоча неперервність лінії Евклід всюди використовує.

«Початки» оказали огромное влияние на развитие математики, высокий интеллектуальный уровень произведения и его фундаментальная значимость для науки в целом отмечается ключевыми учёными современности. Книга переведена на множество языков мира, по количеству переизданий «Начала» не имеют себе равных среди светских книг.

*Друга стадія* історії розвитку аксіоматичного методу розпочалася з побудови неевклідової геометрії М. І. Лобачевським та Яношем Бояєм у першій третині XIX ст. Аксіоми стали розумітися як вихідні положення цієї теорії, вибір їх як аксіом залежав від автора конкретної аксіоматичної теорії. У XIX ст. з'явилося багато математичних теорій, що будувалися аксіоматично. Наприклад, аксіоматичну теорію натурального числа побудував італійський математик Джузеппе Пеано (1858 – 1932 рр), вона вважається найуспішнішою, і зараз повсюдно використовується (зокрема, у початковій та базовій школі). Друга стадія розвитку аксіоматичного методу завершилася побудовою аксіоматичної теорії геометрії (1899 р) німецьким математиком Давидом Гільбертом, в 1879 р. і 1913 р. аксіоматичною теорією обчислення висловлювань і теорією обчислення предикатів німецьким математиком і логіком Готлобом Фреге та британським математиком і логіком Артуром Уайтхедом, у 1908 р. аксіоматичної теорії множин німецьким математиком Ернстом Цермело. Давид Гільберт записав евклідову геометрію у вигляді формальної аксіоматичної теорії. Це було одним з найбільших вкладів у розвиток аксіоматичного методу і підштовхнуло до формалізації всієї математики.

*Третя, сучасна стадія* історія аксіоматичного методу розпочалася з епохи діяльності Д. Гільберта, що висунув свою програму обгрунтування математики у 1900 році. Програма обгрунтування математики – це серія проблем і задач, які стали одним з основних напрямків розвитку математики у XX столітті. Перша проблема Гільберта вимагала систематизації математики, визначення формальних доказів та доказування теорем. На третій стадій розвитку аксіоматичного методу всі висновки математичної теорії повністю формалізовані, тобто є послідовністю формул, якими з аксіом чи раніше доведених теорем виводяться інші теореми з урахуванням встановлених в теорії правил виведення. При цьому ні аксіомам, ні теоремам не надається конкретного сенсу. За такою схемою за допомогою аксіоматичного методу побудовано всі абстрактні теорії – аксіоматичні теорії груп, полів, кілець тощо. Формалізація аксіоматичної теорії здійснюється шляхом заміни змістовних вихідних об'єктів та вихідних аксіом символами та формулами. Доведенням у формальній аксіоматичній теорії вважається кінцева послідовність формул цієї теорії, кожна з яких або є аксіомою, або безпосередньо виводиться з попередніх формул за прийнятими правилами виведення. Останньою формулою у цій послідовності формул, яка називається доказом, виступає теорема, яку необхідно довести. У змістовних та формальних аксіоматичних теоріях застосовуються спеціальні мови, які містять алфавіт, терми, формули та правила виведення (правила утворень формул).

## *§ 3. Побудова аксіоматичної теорії*

Аксіоматичний метод – це спосіб побудови та систематизації наукового знання у формі так званих аксіоматичних теорій, при якому деякі твердження вибираються як вихідні положення (аксіоми), а всі інші твердження (теореми) цієї теорії доводять (або виводять), виходячи лише з аксіом з допомогою суто логічних міркувань.

При побудові аксіоматичної теорії можна виділити наступні етапи:

1. Деякі поняття та відношення теорії оголошуються неозначуваними (основними), і через них визначають всі інші поняття та відношення, про які йдеться в даній теорії. Прикладами неозначуваних понять теорій можуть бути поняття «множина», «точка», «пряма», «число 1» тощо. Прикладами неозначуваних відношень теорій можуть бути відношення «належати» – відношення між множиною точок і даної прямою на площині, «мати міру» для відрізків, кутів, «лежати між» для трьох точок на одній прямій і тощо.

2. Деякі властивості неозначуваних понять та відношень приймаються без доведень. Ці властивості називаються основними властивостями чи аксіомами.

3. Вводять нові поняття та відношення через основні та визначені раніше. Прикладами таких понять можуть бути поняття «відрізок», «просте число» тощо. Прикладами означуваних відношень можуть бути відношення «бути паралельними» на множині прямих площині, «бути більше» на множині дійсних чисел тощо.

4. Доводять властивості означуваних понять та відношень (властивості, що доводяться, називають в теорії теоремами) за допомогою встановлених у теорії правил виведення, аксіом і раніше доведених теорем.

При цьому потрібно стежити, щоб поняття в теорії вводилися послідовно: кожне наступне нове поняття визначалося через раніше визначені, тобто не виникала б ситуація, коли, наприклад, перше поняття визначається через друге, друге – через третє, тощо, а останнє поняття визначається через перше. Аналогічно, при доведенні властивостей означуваних понять і відношень можна спиратися як на аксіоми, так і на доведені раніше теореми. Це дозволяє робити доведення більш короткими, не доводячи одні й самі твердження повторно. Однак, знову ж таки, потрібно стежити, щоб теореми доводилися послідовно, тобто кожна наступна теорема теорії спиралася на аксіоми і раніше доведені теореми.

До системи аксіом, що розглядаються як вихідні твердження, при побудові тієї чи іншої математичної теорії, висуваються вимоги несуперечності, незалежності та повноти. Система аксіом називається несуперечливою, якщо з неї не можна логічно вивести два твердження, що взаємно виключають одне одного, тобто не можна вивести твердження та його заперечення. Система аксіом називається незалежною, якщо жодна з аксіом цієї системи не є наслідком інших аксіом цієї системи. Несуперечлива та незалежна система аксіом є повною, якщо її аксіом достатньо для побудови математичної теорії.

Розглянемо приклад системи аксіом теорії натурального числа Дж. Пеано та виведемо деякі наслідки з них.

**Означення.** Натуральними числами називаються елементи алгебри <N, $'$, +, ·, 1>, де N $\neq \emptyset, 1 \in$ N; $'$ – символ унарної операції алгебри (слідування); +, · – символи бінарних алгебраїчних операцій (званих додаванням та множенням), які задовольняють наступним аксіомам:

1) $\forall\, a \in N, a' \neq 1$ (1 не слідує за жодним натуральним числом);
2) $\forall\, a, b \in N, a' = b' \rightarrow a = b$ (кожне натуральне число слідує не більш чим за одним натуральним числом);
3) Аксіома індукції**.** Якщо М – підмножина множини $N$, яка містить н.ч. 1, і яка разом із н.ч. числом $a$ містить наступне н.ч. $a'$, то М співпадає з множиною $N$.

Формально це записується так:

$(M \subset N \wedge 1 \in M) \wedge (\forall\, a \in M \ \rightarrow a' \in M) \rightarrow (M = N)$

4) $\forall\, a \in N, a + 1 = a'$ (аксіома операції додавання);
5) $\forall\, a, b \in N, a + b' = (a + b)'$(аксіома операції додавання);
6) $\forall\, a, b \in N, ab' = ab + a$ (аксіома операції множення);
7) $\forall\, a \in N, a \cdot 1 = a$ (аксіома операції множення).

Якщо $a' = b$, то $b$ називається наступним числом для числа $a$, $a$ – попереднім числом для числа $b$.

Дане означення має конструктивний характер: всі натуральні числа породжуються натуральним числом 1 при послідовному застосуванні операції слідування. Це порядковий, а не кількісний підхід до утворення натуральних чисел.

Додавання натуральних чисел визначається двома аксіомами:

$$a' = a + 1;$$

$$a + b' = (a + b)'.$$

Множення натуральних чисел визначається двома аксіомами:

$$a \cdot 1 = a;$$

$$a \cdot b' = ab + a.$$

Виведемо деякі наслідки з аксіом додавання та множення натуральних чисел.

**Теорема.** Операція додавання асоціативна.

$$\forall\, a, b, c \in N: a + (b + c) = (a + b) + c.$$

**Доведення:** (за аксіомою індукції)

Позначимо через $M$ множину таких натуральних чисел, для яких виконується ця властивість, тоді $M \subset N$.

Індукцію проводимо по числу *с.*

1) покажемо, що $1 \in M$, нехай $c = 1$. Доведемо, що:

   $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$

   $(a + b)' = a + b'$ (аксіома 5), твердження доведено.

   $1 \in M$

2) припустимо, що $c \in M$ і виконується:

   $(a + b) + c = a + (b + c)$

3) доведемо, що $c' \in M$. Для цього доведемо, що виконується властивість:

$(a + b) + c' = a + (b + c')$

$(a + b) + c' = \big((a + b) + c\big)' = \big(a + (b + c)\big)' = a + (b + c)' =$

$= a + (b + c').$

Довели, що $c' \in M$, звідки, за аксіомою індукції, $M = N$. Теорему доведено.

**Теорема.** $\forall\, a, b, c \in N\colon (a+b)\cdot c = ac + bc.$

**Доведення:** (за аксіомою індукції)

Позначимо через $M$ множину таких натуральних чисел, для яких виконується ця властивість, тоді $M \subset N.$

Індукцію проводимо по числу *с.*

1) покажемо, що $1 \in M$, нехай $c = 1$. Доведемо, що:

   $(a+b)\cdot 1 = a\cdot 1 + b\cdot 1$, за аксіомою 7 маємо:

   $a + b = a + b$, твердження доведено.

   $1 \in M$

2) припустимо, що $c \in M$ і виконується:

   $(a+b)\cdot c = ac + bc$

3) доведемо, що $c' \in M$. Для цього доведемо, що виконується властивість:

   $(a+b)\cdot c' = ac' + bc'$

   $(a+b)\cdot c' = (a+b)c + (a+b) = ac + bc + a + b = (ac + a) +$

   $+(bc + b) = ac' + bc'.$

Довели, що $c' \in M$, звідки, за аксіомою індукції, $M = N$. Теорему доведено.

### *Завдання для самостійної роботи*

Доведіть в рамках аксіоматичної теорії натурального числа Дж. Пеано, що операції додавання та множення натуральних чисел мають наступні властивості:

1. $\forall\, a, b \in N\colon a + b = b + a.$
2. $\forall\, a, b, c \in N\colon a(b+c) = ab + ac.$
3. $\forall\, a, b, c \in N\colon a(bc) = (ab)c.$
4. $\forall\, a, b \in N\colon ab = ba.$

## *§ 4. Метод математичної індукції*

*Індукцією* називається всяке міркування, що містить перехід від частинних тверджень до загальних, справедливість яких виводиться із справедливості частинних тверджень. Індукція (від лат. inductio – наведення) – загальнонауковий метод пізнання, перехід у процесі пізнання від частинного знання до загального. Іншими словами, це метод дослідження, пізнання, пов'язаний із узагальненням результатів спостережень та експериментів. У математиці метод індукції отримав своє вираз у вигляді методу повної математичної індукції.

Одним із перших, хто почав досліджувати індуктивні прийоми мислення, був давньогрецький філософ Сократ (V ст. до н. е.). У Стародавній Греції цей метод у неявному вигляді став використовувати Евклид у своїх «Початках» (III ст до н. е.). У математику слово «індукція» було запроваджено Джоном Валлісом у його роботі «Загальна Арифметика» (1656). Вчений запозичив цей термін із філософії, де він означав перехід від частинного до загального та чітко відокремив математичний зміст від філософського. У сучасній формі метод математичної індукції було описано у роботі «Трактат про арифметичний трикутник» (1665) французького математика Блеза Паскаля, у якій індукцією доводиться спосіб обчислення біноміальних коефіцієнтів. Термін «математична індукція» вперше з'явився у статті шотландського математика, першого президента Лондонського математичного товариства Августа де Моргана «Індукція (математична)» (1838) у Британській енциклопедії.

В основі методу доведення по індукції (методу математичної індукції) лежить *принцип математичної індукції*.

**Принцип математичної індукції.** *Нехай T(n) – твердження на множині N натуральних чисел, що задовольняє умовам:*

1) *T(1) істинно,*
2) *для кожного $n \in N$, якщо T (n) істинно, то істинно T (n +1),*

*тоді T (n) істинно для будь-якого натурального n.*

***Метод математичної індукції*** полягає у наступному:

Висловлення *T(n)*, залежне від натурального числа *n*, істинно для будь-якого натурального *n* якщо:

1) *T(1)* є істинним висловлюванням;
2) з припущення істинності висловлювання *T(n)* слідує істинність висловлювання *T(n + 1)*.

Доведення методом математичної індукції передбачає два етапи:
*База індукції*: перевіряється або доводиться, що істинно висловлювання *T(1)*.
*Крок індукції:* припускається, що висловлювання *T(n)* істинно, і на його підставі доводиться істинність висловлювання *T(n+1)*. Робиться висновок, що *T(n)* істинно для будь-якого натурального $n$.

Необхідно наголосити, що математична індукція відрізняється від емпіричної індукції, притаманної природничим наукам. Так, видатний математик XX століття Ріхард Курант писав: «Підтвердження загального закону на скінченому числі випадків (хоч би це число було велике) аж ніяк не є доказами в математичному сенсі, навіть якщо невідомо жодного винятку». Сказане можна проілюструвати на наступних прикладах.

Видатний німецький математик XVII ст. Готфрід Лейбниць довів, що при будь-якому натуральному $n$ число $n^3 - n$ ділиться на 3, число $n^5 - n$ ділиться на 5, число $n^7 - n$ ділиться на 7. На підставі цього він припустив, що при будь-якому непарному $k$ і будь-якому натуральному $n$ число $n^k - n$ ділиться на $k$, але скоро сам помітив, що число $2^9 - 2 = 510$ не ділиться на 9.

Видатний швейцарський математик XVIII ст. Леонард Ейлер розглядав квадратний тричлен $x^2 + x + 41$. Якщо замість $x$ послідовно підставляти числа 1, 2, 3, .., 39, то отримуємо числа 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151,..., 1601, які є простими. На основі цього Ейлер стверджував, що при підстановці в тричлен замість $x$ довільного натурального числа, завжди отримаємо просте число. Але Ейлер не помітив, що при $x = 40$ число

$$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41^2$$

є складеним. Помилка Ейлера, як і Лейбниця, полягала в тому, що був не доведений крок індукції.

Проілюструємо застосування методу математичної індукції для доведення тверджень на прикладах.

**Приклад 1.** Довести, що твердження вірне для всіх натуральних значень $n$.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доведемо твердження методом математичної індукції.

1. Якщо $n = 1$, то $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, тобто маємо $1 = 1$ – тотожна рівність.
2. Нехай для $n = k$ рівність вірна.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

3. Доведемо, що рівність вірна при $n = k + 1$, тобто

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Дійсно,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Робимо висновок, що твердження вірне для всіх натуральних значень $n$.

**Приклад 2.** Довести, що твердження вірне для всіх натуральних значень $n$.

$$3^{2n+1} + 40n - 67 \vdots 64.$$

Застосуємо для доведення метод математичної індукції.

1. Перевіримо вірність даного твердження для $n = 1$:

   $3^3 + 40 - 67 \vdots 64$ – вірно.

2. Припустимо, що для $n = k$ твердження $3^{2k+1} + 40k - 67 \vdots 64$ вірне.
3. Доведемо, що для $n = k + 1$ дане твердження вірне.

$$3^{2(k+1)+1} + 40(k+1) - 67 = 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 40k - 27 =$$

$$= 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) - 9 \cdot 40k + 9 \cdot 67 + 40k - 27 =$$

$$= 9 \cdot (3^{2k+1} + 40k - 67) - 320k + 576.$$

Перший доданок суми ділиться на 64 за припущенням, другий та третій доданки діляться на 64, тому і вся сума ділиться на 64:

$$3^{2(k+1)+1} + 40(k+1) - 67 \vdots 64.$$

Робимо висновок, що твердження вірне для всіх натуральних значень $n$.

**Приклад 3.** Довести нерівність Бернуллі $(1+x)^n \geq 1+nx, x > -1, n \in N$.

Доведемо твердження методом математичної індукції.

1. Якщо $n = 1$, то $1 + x \geq 1 + x -$ вірна нерівність.
2. Нехай для $n = k$ нерівність вірна.

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

3. Доведемо, що нерівність вірна при $n = k + 1$, тобто

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$

$= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,$ так як $kx^2 \geq 0$.

Робимо висновок, що твердження вірне для всіх натуральних значень $n$.

**Приклад 4.** Довести, що банківськими квитками вартістю 3 і 5 грошових одиниць можна було би виплатити будь-яку грошову суму, починаючи з суми в 8 грошових одиниць.

1. Перевіримо справедливість даного твердження для $n = 8$.

Очевидно, що 8 грошових одиниць можна виплатити одним квитком вартістю 5 і одним квитком вартістю 3 грошових одиниці.

2. Припустимо, що $n$ грошових одиниць, де $n > 8$, можна виплатити квитками вартістю 5 і 3 грошових одиниці.
3. Доведемо, що при цьому припущенні можна такими квитками виплатити $n + 1$ грошову одиницю. Дійсно, розглянемо такі варіанти.

Якщо серед квитків, що склали в сумі $n$ грошових одиниць, є хоча б один квиток вартістю 5, то його можна замінити двома квитками вартістю 3, таким чином, отримуємо суму $n + 1$ грошових одиниць.

Якщо вся сума $n$ виплачена одними квитками вартістю 3 грошових одиниць, то, з урахуванням умови $n > 8$, цих квитків повинно бути не менше трьох, тому можна замінити три квитка по 3 грошових одиниці на два квитка по 5 грошових одиниць, таким чином, отримуємо суму $n + 1$ грошових одиниць.

Робимо висновок, що для будь-якого натурального $n \geq 8$ відповідну грошову суму можна виплатити зазначеними банківськими квитками.

### *Завдання для самостійної роботи*

Довести, що твердження вірне для всіх натуральних значень $n$ за допомогою метода математичної індукції:

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

3. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

4. $n^3 + 5n \vdots 6$.

5. $6^{2n-1} + 1 \vdots 7$.

6. $4^n + 15n - 1 \vdots 9$.

7. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

## *§ 5. Метод математичного моделювання*

Теорія математичного моделювання забезпечує виявлення закономірностей протікання різних явищ навколишнього світу або роботи систем та пристроїв шляхом їхнього математичного опису та моделювання без проведення натурних випробувань. При цьому використовуються положення і закони математики, що описують явища, що моделюються, системи або пристрої на деякому рівні їх ідеалізації. Вирішення практичних завдань математичними методами здійснюється шляхом побудови математичної моделі задачі, вибору методу дослідження отриманої математичної моделі, аналізу отриманого математичного результату.

Математична модель являє собою формалізований опис системи (або операції), наприклад, у вигляді сукупності математичних співвідношень або схеми алгоритму, тобто такий математичний опис, який забезпечує імітацію роботи систем або пристроїв на рівні, досить близькому до їхньої реальної поведінки. Вид математичної моделі залежить від природи реального об'єкта, і виду завдань дослідження. Математична модель завдання зазвичай представляється як геометричних образів, функцій, рівнянь, нерівностей, систем рівнянь тощо.

Математичне моделювання ділять на аналітичне, чисельне та комп'ютерне. Для аналітичного моделювання характерно те, що процеси функціонування системи записуються як деяких функціональних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь тощо). Для застосування аналітичного методу йдуть на суттєве спрощення початкової моделі. Аналітичні моделі математично чітко відображають зв'язок між вхідними та вихідними змінними та параметрами, але їх структура не відображає внутрішню структуру об'єкта.

Одним із різновидів моделювання є чисельне моделювання, яке полягає в отриманні необхідних кількісних даних про поведінку систем або пристроїв будь-яким відповідним чисельним методом, таким як методи Ейлера або Рунге-Кутта. На практиці моделювання нелінійних систем та пристроїв з використанням чисельних методів виявляється набагато ефективнішим, ніж аналітичне моделювання окремих лінійних ланцюгів, систем чи пристроїв. Наприклад, для вирішення диференціальних рівнянь або їх систем, розв’язання яких в аналітичному вигляді не можливо, застосовують методи чисельного моделювання.

Комп'ютерне моделювання – це математичне моделювання з допомогою засобів обчислювальної техніки. При комп'ютерному моделюванні математична модель, що використовується, відтворює алгоритм функціонування досліджуваної системи в часі при різних поєднаннях значень параметрів системи і зовнішнього середовища. Недоліком комп'ютерного моделювання є час вирішення завдання отримання хорошої точності. Результати роботи створеної стохастичної системи є реалізаціями випадкових величин чи процесів. Тому для знаходження характеристик системи визначають оцінки ймовірнісних критеріїв якості, загальних та частинних, що характеризують функціонування та ефективність керованої системи. Для цього використовують методи математичної статистики (параметричне та непараметричне оцінювання, перевірку гіпотез). Прикладом параметричної оцінки є середнє вибіркове показника ефективності. Серед непараметричних методів велике поширення набув метод гістограм.

В курсах математики закладів освіти різних рівнів також вивчається поняття математичного моделювання, починаючи з текстових задач у шкільному курсі математики. Проілюструємо використання аналітичного математичного моделювання на прикладі задач практичного змісту, які будуть зведені до рішення відповідного рівняння або дослідження поведінки відповідної функції.

**Задача 1.** Операторка комп'ютерного набору мала за деякий час набрати 180 сторінок тексту. Проте вона виконала цю роботу на 5 годин раніше строку, оскільки набирала щогодини на 3 сторінки більше, ніж планувала. Скільки сторінок вона набирала щогодини?

Нехай операторка комп'ютерного набору мала набирати щогодини x сторінок тексту. Складемо коротку умову задачі у вигляді таблиці:

<table>
<tr><th></th><th>Продуктивність праці (пр./год.)</th><th>Час (год.)</th><th>Виконана робота (стор.)</th></tr>
<tr><td>За планом</td><td>$x$ стор./год.</td><td>$\frac{180}{x}$ год.</td><td rowspan="2">180 стор.</td></tr>
<tr><td>Фактично</td><td>$x + 3$ стор./год.</td><td>$\frac{180}{x+3}$ год.,<br>на 5 год раніше</td></tr>
</table>

В даній задачі математичною моделлю буде рівняння, рішення задачі ми отримаємо після розв'язання складеного рівняння.

Складемо і розв'яжемо рівняння при умові $x > 0$:

$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+3} = 5$

$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+3} - 5 = 0$

$\frac{180(x+3) - 180x - 5x(x+3)}{x(x+3)} = 0$

$\frac{5x^2 + 15x - 540}{x(x+3)} = 0$

$\begin{cases} 5x^2 + 15x - 540 = 0, \\ x(x+3) \neq 0; \end{cases}$

$x^2 + 3x - 108 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 9 + 432 = 441,$

$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{441}}{2} = \frac{-3+21}{2} = 9$

$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{441}}{2} = \frac{-3-21}{2} = -12 < 0$, не задовільняє умову задачі.

*Відповідь:* 9 сторінок.

**Задача 2.** Щоб ліквідувати запізнення на 24 хв, потяг на перегоні завдовжки 120 км збільшив швидкість на 10 км/год порівняно із запланованою. З якою швидкістю мав їхати потяг?

Складемо коротку умову задачі у вигляді таблиці.

| | V | t | S |
|---|---|---|---|
| За розкладом | x км/год | $\frac{120}{x}$ 24 хв | 120 км |
| З затримкою | x+10 км/год | $\frac{120}{x+10}$ | 120км |

Нехай швидкість потяга за розкладом x км/год, тоді час, за який він подолав відстань 120 км, становить $\frac{120}{x}$ год. За умовою швидкість потягу збільшилась 10 км, тоді вона стала (x + 10) км/год. Час руху потяга з новою швидкістю $\frac{120}{x+10}$ год, що на 24 хв менше ніж за розкладом. Складемо і розв’яжемо рівняння, враховуючи, що 24 хв = $\frac{24}{60}$ год = $\frac{2}{5}$ год, при умові $x > 0$:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\frac{600(x+10)-600x-2x(x+10)}{5x(x+10)} = 0$$

$$\frac{600x+6000-600x-2x^2-20x}{5x(x+10)} = 0$$

$$\frac{-2x^2-20x+6000}{5x(x+10)} = 0$$

$$\begin{cases} -2x^2 - 20x + 6000 = 0 \\ 5x(x+10) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 10x - 3000 = 0 \\ 5x \neq 0,\ x + 10 \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3000) = 12100$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{12100}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 110}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 50, x_2 = -60 \\ x \neq 0, x \neq -10 \end{cases}$$

$x_1 = -60$ – не задовольняє умову задачі.

*Відповідь*: 50 км/год

**Задача 3.** Площа прямокутного трикутника дорівнює 18 см$^2$. Якої довжини мають бути його катети, щоб їх сума була найменшою?

Площа прямокутного трикутника $S = \frac{ab}{2}$, де $a$ і $b$ – довжини катетів трикутника. Маємо: $\frac{ab}{2} = 18$, звідки $b = \frac{36}{a}$.

Складемо функцію $f(a) = a + \frac{36}{a}$ та знайдемо її найменше значення в умовах $0 < a < 36$.

Обчислимо похідну функції: $f = 1 - \frac{36}{a^2} = \frac{a^2-36}{a^2}$. Знайдемо критичні точки: $\frac{a^2-36}{a^2} = 0$, з урахуванням обмежень, $a = 6$.

Математичною моделлю даної задачі була побудована функція, рішення задачі ми отримали після дослідження функції за допомогою похідної і знаходження найменшого значення функції.

*Відповідь:* катети прямокутного трикутника 6 см і 6 см (рівнобедрений прямокутний трикутник).

**Задача 4.** Число 8 записати у вигляді суми трьох невід'ємних доданків так, щоб добуток цих доданків був найбільшим.

Позначимо перший доданок через $x$, другий – через $y$, тоді третій доданок буде $(8 - x - y)$, $0 \le x < 8, 0 \le y < 8$.

Складемо функцію:

$f(x, y) = xy(8 - x - y) = 8xy - x^2y - xy^2$.

Знайдемо частинні похідні функції.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 8y - 2xy - y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 8x - x^2 - 2xy$

Для знаходження стаціонарних точок розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8y - 2xy - y^2 = 0 \\ 8x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння системи друге рівняння:

$8y - y^2 - 8x + x^2 = 0$

$(x - y)(x + y) - 8(x - y) = 0$

$(x - y)(x + y - 8) = 0$

Якщо $x = y$ :

$\begin{cases} x = y \\ 8x - 2x^2 - x^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y \\ 8x - 3x^2 = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{8}{3}\\y=\dfrac{8}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

Маємо дві стаціонарні точки $M_1(0,0), M_2\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$. Точка $M_1$ знаходиться на границі області, точка $M_2$ – всередині області.

Якщо $x = 8 - y$ :

$$\begin{cases}x=8-y\\8y-2(8-y)y-y^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=8-y\\y^2-8y=0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=8\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\y=8\end{cases}\end{array}\right.$$

Маємо дві стаціонарні точки $M_3(8,0), M_4(0,8)$ , які лежать на границі області.

Знаходимо значення функції в цих точках:

$f(M_1) = f(0,0) = 0.$

$f(M_2) = f\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{8}{3}\cdot\left(8-\dfrac{8}{3}-\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{64}{9}\cdot\dfrac{8}{3} = \dfrac{512}{27}.$

$f(M_3) = f(8,0) = 0.$

$f(M_4) = f(0,8) = 0.$

Найбільше значення функції $f(x,y)$ в заданій області досягається в точці $M_2\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$.

*Відповідь:* $8 = \frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$.

### *Завдання для самостійної роботи*

Розв’яжіть задачі, побудувавши відповідну математичну модель задачі та дослідивши її:

1. Змішали деяку кількість 15-відсоткового розчину солі з такою ж кількістю 19-відсоткового розчину солі. Скільки відсотків становить концентрація розчину, що вийшов?
2. Перший сплав містить 10% нікелю, другий – 30% нікелю. З цих двох сплавів отримали третій сплав масою 200 кг, що містить 25% нікелю. На скільки кілограмів маса першого сплаву менша за масу другого?
3. Перша труба пропускає на 2 літри води за хвилину менше, ніж друга. Скільки літрів води за хвилину пропускає перша труба, якщо ємність об'ємом 420 літрів вона заповнює на 15 хвилин довше, ніж друга труба заповнює ємність об'ємом 280 літрів?
4. Відстань між двома селами пішохід проходить за 60 хв, а велосипедист проїжджає за 20 хв. Через скільки хвилин вони зустрінуться, якщо вирушать одночасно назустріч одне одному із цих сіл?
5. Двоє робітників виконують деяку роботу. Після 45 хв спільної роботи перший робітник був переведений на іншу роботу, і другий робітник закінчив частину роботи, що залишилася, за 2 год 15 хв. За який час міг би виконати всю роботу кожен робітник окремо, якщо відомо, що другому для цього знадобиться на 1 год більше ніж першому?
6. Визначте розміри закритої коробки об’єму 512 куб. см. з квадратною основою, на виготовлення якої піде найменша кількість матеріалу.
7. Знайдіть радіус основи циліндра найбільшого об’єму, вписаного в шар радіуса 3 см.
8. Серед всіх прямокутників, які мають площу 24 кв. см., знайдіть прямокутник з найменшим периметром.

Список використаних джерел інформації


1. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005.
2. Добронравова І.С., Сидоренко Л.І. Філософія та методологія науки: підручник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008.
3. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра и теорія чисел. ч. 1. URL : https://library.pdpu.edu.ua/ (дата звернення: 26.04.2024).
4. Сучасна математична освіта: методологія, теорія, практика: колективна монографія/ за загальною редакцією проф. Жерновникової О.А. Харків: ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2021.
5. Чернілевський Д.В. Методологія наукової діяльності: навч. посіб., вид. 3-є, перероблене / Д.В. Чернілевський, М.І. Томчук, О.А. Дубасенюк, О.Є. Антонова, В.І. Захарченко, О.В. Вознюк, Н.З. Сіранчук / за ред. Д.В. Чернілевського.  Вінниця : Вид-во АМСКП, 2012.