МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту
Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації

для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Основи вищої математики»

Розділ: Елементи векторної алгебри

Одеса 2024

УДК 514.7

Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», протокол №11 від 29 лютого 2024 року

Рецензенти:

1. **Волкова Марія Георгіївна,** кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики державного університету інтелектуальних технологій і зв’язку.
2. **Ордановська Олександра Ігорівна,** доктор педагогічних наук, доцент кафедри інноваційних технологій та методики навчання природничих дисциплін Університету Ушинського

Урум Г. Д., Олефір О. І., Болдарєва О. М. Методичні рекомендації для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Основи вищої математики» Розділ: Елементи векторної алгебри: методичні рекомендації. Одеса : Університет Ушинського, 2024. 73 с.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Основи вищої математики» Розділ: Елементи векторної алгебри містять загальний теоретичний матеріал, розв’язки прикладів і задач. Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 014.09 Середня освіта (Інформатика), 281 Публічне управляння та адміністрування з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП

Ідея вектора є однією з фундаментальних ідей сучасної математичної науки та її застосувань. На векторній основі нині розвиваються лінійна алгебра, аналітична та диференціальна геометрія, теорія багатовимірних просторів.

Вивчення векторів у курсах елементарної та вищої математики є важливим допоміжним засобом. Зокрема, векторне розв'язання багатьох стереометричних завдань значно простіше за їх вирішення засобами елементарної геометрії. Причина цього «спрощення» полягає в тому, що при векторному методі вирішення стереометричної задачі можна обійтися без тих додаткових побудов, які іноді ускладнюють пошук розв'язання деяких простих геометричних завдань.

Вміння проводити операції над векторами, обчислювати довжину та координати вектора, кут між векторами - обов'язкові навички, якими повинен володіти здобувач середньої і вищої освіти.

Векторний метод застосовується не лише в геометрії, а й в алгебрі, фізиці, географії, астрономії та інших. Тому його можна застосовувати для розв'язування великої кількості задач як геометричних, так і реальних.

У методичних рекомендаціях наведено історію розвитку векторів у математиці; виявлено різні підходи щодо визначення поняття «вектор»; розв'язані опорні задачі з геометрії, які за допомогою властивостей векторів досить легко зводяться до алгебраїчних.

Підібрано цикл алгебраїчних задач, які можна розв'язувати за допомогою векторів: доведення нерівностей, знаходження найбільшого та найменшого значення функції.

У методичних рекомендаціях також представлено задачі підвищеної складності і нестандартні задачі, показано їх розв'язок декількома способами, необхідний для всебічного розвитку здобувачів освіти. Також розглянуто деякі задачі з курсу фізики, де застосовується векторний метод розв'язання.

1.1. Історія виникнення поняття вектора та галузі використання в сучасному світі.

Уперше поняття вектора, як напрямленого відрізка знайшло застосування в механіці для зображення фізичних величин. Вектор виникає там, де доводиться мати справу з об'єктами, які характеризуються величиною і напрямом.

Термін «вектор» походить від латинського слова «*vector*», що означає *«провідний або несучий, що тягне, переносить».*

У «Началах» Евкліда дії додавання і віднімання зводилися до додавання і віднімання відрізків, а дія множення – до побудови прямокутника на відрізках, довжини яких дорівнюють довжинам множників.

У 1587 р. С. Стевен опублікував трактат «Початки статики», де він розглянув додавання двох взаємно перпендикулярних сил та прийшов до того, що необхідно скористатися «паралелограмом сил».

В 1803 р. Л. Пуансо у праці «Елементи статики» розробив теорію векторів, що відповідають силам, які діють у різних напрямах.

Оперувати векторами у просторі вперше почав ірландський математик В. Гамільтон. Основи векторної алгебри та векторного аналізу він виклав у своїй праці «Лекція про кватерніони», перша публікація якої датується 1843 роком. Саме в цій праці вперше було вжито терміни «скаляр» і «вектор» [2].

Серед вітчизняних вчених геометричний напрям у формуванні теорії векторного числення представляв професор Київського університету Василь Єрмаков. У 1887 р у Києві він видав роботу «Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів» [9].

Спочатку вектор розглядали як спрямований відрізок. Потім, у процесі розвитку теорії перетворень вектор стали розглядати не тільки як спрямований відрізок, а й як паралельне перенесення, заданий парою точок: точкой A та її прообраз A'.

Впорядкована пара чисел, впорядкована пара точок, що визначають початок і кінець руху, напрямлений відрізок – усі це різні моделі поняття «**вектор**». Такий підхід до розуміння вектора обумовлений історично. Розвиток векторного числення відбувався різними шляхами: геометричним (числення напрямлених відрізків), фізичних (дослідження векторних величин) [9].

Визначають вектор по-різному:

1) як напрямлений відрізок;
2) як упорядковану пару чисел;
3) як упорядковану пару точок, що є кінцями напрямленого відрізка;
4) як паралельне перенесення;
5) як множину однаково напрямлених відрізків однакової довжини.

Одним і тим словом «вектор» часто називають різні поняття, бо вектори бувають вільні, прикладені та інші.

Вільний вектор визначається тільки довжиною і напрямом, а прикладений довжиною, напрямом і точкою прикладання.

Два рівні за довжиною й однаково напрямлені відрізки позначають один і той самий вільний вектор.

Два прикладені вектори, позначені рівними за довжиною й однаково напрямленими відрізками, не завжди рівні. Силу $\vec{F}$ не можна замінити силою $\overrightarrow{F_1}$, бо одна з них обертає шків в одному напрямі, а друга - у протилежному.

Фізики частіше використовують прикладені вектори і зображають їх прямолінійними стрілками, бо такі зображення наочні. У математиці розглядають лише вільні вектори і задають їх не лише стрілками, а й парами точок, парами чисел тощо.

За допомогою векторного методу зручно характеризувати геометричні та інші об'єкти та співвідношення між ними. Саме тому вектори ефективно використовуються у математиці, фізиці, хімії, астрономії та інших природничих науках [9].

1.2. Поняття вектора. Координати вектора. Дії над векторами.

Багато величин, які характеризуються своїм числовим значенням, наприклад маса, довжина, площа і тощо. Їх називають скалярними величинами

Багато фізичних величин, наприклад як сила, швидкість, прискорення, вектор магнітної індукції тощо, характеризуються не лише числовим значенням, а й напрямом у площині та просторі. Щоб охарактеризувати рух автомобіля, недостатньо знати, тільки швидкість та характер руху, а також треба знати ще напрям руху[2].

Величини, що характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямом, називають векторними величинами, або вектором.

Вектор – елемент векторного простору.

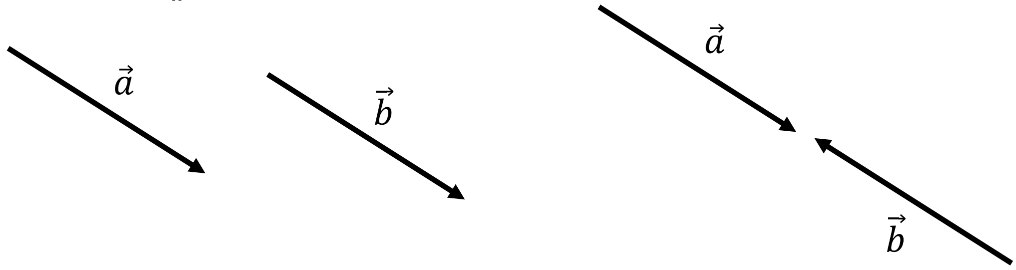
Переважна більшість означень, понять і тверджень векторів безпосередньо переноситься в стереометрію з планіметрії.

Означення. Відрізок, для якого визначено напрям, називають напрямленим відрізком, або вектором**.**

Вектор, у якого початок і кінець збігаються називають нульовим вектором, і позначають $\vec{0}$.

Модуль нульового вектора вважають рівним нулю:$\left|\vec{0}\right| = 0$. Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB.

Означення. Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Колінеарність векторів позначають як $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.

Ненульові колінеарні вектори бувають або співнапрямлені, або протилежно напрямлені.

Вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \mu\vec{a}$ і $\mu \neq 0$ і навпаки, якщо $\vec{b} = \mu\vec{a},$ де $\mu \neq 0$ то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

Геометричний зміст колінеарності двох ненульових векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, які відкладено від однієї точки, полягає у тому, що ці вектори лежать на одній прямій і один з них можна отримати з іншого за допомогою розтягування або стискання. З цього випливає, що точка лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли справджується умова $\overrightarrow{AC} = \mu\overrightarrow{AB}$ [2].

У випадку, коли два колінеарні вектори лежать на одній прямій, вони співнапрямлені, якщо їхні напрями збігаються, і протилежно напрямлені, якщо ні.

Означення. Два ненульові вектори називаються рівними, якщо рівні їхні модулі і вони співнапрямлені.

Властивості рівності векторів:

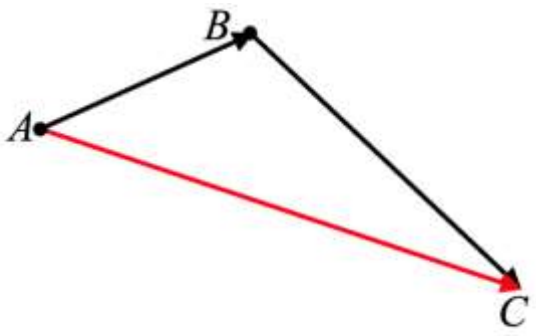
1. Будь-який вектор дорівнює сам собі: $\vec{a} = \vec{a}$.
2. Якщо $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Додавання і віднімання векторів.

Вектори, як і числа, можна додавати і віднімати. Результатом додавання або віднімання векторів є вектор.

Якщо тіло з точки A перемістилося і точку B, а потім в точку C, то сумарне переміщення з точки в точку є вектор $\overrightarrow{AC}$.

Суму двох неколінеарних векторів знаходять або за правилом



паралелограма, або за правилом трикутника.

Теорема (*правило трикутника додавання векторів*). Які б не були точки $A,\ B$ і C, справджується рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

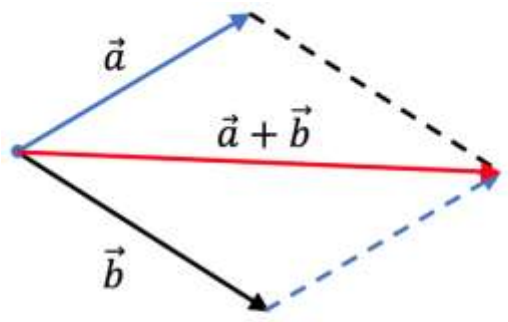
Отже, *схема суми двох довільних векторів - правила трикутника*

1) Від кінця вектора $\vec{a}$ відкладаємо вектор $\vec{b}'$, що дорівнює вектору $\vec{b}$;

2) Будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{b}'$; цей вектор і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Правило паралелограма. Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ збігалися; через кінці векторів провести прямі, паралельні прямим, які містять дані вектори:

- Початком вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде початок векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- Кінцем вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде протилежний цій точці кінець



діагоналі утвореного паралелограма [4].

Вектори, як і числа, можна додавати і віднімати. Розглянемо, як це можна зробити за допомогою координат.

Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором дорівнює вектору $\vec{a}$.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$,

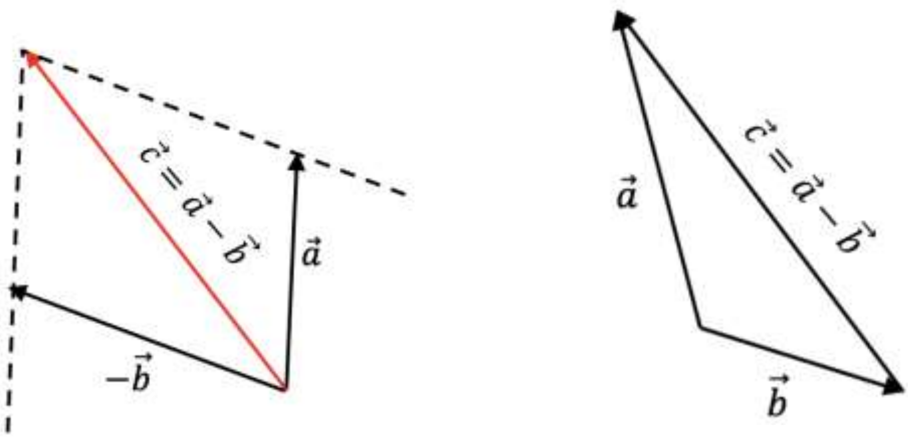
яке виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки.

Схема побудова різниці двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) Відкладаємо від однієї точки вектор $\vec{a}'$, що дорівнює вектору $\vec{a}$, і вектор $\vec{b}'$, що дорівнює вектору $\vec{b}$;

2) Будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{a}$, що і є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Щоб знайти різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор



$-\vec{b}$ - правило паралелограма.

Якщо на площині ввести систему координат, то кожний вектор можна задати парою чисел – координатами вектора [4].

Теорема. Якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно перший і другій координатам вектора $\vec{a}$.

$$\overrightarrow{AB}(x;y) \text{ або } (a_1;a_2).$$

Рівні вектори мають рівні відповідні координати. І якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Приклад 1. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(6;-4)$, $B(-8;2)$, $C(-4;-6)$. Знайдіть координати вершини D.

Розв'язання: $ABCD$ – паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. За означенням координати цих векторів рівні. Нехай $D(x;y)$.

$$\overrightarrow{AB}(-14;6);\ \overrightarrow{DC}(-4-x;-6-y).$$

Отже, $\begin{cases} -14 = -4 - x, \\ 6 = -6 - y; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ y = -16. \end{cases}$

Відповідь: $D(10;-16)$.

З формули відстані між двома точками маємо, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;a_2)$, то:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Приклад 2. Точки C і D мають координати $C(-1;6)$ і $D(5;-2))$ Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{CD}$.

Розв'язання: Нехай $\overrightarrow{CD}(c_1;c_2)$.

$$c_1 = x_c - x_y = 5 - (-1) = 6;\ c_2 = y_2 - y_1 = -2 - 6 = -8.$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{26 + 64} = 10.$$

Відповідь: $\overrightarrow{CD}(6;-8)$; $\left|\overrightarrow{CD}\right| = 10$.

Означення. Сумою векторів $\vec{a}(a_1;a_2)$ і $\vec{b}(b_1;b_2)$ називають вектор $\vec{c}(a_1+a_2;b_1+b_2)$.

Властивості суми векторів [4].

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$;
3. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$;
5. $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Приклад 3. Дано вектори $\vec{a}(-2;2)$ і $\vec{b}(3;1)$. Знайти $2\vec{a} + 5\vec{b}$.

Розв'язання: $2\vec{a} + 5\vec{b} = 2\overline{(-2;2)} + 5\overline{(3;1)} = \overline{(11;7)}$.

Означення. Різницею векторів $\vec{a}(a_1;a_2)$ і $\vec{b}(b_1;b_2)$ називають вектор $\vec{c}(a_1 - a_2; b_1 - b_2)$ такий, що $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Приклад 4. Дано вектори $\vec{a}(-2;2)$ і $\vec{b}(3;1)$. Знайти $2\vec{a} - 5\vec{b}$.

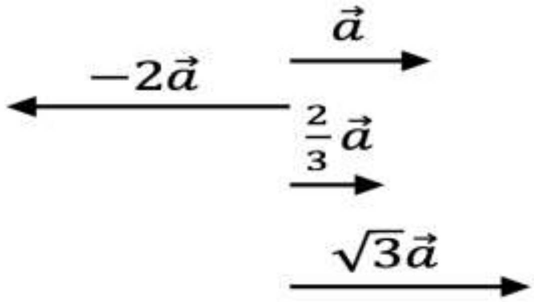
Розв'язання. $2\vec{a} - 5\vec{b} = 2\overline{(-2;2)} - 5\overline{(3;1)} = \overline{(-19;-1)}$.

1.3. Множення вектора на число. Гомотетія.

Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) якщо $k > 0$, $\vec{b} \parallel \vec{a}$; якщо $k < 0, \vec{b} \nparallel \vec{a}$.



Будь-який вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна представити як:

$$\vec{b} = k\vec{a}.$$

Якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Це твердження випливає з означення вектора на число [1].

Теорема. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Приклад 1. Доведіть, що точки $A(2;4;-4), B(1;1;-3), C(-2;0;5)$, $D(-1;3;4)$ є вершинами пралелограма $ABCD$.

Розв'язання: Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}(-1;-3;1), \qquad \overrightarrow{DC}(-1;-3;1), \qquad \overrightarrow{AD}(-3;-1;8).$$

Отже, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і для доведення того, що фігура $ABCD$ є паралелограмом достатньо указати, що точки A, B, C не лежать на одній прямій, оскільки вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ не колінеарні. Припустимо що вектори колінеарні, то існує таке число μ, що $\overrightarrow{AB} = \mu\overrightarrow{AD}$; $-1 = 3\mu$, $3 = \mu, 1 = 8\mu$.

Такого значення μ, яке б задовольняло всі три рівності не існує. Це означає, що вектори не колінеарні, отже точки A, B, C не лежать на одній прямий. Отже, $ABCD$ - паралелограм.

Теорема. Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.

Наслідок 1. Вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(ka_1; ka_2)$ колінеарні.

Наслідок 2. Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.

Властивості множення вектора на число

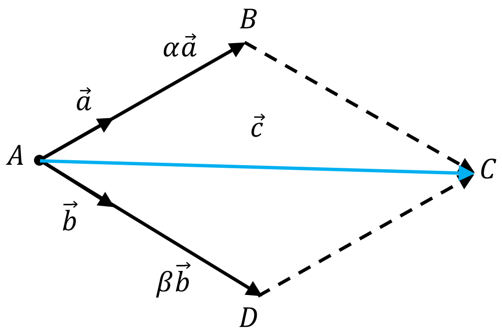
Для будь- яких чисел і будь-яких векторів виконуються рівності:

1. $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ (сполучна властивість);
2. $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (перша розподільна властивість);
3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (друга розподільна властивість).

Теорема. *(про розкладання вектора за двома неколінеарними векторами*). Будь- який вектор $\vec{c}$ можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}.$$

Доведення. Для доведення позначимо через початок A і кінець C вектора $\vec{c}$ проведемо прямі паралельно векторам.



Отримали паралелограм $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$ колінеарні. Тоді $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$. Аналогічно $\overrightarrow{AD} = \beta\vec{b}$.

Маємо: $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Довели, що існує шукана пара чисел α, β. Доведемо від супротивного, що вона єдина можлива.

Нехай існує інша пара чисел α_1 і β_1таких, що $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$. Тоді маємо:

$\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ (\alpha_1 - \alpha)\vec{a} = (\beta - \beta_1)\vec{b}$.

Вектори і за умовою неколінеарні, тоді рівність можлива лише за умови, що вектори $(\alpha_1 - \alpha)\vec{a}$ і $(\beta - \beta_1)\vec{b}$ нульові, тобто $\alpha_1 = \alpha$ і $\beta = \beta_1$, що суперечить припущенню. Пара чисел α, β - єдина. ■

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні і для вектора $\vec{c}$ знайдемо пару дійсних чисел $(\alpha; \beta)$ таку, що $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, то кажуть, що вектор $\vec{c}$ *розкладено за векторами* $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Упорядковану пару $(\alpha; \beta)$ називають *координатами вектора* $\vec{c}$ *в базисі* $(\vec{a}; \vec{b})$.

Приклад 2. Розкладіть вектор $\vec{d}(-6; 0)$ за векторами $\vec{c}(1; 3)$ і $\vec{b}(2; 6)$.

Розв'язання: Перед розкладанням вектора по двох інших векторах треба перевірити на пропорційність відповідні координати. Координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{b}$ пропорційні $(1{:}\,2 = 3{:}\,6)$. Тоді вектори колінеарні $\vec{c} = 0{,}5\vec{b}$, і виконати розклад неможна.

Відповідь: приклад не має розв'язку.

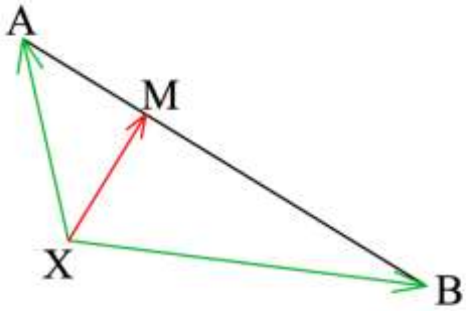
Опорна задача 1.1 [1]. Доведіть, що коли $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то O, A і B точки лежать на одній прямій.

Розв'язання: З умови випливає, що $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ вектори колінеарні. До того ж ці вектори відкладено від однієї точки

Отже, точки O, A і B точки лежать на одній прямій.

Опорна задача 1.2 [1]. Нехай P – така точка відрізка AB, що $\frac{AP}{PM} = \frac{m}{n}$. Доведіть, що для будь-якої точки X виконується рівність:

$$\overrightarrow{XP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{XB} \quad (*)$$



Розв'язання:

Маємо: $\overrightarrow{XP} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AX}$, оскільки $\overrightarrow{AX} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$, запишемо:

$$\overrightarrow{XP} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{n+m}\overrightarrow{AB};$$

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XP} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}\right)$;

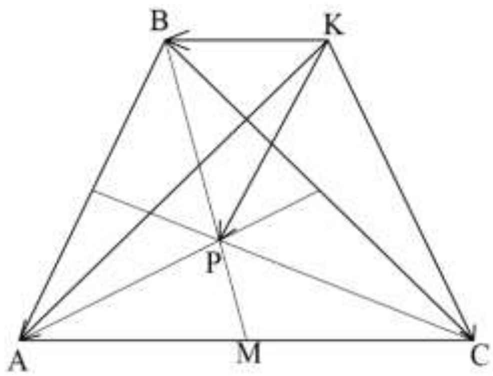
$\overrightarrow{XP} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$; $\overrightarrow{XP} = \frac{n}{n+m}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.

Якщо $m = n$, то точка X є серединою відрізка AB. Тоді формула (*) набуває вигляду:

$$\overrightarrow{XP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right) \qquad (**)$$

Властивості векторів широко застосовуються при розв'язуванні задач і доведенні теорем.

Опорна задача 1.3 [1]. Нехай P - точка перетину медіан трикутника $\Delta\, ABC$ і K довільна точка. Доведіть, що $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right)$.



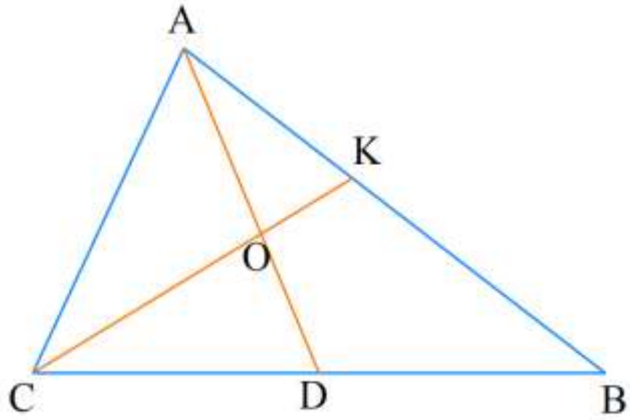
Розв'язання:

Нехай $M -$ середина відрізка AC. Маємо: $BP: PK = 2: 1$. Тоді маємо:

$$\overrightarrow{KP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA}+KC\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right).$$

Розглянемо задачу, яка дає змогу встановлювати належність точки площині за допомогою векторів.

Опорна задача 1.4 [4]. У трикутнику ABC точка K ділить сторону AB у відношенні $AK:KB=2:3$. У якому відношенні відрізок CK ділить медіану AD цього трикутника.



Дано: ABC – трикутник;
$AK:KB=2:3;AD-$ медіана;
$BD=DC$.
Знайти: $AO:OD$.

Розв'язання

1) Якщо точка O ділить відрізок CK у відношенні $2:3$ рухаючи від точки C, то $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}\right)$.

2) $\overrightarrow{CO}\upuparrows\overrightarrow{CK}\Rightarrow\overrightarrow{CO}=\lambda\overrightarrow{CK}=\frac{\lambda}{5}\left(3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}\right)$.

3) $AO:OD=x:y\Rightarrow\overrightarrow{CO}=\frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA}+x\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA}+x\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$.

4) $\frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA}+x\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\lambda}{5}\left(3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}\right).\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{x+y}=\frac{3\lambda}{5}\\ \frac{x}{2(x+y)}=\frac{2\lambda}{5}.\end{cases}$

5) $\frac{x}{2y}=\frac{2}{3}$. $\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$. $AO:OD=4:3$.

Відповідь: $4:3$, рухаючи від вершини А.

Опорна задача 1.5 [1]. Доведіть, що коли точка H – ортоцентр трикутника ΔABC, а точка $O-$ центр його описаного кола, то $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Розв'язання: Нехай трикутник ABC є довільним(не прямокутним). Опустимо з точки O перпендикуляр OM на сторону AC трикутника ΔABC.

На промені OM позначимо точку K таку, що $OM = MK$. Тоді $BH = OK$. Оскільки $BH \parallel OK$, то чотирикутник $HBOK$ - паралелограм.

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK}.$$

Оскільки точка M є серединою відрізка AC, то в чотирикутнику $AOCK$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник - паралелограм. Звідси $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Маємо: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Використовуючи задачу 3, маємо: $3\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

$$3\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.$$

Ця рівність означає, що точки O, K, H лежать на одній прямій – прямій Ейлера.

Застосування колінеарності векторів.

Ознаки та властивості колінеарних векторів під час розв'язування прикладів (задач) використовуються в таких випадках:

1) для доведення належності трьох точок одній прямій - користуються тим, що точка C належіть прямій випливає з колінеарності векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

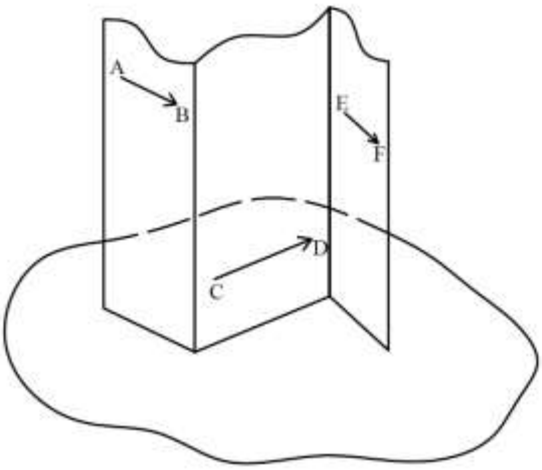
2) для доведення того, що деяка точка ділить даний відрізок у заданому відношенні – застосовують відповідні векторні рівності;

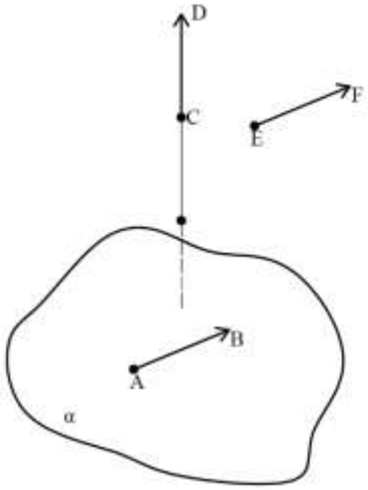
3) для доведення паралельності відрізків (прямих) – в такому випадку треба довести, що вектори, які лежать на цих прямих, колінеарні, і ці прямі не мають спільних точок.

Компланарні вектори

Означення. Вектори називають компланарними, якщо при відкладанні їх від однієї і тієї самої точки вони будуть лежати в одній площині. (а)

Отже, будь - які два вектори є компланарними. Компланарними є три вектори, з яких два – колінеарні. Три вектори, з яких жодні два не є компланарними, можуть бути як компланарними, так і некомпланарними.





Теорема. Три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, серед яких немає жодної пари колінеарних, є компланарними тоді і тільки тоді, коли існують числа α і β такі, що справджується рівність, $\alpha, \beta -$ пара чисел.

Наслідок. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпларані, то з рівності

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$ випливає, що $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Теорема *(про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами*). Нехай $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ - некомпланарні вектори. Тоді для довільного вектора $\vec{d}$ існує трійка чисел $(\alpha; \beta; \gamma)$ така, що $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

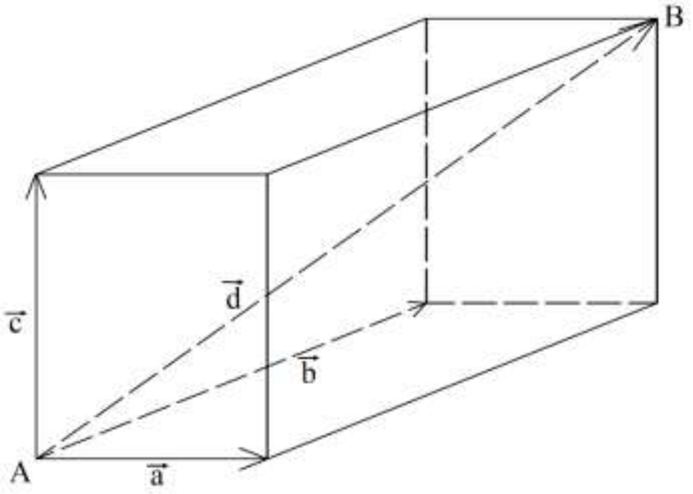
Трійку некомпланарних векторів $\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right)$ називають базисом. Якщо вектор можна подати у вигляді $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, то говорять, що вектор розкладено за базисом. Трійку чисел $(\alpha; \beta; \gamma)$ називають координатами вектора у базисі.

Для додавання трьох некомпланарних векторів використовують *правило паралелепіпеда*, подібне до правила паралелограма для додавання двох неколінеарних векторів.

Правило паралелепіпеда [2]:

1. Відкладаємо некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b},$ і $\vec{c}$ від спільного початку - точки A
2. Будуємо на даних векторах паралелепіпед;

3. Будуємо вектор, що є діагоналлю паралелепіпеда, яка виходить з точки A він і буде сумою векторів $\vec{a}, \vec{b}$, і $\vec{c}$.

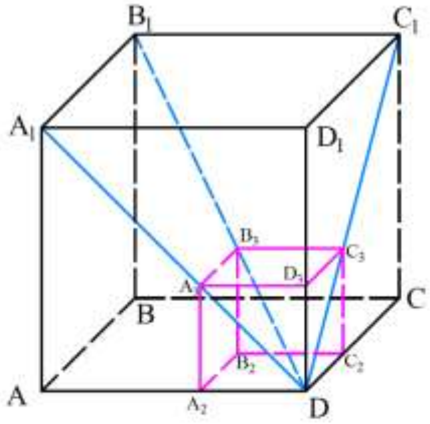


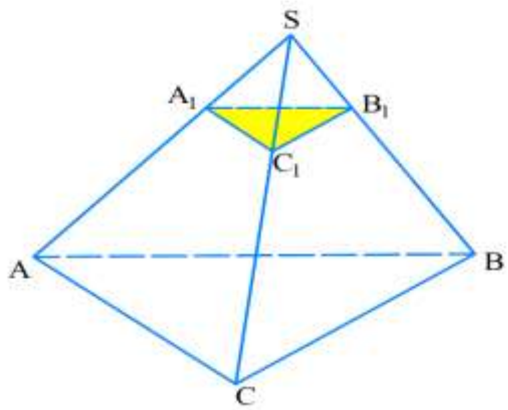
Якщо точки O, X, X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що X_1 - образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k.

Точку O називають центром гомотетії, число k – коефіцієнтом гомотетії.

Властивості гомотетії

1. образом відрізка є відрізок;
2. образом кута є кут, рівний даному;
3. образом прямої є пряма; якщо центр гомотетії не належить прямій, то образом прямої є пряма, паралельна даній;
4. образом площини є площина; якщо центр гомотетії не належить площині, то образом площини є площина, паралельна даній.

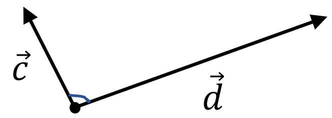


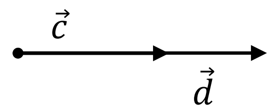


Перерізом піраміди площиною, яка паралельна її основі, є многокутник, гомотетичний основі піраміди [5].

1.4. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{c}$ і $\vec{d}$ - два ненульові і неспівнаправлені вектори. Від довільної точки відкладемо вектори відповідно рівні векторам величину кута називають кутом між векторами $\vec{c}$ і $\vec{d}$.





Якщо вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ співнаправлені, то $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 0^\circ$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{c}$ або $\vec{d}$ нульовий, то також $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 0^\circ$.

Отже, для будь-яких векторів має місце нерівність:

Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ називають перпендикулярними, якщо кут між ними 90°.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають їх модулів і косинуса кута між ними.

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}|cos\angle(\vec{c}, \vec{d}).$$

Скалярний добуток $\vec{d} \cdot \vec{d}$ називають скалярним квадратом вектора $\vec{d}$ і позначають $\vec{d}^2$. $\vec{d}^2 = |\vec{d}|^2$ [1].

Теорема. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Доведення. Нехай $\vec{c} \perp \vec{d}$.

Тоді $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 90^\circ$ і $\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}|cos 90^\circ = 0$.

Нехай тепер $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$. Тоді $\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}|cos\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 0$. Оскільки $|\vec{c}| \neq 0$ і $|\vec{d}| \neq 0$, то $cos\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 0$. Звідси $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 90^\circ$, тобто $\vec{c} \perp \vec{d}$.

Теорема. Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$можна обчислити за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB}$ $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle AOB$$

Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOB.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot cos\angle AOB.$$

Звідси

$$OA \cdot OB \cdot cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Крім того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Звідси $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$. Маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2\right)$$

Скориставшись формулою знаходження модуля вектора за його координатами, запишемо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right).$$

Отримаємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$колінеарні. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, то формула, яку доводимо, є правільною. Розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$,Тоді існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$ тобто $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$ Тоді $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0^\circ$.

Маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{a}) = |\vec{a}||k\vec{a}|cos0^\circ = |k||\vec{a}|^2 = k \cdot (a_1^2 + a_2^2) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Наслідок. Косинусом кута між ненульовими векторами $(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою:

$$cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і будь -якого числа k виконуються рівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b});$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Скалярний добуток використовують в таких випадках:

1) для знаходження довжини відрізка - шуканий відрізок, зображується як вектор і розкладають за 2 неколінеарними векторами. Знаходять $\vec{c}^2 = |c|^2$.

2) для доведення перпендикулярності прямих (відрізків) – у цьому віипадку треба показати, що добуток цих векторів дорівнює нулю;

3) для знаходження величини кута.

Приклад 1. При якому m вектори $\vec{a}(m; 3; -1)$ і $\vec{b}(2; -1; 5)$ перпендикулярні?

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$перпендикулярні тоді і лише тоді, коли

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.\ \ \vec{a}\cdot\vec{b} = 2m + (-3) + (-5) = 0; \quad m = 4.$$

Приклад 2. В трикутнику $A(2; 1; 3)$, $B(1; 1; 4)$, $C(0; 1; 3)$. Чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CN}$, де N - середина відрізка AB?

Розв'язання. Знаходимо координати середини відрізка AB: $N\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{7}{2}\right)$.

Знайдем координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CN}$: $\overrightarrow{AB}(-1; 0; 1)$; $\overrightarrow{CN}\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN} = -1\cdot\frac{3}{2} + 0\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{2} = -1$ і $\overrightarrow{CN}$

Оскільки $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN} \neq 0$, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CN}$ не перпендикулярні.

Приклад 3. Дано трикутник ABC. Знайдіть зовнішній кут при вершині B, якщо $A(2; -1; -1)$, $B(2; 2; -4)$, $C(3; -1; -2)$.

Розв'язання.

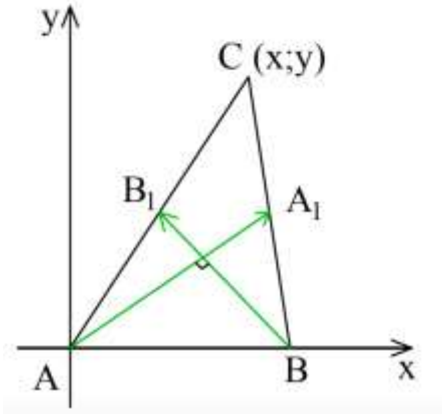
Зовнішній кут при вершині B - кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AB}(0; -3; 3)$, $\overrightarrow{BC}(1; 0; -1)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18}; \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}.$$

Тоді $cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$. $\alpha = 120^\circ$.

Опорна задача 1.6 [1]. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перпендикулярні.



Розв'язання: Нехай система координат вибрана так, що точки A і B мають наступні координати $A(0;0)$, $B(1;\ 0)$ $C(x;y)$, $y \neq 0$.

Знайдемо координати даних векторів

$\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$. Маємо: $\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}\left(\frac{x-2}{2};\frac{y}{2}\right)$.

C належить шуканому ГМТ тоді, коли $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1} = 0$

Маємо:

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1} = \frac{x+1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{y^2}{2} = 0;\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 2{,}25.$$

Отже, ГМТ є коло радіуса $1{,}5AB$ з центром у середині AB, за винятком точок, які належать прямій AB.

Задача 1.2 [1] (18.25). Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 45^\circ$. Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$.

Розв'язання:

$$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b} = 2\vec{a}\cdot\vec{b} - b^2 = 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\angle(\vec{a},\vec{b}) - |\vec{b}|^2 =$$

$$= 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 8 = 12 - 8 = 4.$$

Задача 1.3 [1] (18.27). Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 150^\circ$ Знайдіть $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.

Розв'язання. $|2\vec{a}+5\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a}+5\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 20\vec{a}\cdot\vec{b} + 25\vec{b}^2}$=

$$= \sqrt{4|a|^2 + 20\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\angle(\vec{a},\vec{b}) + 25|\vec{b}|^2} = \sqrt{12-30+25} = \sqrt{7}.$$

Відповідь: $\sqrt{7}$.

Задача 1.4 [1] (18.36). Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ якщо

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}, \quad |\vec{a}|=|\vec{b}|=1.$

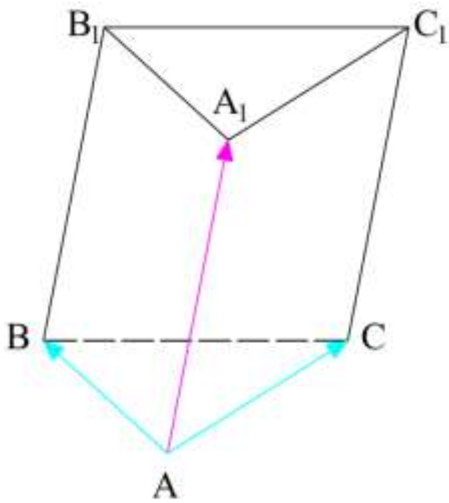
Розв'язання. $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+3\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\angle(\vec{a},\vec{b})+2|\vec{b}|^2=1+3cos\angle(\vec{a},\vec{b})+2=3(1+cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{3}{2}.$

$1+cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0{,}5;\ cos\angle(\vec{a},\vec{b})=-0{,}5;\ \angle(\vec{a},\vec{b})=120^{\circ}.$

Відповідь: 120°.

Опорна задача 1.7 [5]. Основою призми є рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Бічне ребро АА, утворює рівні гострі кути з ребрами AB і AC. Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

Розв'язання. Нехай $\angle BAA_1 = \alpha$. З урахуванням умови можна записати: $\angle BAA_1 = \alpha$.



Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BC}$. Маємо: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. Запишемо:

$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha-$
$-|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha.$

Оскільки $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$, то скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнює 0. Отже, $\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{BC}$.

Доведено.

1.5. Афінні задачі

Розглянемо афінні завдання з елементарного курсу геометрії з використанням векторного апарату.

Векторним методом можна розв’язувати не тільки ті задачі, які містять вектори в умові, а набагато ширший клас задач. Але потрібно пам’ятати, що під час розв’язування таких задач потрібно спочатку вести вектори і сформулювати умову задачі векторною мовою [10].

Розглянуті нижче три види задач досить поширені серед завдань, які доводиться вирішувати учням середньої школи:

До першого виду віднесемо завдання, пов'язані з доказом паралельності деяких відрізків та прямих. У задачах цього для вирішення потрібно показати колінеарність векторів, що зображуються даними відрізками;

До другого виду відносяться завдання, в яких доводиться, що деяка точка поділяє відрізок у певному відношенні.

Для доказу того, що точка С поділяє відрізок АВ в деякому відношенні $AC{:}\,CB = m{:}\,n$, достатньо:

а) довести рівність: $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$;

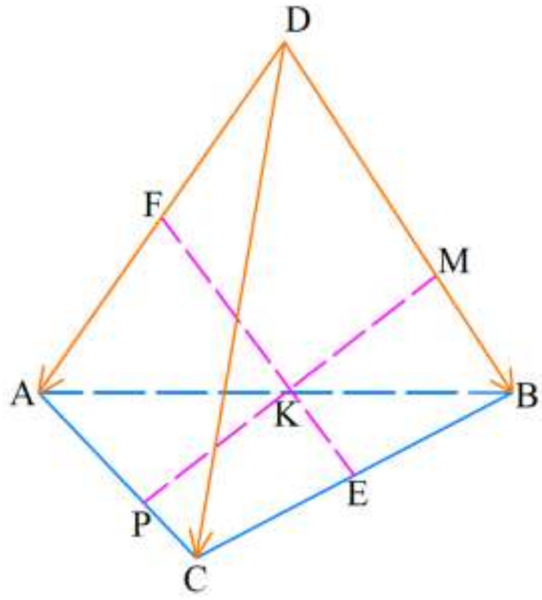
б) $\overrightarrow{QC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}$, де Q довільна точка. При розв'язанні задач другого виду іноді вибирається довільна точка Q у площині як полюс.

До завдань третього виду віднесемо ті, у яких потрібно довести належність трьох точок однієї прямої.

Задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок у деякому відношенні

Задача 2.1 [5] (22.35). Точки E і Fє відповідно серединами ребер BC і AD тетраедра $DABC$. На відрізках $BD,\ EF$ і AC позначили відповідно точки

M, K і P так, що $DM: MB = FK: KE = AP: PC = 2: 1$. Доведіть, що точки M, K і P лежать на одній прямій.



Дано: $DABC$-тетраедр;

$E \in BC, BE = EC$;

$F \in AD, AF = FD$;

$M \in BD; K \in EF; P \in AC$;

$DM: MB = FK: KE = AP: PC = 2: 1$.

Довести: $M, K, P \in a$.

Доведення

Щоб довести, що точки M, K і P лежать на одній прямій, достатньо довести, що вектор $\overrightarrow{MP}$ можна отримати шляхом множення вектора $\overrightarrow{MK}$ на коефіцієнт k:

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MK};$$

Щоб це довести, розкладемо вектори $\overrightarrow{MK}$ та $\overrightarrow{MP}$ у базисі $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$. За базис $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{DB};\ \overrightarrow{DC})$.

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{EC} +$$

$$+\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} -$$

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} -$$

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{6}\left(\vec{a} + 2\vec{c} - 2\vec{b}\right);$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} +$$

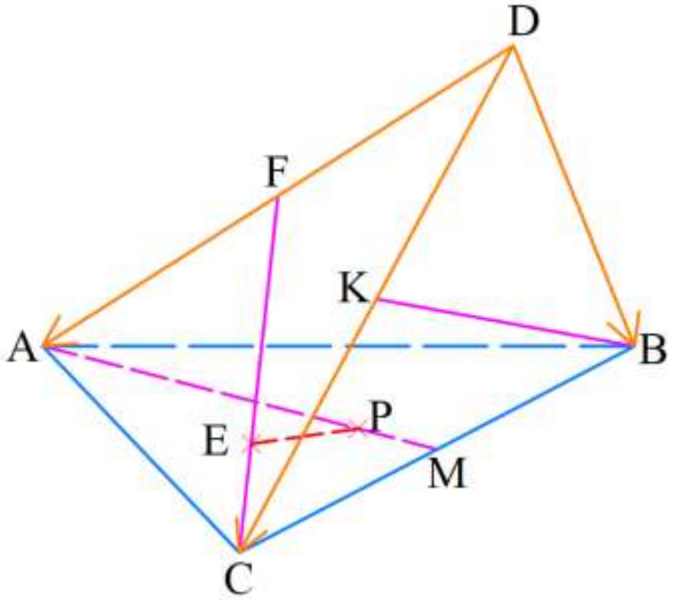
$$+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DB}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{c}-2\vec{b});$$

$$k=\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{MK}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}=2.$$

Ми довели, що є такий коефіцієнт пропорційності векторів k, який дорівнює 2. Отже, точки M, K і P лежать на одній прямій. Доведено.

Задача 2.2 [5] (22.36). Точки $M,\ F$ і K - середини відповідно ребер BC, AD і CD тетраедра $DABC$. На відрізку AM позначили P, а на відрізку CF точку E так, що $AP:PM=4:1$, $CE:EF=2:3$. Доведіть, що прямі PE і BK паралельні.



Дано: $DABC$-тетраедр;

$M \in BC, BM=MC$;

$F \in AD, AF=FD$;

$K \in CD, CK=KD$;

$P \in AM; E \in CF$;

$AP:PM=4:1;\ CE:EF=2:3$.

Довести: $PE \parallel BK$.

Доведення

Щоб довести, що прямі PE і BK паралельні, достатньо довести, що вектор $\overrightarrow{BK}$ можна отримати шляхом множення вектора $\overrightarrow{PE}$ на коефіцієнт k:

$$\overrightarrow{BK}=k\overrightarrow{PE};$$

Щоб це довести, розкладемо вектори $\overrightarrow{BK}$ та $\overrightarrow{PE}$ у базисі $(\vec{a},\ \vec{b},\vec{c})$. За базис $(\vec{a},\ \vec{b},\vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{DB};\ \overrightarrow{DC})$.

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK} = -\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DM} - \frac{1}{5}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} -$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DF} - \frac{2}{5}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{10}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{10}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{10}\overrightarrow{DA} -$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{10}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{DC} =$$

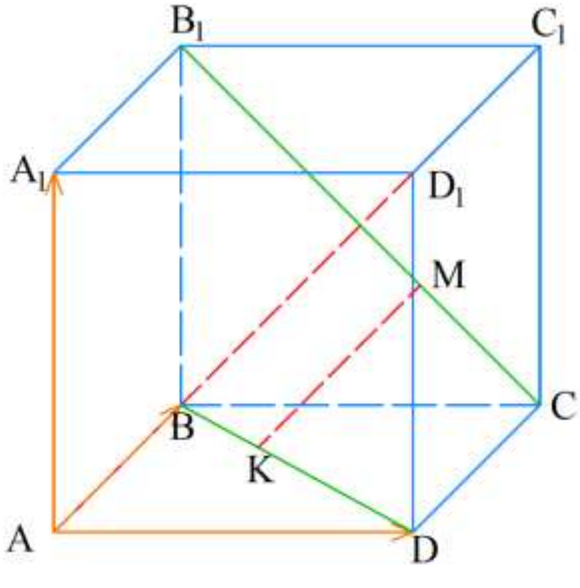
$$= \frac{2}{10}\overrightarrow{DC} - \frac{4}{10}\overrightarrow{DB} = \frac{2}{10}\vec{c} - \frac{4}{10}\vec{b} = \frac{4}{10}\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right);$$

$$k = \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{PE}} = \frac{1}{\frac{4}{10}} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$$

Ми довели, що є такий коефіцієнт пропорційності векторів k, який дорівнює 2,5. Отже, прямі PE і BK паралельні.

Доведено.

Задача 2.3 [5] (22.37). Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На відрізках B_1C і BD позначили відповідно точки M і Kтак, що $B_1M: MC = 2:1,\ BK: KD = 1:2$. Доведіть, що прямі MK і AC_1 паралельні.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-куб;

$M \in B_1C; K \in BD;$

$B_1M: MC = 2:1;\ BK: KD = 1:2.$

Довести: $MK \parallel AC_1$.

Доведення

Щоб довести, що прямі MK і AC_1 паралельні, треба довести, що вектор $\overrightarrow{AC_1}$ можна отримати шляхом множення вектора $\overrightarrow{MK}$ на коефіцієнт k:

$$\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{MK};$$

Щоб це довести, розкладемо вектори $\overrightarrow{AC_1}$ та $\overrightarrow{MK}$ у базисі $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$. За базис $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів ($\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1}$).

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c};$

$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B_1B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} +$

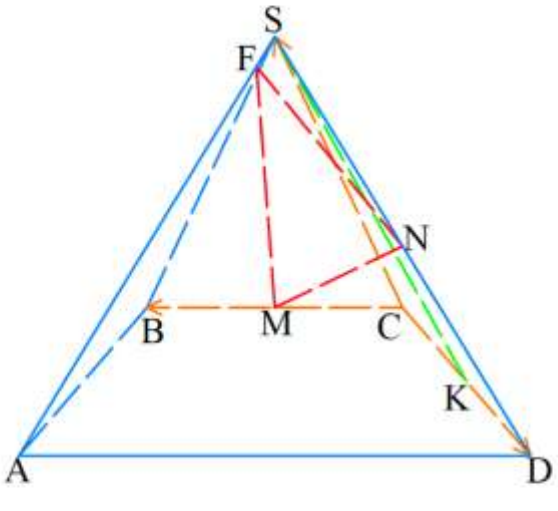
$+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} =$

$= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} = -\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c});$

$$k = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{MK}} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3.$$

Ми довели, що є такий коефіцієнт пропорційності векторів k, який дорівнює 3. Отже, прямі MK і AC_1 паралельні.

Доведено.



Задача 2.4 [5] (22.45). Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Відомо, що $AD = 2BC$. Точки M, N і K - середини ребер BC, SD і DC відповідно. Точка F належить ребру SA, причому $SF : FA = 1 : 13$. Доведіть, що площина MNF

паралельна прямій SK.

Дано: $SABCD -$ піраміда;

$ABCD$- трапеція. $AD = 2BC$.

$M \in BC, BM = MC$;

$N \in SD, SN = ND$;

$K \in DC, DK = KC$;

$F \in SA, SF: FA = 1: 13$.

Довести: $(MNK) \parallel SK$.

Доведення

Щоб довести, що пряма SK паралельна площині MNF, потрібно довести, що вектори $\overrightarrow{SK}, \overrightarrow{NM}$ та $\overrightarrow{NF}$ компланарні. Прямі NF та NM лежать в площині MNF та перетинаються в точці F. Для доведення того, що вектори $\overrightarrow{SK}, \overrightarrow{NM}$ та $\overrightarrow{NF}$ компланарні, використовуємо наступну теорему:

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ будуть компаланарними тоді й тільки тоді, коли вектор $\vec{c}$ можна подати у вигляді $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, де x і $y -$ деякі числа.

Припустимо, що вектори $\overrightarrow{SK}, \overrightarrow{NM}$ та $\overrightarrow{NF}$ компланарні та вектор $\overrightarrow{SK}$ запишемо у вигляді:

$$\overrightarrow{SK} = x\overrightarrow{NM} + y\overrightarrow{NF};$$

Розкладемо вектори $\overrightarrow{SK}, \overrightarrow{NM}$ та $\overrightarrow{NF}$ у базисі $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$. За базис $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$ виберемо трійку некомпланарних векторів ($\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CS}$).

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c});$$

$$\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{NS} + \overrightarrow{SF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DS} + \frac{1}{14}\overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{14}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{14}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} +$$

$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{CS} - \frac{1}{14}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{14}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{14}\overrightarrow{DA} = -\frac{6}{14}\overrightarrow{CD} + \frac{6}{14}\overrightarrow{CS} + \frac{2}{14}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{7}(-3\overrightarrow{CD} +$$

$$+\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{CS}) = \frac{1}{7}\left(-3\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}\right);$$

$$\overrightarrow{SK} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{CS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\left(-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = -\frac{x}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) + \frac{y}{7}\left(-3\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}\right);$$

$$-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} - \frac{x}{2}\vec{c} - \frac{3y}{7}\vec{a} + \frac{y}{7}\vec{b} + \frac{3y}{7}\vec{c};$$

$$-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{a}\left(-\frac{x}{2} - \frac{3y}{7}\right) + \vec{b}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{7}\right) + \vec{c}\left(-\frac{x}{2} + \frac{3y}{7}\right);$$

Отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{3y}{7} = \frac{1}{2}; \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -7x - 6y = 7; \\ 7x + 2y = 0; \end{cases}$$

$$-4y = 7; y = -\frac{7}{4};\; x = -\frac{2y}{7} = \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{4} = \frac{1}{2};$$

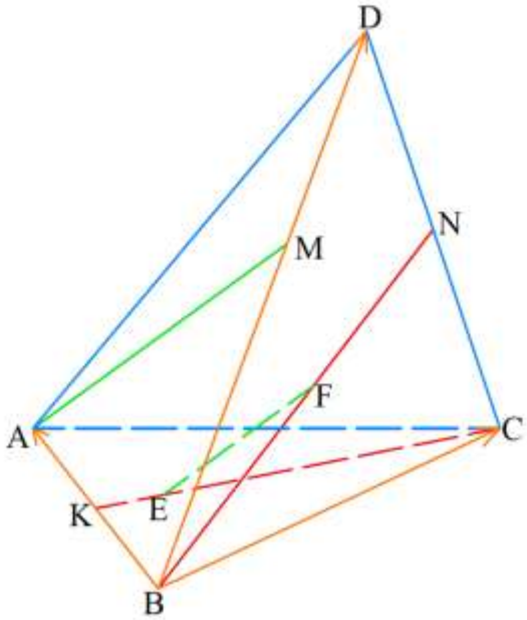
Як бачимо, наше припущення було правильне, і є такі значення x та y, і вектор $\overrightarrow{SK}$ можна подати у вигляді:

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} - \frac{7}{4}\overrightarrow{NF}.$$

Умови теореми виконуються, тобто вектори $\overrightarrow{SK}, \overrightarrow{NM}$ та $\overrightarrow{NF}$ компланарні, отже пряма SK паралельна площині MNF.

Доведено.

Задача 2.5 [5] (22.46) . Точки M, N і K - середини ребер BD, CD і AB тетраедра $DABC$. На прямих BN і CK позначено відповідно точки F і E так, що $FE \parallel AM$. Знайдіть відношення $\frac{FE}{AM}$.



Дано: $DABC$ – тетраедр;

$M \in BD, BM = MD$;

$N \in CD, CN = ND$;

$K \in AB, AK = KB$;

$F \in BN; E \in CK;\ FE \parallel AM$.

Знайти: $\frac{FE}{AM}$.

Розв’язання

Щоб знайти $\frac{FE}{AM}$, розкладемо вектори $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{EF}$ у базисі $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$. За базис $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів ($\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}$).

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF};$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EK} - \tfrac{1}{2}\vec{a} + \overrightarrow{BF};\ (1)$$

Позначимо співвідношення $\frac{KE}{AM}$ через коефіцієнт t, співвідношення $\frac{KE}{KC}$ через коефіцієнт k, співвідношення $\frac{BF}{BN}$ через коефіцієнт p.

Розкладемо також вектори $\overrightarrow{KC}$ та $\overrightarrow{BN}$ у заданому базисі $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$:

$$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b};\ \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC});$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b});$$

$$\overrightarrow{KE} = k\overrightarrow{KC};\ \overrightarrow{KE} = k\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right);\ \overrightarrow{BF} = p\overrightarrow{BN};\ \overrightarrow{BF} = \frac{p}{2}(\vec{c} + \vec{b});$$

Підставимо все це до рівняння (1). Маємо:

$$\overrightarrow{EF} = -k\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{p}{2}(\vec{c} + \vec{b}) = \frac{k\vec{a}}{2} - k\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{p}{2}\vec{c} + \frac{p}{2}\vec{b} =$$

$$= \vec{a}\left(\frac{k-1}{2}\right) + \vec{b}\left(\frac{p}{2} - k\right) + \frac{p}{2}\vec{c};$$

Так як вектори $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{EF}$ паралельні, скористаємось властивістю паралельних векторів:

$$\frac{\overrightarrow{EF_a}}{\overrightarrow{AM_a}} = \frac{\overrightarrow{EF_b}}{\overrightarrow{AM_b}} = \frac{\overrightarrow{EF_c}}{\overrightarrow{AM_c}} = t;$$

$\left(\frac{p}{2} - k\right) = 0; p - 2k = 0; p = 2k;$

$$\overrightarrow{EF} = \vec{a}\left(\frac{k-1}{2}\right) + k\vec{c}$$

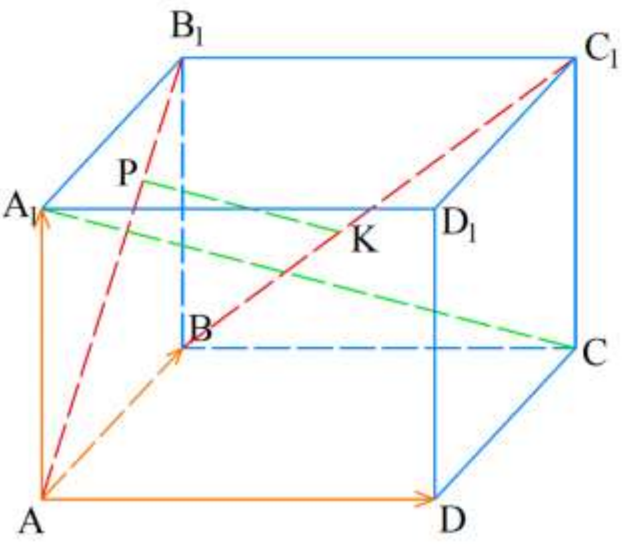
Звідси маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\frac{k-1}{2}\right) = -t, \\ k = \frac{t}{2}; \end{cases}$$

$\frac{k-1}{2} = -2k; k - 1 = -4k; 5k = 1; k = \frac{1}{5}; t = \frac{2}{5}.$

Отже, прямі AM та EF відносяться у відношенні, як $\frac{2}{5}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}$.



Задача 2.6 [5] (22.47). Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На відрізках AB_1 і BC_1 відповідно позначили точки P і K так, що прямі PK і A_1C паралельні. Знайдіть відношення $\frac{PK}{A_1C}$.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ − паралелепіпед;

$P \in AB_1$; $K \in BC_1$; $PK \parallel A_1C$.

Знайти: $\frac{PK}{A_1C}$.

Розв'язання

Щоб знайти $\frac{PK}{A_1C}$, розкладемо вектори $\overrightarrow{PK}$ та $\overrightarrow{A_1C}$ у базисі $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$. За базис $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$ виберемо трійку некомпланарних векторів ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AA_1}$).

$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{PA} + \vec{a} + \overrightarrow{BK}$;

$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$;

Позначимо співвідношення $\frac{PK}{A_1C}$ через коефіцієнт t, співвідношення $\frac{AP}{AB_1}$ через коефіцієнт k, співвідношення $\frac{BK}{BC_1}$ через коефіцієнт p.

Розкладемо також вектори $\overrightarrow{AB_1}$ та $\overrightarrow{BC_1}$ у заданому базисі $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$:

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{b} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB_1} = k(\vec{a} + \vec{c})$; $\overrightarrow{BK} = p\overrightarrow{BC_1}$; $\overrightarrow{BK} = p(\vec{b} + \vec{c})$;

Звідси маємо вектор $\overrightarrow{PK}$:

$\overrightarrow{PK} = -k(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} + p\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = -k\vec{a} - k\vec{c} + \vec{a} + p\vec{b} + p\vec{c} = \vec{a}(-k + 1) +$
$+p\vec{b} + \vec{c}(p - k)$;

Так як вектори $\overrightarrow{PK}$ та $\overrightarrow{A_1C}$ паралельні, скористаємось властивістю паралельних векторів:

$$\frac{\overrightarrow{PK_a}}{\overrightarrow{A_1C_a}} = \frac{\overrightarrow{PK_b}}{\overrightarrow{A_1C_b}} = \frac{\overrightarrow{PK_c}}{\overrightarrow{A_1C_c}} = t;$$

Звідси маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} p - k = -t, \\ -k + 1 = t, \\ p = t; \end{cases}$$

$t - k = -t;\ -k + 1 - k = k - 1; -3k = -2; k = \dfrac{2}{3}; t = \dfrac{1}{3}.$

Отже, прямі PK і A_1C відносяться у відношенні, як $\frac{1}{3}$.

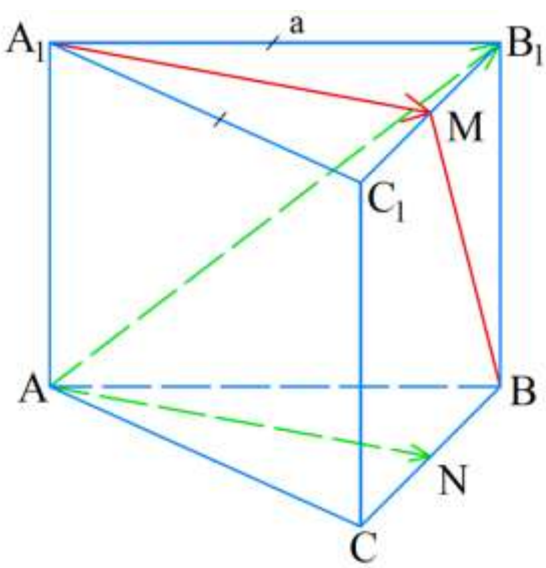
Відповідь: $\frac{1}{3}$.

1.6. Метричні задачі

Метричні задачі – задачі знаходження довжини відрізка і міри кута, тому в процесі їх розв'язування використовують крім лінійних операцій скалярний добуток векторів. За допомогою векторів надзвичайно ефективно описуються такі фундаментальні геометричні поняття, як кут, паралельність та перпендикулярність геометричних образів.

Задачі на знаходження скалярного добутку

Задача 2.7 [5] (23.32). Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник зі стороною a. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини її основи. Точка M – середина ребра B_1C_1. Знайдіть скалярний добуток векторів: 1) $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{A_1M}$; 2) $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{A_1M}$.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма;

$\triangle ABC -$ правильний трикутник;

$AB = BC = AC = a;\ AA_1 \perp (ABC)$;

$M \in B_1C_1,\ B_1M = C_1M.$

Знайти: $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1M},\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{A_1M}.$

Розв'язання

1) Так як вектори $\overrightarrow{A_1M}$ і $\overrightarrow{AN}$ паралельні і рівні по модулю, то кут між векторами $\overrightarrow{AB_1}$ та $\overrightarrow{A_1M}$ дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{AN}$ та $\overrightarrow{AB_1}$:

$$\angle\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{A_1M}\right) = \angle\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB_1}\right);$$

Звідси випливає, що скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{A_1M}$ можна замінити на скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AN}$. Запишемо:

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}\right) \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN};$

Так як $\overrightarrow{AA_1} \perp (ABC)$, то $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{AN}$, звідси випливає, що скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ та $\overrightarrow{AN}$ дорівнює 0.

$AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, так як AN висота правильного трикутника ABC;

Маємо:

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AN}\right| \cdot \cos(\angle NAB) = a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot cos30° =$

$= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^2}{4};$

Отже, шуканий скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB_1}$ та $\overrightarrow{A_1M}$ дорівнює $\frac{3a^2}{4}$.

$$2)\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{A_1M} = \left(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M}\right) \cdot \overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{A_1M}$$

Так як $\overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{A_1M}$, то $\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0$, та $\overrightarrow{B_1M} \perp \overrightarrow{A_1M}$, то $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{A_1M}$ також дорівнює 0. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0.$$

Відповідь: 1) $\frac{3a^2}{4}$; 2) 0.

Задача 2.8 [8]. $DABC$ −правильний тетраедр з ребром 1, P - середина ребра AC. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PD}$.

Розв'язання. Правильний тетраедр -це піраміда, у якого всі грані – правильні трикутники. Довжини всіх ребер дорівнюють 1, а всі кути по 60°.

$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

Обчислимо скалярний добуток

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

Оскільки $\angle\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) = 120^{\circ}$, то маємо:

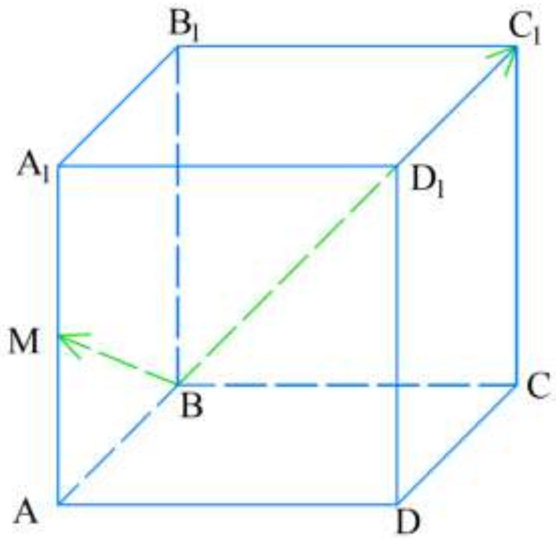
$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PD} = 1 \cdot 1 \cdot cos120^0$$

$$-\frac{1}{2}1 \cdot 1cos120^{\circ} = -\frac{1}{4}$$

Відповідь: $-0{,}25$.

Задачі на знаходження величини кута

Задача 2.9 [5] (23.34). Точка M – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими BM і BC_1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ − куб;

$M \in AA_1, \qquad AM = A_1M.$

Знайти: $\angle(BM, BC_1)$.

Розв’язання

За базис $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BB_1})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ у базисі $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BB_1})$.

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}, \qquad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1};$$

Знайдемо скалярний добуток і модулі векторів $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{BM} = \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+$$

$$+\overrightarrow{BB_1}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BA};$$

Так як вектори $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}\perp\overrightarrow{BA}$, то їх скалярний добуток відповідно дорівнює 0. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}^2 = \frac{1}{2}a^2, \text{де } \left|\overrightarrow{BB_1}\right| = a;$$

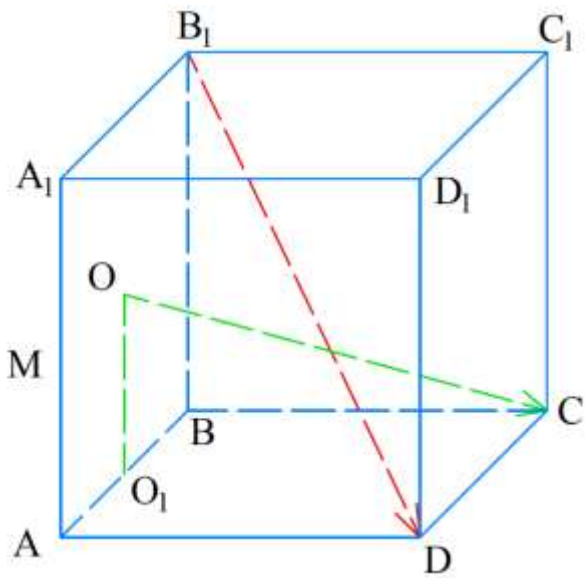
За теоремою Піфагора знаходимо BC_1 та BM:

$$\left|\overrightarrow{BC_1}\right| = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}, \left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$\cos\angle\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC_1}\right) = \frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$; Таким чином, шуканий кут дорівнює $\angle\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC_1}\right) = arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Відповідь: $arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Задача 2.10 [5] (23.35). Точка O – центр грані AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими OC і B_1D.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб;

$O\in(AA_1B_1)$, $\quad AB_1\cap A_1B = O$.

Знайти: $\angle(OC, B_1D)$.

Розв'язання

За базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BB_1})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{B_1D}$ у базисі $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BB_1})$.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{O_1C} - \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1};$$

$$\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1};$$

Знайдемо скалярний добуток і модулі векторів $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{B_1D}$:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{B_1D} = \left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}\right) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}^2 -$$

$$-\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BA} -$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}^2.$$

Так як вектори $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{BC}$, то їх скалярний добуток відповідно дорівнює 0. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{BC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}^2;$$

Будемо вважати, що ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a, тоді:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{B_1D} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2;$$

За теоремою Піфагора знаходимо OC та B_1D:

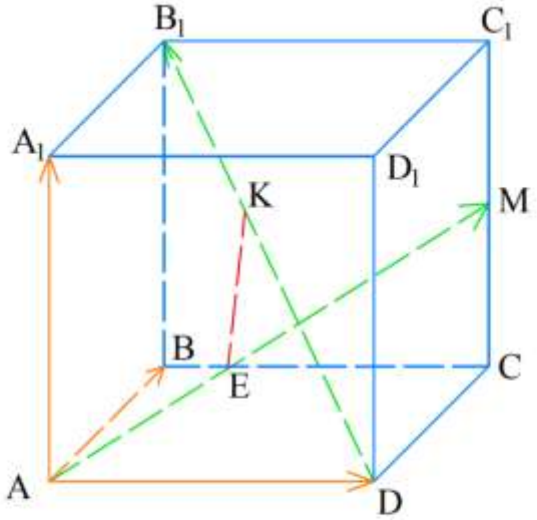
$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2) + \tfrac{1}{4}a^2} = \sqrt{\tfrac{6}{4}a^2} = \tfrac{a\sqrt{6}}{2};\ \left|\overrightarrow{B_1D}\right| = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3};$$

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{B_1D}\right) = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{B_1D}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{B_1D}\right|} = \frac{a^2}{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{18}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

Таким чином, шуканий кут дорівнює $\angle(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{B_1D}) = arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Відповідь: $arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 2.11 [5] (23.48). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см. Точка M – середина ребра CC_1. Знайдіть кут і відстань між прямими AM і DB_1.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб;

$AB = 1$ см;

$M \in CC_1,\ CM = C_1M$.

Знайти: $\angle(AM, DB_1),\ \rho(AM, DB_1)$.

Розв'язання

За базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA_1})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{DB_1}$ у базисі $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA_1})$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{DB_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1};$$

Знайдемо скалярний добуток і модулі векторів $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{DB_1}$. Маємо:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DB_1} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\left(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}\right) = -\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} +$$

$$+\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = -1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{2+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2};\ \left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3};$$

Позначимо через φ кут між векторами $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{DB_1}$. Тоді $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{DB_1}|}$;

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9};$$

Таким чином, шуканий кут дорівнює $arc\cos\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Нехай відрізок KE – спільний перпендикуляр прямих AM і DB_1. Звідси можна записати, що: $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{KD}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{DB_1}$ та вектор $\overrightarrow{AE}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{AM}$, існують такі числа x і y, що $\overrightarrow{KD} = -x\overrightarrow{DB_1}$ і $\overrightarrow{AE} = y\overrightarrow{AM}$. Отримуємо: $\overrightarrow{KE} = -x\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AM} =$

$$= -x\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AA_1}\right) - \overrightarrow{AD} + y\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right) = -x\left(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\right) - \overrightarrow{AD} +$$

$$+y\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right) = x\overrightarrow{AD} - x\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + \frac{y}{2}\overrightarrow{AA_1} =$$

$$= \overrightarrow{AD}(x-1+y) + \overrightarrow{AB}(y-x) + \overrightarrow{AA_1}\left(\frac{y}{2} - x\right);$$

$$\overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{DB_1} = 0;$$

$$(\overrightarrow{AD}(x-1+y) + \overrightarrow{AB}(y-x) + \overrightarrow{AA_1}\left(\tfrac{y}{2} - x\right))\left(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{y-2x}{2}\right) + (y-x) + (1-x-y) = y - 2x + 2y - 2x + 2 - 2x - 2y = 0;$$

$$y - 6x = -2;$$

$$\overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{AM} = 0;$$

$$(\overrightarrow{AD}(x-1+y) + \overrightarrow{AB}(y-x) + \overrightarrow{AA_1}\left(\tfrac{y}{2} - x\right))\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right) =$$

$= (x - 1 + y) + (y - x) + \left(\frac{y - 2x}{4}\right) = x - 1 + y + y - x + \frac{y}{4} - \frac{x}{2};$

$\frac{9y}{4} - \frac{x}{2} = 1;$

Отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - 6x = -2, \\ 9y - 2x = 4. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо, що $x = \frac{11}{26},\ y = \frac{7}{13}$.

Тепер розкладемо вектор $\overrightarrow{KE}$ за базисом $(\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AA_1})$.

$\overrightarrow{KE} = -\frac{1}{26}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{26}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{26}\overrightarrow{AA_1};\ \overrightarrow{KE}^2 = \frac{1}{676} + \frac{9}{676} + \frac{16}{676} = \frac{26}{676};$

Звідси $\left|\overrightarrow{KE}\right| = \frac{\sqrt{26}}{26}$.

Відповідь: $arc\cos\frac{\sqrt{3}}{9},\ \frac{\sqrt{26}}{26}$.

Задача 2.12 [8]. Медіани, проведені до сторін AB і AC трикутника ABC взаємно перпендикулярні. Доведіть, що кут між цими сторонами менший за 45°.

Доведення

1) Кут A трикутника ABC збігається з кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$

2) Кут $\angle BKA > 90^\circ$ як зовнішній кут $\Delta\, MKC$ Тоді з ΔABK маємо, що кут A – гострий

3) Позначимо вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c},\ \overrightarrow{AC} = \vec{b},\ \overrightarrow{CB} = \vec{a}$. Точки P і K ділять відрізки AB і AC навпіл. Тому:

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\vec{b} + \vec{a}\right)$$

$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}(-\vec{c} - \vec{a})$.

4) Враховуючи, що $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK}$

$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(-2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}(-2\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(5\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b}^2 - 2\vec{c}^2)$.

За умовою $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{BK}$. Тоді $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$

$$(5\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b}^2 - 2\vec{c}^2) = 0$$

$$(5|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| cosA - 2\vec{b}^2 - 2\vec{c}^2) = 0.$$

Отже,

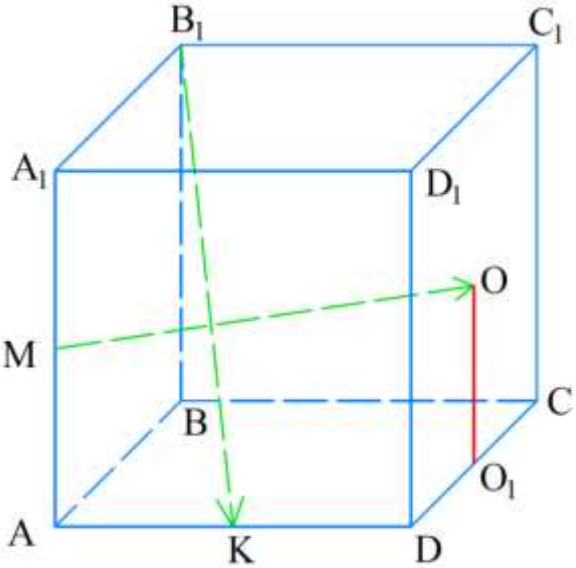
$$cosA = \frac{2}{5}\frac{\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2}{\vec{b} \cdot \vec{c}} = \frac{2}{5}\left(\frac{\vec{b}}{\vec{c}} + \frac{\vec{c}}{\vec{b}}\right) \geq \frac{4}{5}.$$

Середнє арифметичне двох додатних чисел не більше за їхне середнє геометричне.

Маємо: $cosA \geq \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тоді $cosA > cos45^\circ$. На проміжку від до більшому куту відповідає менше значення функції, тому $\angle A < 45^\circ$. ■

Задачі на доведення перпендикулярності відрізків та прямих

Задача 2.13 [5] (23.36). Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M і K – відповідно середини ребер AA_1 і AD, точка O – центр грані CC_1D_1D. Доведіть, що прямі B_1K і MO перпендикулярні.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб;

$O \in (CC_1D_1)$, $DC_1 \cap D_1C = O$;

$M \in AA_1$, $AM = A_1M$.

$K \in AD$, $AK = KD$.

Довести: $B_1K \perp MO$.

Доведення

$OO_1 \perp DC$; $DO_1 = O_1C$;

За базис $(\vec{a},\ \vec{b},\vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AA_1})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{B_1K}$ і $\overrightarrow{MO}$ у базисі $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AA_1})$.

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO_1} + \overrightarrow{O_1O} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} +$$

$$+\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{B_1K} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{B_1K} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} -$$

$$-\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2;$$

Так як вектори $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB},$ то їх скалярний добуток відповідно дорівнює 0. Отже, маємо:

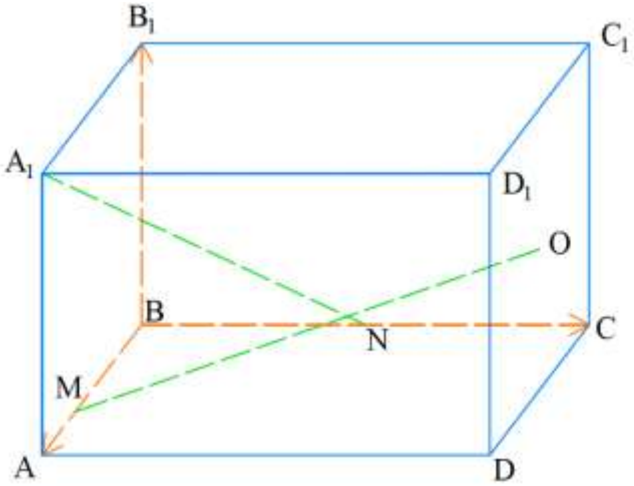
$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{B_1K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2;$$

Будемо вважати, що ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a, тоді:

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{B_1K} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0;$$

Якщо скалярний добуток векторів дорівнює 0, то вектори $\overrightarrow{MO}$ та $\overrightarrow{B_1K}$ перпендикулярні.

Доведено.



Задача 2.14 [5] (23.40). Ребра $AB,\ AD$ і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відносяться як $3:1:2$. На ребрах AB і BC і відповідно позначили точки M і N так,

що $AM{:}\,MB = 1{:}\,2$ і $BN{:}\,NC = 1{:}\,1$. Точка O -центр грані CC_1DD_1. Доведіть, що прямі MO і A_1N перпендикулярні.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1 -$ паралелепіпед; $AB{:}\,AD{:}\,AA_1 = 3{:}\,1{:}\,2$;

$M \in AB, \qquad N \in BC$;

$AM{:}\,MB = 1{:}\,2$; $BN{:}\,NC = 1{:}\,1$;

O -центр грані CC_1DD_1.

Довести: $MO \perp A_1N$.

Доведення

За базис $\left(\vec{a},\ \vec{b},\vec{c}\right)$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BB_1})$. Тоді наступні точки мають відповідні координати:

$A_1(3;0;2), \qquad N\left(0;\frac{1}{2};0\right), \qquad O(1{,}5;1;1), \qquad M(2;0;0)$;

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{A_1N}$ та $\overrightarrow{MO}$:

$$\overrightarrow{A_1N}\left(0-3;\frac{1}{2}-0;0-2\right) = \overrightarrow{A_1N}(-3;0{,}5;-2);$$

$$\overrightarrow{MO}(1{,}5-2;1-0;1-0) = \overrightarrow{MO}(-0{,}5;1;1);$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{A_1N}$ і $\overrightarrow{MO}$:

$$\overrightarrow{A_1N}\cdot\overrightarrow{MO} = 1{,}5+0{,}5-2 = 0$$

Якщо скалярний добуток векторів дорівнює 0, то вектори $\overrightarrow{A_1N}$ та $\overrightarrow{MO}$ перпендикулярні.

Доведено.

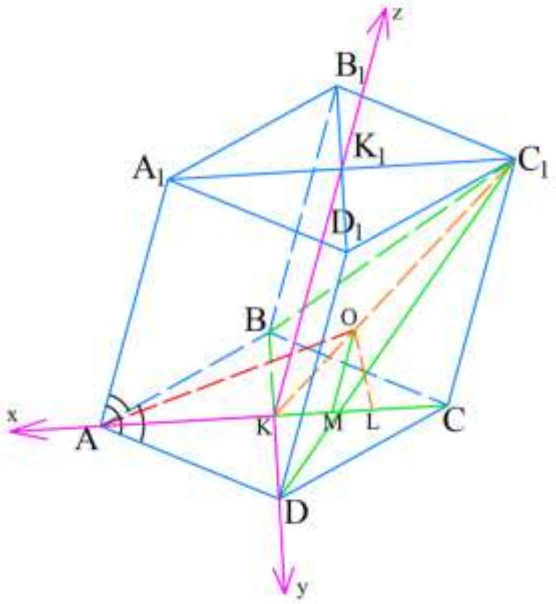
Задачі на знаходження відстані між мимобіжними прямими

Задача 2.15 [5] (23.41). Усі грані чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромбами. Відомо, що $AB = 3$ см, $\angle DAB = \angle DAA_1 = \angle BAA_1 = 60^\circ$. Знайдіть відстань від точки А до точки перетину медіан трикутника BC_1D.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - призма; $ABCD -$ ромб; $AB = AD = AA_1 = 3$ см;

$\angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{DAA_1} = \angle \mathrm{BAA_1} = 60^\circ$.

Знайти: AO.



Розв'язання

За теоремою косинусів знаходимо AC в трикутнику ABC:

$\angle \mathrm{DAB} = 60^\circ$, тоді $\angle ABC = 120^\circ$;

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$;

$AC = \sqrt{9 + 9 - 2 \cdot 9 \cdot (-0{,}5)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ см; $AK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ см;

За теоремою косинусів знаходимо BD в трикутнику ABD:

$\angle \mathrm{DAB} = 60^\circ$, тоді $\angle ABC = 120^\circ$;

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle DAB$;

$AC = \sqrt{9 + 9 - 2 \cdot 9 \cdot 0{,}5} = \sqrt{9} = 3$ см; $KD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{3}{2}$ см;

За базис $(\vec{a},\ \vec{b},\vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{KA};\ \overrightarrow{KD};\ \overrightarrow{KK_1})$. Тоді наступні точки мають відповідні координати:

$K(0;0;0)$; так як координати вектора $\overrightarrow{AK}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, то координати точки

$A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $O(x;0;z)$;

DC_1 знаходимо за теоремою косинусів в трикутнику DCC_1:

$DC_1{}^2 = DC^2 + CC_1{}^2 - 2DC \cdot CC_1 \cdot \cos\angle DCC_1$;

$DC_1 = \sqrt{9+9-2\cdot 9\cdot(-0{,}5)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ см;

За теоремою Піфагора знаходимо KC_1:

$$\left|\overrightarrow{KC_1}\right| = \sqrt{27-\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{27\cdot 4-9}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2}\ \text{см};\ KO = \frac{1}{3}KC_1 = \frac{\sqrt{11}}{2}\ \text{см};$$

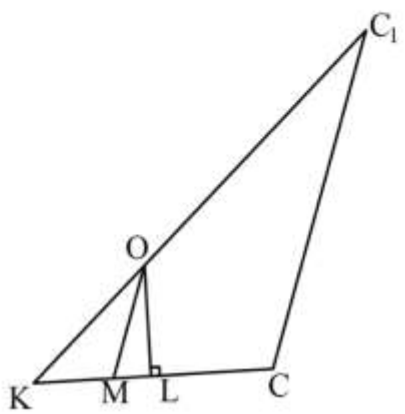
Розглянемо $\triangle KCC_1$ проведемо через точку O пряму паралельну CC_1: $OM \parallel CC_1$.

$$OM = \frac{1}{3}CC_1 = 1\ \text{см};\ KM = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{см};\ x^2+z^2 = \frac{11}{4};$$

В $\triangle OKM$ за теоремою косинусів:

$$OM^2 = OK^2 + KM^2 - 2OK\cdot KM\cdot\cos\angle OKL;\ \cos\angle OKL = \frac{OK^2+KM^2-OM^2}{2OK\cdot KM}$$

$$\cos\angle OKL = \frac{\frac{11}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{\sqrt{33}}{2}} = \frac{10}{2\sqrt{33}} = \frac{5}{\sqrt{33}};$$



В $\triangle OKL$: $\angle OLK = 90°$; $OL = KO \sin \angle OKL$;

$$\sin \angle OKL = \sqrt{1 - cos^2 \angle OKL} = \sqrt{1 - \frac{25}{33}} = \sqrt{\frac{8}{33}} = \frac{2\sqrt{66}}{33};$$

$$OL = \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{66}}{33} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ см}; \Rightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

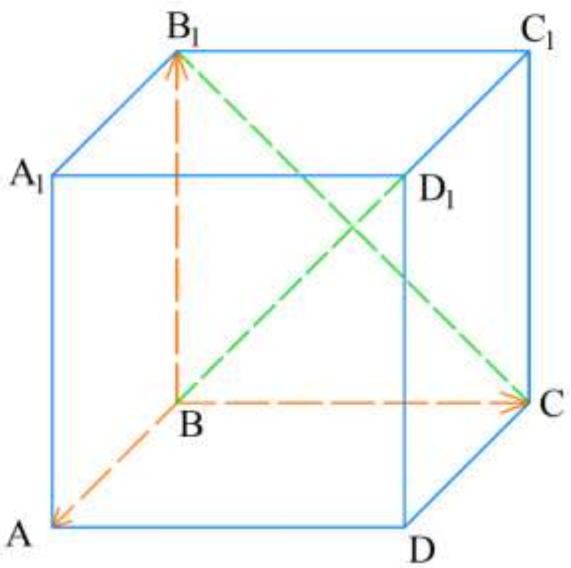
$x = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{99-24}{36}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$; $\Rightarrow$ Точка O має такі координати:

$$O\left(-\frac{5\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{\sqrt{6}}{3}\right);$$

$$|AO| = \sqrt{\left(\frac{-5\sqrt{3}}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0 + \frac{6}{9}} = \sqrt{17}\text{см}.$$

Відповідь: $\sqrt{17}$см.

Задача 2.16 [5] (23.44). Ребра AB і BC прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють відповідно 1см і $\sqrt{7}$см. Кут між прямими CB_1 і BD_1 дорівнює $45°$. Знайдіть ребро AA_1.



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - паралелепіпед;

$ABCD$- прямокутник;

$AB = 1$см; $BC = \sqrt{7}$см;

$\angle(CB_1; BD_1) = 45°$.

Знайти: AA_1.

Розв'язання

За базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB_1})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{BD_1}$ у базисі $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB_1})$.

$$\overrightarrow{CB_1} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1};\ \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$$

Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{BD_1}$:

$$\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BD_1} = \left(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right) = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BB_1} +$$

$$+\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}^2;$$

Так як вектори $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{BC},$ то їх скалярний добуток відповідно дорівнює 0. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1}^2 - \overrightarrow{BC}^2;$$

Будемо вважати, що $\overrightarrow{BB_1}^2$ дорівнює t, тоді:

$$\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BD_1} = t - \overrightarrow{BC}^2 = t - 7;$$

Знайдемо модулі векторів $\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{BD_1}$ за теоремою Піфагора знаходимо:

$$\left|\overrightarrow{CB_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|^2;\ \left|\overrightarrow{BD_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|^2;$$

$$\left|\overrightarrow{CB_1}\right|^2 = 7 + t;\ \left|\overrightarrow{BD_1}\right|^2 = 1 + 7 + t = 8 + t;$$

$$\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BD_1} = \left|\overrightarrow{CB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD_1}\right| \cdot \cos\alpha;$$

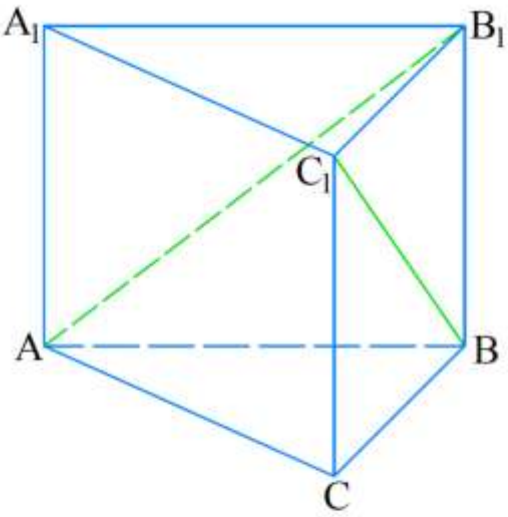
$$(t - 7) = \sqrt{(t + 7)}\sqrt{(t + 8)}\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2(t^2 - 14t + 49) = (t + 8)(t + 7);$$

$$2t^2 - 28t + 98 = t^2 + 15t + 56;\ t^2 - 43t + 42 = 0;$$

$$\begin{cases} t = 42 \\ t = 1 \end{cases};\ \begin{cases} BB_1 = \sqrt{42}\ \text{см} \\ BB_1 = 1\ \text{см} \end{cases};$$

Відповідь: $BB_1 = \sqrt{42}$ см; $BB_1 = 1$ см.

Задача 2.17 [5] (23.45). Основою трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник зі стороною a. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи. Кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює $arccos\frac{1}{4}$. Знайти бічне ребро призми.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - призма.

$\triangle ABC$ –рівносторонній трикутник;

$AB = a$; $AA_1 \perp (ABC)$;

$\angle(AB_1; BC_1) = arccos\frac{1}{4}$.

Знайти: AA_1.

Розв’язання

За базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AA_1})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ у базисі $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AA_1})$.

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1};\ \overrightarrow{BC_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1};$$

Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$:

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\right)\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) = -\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} +$$

$$+\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1}^2;$$

Так як вектори $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{AC}$, то їх скалярний добуток відповідно дорівнює 0. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AA_1}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos 60°;$$

Будемо вважати, що $\overrightarrow{AA_1}^2$ дорівнює x, тоді:

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=x-a^2+\frac{a^2}{2}=x-\frac{a^2}{2};$$

Знайдемо модулі векторів $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ за теоремою Піфагора:

$$\left|\overrightarrow{AB_1}\right|=\sqrt{a^2+x};\ \left|\overrightarrow{BC_1}\right|=\sqrt{a^2+x};$$

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\cos\alpha;$$

$$x-\frac{a^2}{2}=\sqrt{a^2+x}\cdot\sqrt{a^2+x}\cdot\frac{1}{4};\ 4x-2a^2=a^2+x;3x=3a^2;x=a^2;$$

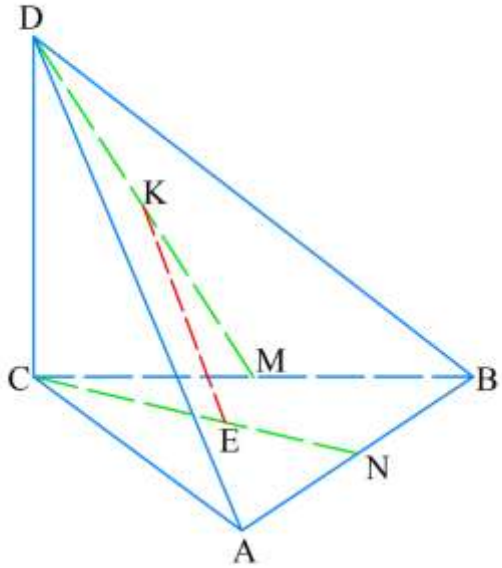
Отже, маємо, що $\overrightarrow{AA_1}^2=a^2,\ AA_1=a$. Або:

$$-4x+2a^2=a^2+x,\qquad 5x=a^2;x=\frac{a^2}{5};\ AA_1=\sqrt{\frac{a^2}{5}}=\frac{\sqrt{5}a}{5}.$$

Відповідь: $AA_1=\frac{a\sqrt{5}}{5}$ або $AA_1=a$.

Раніше учні були знайоми з кількома прийомами розв'язування задачі на пошук відстані та кута між мимобіжними прямими. В наступних задачах показано, як можна застосувати вектори для розв'язання таких задач.

Задача 2.18 [5] (23.49). Основою тетраедра $DABC$ є рівносторонній трикутник ABC Ребро DC перпендикулярне до площини ABC. Точки M і N - середини ребер BC і AB відповідно. Знайдіть кут і відстань між прямими DM і CN, якщо відомо, що $AB=4$ см, $DC=\sqrt{2}$ см.



Дано: DABC – тетраедр;

$\triangle ABC$- рівносторонній трикутник; $DC\perp(ABC)$;

$M\in BC, BM=CM,\qquad N\in AB, AK=KB;$

$AB=4$ см, $\qquad DC=\sqrt{2}$ см.

Знайти: $\angle(DM, CN), \rho(DM, CN)$.

Розв'язання

Знайдемо модулі векторів DM і CN за теоремою Піфагора:

$\left|\overrightarrow{DM}\right| = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$ см; $\left|\overrightarrow{CN}\right| = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ см

За базис $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CD})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{CN}$ у базисі $(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CD})$.

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right);$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB};$$

Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{CN}$ і $\overrightarrow{DM}$:

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{DM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\left(-\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} -$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2 = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos\alpha + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2;$$

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\left(16\cdot\frac{1}{2} + 16\right) = 6;$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{CN}|\cdot|\overrightarrow{DM}|} = \frac{6}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{18}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \beta = arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

Таким чином, між прямими DM і CN дорівнює 45°.

Нехай відрізок KE – спільний перпендикуляр прямих DM і CN. Звідси можна записати, що: $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{KD}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{DM}$ та вектор $\overrightarrow{CE}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{CN}$, існують такі числа x і y, що $\overrightarrow{KD} = -x\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{CE} = y\overrightarrow{CN}$. Отримуємо: $\overrightarrow{KE} = -x\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CN}$.

За базис $\left(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right)$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CD})$. Розкладемо вектор $\overrightarrow{KE}$ у базисі $(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CD})$.

$$\overrightarrow{KE} = -x\left(-\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CD} + y(\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}) = -x\left(-\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CD} +$$

$$+y(\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}) = -x\left(-\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CD} + \frac{y}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{y}{2}\overrightarrow{CB} = x\overrightarrow{CD} - \frac{x}{2}\overrightarrow{CB} -$$

$$-\overrightarrow{CD} + \frac{y}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{y}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}\left(\frac{y-x}{2}\right) + \overrightarrow{CD}(x-1) + \frac{y}{2}\overrightarrow{CA};$$

$$\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{DM} = 0;$$

$$\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{DM} = \left(\overrightarrow{CB}\left(\frac{y-x}{2}\right) + \overrightarrow{CD}(x-1) + \frac{y}{2}\overrightarrow{CA}\right)\left(-\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}\left(\frac{y-x}{2}\right) + \overrightarrow{CB}^2\left(\frac{y-x}{4}\right) - \overrightarrow{CD}^2(x-1) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}(x-1) -$$

$$-\frac{y}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \frac{y}{4}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 16\left(\frac{y-x}{4}\right) - 2(x-1) + \frac{8y}{4} = 4y - 4x - 2x + 2 +$$

$$+2y = 6y - 6x + 2 = 0;\ 3y - 3x = -1;$$

$$\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{CN} = 0;$$

$$\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{CN} = \left(\overrightarrow{CB}\left(\frac{y-x}{2}\right) + \overrightarrow{CD}(x-1) + \frac{y}{2}\overrightarrow{CA}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\left(\frac{y-x}{4}\right) + \overrightarrow{CB}^2\left(\frac{y-x}{4}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}(x-1) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}(x-1) +$$

$$+\frac{y}{4}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{y}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2(y-x) + 4(y-x) + 4y + 2y = 6y - 6x + 6y =$$

$$= 12y - 6x = 0;\ 12y = 6x; 2y = x;$$

Отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3y - 3x = -1, \\ 2y = x. \end{cases}$$

Розв’язавши її, отримаємо, що $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3}$.

$$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CB}\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{2}\right) + \overrightarrow{CD}\left(\frac{2}{3}-1\right) + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA};$$

Звідси вектор $\overrightarrow{KE}$ має такі координати в базисі $(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CD})$:

$$\overrightarrow{KE}\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right);$$

$$|\overrightarrow{KE}| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

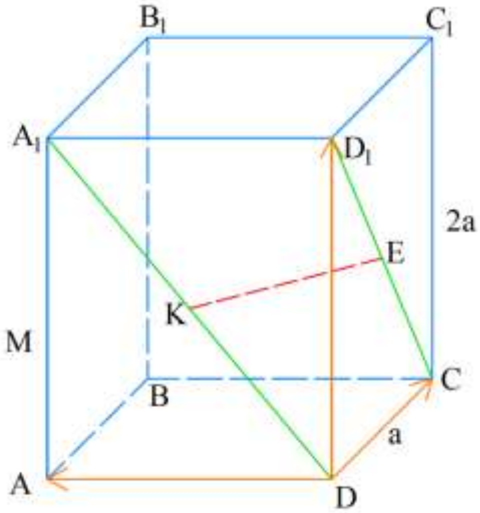
Відповідь: 45°, $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Задача 2.19 [5] (23.50). Основою чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною a. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи та дорівнює $2a$. Знайдіть кут і відстань між прямими DA_1 і CD_1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма;

$ABCD -$ квадрат; $AB = a$; $AA_1 = 2a$.

Знайти: $\angle(DA_1, CD_1), \rho(DA_1, CD_1)$.



Розв’язання

За базис $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{DD_1};\ \overrightarrow{DC})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{DA_1}$ і $\overrightarrow{CD_1}$ у базисі $(\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{DD_1};\ \overrightarrow{DC})$.

$\overrightarrow{DK} = x\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{CE} = y\overrightarrow{CD_1};$

$\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1};\ \overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1};$

Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{DA_1}$ і $\overrightarrow{CD_1}$:

$\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{CD_1} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1}\right)\left(-\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}\right) = -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{DC} +$

$+\overrightarrow{DD_1}^2;$

Так як вектори $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DD_1},\ \overrightarrow{DD_1} \perp \overrightarrow{DC},$ то їх скалярний добуток відповідно дорівнює 0. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{DD_1}^2 = 4a^2;$$

За теоремою Піфагора знаходимо DA_1 та CD_1:

$\left|\overrightarrow{DA_1}\right| = \left|\overrightarrow{CD_1}\right| = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5};$

Знайдемо кут між векторами $\overrightarrow{DA_1}$ та $\overrightarrow{CD_1}$ за формулою:

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{CD_1}}{\left|\overrightarrow{DA_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD_1}\right|} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5};$$

Таким чином, між прямими DA_1 та CD_1 дорівнює $\arccos\frac{4}{5}$.

$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = -x\overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CD_1} = -x\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1}\right) + \overrightarrow{DC} +$

$+y\left(-\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}\right) = -x\overrightarrow{DA} - -x\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC} - y\overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DD_1} = -x\overrightarrow{DA} +$

$+\overrightarrow{DC}(1-y) + \overrightarrow{DD_1}(y-x);$

Відрізок KE – спільний перпендикуляр прямих DA_1 і CD_1.

$$\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0;$$

$$\left(-x\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}(1-y) + \overrightarrow{DD_1}(y-x)\right)\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1}\right)$$
$$= -x\overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}(1-y) +$$

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DD_1}(y-x)-x\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{DC}(1-y)+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}(y-x)=$$

$$=-x\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{AA_1}^2(y-x)=-xa^2+4a^2(y-x)=4a^2y-5a^2x=0;\ 4y=5x;$$

$$\overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{CD_1}=0;$$

$$\left(-x\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}(1-y)+\overrightarrow{DD_1}(y-x)\right)\left(-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA_1}\right)=$$

$$\begin{aligned}&=x\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}^2(1-y)-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DD_1}(y-x)-x\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{DC}(1-y)\\&\qquad+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}(y-x)=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}(y-x)-\overrightarrow{DC}^2(1-y)\\&\qquad=4a^2(y-x)-a^2(1-y)=5a^2y-4a^2x-a^2=0;5y-4x=1;\end{aligned}$$

Отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}4y=5x,\\5y-4x=1.\end{cases}$$

Розв’язавши її, отримаємо, що $x=\frac{4}{9},\ y=\frac{5}{9}$.

$$\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{DA}\left(-\frac{4}{9}\right)+\overrightarrow{DC}\left(1-\frac{5}{9}\right)+\overrightarrow{DD_1}\left(\frac{5}{9}-\frac{4}{9}\right)=-\frac{4}{9}\overrightarrow{DA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{DD_1}=$$

$$=-\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{a};$$

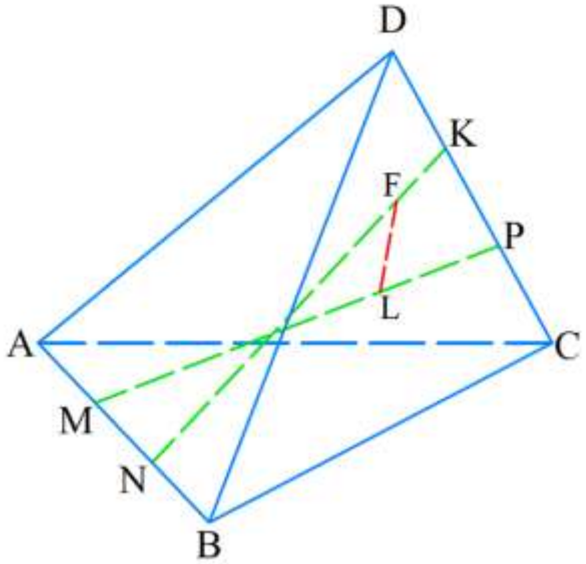
Звідси вектор $\overrightarrow{KE}$ має такі координати в базисі $(\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{DD_1};\ \overrightarrow{DC})$:

$$\overrightarrow{KE}\left(-\frac{4a}{9};\frac{2a}{9};\frac{4a}{9}\right);$$

$$\left|\overrightarrow{KE}\right|=a\sqrt{\frac{16}{81}+\frac{4}{81}+\frac{16}{81}}=a\sqrt{\frac{36}{81}}=\frac{6}{9}a=\frac{2}{3}a.$$

Відповідь: $\arccos\frac{4}{5},\ \frac{2}{3}a$.

Задача 2.20 [5] (23.51). Ребра AB іCD тетраедра $DABC$ перпендикулярні, кожне з них дорівнює 3 см. На ребрі AB позначили точки М і N, а на ребрі CD точки P і K так, що $AM = NB = CP = KD = 1$см. Знайдіть відстань між серединами відрізків MP і NK.



Дано: $DABC$ - тетраедр; $AB \perp CD$;

$M, N \in AB$; $P, K \in CD$;

$AM = NB = CP = KD = 1$см;

$AB = CD = 3$см;

$F \in NK, NF = FK, L \in MP, ML = LP$;

Знайти: FL.

Розв’язання

За базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC})$. Розкладемо вектори $\overrightarrow{MP}$ і $\overrightarrow{NK}$ у базисі $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC})$.

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC};$$

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} =$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC};$$

Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{MP}$ і $\overrightarrow{NK}$:

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NK} = \left(-\tfrac{2}{3}\overrightarrow{DA} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \tfrac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right);$$

$$\overrightarrow{NF} = x\overrightarrow{NK}, \overrightarrow{ML} = y\overrightarrow{MP};\ \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ML};\ \overrightarrow{FL} = -x\overrightarrow{NK} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{MP};$$

$$\overrightarrow{FL} = -x\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right) +$$

$$+y\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right);$$

$$\frac{x}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2x}{3}\overrightarrow{DB} - \frac{x}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{3}y\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}y\overrightarrow{DB} + \frac{2y}{3}\overrightarrow{DC};$$

$$\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{DA}\left(\frac{x-2y+1}{3}\right) + \overrightarrow{DB}\left(\frac{2x-y-1}{3}\right) + \overrightarrow{DC}\left(\frac{2y-x}{3}\right);$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{MP} = 0;\ x = y = \frac{1}{2};$$

$$\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{DA}\left(\frac{\frac{1}{2} - 1 + 1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{DB}\right) + \frac{1}{6}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DC};$$

$$\overrightarrow{FL}^2 = \left|\overrightarrow{FL}^2\right| = \frac{1}{36}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}\right)^2 = \frac{1}{36}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{36}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{1}{36}\overrightarrow{DC}^2;$$

Так як $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{DC}$, то їх скалярний добуток дорівнює 0. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{FL}^2 = \frac{1}{36}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{36}\overrightarrow{DC}^2 = \frac{1}{36}(9+9) = \frac{1}{2};\ \left|\overrightarrow{FL}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.7. Застосування векторів до розв'язування задач

Вектори можна застосувати не тільки в геометрії, а й при розв'язуванні алгебраїчних задач. Це зручно робити при доведенні нерівностей і знаходження найбільшого і найменшого значень функції або виразу.

Приклад 1. [1]. Довести, що для будь-яких дійсних чисел a_i, b_i, де $i \in \{1,2,3\}$, виконується нерівність:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

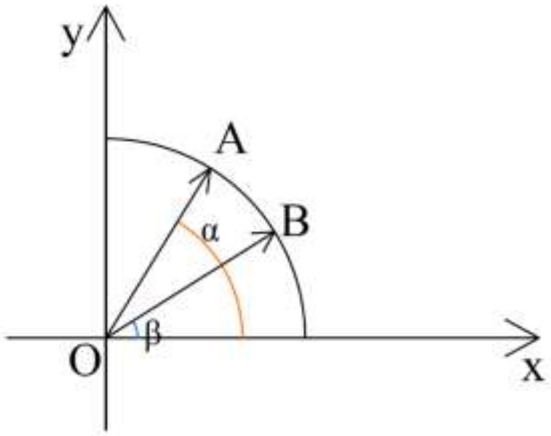
Розв'язання. Розглянемо вектори$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_2)$ Нехайα - кут між цими векторами. Тоді

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le |(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos\alpha \le |\vec{a}||\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

що й потрібно було довести.

Нерівність $|(\vec{a}, \vec{b})| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ називається нерівністю Коші - Буняковського.

Приклад 2. Довести, що $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.



Розв'язання. Розглянемо одиничні вектори $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{e_2}$. Оскільки $\overrightarrow{e_1} = \left(\cos\alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$,

$$\overrightarrow{e_2} = \left(\cos\beta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = (\cos\beta, \sin\beta)$$

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = |\overrightarrow{e_1}| \cdot |\overrightarrow{e_2}| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Отже,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Приклад 3. [1]. Доведіть нерівність $cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$, де A, B, C - кути трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - одиничні вектори, кожен з яких належить стороні трикутника ABC.

Маємо:$|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3| \geq 0$

тоді

$$3 + 2(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3) \geq 0,$$

$$\vec{e}_1\vec{e}_2 = 1 \cdot 1cos(\pi - B) = -\cos B, \quad \vec{e}_1\vec{e}_3 = -cosA, \quad \vec{e}_2\vec{e}_3 = -cosC.$$

Отже,

$$3 - 2(\cos A + cosB + cosC) \geq 0.$$

$$cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}. \ \blacksquare$$

Приклад 4. Доведіть нерівність

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12,$$

виконується при всіх значеннях a, при яких визначена его ліва частина.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x}(1; 1; 1)$ $\vec{y}\left(\sqrt{a+1}; \sqrt{2a-3}; \sqrt{50-3a}\right)$.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$$

$$\sqrt{\mathrm{a}+1} + \sqrt{2\mathrm{a}-3} + \sqrt{50-3\mathrm{a}} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\mathrm{a}+1) + (2\mathrm{a}-3) + (50-3\mathrm{a})} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Приклад 5. Довести нерівність

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Розв'язання:

$$\left|\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \le 1; \ \left|\frac{2x+2y-2x^2y-2y^2x}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \le 1;$$

$$\left|\frac{2x(1-y^2)+2y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \le 1;$$

$$\left|\frac{2x(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}+\frac{2y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \le 1;$$

Цей вираз є скалярним добутком двох векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$. Тоді:

$$\vec{e}_1\left(\frac{2x}{1+x^2};\frac{1-x^2}{1+x^2}\right); \qquad \vec{e}_2\left(\frac{1-y^2}{1+y^2};\frac{2y}{1+y^2}\right).$$

Знайдемо довжину кожного вектора

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = 1, \ |\vec{e}_2| = \sqrt{\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{1+y^2}\right)^2} = 1.$$

Знайдем скалярний добуток

$$|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2| = 1. \blacksquare$$

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 3sinx + 4cosx.$$

Розв'язання. Нехай $\vec{b}(3;4)$; $\vec{a}(\,sinx;cosx)$. Використовуємо нерівність:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 - \vec{a}^2\cdot\vec{b}^2 \le 0$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \le \vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|. \qquad (*)$$

Знаходимо довжину кожного вектора

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{sinx^2+cosx^2} = 1.$$

Підставимо в нерівність (*)

$$-5 \le 3sinx + 4cosx \le 5.$$

Відповідь: найбільше значення $f(x)$ дорівнює 5; найменьше значення функції дорівнює -5.

Приклад 7. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 8\sqrt{1-x} + 6\sqrt{x}$$

Розв'язання. Нехай $\vec{c}(\sqrt{1-x}; \sqrt{x})$; $\vec{d}(8; 6)$. Знайдемо довжину кожного вектора.

$$|c| = \sqrt{\sqrt{1-x}^2 + x} = 1. \left|\vec{d}\right| = \sqrt{64+36} = 10.$$

$$D\big(f(x)\big): 1 - x \ge 0, \quad x \le 1.$$

Найменше значення $f(x) = 6$, при $x = 1$, найбільше значення функції буде, коли вектори $\vec{c}, \vec{d}$ будуть колінеарні.

$$\frac{\sqrt{x}}{6} = \frac{\sqrt{1-x}}{8}$$

$36(1 - x) = 64x; \quad x = 0{,}36.$

$$f(0{,}36) = 8\sqrt{1-0{,}36} + 6\sqrt{0{,}36} = 10.$$

$$6 \le f(x) \le 10.$$

Відповідь: найменше значення функції дорівнює 6; найбільше значення функції дорівнює 10.

Приклад 8. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = \frac{5 + 24x - 5x^2}{x^2 + 1}.$$

Розв'язання.

$$f(x) = \frac{24x - 5(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = 12\frac{2x}{x^2 + 1} - 5\frac{(x^2 - 1)}{x^2 + 1}.$$

Маємо:

$$\vec{a}(12;-5); \qquad \vec{b}\left(\frac{2x}{x^2+1};\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).$$

Функція має вигляд:

$$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\alpha.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{144+25}=13; \quad |\vec{b}|=\sqrt{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}=1.$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|.$$

$$-13\le f(x)\le 13.$$

Відповідь: найменше значення функції дорівнює -13; найбільше значення функції дорівнює 13.

Приклад 9. [10]. Знайти найбільше значення функції

$$y=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}.+3\sqrt{2}.$$

Розв'язання. Перетворимо дану функцію

$$y=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}.+3\sqrt{2}=\sqrt{x}+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}+3\sqrt{2}.$$

і врахуємо, що її область визначення $D(y)=[0;2]$.

Розглянемо вектори $\vec{a}(1;2\sqrt{2};3)$; і $\vec{b}(\sqrt{x};\sqrt{2-x};\sqrt{2})$. Тоді дану функцію можна записати у вигляді $y=\vec{a}\cdot\vec{b}$, адже

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\sqrt{x}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x}+3\cdot\sqrt{2}$$

Оскільки

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+9}=3\sqrt{2},$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{x})^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2+2}=2,$$

$$y = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos\alpha = 6\sqrt{2}\ cos\alpha.$$

Тому найбільше значення функції дорівнює $6\sqrt{2}$ і досягається тоді, коли значення $cos\alpha$- найбільше, тобто якщо $cos\alpha = 1,\ \alpha = 0^{\circ}$.

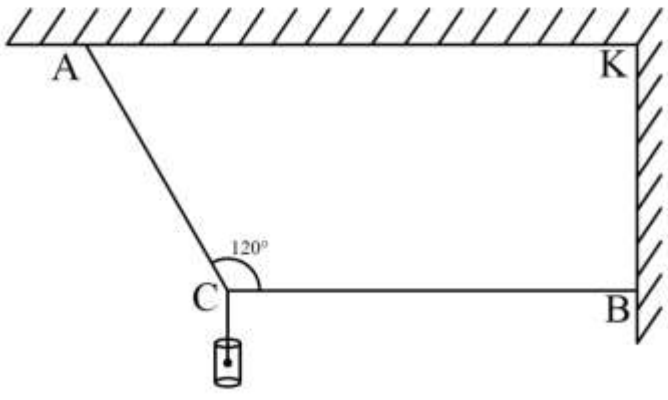
Знайдемо, при яких x функція набуває свого найбільшого значення. Оскільки $\alpha = 0^{\circ}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнапрямлені, тоді їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{ звідки } x = \frac{2}{9}.$$

Відповідь: найбільше значення функції дорівнює $6\sqrt{2}$ і досягає при $x = \frac{2}{9}$.

Фізика є наукою, яка поєднує вивчення скалярних та векторних величин. Розглянемо елементарні задачі з фізики.

Задача 2.21 [10]. До двох тросів, закріплених за схемою, зображеною на малюнку ($CB||AK$), в точці C підвішено вантаж масою 30 кг. Визначте сили натягу тросів.



Дано: $CB||AK$;

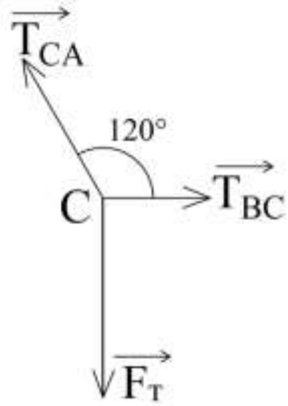
$m = 30$ кг; $\angle ACB = 120°$.

Знайти: T_{CA}; T_{CB}.

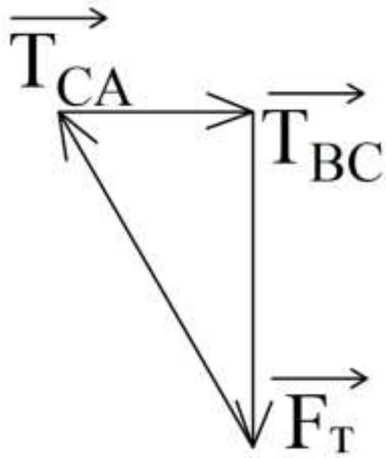
Розв'язання

У точці C діє три сили, сила тяжіння в точці $C - F_{т}$ від грузика масою 30 кг, $F_{т} = mg = 30 \cdot 10 = 300$ Н; силі натягу тросу СА $- T_{CA}$; і тросу С$B - T_{CB}$;. Задачу можна вирішити аналітично і графічно, розглянемо спочатку графічний метод.

Зазначимо на малюнку всі три сили:



Розв'яжемо задачу за правилом трикутника, відомо напрями всіх трьох векторів, початок першого невідомого вектора $\overrightarrow{T_{CB}}$ помістимо на кінець першого, а кінець другого невідомого вектора $\overrightarrow{T_{CA}}$ помістимо на початок першого:



Так як малюнок виконаний у масштабі, з малюнка ми знімаємо величину кожного невідомого вектора і знаходимо значення натягу тросів:

$$\overrightarrow{T_{CB}} = 173 \text{ Н}; \ \overrightarrow{T_{CA}} = 346 \text{ Н}.$$

Тепер розглянемо аналітичний метод. У нас також є три вектори, напрямки яких нам відомі. введемо систему координат через точку C. Запишемо рівняння умови рівноваги системи:

$$\overrightarrow{T_{CB}} + \overrightarrow{T_{CA}} + \overrightarrow{F_{\text{т}}} = 0;$$

Спроектуємо це рівняння на дві осі координат:

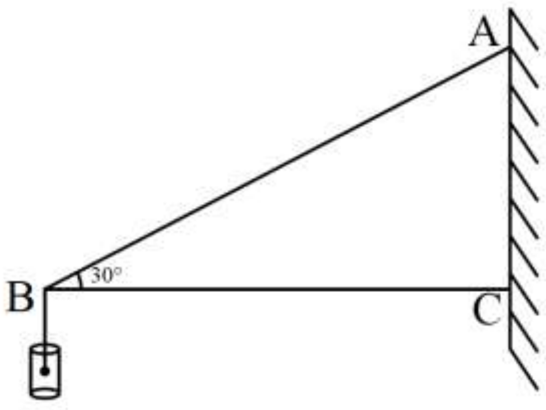
$$\begin{cases} T_{CB} - T_{CA}\cos 60° = 0; \\ T_{CA}\sin 60° - F_{\text{т}} = 0; \end{cases}$$

$$T_{CA} = \frac{F_{\text{т}}}{\sin 60°} = 346\text{ Н};\ T_{CB} = T_{CA}\cos 60° = 173\text{ Н}.$$

Отже, шукані величини векторів сил натягу найдені.

Відповідь: 173 Н; 346 Н.

Задача 2.22 [10]. Вантаж масою 6 кг підтримується двома стержнями AB та BC. Визначте зусилля, які виникають у стержнях, якщо $\angle C = 90°$, а $\angle C = 30°$.



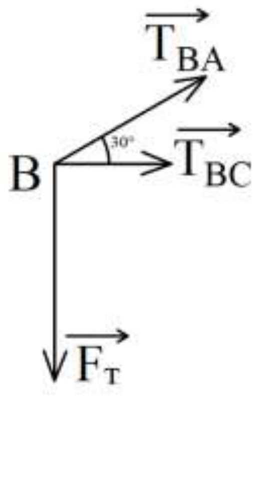
Дано: $m = 6$ кг; $\angle C = 60°$.

Знайти: T_{BA}; T_{BC}.

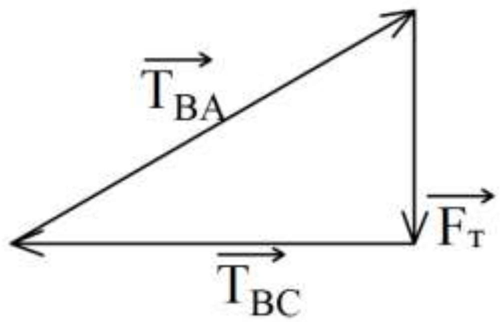
Розв'язання

У точці B діє три сили, одна відома, дві не відомі. Відома сила тяжіння в точці $C - F_{\text{т}}$ під діює грузика масою 6 кг, $F_{\text{т}} = mg = 6 \cdot 10 = 60$ Н; силі натягу тросу $BC - T_{BC}$; і тросу $BA - T_{BA}$;. Задачу можна вирішити аналітично і графічно, розглянемо другий варіант.

Зазначимо на малюнку всі три сили:



Розв'яжемо задачу, використовуючи правило трикутника. Відомо напрями всіх трьох векторів, початок першого невідомого вектора $\overrightarrow{T_{BC}}$ помістимо на кінець першого, а кінець другого невідомого вектора $\overrightarrow{T_{BA}}$ помістимо на початок першого:



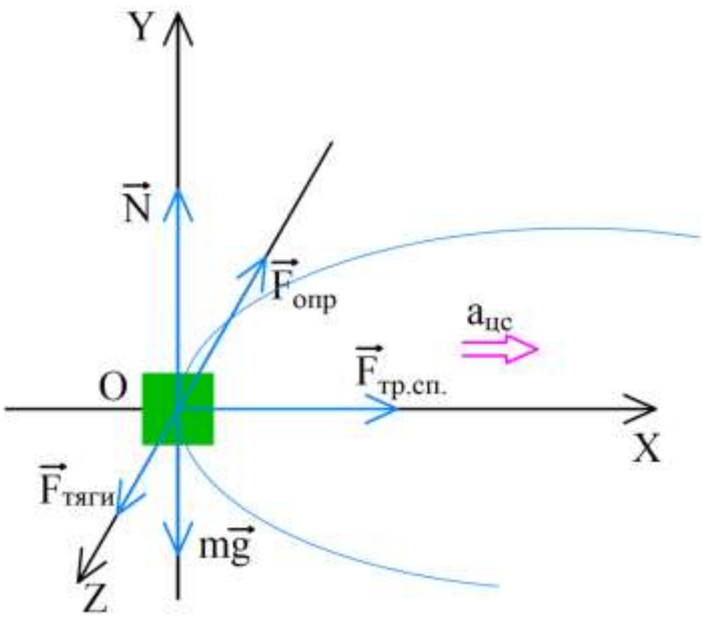
Так як малюнок виконаний у масштабі, з малюнка ми дізнаємо величину кожного невідомого вектора і знаходимо значення натягу тросів:

$$\overrightarrow{T_{BA}} = 120 \text{ Н}; \ \overrightarrow{T_{BC}} = -103 \text{ Н}.$$

Отже, шукані величини векторів сил натягу найдені.

Відповідь: 120 Н; -103 Н.

Задача 2.23 [10]. На горизонтальній дорозі автомобіль повинен зробити поворот радіусом 35 м. Яку найбільшу швидкість може розвинути автомобіль, аби вписатися в цей поворот? Коефіцієнт тертя ковзання шин об асфальт дорівнює 0,4.



Дано: $r = 35$ м; $\mu = 0{,}4$; $g = 10$ м/с^2.

Знайти: v_{max}.

Розв'язання

Автомобіль рухається по колу, отже, має відцентрове прискорення. На автомобіль діють п'ять сил: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила $\vec{N}$ нормальної реакції опори, сила тяги $\overrightarrow{F_{тяги}}$, сила опору $\overrightarrow{F_{опр}}$ и сила тертя спокою $\overrightarrow{F_{тр.спок.}}$, спрямована до центру кола і завдяки якому автомобіль може здійснити поворот.

Автомобіль «не впишеться» у поворот, якщо $\overrightarrow{F_{тр.спок.}}$ досягне максимального значення і «перейде» через тертя ковзання. Враховуючі, що $F_{тр.спок\, max} = \mu N$, где $\mu -$ коефіцієнт тертя ковзання.

На малюнку покажемо всі сили, що діють на автомобіль, напрями швидкості та прискорення руху. Пов'яжемо систему координат з тілом, вісь OY направимо перпендикулярно поверхні дороги, вісь OX - до центру повороту, вісь OZ - за напрямом руху.

Запишемо другий закон Ньютона у векторному вигляді:

$$\overrightarrow{F_{тяги}} + \vec{N} + m\vec{g} + \overrightarrow{F_{опр}} + \overrightarrow{F_{тр.спок.}} = m\overrightarrow{a_{ц}}.$$

Спроектуємо рівняння на осі координат; запишемо вираз для $F_{тр.спок.max}$ і формулу для доцентрового прискорення $a_ц$:

$$\begin{cases} OX: F_{тр.спок.} = ma_ц, \\ OY: N - mg = 0, \\ OZ: F_{тяги} - F_{опр.} = 0, \\ F_{тр.спок.max} = \mu N, \\ a_ц = \dfrac{v^2}{r}. \end{cases}$$

Вирішимо отриману систему лінійних рівнянь щодо v:

$$N = mg \Rightarrow F_{тр.спок.max} = \mu mg \Rightarrow \mu mg = ma_ц \Rightarrow \mu g = a_ц \Rightarrow$$

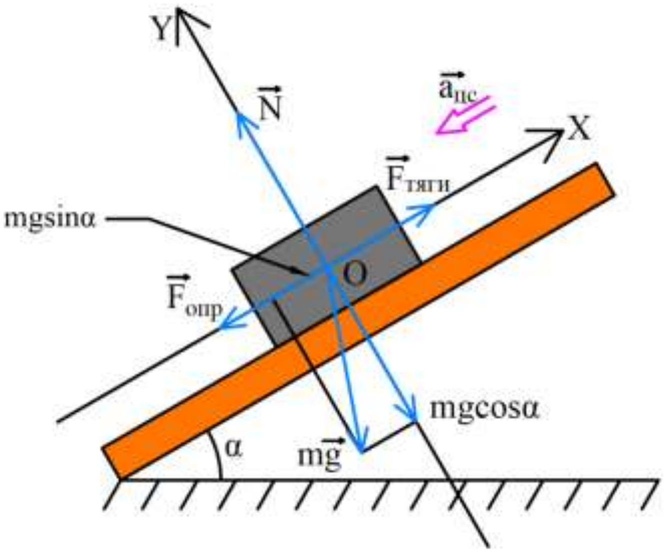
$$\mu g = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu g r}.$$

Визначимо значення шуканої величини:

$v = \sqrt{0{,}4 \cdot 10 \cdot 35} = 11{,}83$ м/с.

Відповідь: $v = 11{,}83$ м/с.

Задача 2.24 [10]. Автомобіль масою 3 т рухається в гору, сповільнюючи рух. Визначте силу тяги автомобіля, якщо ухил гори становить 0,03, а коефіцієнт опору руху дорівнює 0,05. Прискорення автомобіля постійно і дорівнює $0{,}2$ м/с^2.



Дано: $m = 3$ т $= 3000$ кг;

$\mu = 0{,}05; sin\alpha = 0{,}03$

$a = 0{,}2$ м/с^2; $g = 10$ м/с^2.

Знайти: $F_{тяг}$.

Розв’язання

На тіло діють чотири сили: сила тяжкості $m\vec{g}$, сила $\vec{N}$ нормальної реакції опори, сила тяті $\overrightarrow{F_{тяги}}$ і сила опору $\overrightarrow{F_{опр}}$.

Тіло зменшує свою швидкість, тому прискорення руху тіла спрямоване протилежно до напрямку його руху.

Виконаємо пояснювальний малюнок, вказавши на ньому сили, що діють на тіло, напрями швидкості та прискорення руху.

Пов'яжемо систему координат з тілом, вісь OY направимо перпендикулярно поверхні дороги, вісь OX - вздовж дороги (при такому виборі осей тільки одна сила ($m\vec{g}$) не лежить на осях координат). Запишемо другий закон Ньютона у векторному вигляді:

$$\overrightarrow{F_{тяги}} + \vec{N} + m\vec{g} + \overrightarrow{F_{опр}} += m\overrightarrow{a_ц}.$$

Спроектуємо рівняння на осі координат (сила $m\vec{g}$ не лежить на осі координат, тому для знаходження її проекцій опустимо з кінця вектора $m\vec{g}$

перпендикуляри на осі OX та OY: $mg_x = -mgsin\alpha$; $mg_y = -mgcos\alpha$) і запишемо вираз для $\overrightarrow{F_{\text{опр}}}$:

$$\begin{cases} OX: F_{\text{тяги}} - F_{\text{опр.}} - mgsin\alpha = -ma, \\ OY: N - mgcos\alpha = 0, \\ F_{\text{опр.}} = \mu N. \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знайдемо $F_{\text{тяги}}$:

$$N = mgcos\alpha \;\Rightarrow\; F_{\text{опр.}} = \mu mgcos\alpha \;\Rightarrow\; F_{\text{тяги}} - \mu mgcos\alpha - mgsin\alpha = -ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; F_{\text{тяги}} = \mu mgcos\alpha + mgsin\alpha - ma = m(\mu gcos\alpha + gsin\alpha - a).$$

Визначимо значення шуканої величини:

$F_{\text{тяги}} = m(\mu gcos\alpha + gsin\alpha - a)$; $F_{\text{тяги}} = 3000 \cdot (0{,}05 \cdot 10 + 10 \cdot 0{,}03 - 0{,}2)$;

$F_{\text{тяги}} = 1800\ \text{Н} = 1{,}8\ \text{кН}$.

Відповідь: 1,8 кН.

Підсумовуючи розглянуті завдання застосування векторного методу до вирішення геометричних завдань, можна виділити евристики:

Що потрібно довести (геометричною мовою)	Часто достатньо довести(векторною мовою)
$a \parallel b$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ де $AB \subset a, CD \subset b, k \in R$
$A \in a$ $B \in a,$ $C \in a.$	a) встановити справедливість однієї з наступних рівностей: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$ b) довести рівність: $\overrightarrow{QC} = p \cdot \overrightarrow{QA} + q \cdot \overrightarrow{QB}$, де $p + q = 1$, Q –довільна точка; c) довести рівність $\alpha \cdot \overrightarrow{QA} + \beta \cdot \overrightarrow{QB} + \gamma \cdot \overrightarrow{QC} = 0$, де $\alpha + \beta + \gamma = 0$, Q –довільна точка.
$C \in AB$ $AB: CB = m: n$	$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ або

(Відношення відрізка в заданому відношенні)	$\overrightarrow{QC} = \frac{n}{n+m}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{QB}$ для деякої точки Q.
$a \perp b$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \quad A \in a,\ B \in a,\ C \in b,\ D \in b.$
Обчислити довжину вектора.	а) обрати два колінеарних (три – компланарних) базисних вектора, для яких відома відношення довжин та кут між ними; вибрати два неколінеарних базисних вектори (або три некомпланарні), у яких відомі довжини і величина кута між ними; б) розкласти за ними вектор, довжина якого обчислюється; в) знайти скалярний квадрат цього вектора, використовуючи формулу $\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2$.
Обчислити величину кута	а) обрати два колінеарних (три – компланарних) базисних вектора, для яких відома відношення довжин та кути між ними; обрати два неколінеарних (три – некомпланарних) базисних вектора, для яких відоме відношення довжин та кути між ними; б) обрати вектори, що задають відомий кут, і розкласти їх за базовими векторами; в) обчислити $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$.

Перши три евристики використовують при розв’язанні афінних задач, наступні три – метричних та стереометричних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підр. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики. -Х.: Гімназія, 2009. 272с.
2. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Київ: Генеза, 2017. 240 с.
3. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Крижановський С. В., Єршов С.В. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл.- Харьків: Вид-во «Ранок», 2017. 256.
4. Апостолова Г. В. Геометрія: дворівн. підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К. Генеза. 2009. 304 с.
5. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. 272 с.
6. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Київ: Генеза, 2017. 240 с.
7. Єршова А.П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Крижановський С. В., Єршов С.В. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл.- Харьків: Вид-во «Ранок», 2017. 256
8. Апостолова Г. В. Геометрія: дворівн. підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К. Генеза.2009. 304 с.
9. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владіміровна. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2017.-272 с.
10. Геометрія. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владіміровна. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2018.-272 с. іл.

Предметний покажчик