Усов В.В.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

для организации самостоятельной работы студентов

Одесса 2011

ББК
Ш

Рецензенты:
А.А. Брюханов,
д-р т. н., профессор, зав. кафедрой физики
Южно-украинского государственного
педагогического университета
им. К.Д. Ушинского.

Печатается по решению Ученого совета Южно-украинского национального педагогического университета имени К.Д. Ушинского
протокол № _____.от _________ 2011 г.,

В.В. Усов
Ш **Физические основы механики** Учебное пособие. –
Одесса: , 2011. – с.

ISBN

В пособии изложены физические основы механики в пределах курса общей физики технических высших учебных заведений. Даны разъяснения основных законов, явлений и понятий классической механики, релятивистской механики и рассмотрены основные положения общей теории относительности, а также гидро – и аэромеханики. Пособие направлено на развитие творческих способностей студентов, научного мышления и активизацию познавательной деятельности.

ББК

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ.

ЧАСТЬ 1.
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ.
1. Кинематика

Физика – это наука о природе (от греческого *physis* − природа). Так назвал Аристотель (IV в. до н.э.) сочинение, в котором он собрал все имеющиеся сведения по геометрии, астрономии, медицине, земледелию, ботанике и др. Все естественные науки физика первоначально включала в себя.

Все фундаментальные законы физики являются обобщением опыта человека. Физика изучает наиболее общие (базовые) формы движения материи, поэтому она является фундаментом всех естественнонаучных дисциплин. Языком физики является математика, хотя математика как наука самодостаточна и развивается самостоятельно.

1.1. Механическое движение. Основные физические абстракции и определения

Система отсчета: система координат, жестко связанная с телом отсчета и способ измерения времени (часы). Систем отсчета существует бесконечное множество. Выбор соответствующей системы отсчета обусловлен удобством и простотой решения физической задачи (рис. 1.1).

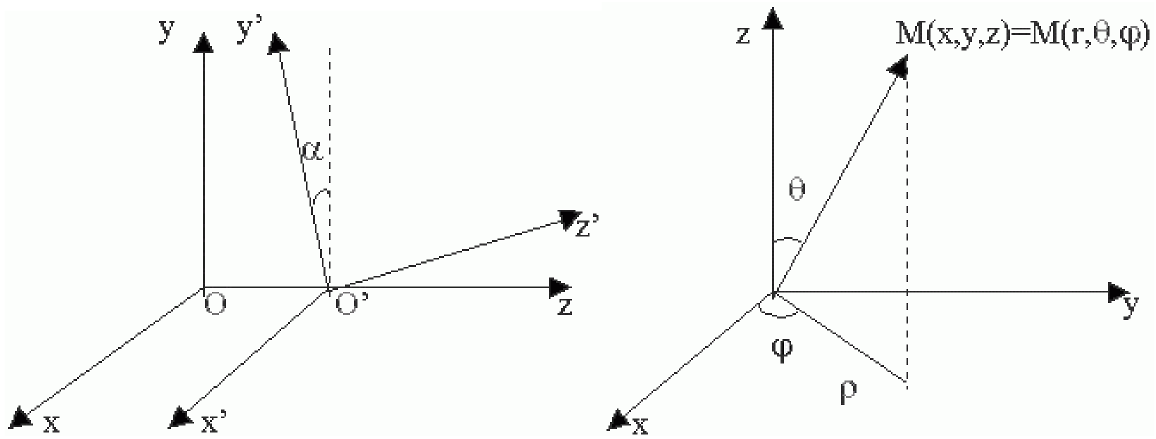


Рис. 1.1.

Материальная точка: тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь:

Сплошная среда: совокупность частиц, расположенных на бесконечно малых расстояниях друг от друга и связанных упругими силами притяжения и отталкивания.

Механическое движение тел - изменение их положения в пространстве с течением времени.

Основная задача механики: определение положения тела в пространстве в каждый момент времени по известным начальным условиям – начальным координатам и скорости.

Движение тела относительно: для определения движения тела необходимо выбрать другое тело, условно принятое за неподвижное.

Движение тела подразделяется на:

- поступательное (все точки тела двигаются одинаково, любая прямая, проведенная в теле остается параллельной сама себе) (рис. 1.2);

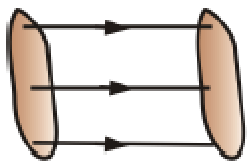


Рис. 1.2

- вращательное – все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью ОО ' вращения* (рис. 1.3). Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

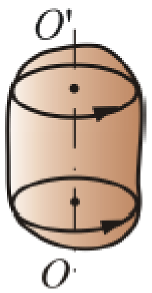


Рис. 1.3.

- колебательное (возратно-поступательное либо возвратно-вращательное).

Поступательное движение изучается как движение материальной точки, т.к. все точки тела в этом случае движутся одинаково.

Основные характеристики движения материальной точки

1. *траектория* - линия, вдоль которой движется материальная точка;

2. *пройденный путь* - расстояние, пройденное точкой по ее траектории;

перемещение – вектор $\Delta\vec{r}$, соединяющий начальное 1 и конечное 2 положение тела за промежуток времени наблюдения, $\vec{r}$ - радиус-вектор положения тела. Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ есть приращение $\vec{r}_1$ за время Δt (рис. 4);

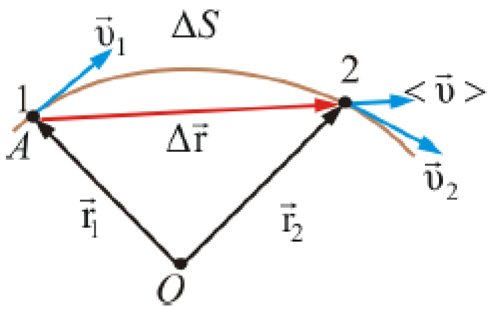


Рис. 1.4.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k};$$
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k};$$
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \tag{1.1}$$

3. *скорость* – вектор, характеризующий направление и быстроту перемещения точки;

4. *ускорение* – вектор, характеризующий направление и быстроту изменения скорости точки относительно тела отсчета.

Закон независимости движений: если материальная точка участвует в нескольких движениях, то ее перемещение равно векторной сумме перемещений, а скорость – векторной сумме скоростей.

Предмет кинематики: описание механических движений тела без рассмотрения причин изменения вида движения.

1.2. Перемещение, скорость, ускорение при прямолинейном и криволинейном движении

Равномерное прямолинейное движение: движение, при котором материальная точка движется по прямой линии и в любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения.

Неравномерное движение: движение, при котором скорость точки изменяется со временем по величине и (или) по направлению.

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = <\vec{\upsilon}> \qquad (1.2.)$$

Вектор $<\vec{\upsilon}>$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.4).

Мгновенная скорость – величина, равная пределу средней векторной скорости при уменьшении промежутка времени

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ [м/с].} \qquad (1.3)$$

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости в данный момент времени равен первой производной от $\vec{r}$ по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки А (рис. 1 4).

Модуль вектора скорости

$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|. \qquad (1.4)$$

При $\Delta t \to 0$ т.е. на бесконечно малом участке траектории $\Delta S = \Delta r$ (перемещение совпадает с траекторией). В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – путь. Так вычислять скорость проще, т.к. S – скаляр.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \quad \text{или} \quad \upsilon = \frac{dS}{dt}. \qquad (1.5)$$

Обратное действие – интегрирование (рис. 1.5).

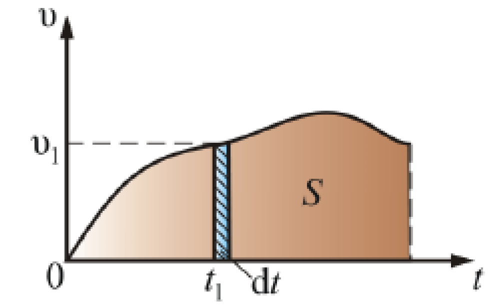


Рис. 1.5.

$dS = \upsilon dt$ – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь *S* за время *t*, надо сложить площади всех прямоугольников:

$$S = \int \upsilon dt. \qquad (1.6)$$

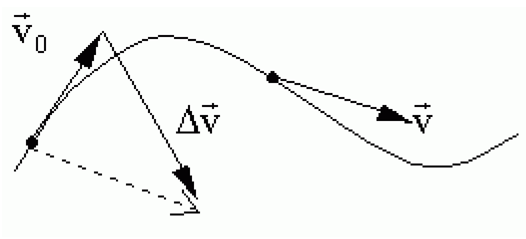
Среднее ускорение: векторная величина, равная отношению разности векторов конечной и начальной скоростей к промежутку времени изменения скорости

$$\vec{a}_{ср} = \Delta\vec{v} / \Delta t \qquad (1.7)$$

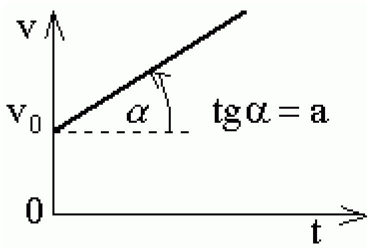
где $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, $\Delta t = t - t_0$

Мгновенное ускорение: векторная величина, равная пределу отношения вектора изменения вектора к промежутку времени, в течение которого изменение скорости произошло

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} \quad [\frac{м}{с}/с] = [м/с^2] \qquad (1.8)$$



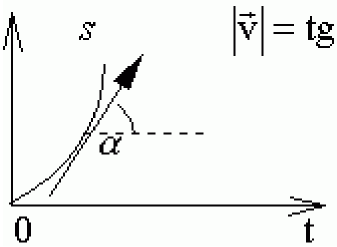
Равноускоренное движение: движение с постоянным по величине ускорением $\vec{a}$ = const



В случае поступательного движения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \int_{v_0}^{v} d\vec{v}, \qquad \vec{a}(t - t_0) = \vec{v} - \vec{v}_0$$

$$\boxed{\vec{v} - \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \tag{1.9}$$



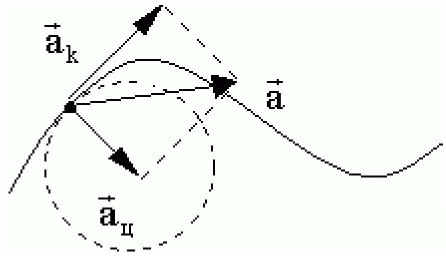
$$|\vec{v}| = \mathrm{tg}\alpha$$

и

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \textbf{при} \quad t_0 = 0$$

$$\int_0^s d\vec{s} = \int_0^t \vec{v}_0 dt + \int_0^t \vec{a}t dt, \qquad \boxed{\vec{s} = \vec{v}_0 t + \vec{a}\frac{t^2}{2}} \tag{1.10}$$

В общем случае траектория движение является криволинейной. Поэтому вектор ускорения раскладывают на две компоненты: *тангенциальное* (*касательное* к траектории) $\vec{a}_k$ и *нормальное* (*центростремительное*) $\vec{a}_ц$



$$\vec{a} = \vec{a}_k + \vec{a}_ц \quad a = \sqrt{a_к^2 + a_ц^2} \tag{1.11}$$

$\vec{a}_k$ изменяет только величину скорости, а $\vec{a}_ц$- только ее направление.

Мгновенный радиус кривизны траектории определяется радиусом окружности, вписанной в участок траектории в данный момент времени.

1.3. Вращательное движение. Связь между векторами линейной и угловой скоростей, линейного и углового ускорений.

Движение твердого тела, при котором две его точки O и O' остаются неподвижными, называется вращательным движением вокруг неподвижной оси, а неподвижную прямую OO' называют осью вращения.

Пусть *абсолютно твердое тело* (то есть такое тело, взаимное расположение частиц которого при его движении остается неизменным) вращается вокруг неподвижной оси OO' (рис. 1.5).

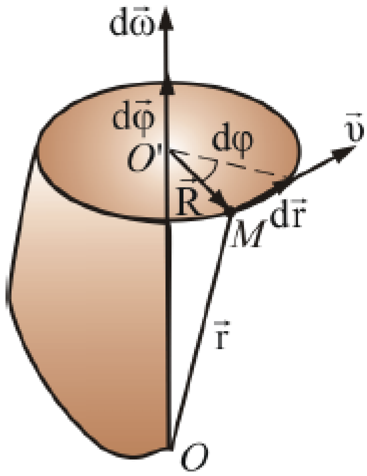


Рис. 1.5.

Мера вращательного движения: угол $d\varphi$, на который повернется радиус-вектор R точки в плоскости, нормальной к оси вращения. Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *OO′* так, чтобы, глядя вдоль вектора, мы видели вращение по часовой стрелке (например, направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны правилом буравчика – правого винта) (рис. 1.5).

Угловой скоростью называется вектор $\vec{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.6)$$

Равномерное вращательное движение: за любые равные промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы. Если ω – const, то имеет место равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси.

Пусть $\vec{\upsilon}$ – линейная скорость точки *M*. За промежуток времени d*t* точка *M* проходит путь $dr = \upsilon dt$. В то же время $d\bar{r} = Rd\bar{\varphi}$ (центральный угол) (рис. 1.5). Тогда можно получить связь линейной скорости и угловой:

$$\upsilon = \frac{dr}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = \omega R. \qquad (1.7)$$

В векторной форме $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$. Вектор $\vec{\upsilon}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$.

Средняя угловая скорость тела равна отношению угла поворота к промежутку времени.

Наряду с угловой скоростью вращения используют понятия периода и частоты вращения.

Период вращения T – время оборота точки по окружности до совпадения с начальным положением. Период равен

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad \left[\frac{1}{c}\right] = [\text{Гц}]. \qquad (1.8)$$

Частота вращения $\nu = \dfrac{1}{T}$ - число полных оборотов в единицу времени. При равномерном вращении за период T радиус-вектор точки повернется на угол 2π. Тогда угловая скорость точки равна

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 2\pi\nu} \qquad (1.9)$$

и называется иначе *угловой (циклической) частотой.*

Введем понятие углового ускорения.

Среднее угловое ускорение $\varepsilon_{ср.}$ – величина, равная отношению изменения угловой скорости к промежутку времени

$$\vec{\varepsilon}_{ср} = \Delta\vec{\omega}/\Delta t \qquad (1.10)$$

Мгновенное угловое ускорение – предел отношения изменения угловой скорости к промежутку времени – производная от угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{1.11}$$

Направление $\vec{\varepsilon}$ определяется направлением $\Delta\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$, а вектор $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$, (рис. 1.6).

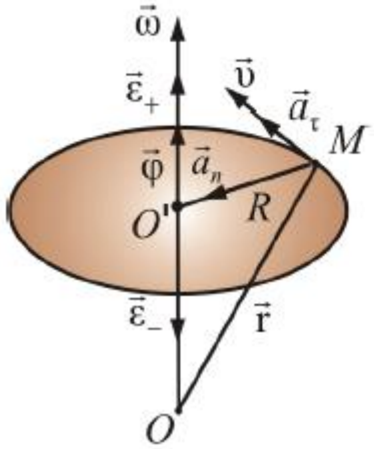


Рис. 1.6.

Выразим нормальное и тангенциальное ускорения точки *M* через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$
$$a_\tau = R\varepsilon;$$
$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R. \tag{1.12}$$

Обратите внимание. Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота), направлены вдоль оси вращения.

При равномерном вращательном движении ε = const - угловое ускорение постоянно. Тогда из

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \varepsilon dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega, \ \boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0)}, \qquad (1.13)$$

а из

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\varphi} d\varphi = \int_{0}^{t} \omega_0 dt + \int_{0}^{t} \varepsilon t dt \quad \boxed{\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}} \qquad (1.14)$$

При равномерном вращательном движении тела по окружности его скорость v не меняется по величине $(\vec{a}_k = 0)$, но меняется по направлению $(\vec{a} = \vec{a}_ц)$.

Кинематические уравнения поступательного и вращательного движения сведены в таблице.

1.4. Основные формулы кинематики

Поступательное	Вращательное
Равномерное	
$s = v \cdot t$	$\varphi = \omega \cdot t$
$v = const$	$\omega = const$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
Равнопеременное	
$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$v = v_0 \pm a \cdot t$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$
$a = const$	$\varepsilon = const$

Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

2. Динамика материальной точки.

Динамика – это раздел классической механики, изучающий движение материальных тел под действием приложенных к ним сил, т.е. дающий связь между взаимодействиями тел и изменениями в их движении. Она является основным разделом механики и базируется на трех законах Ньютона (1687 г.). Эти законы играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта. Законы Ньютона рассматривают как *систему взаимосвязанных законов* и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом. Ньютоновская механика оказалась настолько плодотворной, настолько могущественной, что у физиков сложилось представление о том, что любое физическое явление можно объяснить с помощью ньютоновских законов. Большинство физиков к концу XIX в. были убеждены в том, что они уже знают о природе всё, что можно было узнать.

В специальной теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1905 г., ньютоновские представления о пространстве и времени подверглись радикальному пересмотру. Этот пересмотр привёл к созданию «механики больших скоростей» или, как её называют, *релятивистской механикой*. Новая механика не привела, однако, к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнение релятивистской механики, в пределе (для скоростей, малых по сравнению со скоростью света), переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как её частный случай и сохранила своё прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями, значительно меньше скорости света.

2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.

Предмет динамики: всевозможные взаимодействия тел, приводящие к ускоренным движениям. Изменение движения тела (*ускорение*) вызывается действием на него других тел. При изучении изменений движения тела удобно изображать действие на него других тел векторами - силами.

- Сила - это *векторная величина*, которая является мерой действия одного тела на другое, вызывающего ускорение последнего. Систему сил можно заменить эквивалентной ей, не изменяющей состояние тела. Если силы действуют вдоль прямых пересекающихся в одной точке, то их действие можно заменить *равнодействующей силой равной векторной сумме сил*.

I закон Ньютона (закон инерции) 1687 г. (Галилей, 1636 г.). *Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если действие на нее со стороны других тел взаимно компенсируется.* Инерция - явление сохранения телом скорости движения при отсутствии действия на него со стороны других тел (либо взаимной компенсации их действий). Поэтому 1-й закон Ньютона часто называют законом инерции.

Инерциальными системами отсчета называются системы отсчета, в которых выполняется I закон Ньютона. Любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной с постоянной скоростью (прямолинейно и равномерно) также является инерциальной. Для таких систем справедлив принцип относительности Галилея: все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трём основным положениям:

•все тела обладают свойствами инерции;

•существуют инерциальные системы отсчёта, в которых выполняется первый закон Ньютона;

•движение относительно. Если тело А движется относительно тела отсчета В со скоростью υ, то и тело В, в свою очередь, движется относительно тела А с той же скоростью, но в обратном направлении $\upsilon = -\upsilon'$.

Опытным путём установлено, что инерциальной системой отсчёта можно считать гелиоцентрическую (звёздную) систему отсчёта (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определённых звёзд). Система отсчёта, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные её неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца) при решении многих задач малы, и в этих случаях её можно считать инерциальной.

Из приведённых выше примеров легко понять, что основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения.

2.2. Масса тела.

Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения. Это свойство тел называется *инертностью*. *Мерой инертности тела является величина, называемая* ***массой***.

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т.е. сообщает данному телу ускорение. Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения. Чтобы определить *массу* некоторого тела, нужно сравнить её с массой тела, принятого за *эталон массы* (или сравнить с телом уже известной массы).

2.3. Второй закон Ньютона. Принцип суперпозиции

Математическое выражение ***второго закона Ньютона***:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad (2.1)$$

Сила, действующая на тело равна произведению массы тела на его ускорение.

Это привычная запись второго закона Ньютона или основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки. Оно позволяет построить прибор для измерения силы – динамометр.

Единица силы в системе СИ – ньютон (Н): 1 Н – это сила, которая телу массой в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot 1\ \text{м/с}^2.$$

Другая формулировка **II закона Ньютона.** *Ускорение, приобретаемое материальной точкой под действием силы, направлено также как сила, по величине пропорционально силе и обратно пропорционально массе тела.*

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}} \qquad (2.2)$$

Это экспериментальный закон. Уравнение (2.2) позволяет найти ускорение.

Принцип суперпозиции или принцип независимости действия сил.

Силы в механики подчиняются *принципу суперпозиции*. Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующая (равнодействующая) сила $\vec{F}$ равна геометрической (векторной) сумме сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \tag{2.3}$$

Из 2 закона Ньютона имеем:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i,$$

где $\vec{a}_i$ – ускорение тела, под действием силы $\vec{F}$. Отсюда,

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i, \tag{2.4}$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.

2.4. Третий закон Ньютона

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. ***Третий закон Ньютона*** устанавливает, что ***силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и противоположны по направлению.***

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}} \tag{2.5}$$

Однако, третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т.е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся друг относительно друга.

Законы Ньютона плохо работают при $\upsilon \approx c$ (релятивистская механика), а также при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц. Так, например, нуклоны внутри ядра, кварки внутри нуклонов, и даже электроны внутри атома, не подчиняются законам Ньютона.

2.5. Импульс тела, импульс силы, закон сохранения импульса.

Рассмотрим случай, когда на тело массы *m* действует постоянная сила $\vec{F} = const$ в течение промежутка времени Δt. Из II закона Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0}$$

<u>Импульсом тела</u> называется произведение массы тела на его скорость

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{2.6}$$

<u>Импульсом силы</u> называется произведение силы на время ее действия:

$$\vec{F}\Delta t. \tag{2.7}$$

Изменение импульса тела в единицу времени равно действующей на тело силе

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \tag{2.8}$$

Импульс постоянной силы, действующей на тело, равен изменению импульса тела

$$\boxed{\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}} \tag{2.9}$$

При стремлении промежутка времени действия силы к нулю в пределе из II закона Ньютона получим

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i} \tag{2.10}$$

- *уравнение движения тела.*

Закон сохранения импульса, который справедлив для замкнутой механической системы тел, вытекает из II и III законов Ньютона.

Изолированной механической системой называют систему тел, взаимодействующих друг с другом, и не взаимодействующих с другими телами. Строго говоря, изолированных механических систем в природе не существует.

Рассмотрим изолированную систему из двух взаимодействующих тел.

По III закону:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \quad \vec{F}_1\Delta t = -\vec{F}_2\Delta t \quad \Rightarrow \qquad \text{При } \vec{F}_{вн} = 0 \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \text{ то есть } \sum_i \vec{p}_i = const$$

По II закону:

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_{10}\right) = -m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_{20}\right)$$

$$\boxed{m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}$$

Закон сохранения импульса тела: *Сумма импульсов тел до взаимодействия равна сумме импульсов тел после взаимодействия в изолированной механической системе.*

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической механике; он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц, т.е. действует и в квантовой механике. Другими словами, этот закон носит **универсальный характер и является** фундаментальным законом природы.

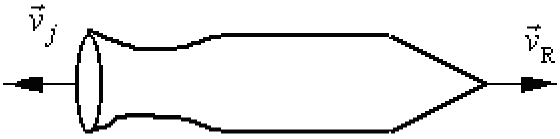
Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства: при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, т.е. не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

В неизолированной системе имеется внешняя сила $\vec{F}$, действующая на тела:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \qquad \boxed{\sum \vec{p}_i = \int_0^t \vec{F}dt} \tag{2.11}$$

2.6. Реактивное движение

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td>

Для изолированной системы «ракета-струя» выполняется закон сохранения импульса

$$0 = m_c\vec{v}_c + M_p\vec{v}_p,$$

где m_c, v_c, M_p, v_p – масса и скорость струи газа и ракеты соответственно.

Откуда $\vec{v}_p = -\dfrac{m_c}{M_p}\vec{v}_c$

</td>
</tr>
</table>

Если на ракету действуют внешние силы $\vec{F}_{вн.}$, например, силы сопротивления среды, то справедливо уравнение Мещерского:

$$M_p\frac{d\vec{v}_p}{dt} = -m_{1c}\vec{v}_c + \vec{F}_{вн.}, \qquad (2.12)$$

где m_{1c} – масса струи газа, вытекшего из ракеты за промежуток времени *dt*.

3. Силы в механике

3.1. Виды и категории сил в природе.

Одно из простейших определений силы: *влияние одного тела* (*или поля*) *на другое, вызывающее ускорение – это* ***сила.***

Однако, спор вокруг определения силы не закончен до сих пор это обусловлено трудностью объединения *в одном определении* сил, различных по своей природе и характеру проявления. В настоящее время, различают *четыре типа сил или взаимодействий*:

- ***гравитационные***;
- ***электромагнитные***;
- ***сильные*** (ответственное за связь частиц в ядрах);

• ***слабые*** (ответственное за распад частиц).

Гравитационные и ***электромагнитные*** силы нельзя свести к другим, более простым силам, поэтому их называют ***фундаментальными***.

Законы фундаментальных сил просты и выражаются точными формулами. Для примера можно привести формулу гравитационной силы взаимодействия двух материальных точек, имеющих массы m_1 и m_2 :

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{3.1}$$

где r – расстояние между точками, γ – гравитационная постоянная.

В качестве второго примера можно привести формулу для определения силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2:

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{3.2}$$

где k_0 – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Как видно, формулы для фундаментальных сил являются простыми и точными. Для других сил, например, для упругих сил и сил трения можно получить лишь приближенные, эмпирические формулы.

3.2. Сила тяжести и вес тела

Одна из фундаментальных сил – сила гравитации проявляется на Земле в виде ***силы тяжести*** – *силы, с которой все тела притягиваются к Земле.* Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением – *ускорением свободного падения* g, (вспомним школьный опыт – «трубка Ньютона»). Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует ***сила тяжести*** $m\vec{g}$. Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения к Земле (различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей, не вполне инерциальная).

Если подвесить тело (рис. 3.1) или положить его на опору, то сила тяжести уравновесится силой $\vec{R}$ – которую называют ***реакцией опоры*** или ***подвеса***.

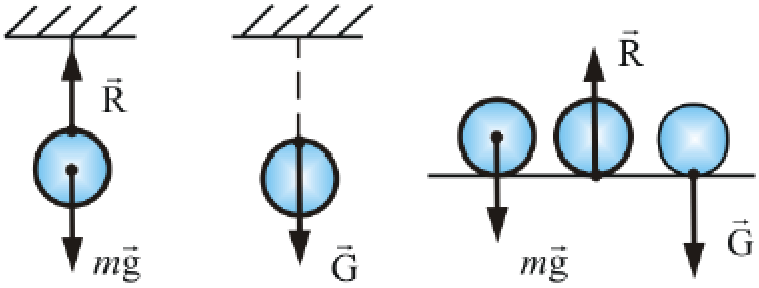


Рис. 3.1.

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору с силой $\vec{G}$, которая называется ***весом тела***. Итак, ***вес тела*** – это сила, с которой тело в состоянии покоя действует на подвес или опору, вследствие гравитационного притяжения к Земле. Поскольку силы $m\vec{g}$ и $\vec{R}$ уравновешивают друг друга, то выполняется соотношение

$$m\vec{g} = -\vec{R}. \tag{3.3}$$

Согласно третьему закону Ньютона:

$$\vec{G} = -\vec{R} \tag{3.4}$$

Значит

$$\vec{G} = m\vec{g}, \tag{3.5}$$

то есть *вес и сила тяжести равны друг другу, но приложены к разным точкам: вес к подвесу или опоре, сила тяжести – к самому телу*. Это равенство справедливо, если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или двигаются равномерно, прямолинейно). Если имеет место движение с ускорением, то справедливо соотношение:

$$G = mg \pm ma = m(g \pm a) \tag{3.6}$$

Вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если, g и a направлены в одну сторону (тело движется вниз или падает), то $G < mg$, и если наоборот, то $G > mg$. Если же тело движется с ускорением $g = a$, то $G = 0$ – т.е. наступает *состояние невесомости*.

Пример: космический корабль на орбите.

3.3. Упругие силы. Закон Гука.

Электромагнитные силы в механике проявляют себя как *упругие силы* и *силы трения*.

Под действием внешних сил возникают *деформации* (т.е. изменение размеров и формы) тел. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется *упругой*. Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, которая называется *пределом упругости*. При превышении этого предела деформация становится *пластичной или неупругой*, т.е. первоначальные размеры и форма тела полностью не восстанавливается.

Рассмотрим упругие деформации. В деформированном теле (рис. 3.2) возникают упругие силы, уравновешивающие внешние силы. Под действием *внешней силы* – $F_{вн}$. Пружина получает *удлинение* x, в результате в ней возникает *упругая сила* – $F_{упр}$., *уравновешивающая* $F_{вн}$..

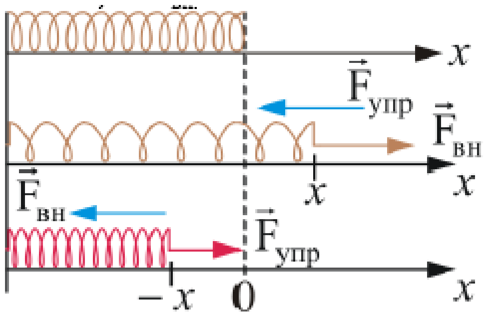


Рис. 3.2.

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой упругости Fупр..

Удлинение пружины пропорционально внешней силе и определяется ***законом Гука***:

$$x = \frac{1}{k} F_{\text{вн.}} \tag{3.7}$$

k – жесткость пружины. Видно, что чем больше *k*, тем меньшее удлинение получит пружина под действием данной силы.

Так как упругая сила отличается от внешней только знаком, т.е. $F_{\text{упр.}} = -F_{\text{вн.}}$, то закон Гука можно записать в виде:

$$x = -\frac{1}{k} F_{\text{упр.}} \tag{3.8}$$

Отсюда

$$F_{\text{упр.}} = -kx \tag{3.9}$$

3.4. Силы трения

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами. Трение подразделяется на *внешнее и внутреннее*.

Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).

Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).

Различают ***сухое*** и ***жидкое*** (или ***вязкое***) трение.

Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствии смазки. Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на ***трение скольжения*** и ***трение качения***.

Жидким **(*вязким*)** называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

Рассмотрим законы сухого трения. Подействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости внешней силой $\vec{F}_{дв.}$, постепенно увеличивая ее модуль (рис. 3.3).

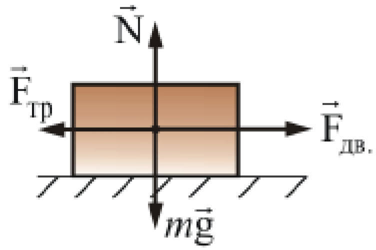


Рис. 3.3.

Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{дв.}$ уравновешивается некоторой силой $\vec{F}_{тр.}$, направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе $\vec{F}_{дв.}$. В этом случае $\vec{F}_{тр.}$ – и есть *сила трения покоя*.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю силы нормального давления N

$$F_{тр.пок.} = \mu_0 N \qquad (3.10)$$

μ_0 – коэффициент трения покоя – зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0, тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{тр.пок.}$ сменится трением скольжения $F_{тр.ск.}$ (рис. 3.3):

$$F_{тр.} = \mu N \qquad (3.11)$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и скольжения, но коэффициент трения μ здесь значительно меньше.

Подробнее рассмотрим силу трения скольжения на наклонной плоскости (рис. 3.4). На тело, находящееся на наклонной плоскости с сухим трением, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила сухого трения $\vec{F}_{тр.}$. Сила $\vec{F}$ есть равнодействующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 3.4 видно, что

$$F = mg\sin\alpha, \quad N = mg\cos\alpha.$$

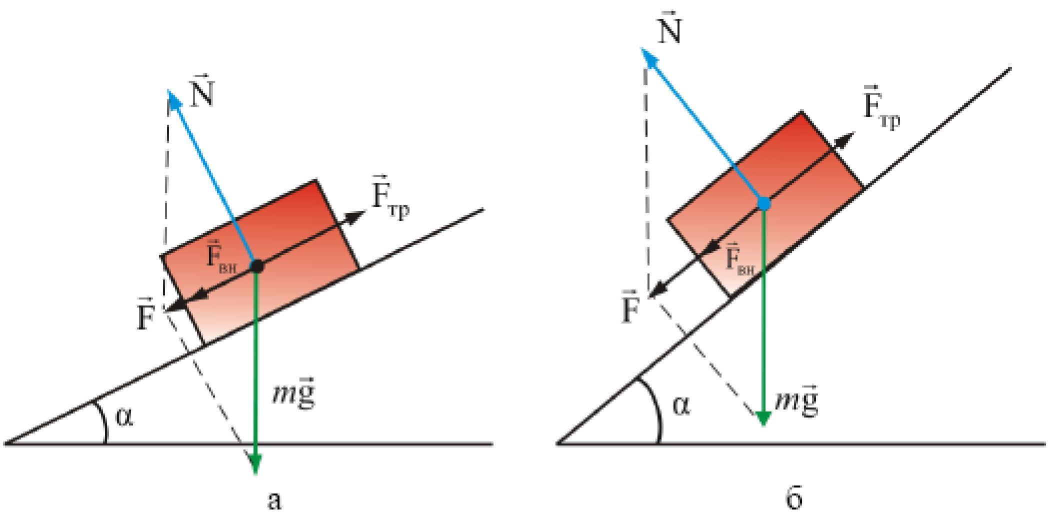


Рис. 3.4.

Если $F < (F_{тр.})_{max} = \mu N$ – тело остается неподвижным на наклонной плоскости. Максимальный угол наклона α определяется из условия: $(F_{тр.})_{max} = F$ или $\mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$, следовательно, $\mathrm{tg}\,\alpha_{max} = \mu$, где μ – коэффициент сухого трения.

$$F_{тр.} = \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$
$$F = mg\sin\alpha. \qquad (3.12)$$

При $\alpha > \alpha_{max}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$
$$F_{ск.} = ma = F - F_{тр.} \qquad (3.13)$$

Если дополнительная сила $F_{вн.}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

4. Законы сохранения

4.1. Работа и мощность.

Механической работой A_{12} по определению называется произведение силы на перемещение между точками 1 и 2 (рис. 4.1):

$$A_{12} \equiv Fs_{12}\,Cos\alpha = \vec{F}\vec{s}_{12} \tag{4.1}$$

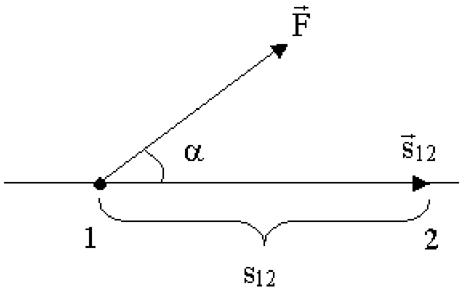


Рис. 4.1.

Элементарная работа dA равна (рис. 4.2):

$$\boxed{dA \equiv Fds\,Cos\,\alpha = F_s ds = \vec{F}d\vec{s}} \tag{4.2}$$

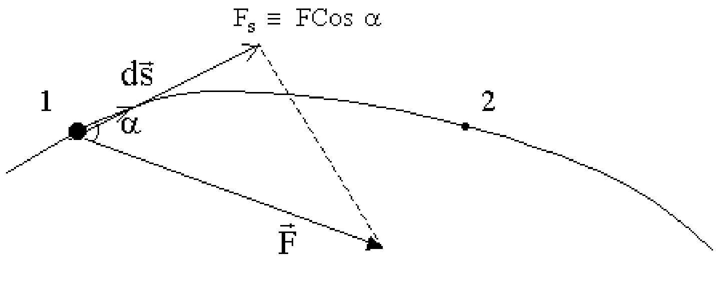


Рис. 4.2.

Работа A_{12} переменной силы F(s) равна:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s} = \int_1^2 F_s ds \tag{4.3}$$

Единица измерения работы:

$$[A]=[F]\cdot[s]=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{джоуль, Дж}$$

Мощность P - ***это скорость совершения работы***, т.е.

$$\boxed{P \equiv \frac{dA}{dt}} \tag{4.4}$$

Используя определения элементарной работы и скорости движения, получим:

$$P = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \tag{4.5}$$

Здесь v - скорость материальной точки, к которой приложена сила $\vec{F}$.

Единица мощности:

$$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{ватт, Вт.}$$

4.2. Кинетическая энергия

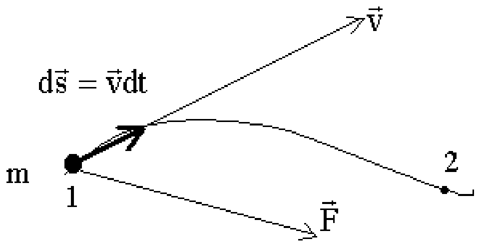


Рис. 4.3.

Применим II закон Ньютона для материальной точки m, движущейся под действием результирующей силы $\vec{F}$ (рис. 4.3):

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} \tag{4.6}$$

Помножим скалярно: слева – на $\vec{v}dt$, справа – на $d\vec{s}$:

$$\vec{v}dt\cdot\left|m\cdot\dot{\vec{v}} = \vec{F}\right|\cdot d\vec{s},$$

$$m\vec{v}\dot{\vec{v}}dt = \vec{F}\cdot ds\cdot$$

Правая часть представляет собой элементарную работу (см. 4.2). Преобразуя левую часть, получим:

$$m\vec{v}\,\dot{\vec{v}}\,dt = m\,\vec{v}\,d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

Тогда:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA.$$

Половина произведения массы частицы на квадрат ее скорости названа ее ***кинетической энергией***

$$\boxed{W_k \equiv \frac{mv^2}{2}} \qquad (4.7)$$

Таким образом, элементарная работа, совершаемая над телом, равна элементарному приращению его кинетической энергии. При интегрировании вдоль траектории частицы от точки 1 до точки 2 получим:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s} \quad \text{или} \quad \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12}$$

$$\boxed{A_{12} = W_{k2} - W_{k1}} \qquad (4.8)$$

Уравнение (4.8) называется ***теоремой о кинетической энергии***:
Работа результирующей силы равна изменению кинетической энергии материальной точки.

4.3. Консервативные и неконсервативные силы

Консервативные (conservativus - охранительный) - такие силы, *работа которых не зависит от траектории, а определяются только начальным и конечным положением материальной точки*. Силы, не обладающие только что названным свойством, называют ***неконсервативными***. Для того чтобы узнать, консервативна сила либо нет, надо вычислить ее работу.

Консервативность силы тяжести. Рассмотрим работу илы тяжести на участке перемещения 1, 2 (рис. 4.4):

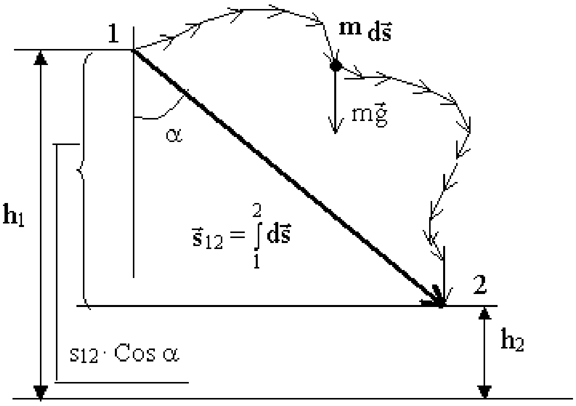


Рис. 4.4.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{s} = m\vec{g}\int_1^2 d\vec{s} = m\vec{g}\vec{s}_{12} = mgs_{12}\text{Cos}\alpha = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2$$

На рис. 4.4. дан вид сбоку. Точка **m** движется под действием силы тяжести из 1 в 2. Сила тяжести всегда направлена вниз. $\vec{S}_{12}$ – вектор перемещения,

$$\vec{s}_{12} = \int_1^2 d\vec{s}.$$

При любой траектории ответ будет таким же, значит, сила тяжести консервативна.

Неконсервативность силы трения

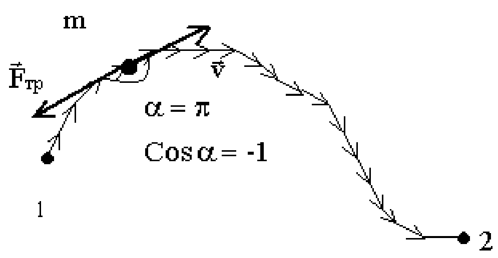


Рис. 4.5.

На рис. 4.5 изображен вид сверху на материальную точку **m**, движущуюся при наличии силы трения из положения 1 в положение 2. Сила трения всегда направлена против скорости ⇨ cosα = -1. $S_{12} = \int_1^2 ds$ – пройденный путь.

Работа силы трения равна:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{тр} d\vec{s} = \int_1^2 F_{тр} ds\,\text{Cos}\alpha = -\int_1^2 F_{тр} ds = -F_{тр}\int_1^2 ds = -F_{тр} \cdot s_{12}.$$

Ответ зависит от выбора траектории, значит, сила трения неконсервативна.

4.4. Потенциальная энергия.

Потенциальная энергия может быть введена только для поля консервативных сил. Так как их работа не зависит от траектории, а только от начального и конечного положений материальной точки, то эту работу можно записать в виде разности двух чисел: одно W_{n1} будет зависеть от начального положения тела, второе W_{n2} – от конечного положения тела.

$$\boxed{\mathbf{A}_{12} = \mathbf{W}_{n1} - \mathbf{W}_{n2}}. \tag{4.9}$$

W_{n1} - потенциальная энергия тела в положении 1; W_{n2} - в положении 2.

Некоторые конкретные выражения для потенциальной энергии $W_n(r)$

Для нахождения конкретного вида зависимости $W_n(r)$ необходимо вычислить работу

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s}.$$

В частности, для однородного поля тяжести, где $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{g}}$, используя консервативность силы тяжести, получим:

$$W_n = mgh. \tag{4.10}$$

Если $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ - гравитационная сила, то

$$W_n(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}; \tag{4.11}$$

Если $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ - кулоновская сила, то

$$W_n(r) = k\frac{q_1 q_2}{r}. \tag{4.12}$$

Если $F = -kx$ - сила упругости, то

$$W_n(x) = \frac{\mathbf{kx}^2}{\mathbf{2}}. \tag{4.13}$$

4.5. Закон сохранения механической энергии

Работа по перемещению материальной точки, движущейся в поле консервативных сил, равна изменению кинетической энергии:

$$A_{12} = W_{k2} - W_{k1}, \qquad (4.14)$$

С другой стороны, эта же работа равна разности потенциальной энергии начальной и конечной точек перемещения, то есть работа равна изменению потенциальной энергии, взятой с обратным знаком:

$$A_{12} = -(W_{n2} - W_{n1}) \qquad (4.15)$$

Откуда

$$W_{n1} - W_{n2} = W_{k2} - W_{k1}$$

или

$$W_{k1} + W_{n1} = W_{k2} + W_{n2}.$$

В поле консервативных сил сумма кинетической и потенциальной энергии материальной точки остается постоянной, т.е. сохраняется.

Полная энергия материальной точки W равна:

$$\boxed{W_k + W_n = W} \qquad (4.16)$$

Полная энергия материальной точки в поле консервативных сил сохраняется.

Полная энергия системы материальных точек

Для системы, состоящей из N взаимодействующих между собой материальных точек, полная энергия

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} W_{п\, i,k} = W_k + W_n, \qquad (4.17)$$

где $W_{п\, i,k}$ – потенциальная энергия взаимодействия i –ой материальной точки с k-ой материальной точкой. $W_п$ – потенциальная энергия взаимодействия всех частиц системы между собой.

Закон сохранения энергии для системы материальных точек

Если система материальных точек находится во внешнем поле консервативных сил, то полная механическая энергия W равна:

$$W = W_k + W_п + W'_п, \tag{4.18}$$

где $W'_п$ - потенциальная энергия системы во внешнем поле.

Полная механическая энергия системы материальных точек, находящейся только под действием консервативных сил, остается постоянной.

При наличии неконсервативных сил полная механическая энергия системы не сохраняется, ее убыль равна работе неконсервативных сил.

5. Механика твердого тела.

5.1. Теорема о движении центра масс.

В классической механике из-за независимости массы от скорости импульс системы можно выразить через скорость ее центра масс.

Центром масс или **центром инерции** системы материальных точек называется воображаемая тоска *C*, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен

$$\overline{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r_i}}{m}, \tag{5.1}$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

Скорость *i*-й материальной точки связана с ее радиусом-вектором $\overline{r_i}$ соотношением:

$$\overline{\mathbf{v}_i} = \frac{d\overline{\mathbf{r}_i}}{dt}. \tag{5.2}$$

Следовательно,

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{r_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r_i} \cdot \tag{5.3}$$

Скорость центра масс определяется выражением:

$$\overline{v_c} = \frac{d\overline{r_c}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{r_i}}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{v}_i}{m} = \frac{\overline{p}}{m}, \tag{5.4}$$

т.е.

$$\overline{p} = m\overline{v_c} \cdot \tag{5.5}$$

Другими словами, импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции.

Для изолированной системы тел, как было показано выше,

$$\vec{p} = const; \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{5.6}$$

Подставив выражение (5.5) в последнее равенство, получим:

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = m\frac{d\overline{v}_c}{dt} = \mathbf{0}, \tag{5.7}$$

т.е. *в изолированной механической системе центр масс находится в покое или движется равномерно и прямолинейно*.

Если система незамкнутая (на нее действуют помимо внутренних и внешние силы), то выражение (5.7) с учетом (5.6) запишется следующим образом:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{или}$$

$$m\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i \tag{5.8}$$

где $\overline{a_c} = \frac{d\overline{v_c}}{dt}$ – ускорение центра масс.

Из (5.8) вытекает закон (теорема) движения центра масс: *центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе.*

5.2. Основной закон динамики вращения. Момент инерции.

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела произвольной формы вокруг оси, проходящей через тело. Разложим действующую силу $\vec{F}$ на три компоненты $\vec{F}_{\parallel}$, $\vec{F}_{\perp}$, $\vec{F}_{ВР}$ вдоль оси, перпендикулярную к оси и вращающую. Вращение тела вызывает компонента $\vec{F}_{ВР}$, касательная к окружности, описываемой точкой А (рис. 5.1).

Рис. 5.1.

Все точки тела описывают окружность и имеют одинаковую угловую скорость и одинаковое угловое ускорение. Вращающее действие силы $\vec{F}_{ВР}$, зависит от ее величины и от расстояния от точки приложения до оси вращения r.

<u>Моментом силы</u> *называется векторное произведение радиус-вектора, проведенного в точку приложения силы, на эту силу*

$\vec{M} =$ [redacted] $\times \vec{F}$ (5.9)

Векторы $\bar{r}_i$, $\bar{F}_i$ и $\bar{M}_i$ образуют правую тройку (правило правого винта: если вращать радиус-вектора $\bar{r}_i$ до совпадения с вектором силы $\bar{F}_i$ вправо, то поступательное направление движения винта (буравчика) будет совпадать с направлением вектора $\bar{M}_i$) (рис. 5.2).

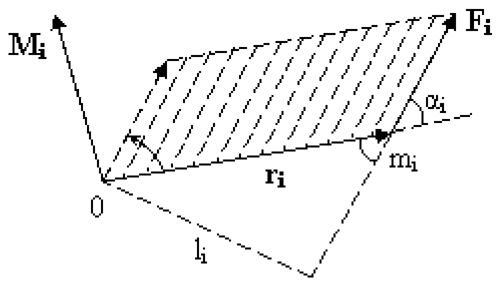


Рис. 5.2.

Модуль момента силы, как следует из рис. 5.2, равен:

$$M_i = F_i l_i = F_i r_i \sin \alpha_i , \tag{5.10}$$

где l_i – плечо силы $\overline{F}_i$, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы.

Моментом инерции тела относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек тела на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \qquad (5.11)$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$\mathbf{J} = \int_m \mathbf{r}^2 \mathbf{dm} = \rho \int_V \mathbf{r}^2 \mathbf{dV}, \qquad (5.12))$$

где ρ – плотность тела, а интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в данном случае есть функция положения точки с координатами x, y, z.

Неподвижная ось вращения z может проходить как через центр инерции тела (ось вращения маховика, ротора турбины и т.п.), так и вне его (например, ось вращения самолета, выполняющего мертвую петлю) (рис. 5.3).

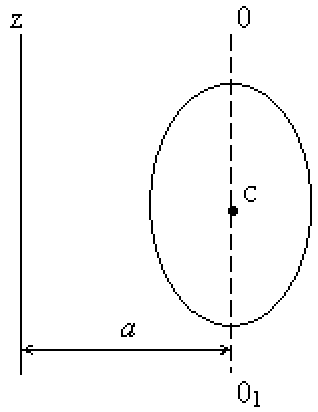


Рис. 5.3.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс (инерции), то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера** (теоремой о переносе осей инерции): момент инерции тела J_z относительно произвольной оси вращения z равен сумме момента инерции тела относительно оси OO_1, проведенной через центр инерции C тела параллельно оси z и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями (рис. 5.3):

$$J_z = J_c + ma^2. \tag{5.13}$$

Таким образом, с удалением центра инерции тела от его оси вращения момент инерции тела относительно этой оси возрастает. Из формул (5.12) и (5.13) видно, что момент инерции тела зависит не только от его массы, но и от ее распределения относительно оси вращения.

В таблице приведены значения моментов инерции для некоторых однородных тел.

Тело	**Положение оси вращения**	**Момент инерции**
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

У тела произвольной формы моменты инерции относительно осей координат могут отличаться. Поэтому в общем случае момент инерции тела является не скаляром, тензором второго ранга, представляющим собой таблицу из 9 различных чисел – по 3 для каждой из осей координат. Если же систему координат выбрать таким образом, что ее оси будут проходить через центр инерции тела (то есть оси координат будут являться осями симметрии тела), то отличными от нуля будут лишь три компоненты тензора – **главные моменты инерции** I_x, I_y, I_z.

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Основной закон динамики для вращения – это II закон Ньютона для вращательного движения:

Момент вращающей силы, приложенной к телу, равен произведению момента инерции тела на его угловое ускорение.

$$\boxed{\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon}} \tag{5.14}$$

Момент инерции тела характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении подобно массе, характеризующей инерционные свойства тела при поступательном движении. Момент инерции тела имеет различные значения в зависимости от положения оси вращения.

Если вращающий момент M = const постоянен и момент инерции J = const, то основной закон вращения можно представить в виде

$$\vec{M} = J\,\frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t};$$

$$\boxed{\vec{M}\Delta t = J\vec{\omega} - J\vec{\omega}_0}, \tag{5.15}$$

M Δt - импульс момента силы, Jω-момент импульса тела.

Момент импульса тела

Моментом импульса $\vec{L}$ вращающейся точки тела по определению называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс тела $\vec{p}$:

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{5.16}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения.

Продифференцируем выражение для момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{M}. \tag{5.17}$$

Здесь $\vec{M} = (\vec{r} \times \vec{F})$ - момент силы.

Таким образом, еще одной формой уравнения динамики вращательного движения является:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \tag{5.18}$$

Скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело.

Учтем, что $\vec{v}_\tau = (\vec{\omega} \times \vec{r})$, т.е. для материальной точки

$$\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = m_i[\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i\,\vec{\omega})] = m_i r_i^2\,\vec{\omega} = J_i\,\vec{\omega}.$$

Так как $J = \sum m_i r_i^2$, то $\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}}$ - момент импульса тела.

Тогда уравнение динамики вращения (5.18) можно записать в виде:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \vec{M}} \tag{5.19}$$

5.3. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося тела

Сравним попарно между собой законы механики поступательного и вращательного движения.

II Закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \Leftrightarrow \vec{M} = J\,\vec{\varepsilon}$$

Закон изменения импульса:

$$\vec{F}t = m\,\vec{v} - m\,\vec{v}_0 \Leftrightarrow \vec{M}t = J\vec{\omega} - J\vec{\omega}_0$$

Видно, что существует аналогия. Если уподобить перемещение и угол поворота, линейную и угловую скорости, ускорение и угловое ускорение, силу и момент силы, массу и момент инерции, импульс силы и импульс момента силы, импульс и момент импульса:

$S \leftrightarrow \varphi, v \leftrightarrow \omega, a \leftrightarrow \varepsilon, F \leftrightarrow M, m \leftrightarrow J, Ft \leftrightarrow Mt, mv \leftrightarrow J\omega$, то

аналогично закону сохранения импульса получается закон *сохранения момента импульса.*

В изолированной системе сумма моментов импульса всех тел есть величина постоянная

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 + ... + J_n\omega_n = const, \qquad (5.20)$$

где J_i и ω_i моменты инерции и угловые скорости тел, составляющих изолированную систему.

Из основного уравнения динамики вращательного движения при M=0 получаем:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = 0 \Rightarrow J\vec{\omega} = const} \qquad (5.21)$$

В изолированной системе сумма моментов импульса всех тел есть величина постоянная.

Примеры:

1) закон сохранения момента импульса используется танцорами на льду, в балете для изменения скорости вращения или гимнастами для выполнения сальто, прижимая руки и ноги к туловищу: момент инерции человека уменьшается, а угловая скорость увеличивается, и наоборот, т.к. $J\omega$ = const.

2) Гироскоп: сохраняется вектор момента импульса $J\vec{\omega}$, и, т. о., сохраняется ось вращения. Например, это ось вращения Земли, снаряда, колес велосипеда, гирокомпас и т.п.

Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы. Справедливость этого закона обусловливается свойством симметрии пространства – его **изотропностью**, т.е. инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

Кинетическая энергия одной частицы вращающего тела равна

$$W_{ik} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i (\vec{\omega})}{2} = \frac{J_i \omega^2}{2} \tag{5.22}$$

Кинетическую энергию вращающегося тела получим, суммируя энергию частиц,

$$\boxed{W_{К.ВР} = \frac{J\omega^2}{2}} \tag{5.23}$$

Если тело одновременно участвует в поступательном и вращательном движении, то его кинетическая энергия W_k равна сумме $W_{k.\ пост.}$ и $W_{k\ вращ.}$:

$$W_К = \frac{mv}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \tag{5.24}$$

В общем случае J есть тензор, который можно привести к диагональному виду при выборе соответствующих осей $x_1y_1z_1$ - *главных осей инерции*. Тогда

$$W_{К.ВР} = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2), \tag{5.25}$$

где I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции, $\omega_{x,y,z}$ проекции вектора угловой скорости.

5.4. Элементы статики. Условия равновесия тела.

Если к телу приложены силы, линии, действия которых не пересекаются в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

1) равнодействующая всех сил, приложенных к телу, была равна нулю

$$\vec{R} = 0 \tag{5.26}$$

2) сумма моментов сил, вращающих тело по часовой стрелке, была равна сумме, моментов сил, вращающих тело против часовой стрелки. Другими словами, сумма моментов сил, приложенных к телу, равнялась бы нулю:

$$\vec{M} = 0. \tag{5.27}$$

Виды равновесия. Различают три вида равновесия: устойчивое – 1, неустойчивое –2 и безразличное – 3 (рис. 5.4).

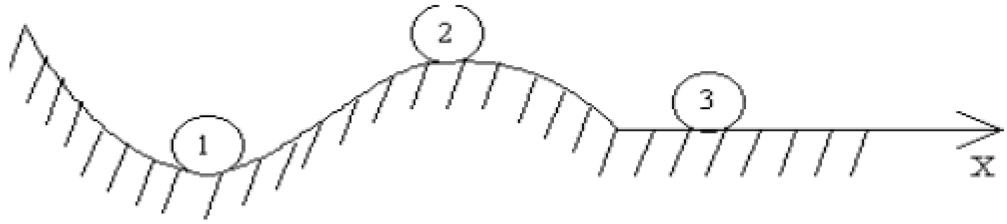


Рис. 5.4.

1. Устойчивое - тело, выведенное из состояния равновесия в соседнее ближайшее положение и затем представленное самому себе, вернется в исходное положение.
2. Неустойчивое - тело, выведенное из состояния равновесия, продолжает отклоняться от этого положения.
3. Безразличное - тело, выведенное из состояния равновесия, остается в новом положении.

Как видно из рис. 5.4, при устойчивом равновесии потенциальная энергия тела как функция координаты имеет минимум в точке равновесия. При неустойчивом равновесии потенциальная энергия максимальна в точке равновесия.

Для того чтобы определить, является ли равновесие устойчивым, необходимо найти первую производную от потенциальной энергии по координате и приравнять ее нулю (необходимое условие экстремума функции):

$$\boxed{\frac{dW_{П}}{dx} = 0} \quad (5.28).$$

Для того чтобы узнать, является ли в точке экстремума максимум или минимум функции, следует найти вторую производную от потенциальной энергии в точке экстремума и определить ее знак. Если вторая производная положительна, то в точке экстремума потенциальная энергия минимальна. Следовательно, имеет место устойчивое равновесие (1, рис.5.4). Если же вторая производная отрицательна, то имеет место неустойчивое равновесие (2, рис. 5.4). Ну а если вторая производная от энергии равна нулю, то имеет место безразличное равновесие (3, рис. 5.4):

$$(1) \to \frac{d^2W_П}{dx^2} > 0;(2) \to \frac{d^2W_П}{dx^2} < 0;(3) \to \frac{d^2W_П}{dx^2} = 0; \quad (5.29)$$

Потенциальная энергия тела определяется положением его центра тяжести.

6. Неинерциальные системы отсчета.

6.1. Силы инерции. Уравнение Ньютона для неинерциальных систем отсчета.

Законы инерции выполняются в инерциальной системе отсчета. А как описать движение тела в неинерциальной системе? Рассмотрим пример: вы стоите в троллейбусе спокойно. Вдруг троллейбус резко трогается, и вы невольно отклонитесь назад. Что произошло? Кто вас толкнул?

С точки зрения наблюдателя на Земле (в инерциальной системе отсчета), в тот момент, когда троллейбус тронулся, вы остались стоять на месте – в соответствии с первым законом Ньютона.

С точки зрения сидящего в троллейбусе – вы начали двигаться назад, как если бы кто-нибудь вас толкнул. На самом деле, никто не толкнул, просто ваши ноги, связанные силами трения с троллейбусом «поехали» вперед из-под вас и вам пришлось падать назад.

Можно описать ваше движение в инерционной системе отсчета. Но это не всегда просто, так как обязательно нужно вводить силы, действующие со стороны *связей*. А они могут быть самыми разными и ведут себя по-разному – нет единого подхода к их описанию. А можно и в неинерциальной системе воспользоваться законами Ньютона, если ввести *силы инерции*. Они *фиктивны*. Нет тела или поля, под действием которого вы начали двигаться в троллейбусе. Силы инерции вводят специально, чтобы воспользоваться уравнениями Ньютона в неинерциальной системе.

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. На силы инерции законы Ньютона не распространяются.

Найдем количественное выражение для силы инерции при *поступательном движении* неинерциальной системы отсчета.

Введем обозначения: $\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы; $\vec{a}^*$ – ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной
(относительно Земли).

Тогда ускорение тела относительно инерциальной системы:

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}'. \tag{6.1}$$

Ускорение в инерциальной системе можно выразить через второй
закон Ньютона

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}^* + \vec{a}', \tag{6.2}$$

где m – масса движущегося тела, или

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}^* \tag{6.3}$$

Мы можем и $\vec{a}^*$ представить в соответствии с законом Ньютона (формально)

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}_{\text{ин}}}{m} \tag{6.4}$$

где $\vec{F}_{\text{ин}}$ – сила, направленная в сторону, противоположную ускорению неинерциальной системы $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}^*$.

Тогда получим *уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета*

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} \tag{6.5}$$

Здесь $\vec{F}_{\text{ин}}$ – фиктивная сила, обусловленная свойствами системы отсчета, необходимая нам для того, чтобы иметь возможность описывать движения тел в неинерциальных системах отсчета с помощью уравнений Ньютона.

Силы инерции неинвариантны относительно перехода из одной системы отсчета в другую (то есть изменяются при переходе). Они не подчиняются закону действия и противодействия. Движения тела под действием сил инерции аналогично движению во внешнем силовом поле. Силы инерции всегда являются внешним по отношению к любому движению системы материальных тел.

6.2. Центробежная сила инерции

Рассмотрим вращение камня массой m на веревке (рис. 6.1).

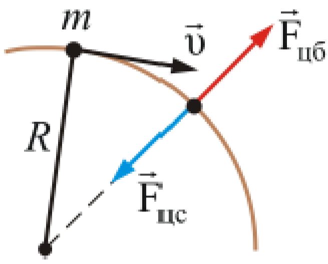


Рис. 6.1.

В каждый момент времени камень должен был бы двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Однако он связан с осью вращения веревкой. Веревка растягивается, появляется упругая сила, действующая на камень, направленная вдоль веревки к центру вращения. Это и есть ***центростремительная сила*** (при вращении Земли вокруг оси в качестве центростремительной силы выступает сила гравитации).

$$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_{цс}, \quad \text{но т.к.} \quad \vec{a}_{цс} = \vec{a}_n, \ \text{то}$$

$$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_n, \tag{6.6}$$

$$F_{цс} = m\frac{\upsilon^2}{R}. \tag{6.7}$$

Сила же, приложенная к связи и направленная по радиусу от центра, называется ***центробежной.***

Помните, что центростремительная сила приложена к вращающему телу, а центробежная сила – к связи.

Центробежная сила – *сила инерции*. Центробежной силы, приложенной к вращающемуся телу, не существует. С точки зрения наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчета, он не приближается к центру, хотя видит, что $F_{цс.}$ действует (об этом можно судить по показанию пружинного динамометра). Следовательно, с точки зрения наблюдателя в неинерциальной системе есть сила, уравновешивающая $F_{цс.}$, равная ей по величине и противоположная по направлению:

$$\vec{F}_{цб} = -m\vec{a}_n$$

$$F_{цб} = -m\frac{\upsilon^2}{R},$$

т.к. $a_n = \omega^2 R$ (здесь ω – угловая скорость вращения камня, а υ – линейная), то

$$F_{цб} = m\omega^2 R \tag{6.8}$$

Все мы (и физические приборы тоже) находимся на Земле, вращающейся вокруг оси, следовательно, в неинерциальной системе (рис. 6.2).

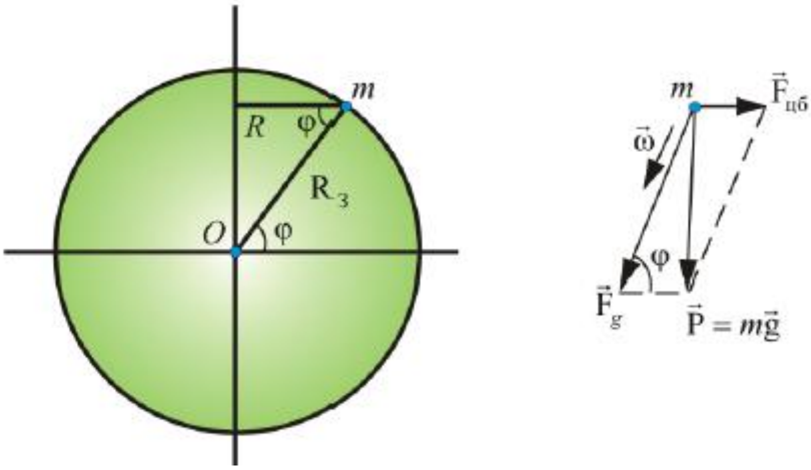


Рис. 6.2.

$R = R_3 \cos\varphi$, φ – широта местности.

$$F_{цб} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_3 \cos\varphi \tag{6.9}$$

где ω – угловая скорость вращения Земли.

Сила тяжести есть результат сложения двух сил: $\vec{F}_g$ и $\vec{F}_{цб}$, таким образом g (а значит и mg) *зависит от широты местности*:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб}, \tag{6.10}$$

где g = 9,80665 м/с^2 – ускорение свободного падения.

Направлено g точно к центру только на полюсе и на экваторе.

6.3. Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центростремительной и центробежной сил, появляется еще одна сила, называемая ***силой Кориолиса*** или *кориолисовой силой инерции* (Г. Кориолис (1792 – 1843) – французский физик). Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую линию *OA* (рис. 6. 3).

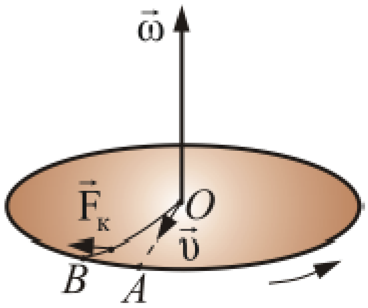


Рис. 6.3.

Запустим в направлении от *O* к *A* шарик со скоростью $\vec{\upsilon}$. Если диск не вращается, шарик должен катиться вдоль *OA*. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по кривой *OB*, причем его скорость относительно диска быстро изменяет свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\vec{F}_к$, перпендикулярная направлению движения шарика.

Сила Кориолиса не является «настоящей» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальной системы отсчета такая сила вообще не существует. Она вводится искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета.

Чтобы заставить шарик катится вдоль *OA*, нужно сделать направляющую, выполненную в виде ребра. При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой. Относительно вращающейся системы (диска), шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно объяснить тем, что эта сила уравновешивается, приложенной к шарику силой инерции:

$$\vec{F}_к = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}], \tag{6.11}$$

здесь $\vec{F}_к$ – *сила Кориолиса,* также являющаяся силой инерции, $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения диска.

Сила Кориолиса вызывает *кориолисово ускорение*. Выражение для этого ускорения имеет вид

$$\vec{a}_к = 2[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}] \tag{6.12}$$

Ускорение направлено перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon}$ и максимально, если относительная скорость точки, $\vec{\upsilon}$ ортогональна угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения подвижной системы отсчета. Кориолисово ускорение равно нулю, если угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon}$ равен нулю или π, либо если хотя бы один из этих векторов равен нулю. Следовательно, в общем случае при использовании уравнений Ньютона во вращающейся системе отсчета, возникает необходимость учитывать центробежную, центростремительную силы инерции, а также кориолисову силу.

Таким образом, $\vec{F}_к$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Сила Кориолиса возникает только в случае, когда тело изменяет свое положение по отношению к вращающейся системе отсчета.

Влияние кориолисовых сил необходимо учитывать в ряде случаев при истолковании явлений, связанных с движением тел относительно земной поверхности.

Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обуславливающая отклонение к востоку от линии отвеса. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах.

Летящий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции.

Например, при выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу – в южном. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в восточном направлении.

Сила Кориолиса, действует на тело, *движущееся вдоль меридиана* в северном полушарии вправо и в южном – влево (рис. 4).

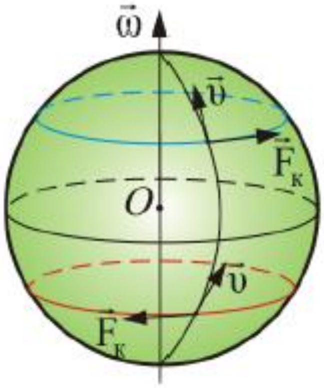


Рис. 6.4.

Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в севером полушарии и левый – в южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника (маятник Фуко). Для простоты предположим, что маятник расположен на полюсе (рис. 5).

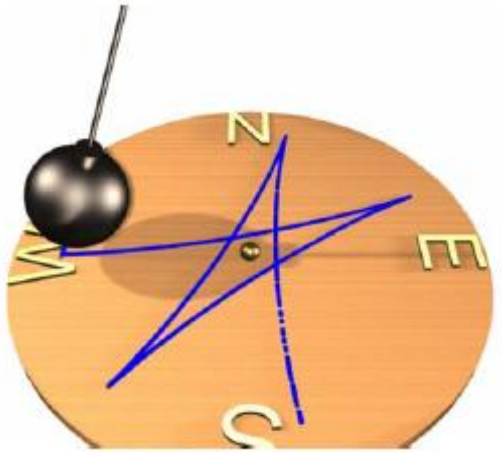


Рис. 6. 5.

На северном полюсе сила Кориолиса будет направлена вправо по ходу маятника. В итоге траектория движения маятника будет иметь вид розетки. Как следует из рисунка, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, причем за сутки она совершает один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета дело обстоит так: плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее, делая за сутки один оборот. Таким образом, вращение плоскости качаний маятника Фуко дает непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

Если тело удаляется от оси вращения, то сила $F_к$ *направлена противоположно вращению и замедляет его*.

Если тело приближается к оси вращения, то сила $F_к$ *направлена в сторону вращения.*

С учетом всех сил инерции, уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета (6.5) примет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{к}, \qquad (6.13)$$

$\vec{F}_{ин}$ – сила инерции, обусловленная поступательным движением неинерциальной системы отсчета; $\vec{F}_{цб} + \vec{F}_{к}$ – две силы инерции, обусловленные вращательным движением системы отсчета; $\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

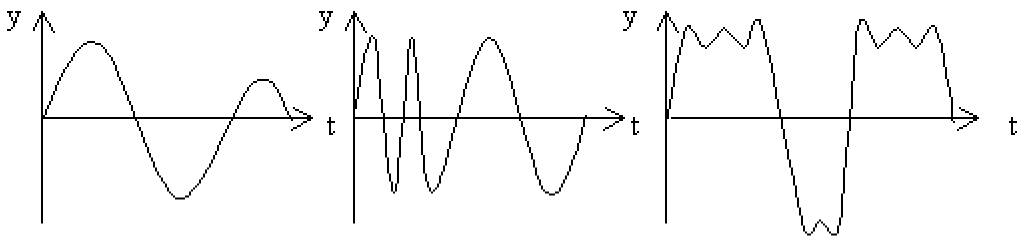
$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a},$$
$$\vec{F}_{к} = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}],$$
$$\vec{F}_{цб} = m\vec{a}_{n}.$$

7. Колебательное движение.

7.1 Общие сведения о колебаниях.

Основной чертой колебательного движения является повторяемость с течением времени.

Колебаниями называются движения, повторяющиеся через равные или приблизительно равные промежутки времени. При периодических колебаниях повторяются траектория, скорость и ускорение материальной точки в любой точке траектории (рис. 7.1).



Непериодические колебания Периодические колебания

Рис. 7.1.

Параметры механических колебаний:

Амплитуда - наибольшее отклонение системы от положения равновесия;

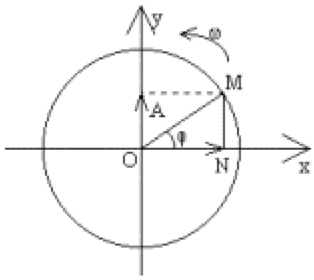
Период - время между двумя последовательными прохождениями системы через одно и то же положение в одном и том же направлении;

Частота - число колебаний системы за единицу времени.

$\nu = 1/T \quad [Гц] = [c^{-1}]$

7.2. Гармонические колебания

Движение материальной точки по окружности можно трактовать как колебания проекций на оси X и Y около центра окружности.



Смещение в любой момент времени, равно соответственно:
$x = A\cos\varphi,\ y = A\sin\varphi.$
Угол поворота в случае совпадения т. М с осью X при $t_0 = 0$ равен: $\varphi = \omega t = \dfrac{2\pi}{T}t = 2\pi\nu t$

Если т. М в начальный момент не совпадает с осью x, то необходимо добавить начальный угол φ_0, т.о. уравнения гармонических колебаний (законы движения точек) имеют вид:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),\ y = A\sin(\omega t + \varphi_0); \tag{7.1}$$

Величина $\omega t + \varphi_0$ называется фазой колебания, ω-круговой частотой, φ_0 – начальной фазой. Скорость и ускорение колеблющейся точки являются также периодическими функциями времени:

Скорость т. $\bar{N}$ по OX:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

И ускорение

$$a_x = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

являются периодическими функциями с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Рассмотрим колебания груза, прикрепленного к пружине (пружинный маятник). X – координата груза (рис. 7.2).

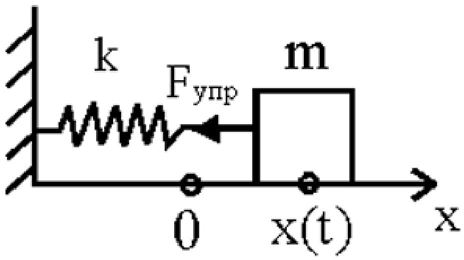


Рис. 7.2.

Второй закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. После проецирования на ось x:

$$\vec{a} \Rightarrow a_x,\ F_{упр.} = -kx.\ A_x = d^2x/dt^2,$$

получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (7.2)$$

Используя другое обозначение производной получим после несложных преобразований:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \qquad (7.3)$$

Мы получили дифференциальные уравнения, описывающие движение груза.

Введем обозначения: $\frac{k}{m} = \omega_0^2$; x = ξ, подставим в предыдущее равенство, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний любой природы:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \cdot \xi = 0 \qquad (7.4)$$

При гармонических колебаниях происходит ***взаимное периодическое превращение*** кинетической и потенциальной энергии.

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t; \qquad W_П = \int_0^x F dx = k\frac{x^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2 \omega t,$$

Но k = mω^2. Таким образом, полная механическая энергия равна:

$$W_М = W_К + W_П = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2 \omega t = \frac{m\omega^2}{2} A^2. \qquad (7.5)$$

Механическая энергия постоянна и пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты.

Решение дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения называется *функция*, обращающая это уравнение в тождество. Нетрудно проверить прямой подстановкой, что в нашем случае *решение* имеет вид: $\xi(t) = ACos(\omega_0 t + \alpha)$, т.е. является гармонической функцией. Значит уравнение $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \cdot \xi = 0$, это дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

В случае гармонических колебаний зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения, представленного в экспоненциальной форме:

$$x = Re\ Ae^{i\omega t} \tag{7.6}$$

где число e – основание натуральных логарифмов; A — комплексная постоянная величина. Записав ее в виде

$$A = ae^{i\alpha}, \tag{7.7}$$

мы вернемся к старому выражению

$$x = \mathrm{Re}\ ae^{i\omega\, t+i\alpha} = a\cos(\omega\, t+\alpha\,). \tag{7.8}$$

Постоянную величину A называют **комплексной амплитудой**. Ее модуль совпадает с обычной амплитудой, а аргумент — с начальной фазой колебаний.

Оперирование экспоненциальными множителями проще в математическом отношении, чем тригонометрическими, так как дифференцирование не изменяет их вида. При этом пока мы производим лишь **линейные операции** (сложение, умножение на постоянные множители, дифференцирование, интегрирование), можно вообще опускать знак вещественной части, переходя к последней лишь в окончательном результате вычислений.

Колебания математического маятника.

Маятник – тело, совершающее под действием переменной силы колебания.

Предположим, что вся масса маятника сосредоточена в шарике, а подвес невесомый и нерастяжимый. Такой маятник представляет собой материальную точку, колеблющуюся в гравитационном поле, и называется ***математическим маятником.***

Если на маятник действуют только две силы: сила тяжести и сила натяжения подвеса, то их равнодействующая равна $F = -mg\sin\alpha$. (рис. 7.3).

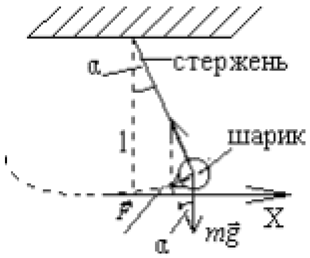


Рис. 7.3.

Тогда уравнение колебаний маятника представим в виде:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -mg\,\mathbf{sin}\,\alpha.$$

Решение этого уравнения представляется достаточно сложно через эллиптические функции Якоби. Поэтому будем рассматривать только малые отклонения. При малых отклонениях ($\alpha < 0{,}14$ рад $= 6^0$):

$$\mathbf{sin}\,\alpha \approx \alpha = \frac{S}{l} \Rightarrow F = -\frac{mg}{l}S \;\Big|\Rightarrow F = -\frac{mg}{l}x$$

Возвращающая сила квазиупругая, поэтому колебания гармонические. Уравнение гармонических колебаний маятника в гравитационном поле после проекции на направление касательной к траектории принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 \tag{7.9}$$

Сравнивая с (7.4), приходим к выводу, что

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{7.10}$$

Тогда период колебаний математического маятника выражается:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.11}$$

Колебания физического маятника.

Рассмотрим теперь малые колебания физического маятника. Так в общем случае называется твердое тело произвольной формы, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси *C* (рис. 7.4).

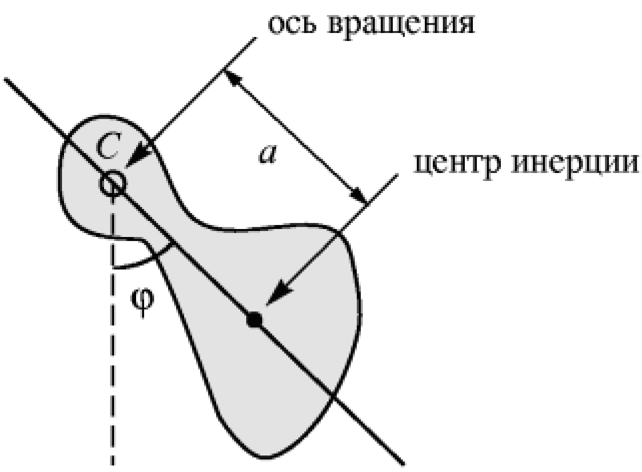


Рис. 7.4.

Обозначим расстояние от оси вращения до центра инерции тела через *a*. Если известен момент инерции тела *J* относительно оси вращения, то уравнение вращательного движения запишется в виде

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = M = -mgaSin\alpha\,. \qquad \textbf{(7.12)}$$

Если считать, что при вращении, например, против часовой стрелки угол α увеличивается, то момент силы тяжести M вызывает уменьшение этого угла и, следовательно, при $\alpha > 0$ момент $M < 0$. Это и отражает знак минус в правой части (7.12). Для малых углов отклонения уравнение (11) переходит в уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mga}{J}\alpha\,. \qquad (7.13)$$

Из сравнения (7.13) с (7.4) ясно, что частота ω_0 равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{J}}\,; \qquad (7.14)$$

Период колебаний T равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} \qquad (7.15)$$

Сравнивая выражения для периода колебаний физического (7.15) и математического (7.11) маятников, легко видеть, что оба периода совпадают, если

$$\frac{J}{ma} = l \tag{7.16}$$

Поэтому физический маятник характеризуется приведенной длиной (7.16), которая равна длине математического маятника с таким же периодом колебаний.

7.3. Векторная диаграмма

Векторная диаграмма - это способ графического задания колебательного движения в виде вектора. Вдоль горизонтальной оси откладывается колеблющаяся величина ξ (любой физической природы) (рис. 7.5).

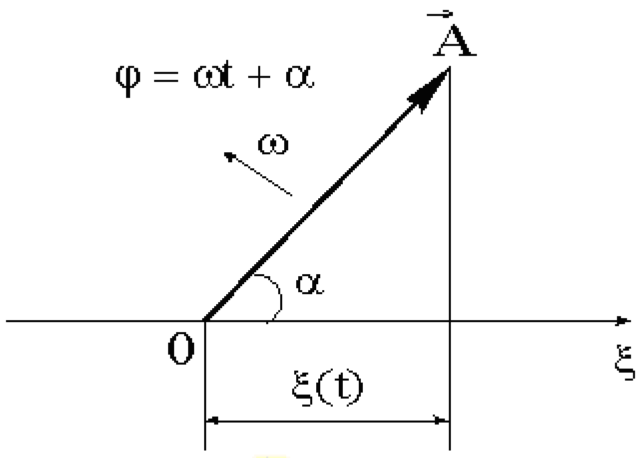


Рис. 7.5.

Вектор $\vec{A}$, отложенный из точки 0, равен по модулю амплитуде колебания A. Он направлен под углом α, равным начальной фазе колебания к оси ξ. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω, равной циклической частоте колебаний, то проекция этого вектора на ось ξ дает значение колеблющейся величины в произвольный момент времени.

7.4. Сложение колебаний

Сложение двух колебаний одного направления

1. Частота и фазы одинаковы, амплитуды разные

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t), x_2 = A \sin(\omega t);$$
$$x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\sin(\omega t) \qquad (7.17)$$

- гармонические колебания той же частоты с суммарной амплитудой.

2. Частота и амплитуда одинаковы, фазы разные:

$$x_1 = A \sin(\omega t + \varphi_{01}), x_2 = A \sin(\omega t + \varphi_{02});$$
$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos(\frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} t)\sin(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}) \qquad (7.18)$$

- гармонические колебания той же частоты с амплитудой, зависящей от разности начальных фаз колебаний: при $\Delta\varphi = 0$ амплитуда максимальна, при $\Delta\varphi = \pi$ - колебания взаимно гасятся.

3. Амплитуды одинаковы, частоты разные

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t), x_2 = A \sin(\omega_2 t);$$
$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t)\sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) \qquad (7.19)$$

негармонические колебания. Биения амплитуды с частотой $\omega_1 - \omega_2$ налагаются на (модулируют) несущую частоту колебаний $(\omega_1+\omega_2)/2$ (рис.7.6).

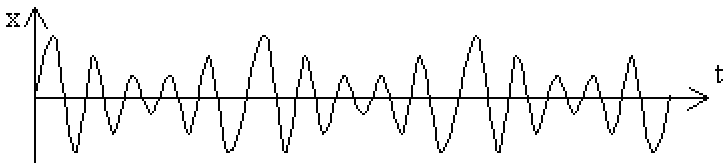


Рис. 7.6.

Найдем период колебаний в случае биений:

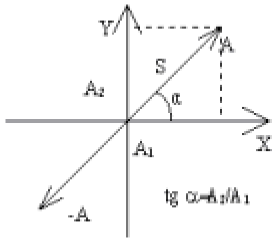
$$\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}(t+T)\right] = \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + 2\pi\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} T = 2\pi;$$

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}; \qquad (7.20)$$

Сложение двух колебаний перпендикулярных направлений.

1. Частоты и фазы одинаковы, амплитуды разные

$$x = A_1 \sin \omega t, y = A_2 \sin \omega t\,;$$
$$y = \frac{A_1}{A_2} x$$
- колебания вдоль прямой



$S = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin \omega t$ - гармонические колебания той же частоты с амплитудой $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

2. Частоты одинаковы, фазы сдвинуты на $\pi/2$, амплитуды различны: $x = A_1 \sin \omega t, y = A_2 \sin(\omega t + \pi/2) = A_2 \cos \omega t$

$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ - колебания по эллипсу.

3. Частоты и амплитуды различны: $x = A_1 \sin \omega_1 t, y = A_2 \sin \omega_2 t$ - получаем либо незамкнутые траектории, либо фигуры Лиссажу (замкнутые кривые), если частоты кратные.

Фигуры Лиссажу

Фигуры Лиссажу - замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Фигуры Лиссажу можно наблюдать с помощью осциллографа, подавая одновременно на вход X и вход Y (горизонтальные и вертикальные отклоняющие пластины) переменные напряжения кратных частот.

7.5. Свободные и вынужденные колебания.

Система, выведенная из состояния равновесия и предоставленная самой себе, совершает ***свободные колебания.*** Свободные колебания, совершаемые в среде без сопротивления, называются ***собственными колебаниями***, частота которых определяется свойствами самой системы. Свободные колебания являются затухающими, потому что система расходует энергию на преодоление сопротивления среды, и амплитуда колебаний уменьшается -

происходит диссипация энергии, т.к. $W_M \sim A^2$. Для поддержания колебаний необходимо восполнить потери энергии извне, т.е. воздействовать на систему периодически изменяющейся силой

$$f_в = f_0 \exp i\omega t \,. \tag{7.21}$$

Вынужденными называются колебания системы под действием внешней периодической вынуждающей силы. На колеблющееся тело действуют три силы: вынуждающая, возвращающая и сила трения. Силу трения будем считать пропорциональной скорости v:

$$F_{тр.} = \mu v = \mu(dx/dt). \tag{7.22}$$

Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы:

$$x \sim e^{i\omega t}.$$

В таком случае уравнение движения имеет вид:

$$-m\omega^2 x = f_0 e^{i\omega t} - m\omega_0^2 x + i\mu\omega x\,. \tag{7.23}$$

Отсюда

$$x = \frac{f_0}{m\left[\omega_0^2 - \omega^2 - i\left(\frac{\mu}{m}\right)\omega\right]} e^{i\omega t}\,. \tag{7.24}$$

Если трение мало $\mu \to 0$, то амплитуда вынужденных колебаний, равная

$$A = \frac{f_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}, \;. \tag{7.25}$$

При совпадении частот собственного и вынужденного колебаний стремится к бесконечности.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при $\omega_0 \approx \omega$ (рис. 7.7) называется ***резонансом.***

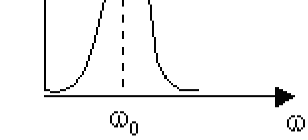


Рис. 7.7.

7.6. Затухающие колебания.

Уравнение затухающих колебаний представим в виде

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = 0 \qquad (7.26)$$

Второе слагаемое - тормозящая сила (трение), пропорциональная скорости. Решение уравнения имеет вид

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot Cos(\omega t + \alpha), \qquad (7.27)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Если $\beta < \omega_0$, то амплитуда будет уменьшаться с течением времени по экспоненте $e^{-\beta t}$ (рис. 7.8).

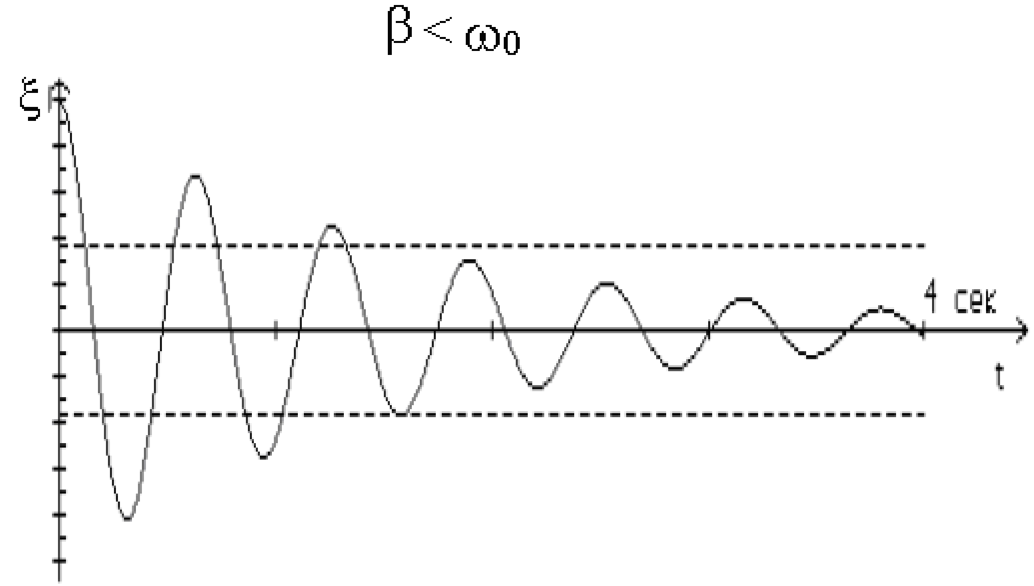


Рис. 7.8.

При $\beta > \omega_0$ колебаний не возникает, процесс апериодический.

8. Элементы специальной теории относительности

При изложении механики предполагалось, что все скорости движения тел значительно меньше скорости света. Причина этого в том, что механика Ньютона (называемая также классической) неверна при скоростях движения тел, близких к скорости света ($\upsilon \to c$). Правильная теория для этого случая, называется релятивистской механикой или *специальной теорией относительности.* Механика Ньютона оказалась замечательным приближением к релятивистской механике, справедливым в области $\upsilon \ll c$,

Для механики Ньютона справедливы **преобразования Галилея** - это уравнения, связывающие координаты и время некоторого СОБЫТИЯ в двух инерциальных системах отсчета. СОБЫТИЕ определяется местом, где оно произошло (координаты x, y, z), и моментом времени t, когда произошло событие. Событие полностью определено, если заданы четыре числа: x, y, z, t - координаты события.

Пусть материальная точка m в системе отсчета *К* в момент времени *t* имела координаты *x, y, z,* т.е. в системе *К* заданы координаты события - *t, x, y,* z. (рис. 8.1).

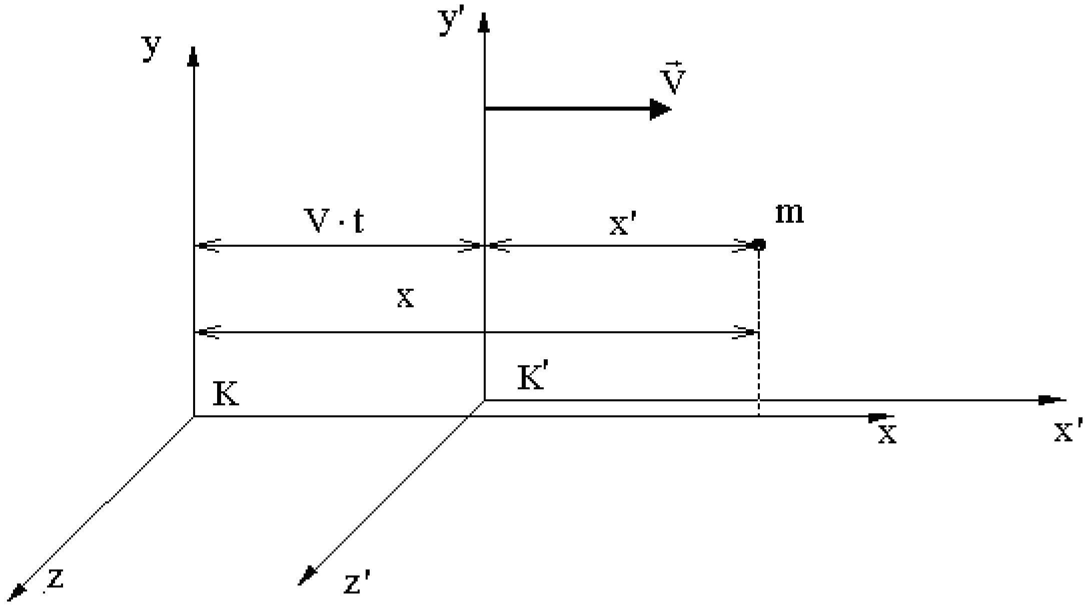


Рис. 8.1.

Найдем координаты *t', x', y', z'* этого события в системе отсчета *K'*, которая движется относительно системы *К* равномерно и прямолинейно вдоль оси x со скоростью $\vec{V}$. Выберем начало отсчета времени так, чтобы в момент времени t = 0 начала координат совпадали. Оси x и x' направлены вдоль одной прямой, а оси y и y', z и z' – параллельны. Из рисунка ОЧЕВИДНО: x = x'+Vt. Кроме того, ясно, что для наших систем координат y

= y', z = z'. В механике Ньютона предполагается, что t = t', т.е. время течет одинаково во всех системах отсчета. Полученные четыре формулы и есть преобразования Галилея для координат:

$$x = x' + Vt,\ y = y',\ z = z',\ t = t'. \qquad (8.1)$$

Принцип относительности Галилея:

Никакими механическими опытами нельзя установить, покоится ли данная система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.

Ускорение материальной точки одинаково в обеих системах отсчета. Кроме того, силы, действующие на частицу, одинаковы, не изменяется и величина **m** (по определению, это масса покоя). Значит, в системе К второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

такой же, как и в системе К'

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

т.к. a = a' - следствие преобразований Галилея. Иными словами, на теоретическом уровне, принцип относительности Галилея можно сформулировать так: ***Законы механики одинаково выглядят во всех инерциальных системах отсчета.***

Закон сложения скоростей Галилея:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}, \qquad (8.2)$$

где $\vec{v}_1$ – скорость тела в движущейся системе отсчета; $\vec{v}'$ – скорость движения подвижной системы отсчета относительно неподвижной; $\vec{v}$ – скорость тела в неподвижной системе отсчета.

Неудовлетворительность механики Ньютона при больших скоростях

Рассмотрим с точки зрения преобразований Галилея движение света. Рассмотрим в двух системах отсчета мысленный опыт. Одна система К - неподвижна, другая К' движется вдоль оси x со скоростью V. Пусть в момент времени t = t' = 0, когда начала систем координат совпадали, в этом начале произошла вспышка света и стала распространяться сферическая световая волна (рис. 8.2).

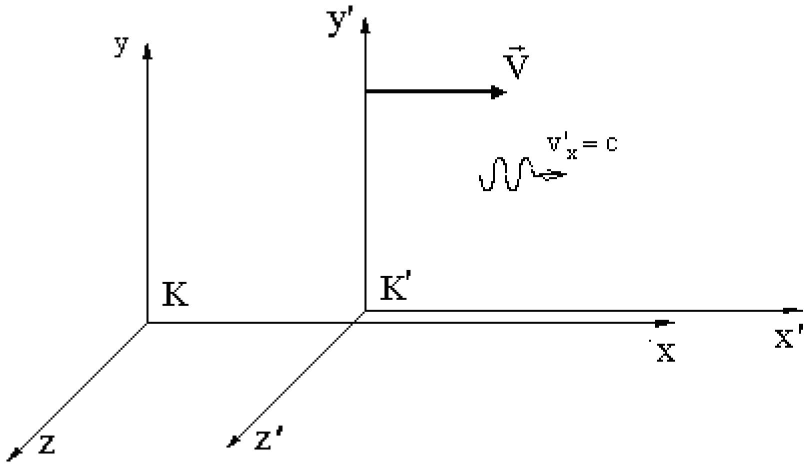


Рис. 8.2.

В системе К' его скорость $v'_x = c$. Тогда, используя полученный закон сложения скоростей из для скорости света в системе К мы найдем:

$$v_x = v'_x + V = c + V$$

Опубликованные в 1881 г. результаты опытов, выполненных американским физиком А. Майкельсоном, находятся в противоречии с только что полученной нами формулой: Галилеев закон сложения скоростей не годится для света. Скорость света оказалась одинаковой в разных системах отсчета!

В 1895 г. французский математик, физик и философ А. Пуанкаре впервые выступил с новаторским предложением о невозможности никакими физическими опытами (не только механическими, как в принципе относительности Галилея) зарегистрировать абсолютное движение. В 1902 г. он же публикует в книге "Наука и гипотеза" утверждение об отсутствии абсолютного времени, т.е. $t \neq t'$.

Законченная теория, позволяющая описывать движение частиц со скоростями $v \to c$, была опубликована в 1905 г. в работах А. Пуанкаре и А. Эйнштейна.

8.1. Постулаты С.Т.О.

Механика больших скоростей, специальная теория относительности (С.Т.О.), базируется на двух исходных утверждениях, постулатах:

I. **Принцип относительности**, согласно которому

никакими физическими опытами нельзя установить, покоится ли данная система отсчета, либо движется равномерно и прямолинейно.

Другая формулировка:

Все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета .

II. **Принцип постоянства скорости света:**

скорость света в вакууме во всех инерциальных системах отсчета одинакова и не зависит ни от движения источника, ни от движения приемника света.

8.2. Преобразования Лоренца.

Для релятивистской механики справедливы преобразования Лоренца - это уравнения, связывающие координаты и время некоторого ***события*** в двух инерциальных системах отсчета. Рассмотрим в двух системах отсчета мысленный опыт. Одна система К - неподвижна, другая К' движется вдоль оси x со скоростью V. Пусть в момент времени t = t' = 0, когда начала систем координат совпадали, в этом начале произошла вспышка света и стала распространяться сферическая световая волна (рис. 8.2).

В соответствии с постулатом I фронт этой волны будет сферой в обеих системах отсчета, сфера эта будет, в соответствии с постулатом II, увеличивать свой радиус со скоростью света и в той, и в другой системе отсчета. Преобразования Лоренца представлены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Преобразования Лоренца

Прямые преобразования		Обратные преобразования	
Галилея	**Лоренца**	**Галилея**	**Лоренца**
$x = x'$	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$x' = x$	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
$y = y'$	$y = y'$	$y' = y$	$y' = y$
$z = z'$	$z = z'$	$z' = z$	$z' = z$
$t = t'$	$t = \frac{t' + (v / c}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}$	$t' = t$	$t' = \frac{t - (v /}{\sqrt{1 -}}$

Из преобразований Лоренца вытекает, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью света) они переходят в преобразования Галилея. При *v>c* выражения для *x, t, x´* и *t´* теряют физический смысл, т.е. движение со скоростью, большей скорости света в вакууме, невозможно. Кроме того, из табл. 8.1 следует, что как пространственные, так и временные преобразования Лоренца не являются независимыми: в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени - пространственные координаты, т.е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, релятивистская теория Эйнштейна оперирует не трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает **неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время**.

8.3. Следствия из преобразований Лоренца

1. **Относительность одновременности**. Пусть в системе *K* в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе *K´* им соответствуют координаты x_1' и x_2' и моменты времени t_1' и t_2'. Если события в системе *K* происходят в одной точке ($x_1=x_2$) и являются одновременными ($t_1=t_2$), то, согласно преобразованиям Лоренца, $x_1' = x_2'$, $t_1' = t_2'$, т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета. Если события в системе *K* пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1=t_2$), то в системе *K´*, согласно преобразованиям Лоренца,

$x_1' \neq x_2'$, $t_1' \neq t_2'$.

Таким образом, в системе *K´* эти события, **оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными**.

2. **Замедление времени (длительность событий в разных системах отсчета)**

Пусть вспышка лампы на ракете длится $\tau = t'_2 - t'_1$, где τ – *собственное время*, измеренное наблюдателем, движущимся вместе с часами. Чему равна длительность вспышки $(t_2 - t_1)$ с точки зрения человека находящегося на Земле, мимо которого пролетает ракета?

Так как $x'_1 = x'_2$, тогда из преобразований Лоренца:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

или

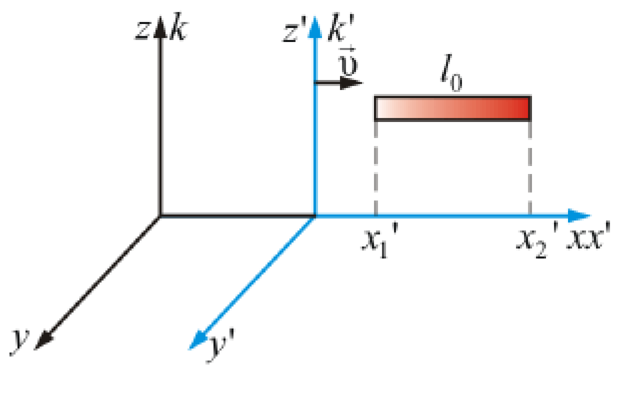
$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8.3}$$

где $\beta = \frac{v}{c}$.

Из уравнения (8.3) следует, что собственное время – минимально (*движущиеся часы идут медленнее покоящихся*). Таким образом, вспышка на Земле будет казаться длиннее. Этот вывод имеет множество экспериментальных подтверждений.

Например, В 1971 г. Хафель и Китинг осуществили прямое измерение замедления времени, отправив два экземпляра атомных часов в кругосветное путешествие на реактивном самолете. Потом их показания сравнили с показаниями таких же часов, оставленных на Земле, в лаборатории ВМС США. Время запаздывания составило $273\cdot10^{-9}$с, что в пределах ошибок согласуется с теорией.

3. **Длина тел в разных системах отсчета**. Пусть $l_0 = x'_2 - x'_1$ – *собственная длина тела* в системе К' относительно которого тело неподвижно (например: в ракете движущейся со скоростью *c* ≈ υ мимо неподвижной системы отсчета К (Земля)). Измерение координат x^1 и x^2 производим также одновременно в системе К, т.е. $t_1 = t_2 = t$. Длина тела, которое движется относительно неподвижной системы координат, $l = x_2 - x_1$.



Используя преобразования Лоренца для координат, получим:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - \upsilon t_2) - (x_1 - \upsilon t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

То есть

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{8.4}$$

собственная длина тела, есть максимальная длина. Или

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{8.5}$$

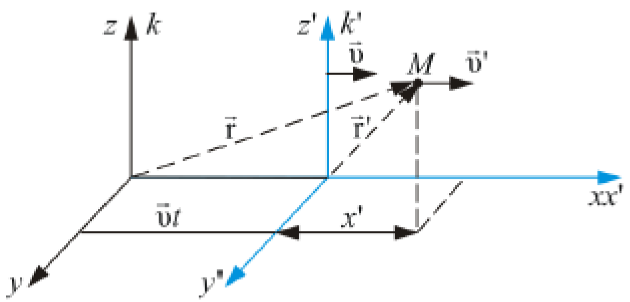
где $\beta = \frac{v}{c}$.

Длина движущегося тела короче, чем покоящегося. Причем, сокращается только проекция на ось x, т.е. размер тела вдоль направления движения.

Таким образом, размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз, т.е. **лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения**.

Релятивистское преобразование скоростей

Пусть материальная точка движется в системе K' со скоростью $\vec{v}'$. Система K' движется со скоростью $\vec{V}$ относительно K.



.

Компоненты скорости материальной точки:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}; \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c^2}v'_x}; \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c^2}v'_x}. \tag{8.6}$$

Это формулы релятивистского преобразования скоростей, они дают связь между компонентами скорости частицы в различных системах отсчета: в системе K и в движущейся со скоростью V системе K'.

8.4. Релятивистская динамика

Релятивистский импульс

В классической механике $\vec{p} = m\vec{v}$, при v << c. В релятивистской механике,

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (8.7)$$

Уравнение движения в релятивистской механике такое же, как и в классической

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

Но

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (8.8)$$

Релятивистское выражение для энергии

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad (8.9)$$

Энергия покоя

При скорости материальной точки v=0

$$W = W_0 = mc^2 \qquad (8.10)$$

Кинетическая энергия (энергия движения)

$$W_k = W - W_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \qquad (8.11).$$

Релятивистский инвариант

Из (8.7) и (8.9) следует, что:

$$\boxed{W^2 - c^2p^2 = m^2c^4} \qquad (8.12)$$

Выражение (8.12) – инвариант, т.е. не зависит от выбора системы отсчета.

9. Элементы гидро-аэромеханики.

9.1. Гидростатика

Рассмотрим вначале покоящуюся жидкость. Слово жидкость часто будет употребляться для краткости вместо слов «сплошная среда» и может применяться, например, к газу. Под частицей жидкости понимается объем, достаточно малый, чтобы внутри него можно было пренебречь изменениями давления или скорости течения. Однако этот объем все же должен содержать огромное количество молекул, что позволит рассматривать его как сплошное вещество. Понятие частицы жидкости в гидродинамике аналогично механическому понятию материальной точки.

Силы, действующие на мысленно выделенную частицу жидкости, делятся на массовые – например, сила тяжести, и поверхностные – результат воздействия соседних частиц. Вводить поверхностные силы можно тогда, когда малы длины свободного пробега молекул и межмолекулярное расстояние. Тогда внешние молекулы воздействуют на интересующий нас объем действительно вблизи его поверхности. В этом и состоит приближение сплошной среды.

Для покоящейся жидкости поверхностные силы сводятся к давлению. *Давление* P – это сила, действующая на единичную площадку в направлении нормали к ней. Например, столб жидкости плотности ρ, высотой h, сечением S притягивается к Земле с силой ρghS. В равновесии разность сил давления нижних и верхних слоев должна компенсировать вес: $\Delta PS = \rho ghS$, и давление столба жидкости

$$\Delta P = \rho g h \quad (9.1)$$

Давление измеряется в Н/м^2 = Па (СИ, в честь Б. Паскаля (1623 – 1662)). Формула (9.1) позволяет при заданных ρ и g измерять давление в единицах длины. Часто используются миллиметры ртутного или водяного столба. Нормальное атмосферное давление равно 760 мм. рт. ст., что соответствует ρgh = 1,013·10^5 Па. Для краткости говорят, что такое давление – одна атмосфера (1 атм).

По закону Паскаля (1653 г.), величина силы давления не зависит от ориентации поверхности. Это легко проверить, покрутив барометр-анероид.

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила: давление на нижнюю часть выше. Для вертикального цилиндра высоты h разность давлений равна ρgh, и при площади основания S цилиндр будет выталкиваться с силой ρghS. Другими словами, выталкивающая сила равна весу жидкости того же объема, как у рассмотренного цилиндра. Этот вывод не зависит от формы тела. Представим себе, что тело объема V заменили объемом жидкости точно такой же формы. Этот объем находится в равновесии, т.е. его вес точно компенсируется выталкивающей силой. Такой же будет выталкивающая архимедова сила, действующая на реальное тело, т.е.

$$F_A = \rho V g, \quad (9.2)$$

где ρ – плотность жидкости. Равенство (1.2) выражает закон Архимеда.

9.2 Стационарное течение. Закон Бернулли.

Перейдем к гидродинамике. Будем рассматривать *идеальную жидкость*, в которой отсутствует трение, и взаимодействие между любыми соприкасающимися объемами сводится к давлению. Кроме того, будем считать *жидкость несжимаемой*, т.е. не меняющей свою плотность при изменении давления. Область применимости этих предположений достаточно обширна. Скорость движущейся жидкости в общем случае изменяется в пространстве и времени.

Стационарными течениями называются такие течения, в которых скорость в данной точке пространства не зависит от времени. Пример стационарного течения – обтекание неподвижного тела (рис. 9.1). На большом расстоянии от тела скорость равна V, в точках A и C нулевая, а в точке B больше, чем V. Частичка жидкости, приближаясь к телу, сначала замедляется до точки A, затем разгоняется от A к B, замедляется от B к C, опять разгоняется до прежнего значения V.

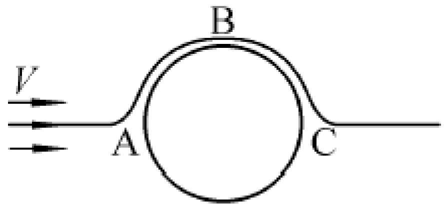


Рис. 9.1.

Но в данной точке пространства, куда все время приходят новые частицы жидкости, все они будут иметь одну и ту же скорость.

Ламинарным течением жидкости называется такое при котором траектории частиц, прошедших через данную точку пространства, повторяют друг друга.

Линиями тока называются линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора скорости. Внесением краски можно сделать линии тока видимыми. Из неподвижных линий тока можно образовать стенки *трубки тока*. Жидкость, вошедшая в трубку тока с одного торца, выходит из другого (но не через стенки) (рис. 9.2).

Рис. 9.2.

Рассмотрим некоторую трубку тока (рис. 9.2). Входное S_1 и выходное S_2 сечения будем считать малыми. Тогда можно пренебречь изменениями скорости и давления в пределах этих сечений. За малое время Δt в трубку входит масса жидкости $\rho S_1 V_1 \Delta t$. С другого конца трубки вытекает масса $\rho S_2 V_2 \Delta t$. Так как количество жидкости внутри трубки в стационарном течении постоянно, получаем уравнение неразрывности

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \,. \tag{9.3}$$

Теперь выделим («подкрасим») массу жидкости, которая в данный момент как раз заполняет трубку тока (рис. 9.3).

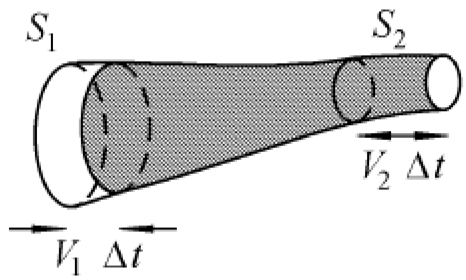


Рис. 9.3.

Через время Δt основная часть этой массы еще будет находиться внутри трубки, но справа «высунется» кусок массы $m = \rho S_2 V_2 \Delta t$, а слева останется место, занятое как раз такой же массой неподкрашенной жидкости. Результат движения за интервал Δt такой же, как если бы мы «вылезающую» массу изъяли слева и переместили вперед, изменив ее форму и скорость от V_1 до V_2. При этом изменится кинетическая энергия подкрашенной жидкости:

$$K(t+\Delta t) - K(t) = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{\rho S_2 V_2^3 \Delta t}{2} - \frac{\rho S_1 V_1^3 \Delta t}{2}$$

Энергия изменяется за счет работы внешних сил. В нашем случае это силы давления, действующие на торцы объема. Работа силы $F_1 = P_1 S_1$ слева равна $\rho P_1 S_1 V_1 \Delta t$ (сила, умноженная на перемещение), справа над нашей массой производится отрицательная работа $\rho P_2 S_2 V_2 \Delta t$. Через боковые стенки тоже действуют силы, но они перпендикулярны скорости и работы не производят. Получаем равенство

$$\frac{\rho S_2 V_2^3 \Delta t}{2} - \frac{\rho S_1 V_1^3 \Delta t}{2} = P_1 S_1 V_1 \Delta t - P_2 S_2 V_2 \Delta t$$

После сокращения на Δt и на $S_1V_1 = S_2V_2$ имеем

$$P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} \tag{9.4}$$

Другими словами, в стационарном течении вдоль линии тока постоянна сумма $P + \rho V^2/2$. Это и есть простейшая форма закона Бернулли, или уравнения Бернулли.

Если действует сила тяжести, следует учесть потенциальную энергию mgh; тогда вдоль любой линии тока тогда вдоль любой линии тока

$$P + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g h = \text{const} \tag{9.5}$$

9.3. Движение вязкой жидкости

Рассмотрим жидкости, в которых внутренним трением нельзя пренебречь. Пусть жидкость «зажата» между двумя плоскостями (рис. 9.4), причем верхняя движется со скоростью V (*течение Куэтта)*.

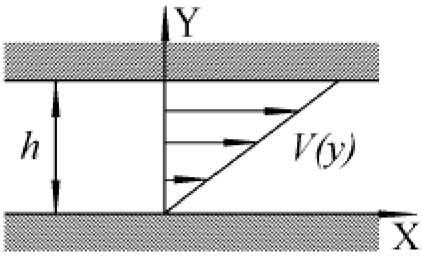


Рис. 9.4.

При небольших скоростях и достаточно тонком зазоре эксперимент дает линейную связь силы трения, действующей на верхнюю пластину, и скорости V:

$$F = \frac{\eta V S}{h} \tag{9.6}$$

В отличие от силы давления сила трения направлена вдоль поверхности, но определяется по-прежнему условиями на этой поверхности. Коэффициент η называется динамической вязкостью жидкости, ее размерность г/(см·с) =

пуаз. Часто используется кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$ размерности см^2/с = стокс. В системе СИ соответственно размерности кг/(м·с) и м^2/с.

Рассмотрим следующее по сложности *течение Пуазейля* (1799–1869) в трубе (рис. 9.5). Жидкость характеризуется коэффициентом вязкости η.

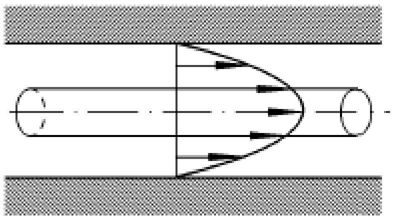


Рис. 9.5.

На участке трубы длиной *L*, радиуса *R* имеется перепад давления Δ*P*, который и вызывает течение. Объем расхода жидкости *Q* определяется формулой Пуазейля:

$$Q = \int_0^R V \cdot 2\pi y \cdot dy = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\eta L} \tag{9.7}$$

Другая важная формула для силы сопротивления *F*, действующей на шар радиуса R, движущийся со скоростью *V* в вязкой жидкости с коэффициентом вязкости η, получена Стоксом (1819–1903) в 1851 г. Окончательно сила имеет вид:

$$F = 6\pi\eta V R \tag{9.8}$$

Возникает вопрос, какую вязкость надо считать достаточно большой для выполнения закона Стокса? Сила трения должна быть основной силой в течении и превышать гидродинамический напор, который имеет порядок ρV^2. Отношение гидродинамического напора к вязкому напряжению

$$\frac{\rho V^2 L}{\eta V} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V \cdot L}{\nu} \equiv \mathrm{Re} \tag{9.9}$$

называется *числом Рейнольдса* (1842–1912). Большой следует считать вязкость, при которой Re << 1. Если же Re велико, вязкие силы несущественны, т.е. вязкость мала. Размер L, входящий в число Рейнольдса, характерен для течения (диаметр шара, трубы, длина крыла и т.д.). Если число Рейнольдса Re < 1000, то наблюдается ламинарное течение, если 1000 < Re < 2000, то наблюдается переход от ламинарного течения к турбулентному. Если Re = 2300, то в гладких трубах наблюдается турбулентное (вихревое) течение, при котором в потоке жидкости наблюдаются вихри.

9.4. Подъемная сила. Лобовое сопротивление.

Рассмотрим обтекание вращающегося цилиндра. Пусть цилиндр вращается в движущейся жидкости по часовой стрелке (рис. 9.6).

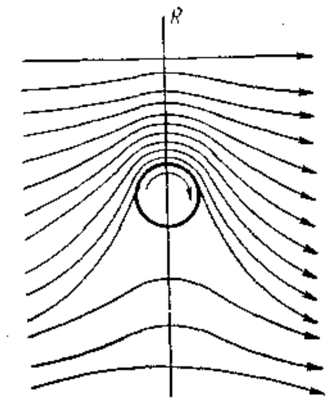


Рис. 9.6.

На той стороне цилиндра, где скорость по окружности суммируется со скоростью потока, вихри образовываться не будут или их будет небольшое количество. С диаметрально противоположной стороны образуется область, заполненная вихрями.

Следовательно, процесс обтекания не будет симметричным. Рассматривая сечение цилиндра по нормали к оси, можно видеть, что над цилиндром скорости потока будут больше, чем под ним. В соответствии с уравнением Бернулли там, где *скорость больше, давление меньше, и, следовательно, вверху будет пониженное давление, а внизу — повышенное. В результате неравенства давлений возникает подъемная сила, стремящаяся двигать цилиндр в направлении, перпендикулярном потоку.* При вращении цилиндра в потоке возникают значительные усилия, направленные перпендикулярно движению потока, при этом величина поперечной силы зависит от соотношения между скоростью потока и скоростью вращения цилиндра. Это явление называется *эффектом Магнуса*. Эффект Магнуса проявляется при полете закрученного теннисного или футбольного мяча.

Аналогично возникает и подъемная сила крыла самолета. Под крылом скорость меньше, следовательно, давление больше. Для тонкого крыла (рис. 9.7) можно считать, что на основной поток со скоростью V накладывается дополнительная скорость $+u$ сверху и $-u$ снизу крыла.

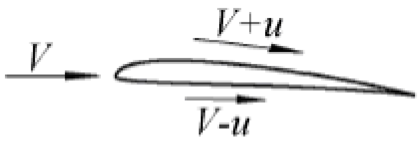


Рис. 9.7.

Разность давлений равно:

$$\rho/2\cdot((V+u)^2-(V-u)^2)=2\rho V u\ ,$$

а подъемная сила F равна:

$$F=\rho V\, 2uL. \tag{9.10}$$

Произведение $2uL$ называется циркуляцией Г (греческая буква гамма) вокруг крыла.

Хорошо обтекаемое тело должно быть закругленным спереди, но очень плавно сужающимся вниз по потоку. Тогда рост давления на участке сужения будет медленным, и зона отрыва вихрей будет мала. Заметим, что при этом тело, например, крыло самолета, необязательно должно быть очень тонким, что важно с точки зрения прочности. Когда-то крылья делали тонкими, и приходилось укреплять их дополнительными расчалками, отчего самолет напоминал этажерку, и росло сопротивление. Впервые свободнонесущее крыло (без расчалок) применил Юнкерс (1915 г.).

Для малых углов атаки и тонких крыльев теоретическая подъемная сила

$$F_y=2\pi\cdot\sin\alpha\cdot\frac{\rho V^2}{2}\cdot L \tag{9.11}$$

Циркуляция $\Gamma = \pi V L \cdot \sin\alpha$, где α – угол атаки крыла. Например, на высоте 10 км для ТУ-154 $\alpha = 6^\circ$. Коэффициент подъемной силы $C_y = 2\pi \cdot \sin\alpha = 0{,}6$. Коэффициент C_f называется коэффициентом сопротивления

$$C_f = 1{,}328/\sqrt{\mathrm{Re}}.$$

Отношение C_y/C_f, в нашем примере порядка 10, называется аэродинамическим качеством и показывает, во сколько раз вес самолета может превосходить тягу двигателей.