

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені К. Д. УШИНСЬКОГО»

Кафедра математики і методики її навчання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ, ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ ТА
ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ
«МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ПЕРЕДВИЩОЇ ТА
ВИЩОЇ ОСВІТИ»

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти

Галузь знань 01 Освіта / Педагогіка

спеціальність 014.08 Середня освіта (Математика)

Одеса 2024

УДК: 378.147(046)::377/378.016:51

*Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
протокол від «25» січня 2024 року № 8.*

Ордановська О. І. - доктор педагогічних наук, доцент кафедри інноваційних технологій та методики навчання природничих дисциплін Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Мітельман І. М. – доцент кафедри методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради», кандидат фізико-математичних наук, доцент, заслужений вчитель України

Укладачі:

Моторіна В. Г. – доктор педагогічних наук, професор, доцент кафедри математики і методики її навчання Державного закладу Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського

Папач О. І. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики і методики її навчання Державного закладу Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського

Методичні рекомендації до проведення практичних, семінарських занять та організації самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика) / укладачі В. Г. Моторіна, О. І. Папач. – Одеса, Університет Ушинського, 2024. 61 с.

Методичні рекомендації розроблено відповідно до Положення про організацію самостійної роботи студентів Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (наказ від 26 червня 2020 року № 139) і робочої програми дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти». Методичні рекомендації містять: передмову, теми лекційних занять, плани практичних і лабораторних занять, завдання для самостійної роботи, перелік індивідуальних науково-дослідних завдань, додатки.

ЗМІСТ

ВСТУП	4-6
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ СТЕРЕОМЕТРІЇ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ (Змістовий модуль 1)	7-11
1.1. Теми лекційних занять	7-8
1.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи	8-11
РОЗДІЛ 2. РОЗГОРТАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ. РОЗГОРТАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ (Змістовий модуль 2)	12-15
2.1. Теми лекційних занять.....	12-13
2.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи	13-15
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ ОСНОВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ (Змістовий модуль 3)	16-19
3.1. Теми лекційних занять.....	16
3.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи	17-19
РОЗДІЛ 4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ	20-21
Запитання до практичних занять.....	22-23
Питання до іспиту.....	25-27
Орієнтовний перелік проєктів з математики, спрямованих на формування компетентності творчої продуктивної діяльності учнів.....	28-29
Рекомендації щодо застосування методу проєктів на уроках математики в профільній школі.....	30
Навчальний проєкт «Правильні багатокутники».....	31-37
Навчальний проєкт «Кути в просторі».....	37-43
Методичний аналіз теми «Первісна. Невизначений інтеграл».....	44-60
РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА	61

ВСТУП

Предметом дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика) є освітній процес з математичних дисциплін в закладах передвищої та вищої освіти.

Мета навчання – формування у магістрантів комплексу уявлень про методичні особливості викладання навчальної дисципліни «Математика» та «Вища математика», ознайомлення з основними категоріями методики навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти.

Очікувані результати навчання дисципліни

знати:

- основні категорії методики навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти;
- логіко-дидактичну побудову навчальних дисциплін «Математика» та «Вища математика», відповідно, в закладах передвищої та вищої освіти;
- специфіку методичного забезпечення навчальних дисциплін «Математика» та «Вища математика»;
- методичні особливості викладання конкретних тем цих навчальних дисциплін у залежності від майбутньої спеціальності здобувачів освіти;
- особливості використання сучасних педагогічних та інформаційно-комунікативних технологій навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти;

уміти:

- порівнювати цільові, процесуальні і змістові моделі навчальних дисциплін «Математика» і «Вища математика», орієнтовані на здобувачів освіти у залежності від їхньої майбутньої спеціальності;
- виконувати методичний аналіз основних тем дисциплін «Математика» і «Вища математика»;

- використовувати сучасні педагогічні та інформаційно-комунікативні технології у навчанні математики;
- проводити практичні заняття навчальних дисциплін «Математика» і «Вища математика», виконувати методичний аналіз цих занять;
- здійснювати об'єктивний контроль і оцінювання рівня навчальних досягнень здобувачів освіти за дисциплінами «Математика» і «Вища математика».

Відповідно до Положення про організацію освітнього процесу у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» видами навчальних занять з дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» є лекції, практичні, семінарські заняття, консультації, які можуть проводитися з використанням різних методів аудиторної роботи, зокрема:

- семінар – це форма групового навчального заняття, під час якої відбувається колективне обговорення наукової проблеми;

- обговорення – це форма групового навчального заняття, під час якої в кожній групі обговорюються різні аспекти запропонованої теми та фіксуються наробки у формі опорних схем, після завершення роботи групи обмінюються напрацюваннями;

- дискусія – метод проведення навчального заняття, який передбачає публічний розгляд спірного питання чи проблеми;

- круглий стіл – метод навчального заняття, який передбачає колективне обговорення актуальної проблеми викладачами, студентами, запрошеними фахівцями;

- методичний аналіз теми – це метод навчального заняття, на якому здійснюється імітація діяльності вчителя щодо методичного аналізу теми; на занятті визначається тематичне планування, окреслюються основні завдання теми, методи її вивчення, особливості формування понять і уявлень, основні форми навчання;

- майстер-клас – ефективна форма передачі знань і умінь, обміну досвідом під час проведення навчального заняття, яка заснована на практичних діях показу і

демонстрації творчого вирішення певного пізнавального та проблемного педагогічного завдання.

– розв’язування практичних завдань – форма навчального заняття, при якій викладач організовує детальний розгляд студентами окремих теоретичних положень навчальної дисципліни та формуються вміння і навички їх практичного застосування шляхом індивідуального виконання студентом відповідно сформульованих завдань.

Організація самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» здобувачів другого (магістерського) рівня освіти відбувається згідно Положення про організацію самостійної роботи студентів Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (наказ від 26 червня 2020 року № 139), розробленого на підставі Закону України «Про вищу освіту», Положення про організацію освітнього процесу у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Правил внутрішнього розпорядку Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Статуту Університету Ушинського.

Самостійна робота студентів з дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» є основним засобом засвоєння навчального матеріалу у вільний від аудиторних занять час і охоплює опрацювання навчального матеріалу, виконання індивідуальних завдань, науково-дослідну роботу тощо.

Індивідуальне навчально-дослідне завдання з дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» спрямоване на створення тематичного портфоліо з навчально-методичним забезпеченням до відповідної теми та профілю класу, серед яких конспекти уроків, конспекти факультативних занять, опорні конспекти, диференційовані самостійні роботи, підбірки задач компетентнісного спрямування, низки презентацій тощо.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ В ЗАКЛАДАХ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ (Змістовий модуль 1)

1.1. Теми лекційних занять

Тема 1. Специфічні особливості математичної підготовки здобувачів в закладах передвищої освіти на базі неповної середньої освіти.

Загальні характеристики навчальних дисциплін «Математика» або «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» і «Елементи вищої математики» в закладах передвищої освіти. Основні категорії методики навчання математики в закладах передвищої освіти. Цільові, змістові та процесуальні моделі навчальних дисциплін «Математика» / «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» в закладах передвищої освіти. Практично зорієнтоване навчання математики та використання елементів технології STEM-освіти.

Тема 2. Методика навчання здобувачів передвищої освіти алгебри і початкам аналізу з урахуванням майбутньої спеціальності.

Розвиток функціональної лінії у навчальній дисципліні «Алгебра і початки аналізу». Методика навчання розв'язуванню рівнянь, нерівностей та систем рівнянь і нерівностей. Методичні особливості навчання елементам диференціального і інтегрального числення. Методика навчання основам теорії ймовірностей та математичної статистики.

Тема 3. Методика навчання здобувачів передвищої освіти стереометрії з урахуванням майбутньої спеціальності.

Методика навчання паралельності і перпендикулярності прямих і площин у просторі. Методичні особливості вивчення теми «Вектори і координати у просторі». Методика вивчення многогранників та тіл обертання, їхніх площин поверхонь та об'ємів.

Тема 4. Методика математичної підготовки здобувачів передвищої освіти на базі повної середньої освіти.

Цільові, змістові та процесуальні моделі навчальних дисциплін «Вища математика» в закладах передвищої освіти. Загальні методичні особливості навчання лінійної і векторної алгебри та аналітичній геометрії. Методичні особливості вивчення матриць та визначників. Методика навчання розв'язуванню систем лінійних рівнянь. Методика навчання векторам та операціям над векторами. Методика вивчення рівнянь прямої та площини у просторі.

Загальні методичні основи навчання диференціального і інтегрального числення.

Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи

Тема 1. Специфічні особливості математичної підготовки здобувачів в закладах передвищої освіти на базі неповної середньої освіти.

1. Загальні характеристики навчальних дисциплін «Математика» або «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» і «Елементи вищої математики» в закладах передвищої освіти.
2. Основні категорії методики навчання математики в закладах передвищої освіти. Цільові, змістові та процесуальні моделі навчальних дисциплін «Математика» / «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» в закладах передвищої освіти.
3. Практично зорієнтоване навчання математики та використання елементів технології STEM-освіти.

Практичні заняття

- 1.1. Семінар «Специфіка математичної підготовки здобувачів освіти в закладах передвищої освіти у залежності від майбутньої спеціальності»

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися з програмами навчальних дисциплін «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» для профільного рівня та рівня стандарту.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Дослідити для здобувачів яких спеціальностей здійснюється математична підготовка на рівні стандарту, а для яких — на профільному рівні.

Тема 2. Методика навчання здобувачів передвищої освіти алгебри і початкам аналізу з урахуванням майбутньої спеціальності.

1. Розвиток функціональної лінії у навчальній дисципліні «Алгебра і початки аналізу». Методика навчання розв'язуванню рівнянь, нерівностей та систем рівнянь і нерівностей.

2. Методичні особливості навчання елементам диференціального і інтегрального числення.

3. Методика навчання основам теорії ймовірностей та математичної статистики.

Практичні заняття

2.1., 2.2. Розв'язування практичних завдань з методики навчання здобувачів передвищої освіти алгебри і початкам аналізу з урахуванням майбутньої спеціальності

Завдання для самостійної роботи

1. Розробити методичний аналіз теми «Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення і систематизація».

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. На основі зробленого методичного аналізу створити календарне планування цієї теми для різних рівнів навчання, з урахуванням майбутньої спеціальності здобувачів освіти. (Спеціальність, для якої призначене календарне планування, магістранти вибирають на свій розсуд).

Тема 3. Методика навчання здобувачів передвищої освіти стереометрії з урахуванням майбутньої спеціальності.

1. Методика навчання паралельності і перпендикулярності прямих і площин у просторі.
2. Методичні особливості вивчення теми «Вектори і координати у просторі».
3. Методика вивчення многогранників та тіл обертання, їхніх площин поверхонь та об'ємів.

Практичні заняття

- 3.1., 3.2. Розв'язування практичних завдань з методика навчання здобувачів передвищої освіти стереометрії з урахуванням майбутньої спеціальності.

Завдання для самостійної роботи

1. Розробити методичний аналіз теми «Многогранники».
2. На основі розробленого аналізу, створити календарне планування цієї теми для різних рівнів навчання, з урахуванням майбутньої спеціальності здобувачів освіти. (Спеціальність, для якої призначене календарне планування, магістранти вибирають на свій розсуд).

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Математична підготовка здобувачів освіти у економічних ЗВО

Тема 4. Методика математичної підготовки здобувачів передвищої освіти на базі повної середньої освіти.

1. Цільові, змістові та процесуальні моделі навчальних дисциплін «Вища математика» в закладах передвищої освіти.
2. Загальні методичні особливості навчання лінійної і векторної алгебри та аналітичній геометрії.
3. Методичні особливості вивчення матриць та визначників. Методика навчання розв'язуванню систем лінійних рівнянь.

4. Методика навчання векторам та операціям над векторами. Методика вивчення рівнянь прямої та площини у просторі.
5. Загальні методичні основи навчання диференціального і інтегрального числення.

Практичні заняття

- 4.1. Розв'язування практичних завдань з методики навчання лінійної та векторної алгебри і аналітичної геометрії

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися з методикою математичної підготовки здобувачів передвищої освіти на базі повної середньої освіти

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Методичний аналіз специфіки математичної підготовки здобувачів освіти у політехнічних ЗВО.

РОЗДІЛ 2. ЦІЛЬОВІ І ЗМІСТОВІ МОДЕЛІ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА» У ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД МАЙБУТНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ (Змістовий модуль 2)

1.1. Теми лекційних занять

Тема 5. Специфічні особливості навчальної дисципліни «Вища математика».

Навчальна дисципліна «Вища математика» в закладах вищої освіти у історичному аспекті. Основні категорії методики навчання математики в ЗВО.

Специфіка математичної підготовки здобувачів освіти в ЗВО у залежності від майбутньої спеціальності і порівняння цільових моделей навчальної дисципліни «Вища математика» Особливості змістових моделей навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів медичних закладів вищої освіти. Змістові моделі навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів технічних та економічних закладів вищої освіти.

Тема 6. Методичний аналіз тем «Вступ до математичного аналізу» та «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних».

Місце і значення даних тем у вищій математики, її зв'язки з іншими темами. Базові поняття та твердження тем. Структура кожної теми.

Методика навчання студентів основних понять і тверджень тем (границі послідовності та функції; похідна функції однієї змінної та багатьох змінних; властивості цих понять та ін.). Методика формування умінь знаходити границі, диференціювати функції однієї та багатьох змінних, досліджувати функції за допомогою похідної та застосовувати похідну для розв'язування практично зорієнтованих задач.

Тема 7. Методичний аналіз тем «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл».

Місце і значення даних тем у вищій математики, її зв'язки з іншими темами. Базові поняття, твердження і структура кожної теми. Методика навчання студентів

основних понять і тверджень тем (невизначений та визначений інтеграли та їхні властивості; основні методи інтегрування). Методика формування умінь обчислювати інтеграли різних видів та застосовувати інтеграли для розв'язування практично зорієнтованих задач.

2.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи

Тема 5. Специфічні особливості навчальної дисципліни «Вища математика».

1. Навчальна дисципліна «Вища математика» в закладах вищої освіти у історичному аспекті. Основні категорії методики навчання математики в ЗВО.
2. Специфіка математичної підготовки здобувачів освіти в ЗВО у залежності від майбутньої спеціальності і порівняння цільових моделей навчальної дисципліни «Вища математика» Особливості змістових моделей навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів медичних закладів вищої освіти. Змістові моделі навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів технічних та економічних закладів вищої освіти.

Практичні заняття

- 5.1. Круглий стіл «Специфіка математичної підготовки здобувачів освіти в ЗВО у залежності від майбутньої спеціальності».

Завдання для самостійної роботи

1. Специфічні особливості навчальної дисципліни «Вища математика»

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Особливості методичного забезпечення дистанційного навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти

Тема 6. Методичний аналіз тем «Вступ до математичного аналізу» та «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних».

1. Місце і значення даних тем у вищій математиці, її зв'язки з іншими темами. Базові поняття та твердження тем. Структура кожної теми.
2. Методика навчання студентів основних понять і тверджень тем (границі послідовності та функції; похідна функції однієї змінної та багатьох змінних; властивості цих понять та ін.).
3. Методика формування умінь знаходити границі, диференціювати функції однієї та багатьох змінних, досліджувати функції за допомогою похідної та застосовувати похідну для розв'язування практично зорієнтованих задач.

Практичні заняття

- 6.1., 6.2. Методичний аналіз тем «Вступ до математичного аналізу» та «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних».

Завдання для самостійної роботи

1. Методичний аналіз тем «Вступ до математичного аналізу» та «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних»

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Особливості технології STEM-освіти під час математичної підготовки здобувачів передвищої та вищої освіти.

Тема 7. Методичний аналіз тем «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл».

1. Місце і значення даних тем у вищій математиці, її зв'язки з іншими темами. Базові поняття, твердження і структура кожної теми. Методика навчання студентів основних понять і тверджень тем (невизначений та визначений інтеграл та їхні властивості; основні методи інтегрування).

2. Методика формування умінь обчислювати інтеграли різних видів та застосовувати інтеграли для розв'язування практично зорієнтованих задач.

Практичні заняття

7.1., 7.2. Методичний аналіз тем «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл».

Завдання для самостійної роботи

1. Розробити інтелект-карти для тем «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл».

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Методика застосування технології «Інтелект-карти» під час математичної підготовки здобувачів передвищої та вищої освіти

РОЗДІЛ 3. ПРОЦЕСУАЛЬНІ МОДЕЛІ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД МАЙБУТНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ (Змістовий модуль 3)

3.1. Теми лекційних занять

Тема 8. Провідні форми, методи, прийоми і засоби навчання математики. Сучасні технології навчання математики у закладах вищої освіти.

Загальні характеристики провідних форм навчання математики в ЗВО. Методи і прийоми навчання математики в ЗВО. Контроль навчальних досягнень студентів (модульні контрольні роботи, тестовий контроль). Методичне забезпечення навчальної дисципліни "Вища математика" (програми, підручники та навчальні посібники, інтернет ресурси, методичні рекомендації, плани-конспекти лекцій та ін.). Використання сучасних педагогічних та інформаційних технологій у навчанні математики в ЗВО (дослідницької, проектної, STEM-освіти, Web-квестів, Інтелект-корт та ін.).

Тема 9. Методика підготовки, проведення і аналізу лекцій з вищої математики.

Методичні характеристики класичної лекції з вищої математики. Методика застосування НІТ на лекціях. Методи і прийоми активізації студентів на лекціях. Етапи підготовки викладача до проведення лекцій з вищої математики. Специфіка проведення лекцій з основних тем курсу «Вища математика». Схема методичного аналізу проведеної лекції.

Тема 10. Методика підготовки, проведення і аналізу практичних занять з вищої математики.

Методичні характеристики класичного практичного заняття з навчальної дисципліни «Вища математика». Методика застосування НІТ на практичних заняттях. Методи і прийоми активізації студентів на практичних заняттях. Етапи підготовки викладача до проведення практичних занять з вищої математики. Специфіка

проведення практичних занять з основних тем курсу «Вища математика». Схема методичного аналізу проведеного практичного заняття.

3.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи

Тема 8. Провідні форми, методи, прийоми і засоби навчання математики.

Сучасні технології навчання математики у закладах вищої освіти.

1. Загальні характеристики провідних форм навчання математики в ЗВО. Методи і прийоми навчання математики в ЗВО. Контроль навчальних досягнень студентів (модульні контрольні роботи, тестовий контроль).
2. Методичне забезпечення навчальної дисципліни "Вища математика" (програми, підручники та навчальні посібники, інтернет ресурси, методичні рекомендації, плани-конспекти лекцій та ін.).
3. Використання сучасних педагогічних та інформаційних технологій у навчанні математики в ЗВО (дослідницької, проектної, STEM-освіти, Web-квестів, Інтелект-карт та ін.).

Практичні заняття

- 8 .1. Дискусія «Сучасні технології навчання математики в закладах вищої освіти».

Завдання для самостійної роботи

1. Провідні форми, методи, прийоми і засоби навчання математики в ЗВО

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Застосування проектної технології під час математичної підготовки здобувачів передвищої та вищої освіти

Тема 9. Методика підготовки, проведення і аналізу лекцій з вищої математики.

1. Методичні характеристики класичної лекції з вищої математики. Методика застосування НІТ на лекціях. Методи і прийоми активізації студентів на лекціях.
2. Етапи підготовки викладача до проведення лекцій з вищої математики. Специфіка проведення лекцій з основних тем курсу «Вища математика». Схема методичного аналізу проведеної лекції.

Практичні заняття

- 9.1. Майстер-клас «Методика підготовки, проведення і аналізу лекцій з вищої математики»

Завдання для самостійної роботи

1. Методика підготовки, проведення і аналізу лекцій з вищої математики

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Особливості методики застосування дослідницької технології під час математичної підготовки здобувачів вищої освіти

Тема 10. Методика підготовки, проведення і аналізу практичних занять з вищої математики.

1. Методичні характеристики класичного практичного заняття з навчальної дисципліни «Вища математика». Методика застосування НІТ на практичних заняттях. Методи і прийоми активізації студентів на практичних заняттях.
2. Етапи підготовки викладача до проведення практичних занять з вищої математики. Специфіка проведення практичних занять з основних тем курсу «Вища математика». Схема методичного аналізу проведеного практичного заняття.

Практичні заняття

10.1. Майстер-клас «Методика підготовки, проведення і аналізу практичних занять з вищої математики»

Завдання для самостійної роботи

1. Методика підготовки, проведення і аналізу практичних занять з вищої математики

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Тестування під час математичної підготовки здобувачів передвищої та вищої освіти

РОЗДІЛ 4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Вид роботи	Бали	Критерії
Практичні завдання	0 балів	Здобувач не бере участі в практичному занятті, є лише спостерігачем.
	1 бал	Здобувач самостійно розв'язує запропоновані завдання, вміє аналізувати педагогічний, цифровий та методичний інструментарій, необхідний для проектування та моделювання уроку математики та математичних дисциплін в умовах НУШ, дає відповідь на поставлені теоретичні запитання, припускаючись невеликих помилок. Знання здобувача є достатньо повними; він самостійно застосовує відповідний навчальний матеріал, виконуючи практичні завдання; аналізує, робить висновки.
	2 бали	Здобувач бере активну участь у практичному занятті. Правильно підбирає педагогічний, цифровий та методичний інструментарій, необхідний для проектування та моделювання уроку математики та математичних дисциплін в умовах НУШ та обґрунтовує власний вибір, наводить доцільні приклади, спираючись на відповідні документи нормативно-правового характеру.
Самостійна робота	0 балів	Здобувач має фрагментарні уявлення з предмета вивчення; не може виконати елементарні завдання.
	1 бал	Здобувач здатен самостійно опанувати запропонований матеріал і виконати завдання прикладного змісту; виявляє здатність елементарно висловлювати думку; знає послідовність виконання завдання; при виконанні самостійної роботи потребує допомоги викладача.
	2 бали	Здобувач впевнено і аргументовано відтворює матеріал самостійного опрацювання, вільно їм володіє і вміє його застосувати при підготовці уроку.
Індивідуальне навчально-дослідне завдання (доповідь)	0 балів	Завдання не виконано; доповідь має копійлятивний характер; висловлювання ні за змістом, ні за формою не відповідає вимогам. Презентація відсутня.
	1-2 бали	<p>Зміст доповіді відповідає заявленій темі, проте тема розкрита частково. Наведені дані і факти обґрунтовують чи ілюструють сформульовані тези лише частково. Достовірність інформації у доповіді має зауваження до точності, обґрунтованості, наявності посилань на джерела первинної інформації. Робота характеризується змістовою цілісністю, зв'язністю і послідовністю викладу, допущено не більше 1 логічної помилки. Здобувач веде себе скуто, невпевнено і напружено, має небагатий набір засобів утримання уваги слухачів.</p> <p>Мультимедійна презентація значною мірою не відповідає вимогам: відсутнє логічне завершення презентації. Слайди наповнені текстовою інформацією, однак не сформульовані тези, ключові чи опорні слова та фрази. Спостерігаються порушення вимог до дизайну презентації: невідповідність кольору і фону; використання шрифтів, що утруднюють сприйняття тексту; наявність граматичних помилок.</p>
	3-4	Зміст доповіді відповідає заявленій темі, проте тема розкрита неповно,

	бали	<p>натомість наявні фрагменти, які не відповідають темі. Наведені дані і факти обґрунтовують чи ілюструють сформульовані тези частково (не більше 2 зауважень). До достовірності інформації у доповіді є зауваження. Здобувач володіє навичками доцільної побудови промови, однак відтворює підготовлений текст без врахування особливостей усного мовлення, може втрачати контроль з аудиторією.</p> <p>Не дотримано всіх вимог до створення мультимедійної презентації: спостерігається незначна надмірність тексту презентації, та/або перевантаженість ілюстративним матеріалом. Є незначні недоліки дизайну презентації.</p>
	5 балів	<p>Зміст доповіді відповідає заявленій темі. Здобувач глибоко, повно й обґрунтовано розглядає предмет дослідження, подає узагальнення альтернативних теоретичних підходів в межах досліджуваної проблеми.</p> <p>Текст характеризується цілісністю та композиційною грамотністю. Використано достатній обсяг високо якісних інформаційних джерел. Здобувач демонструє вміння будувати розгорнутий монолог з фахової проблематики, логічно, правильно, точно, етично й емоційно висловлювати думку.</p> <p>Студент володіє технікою і культурою мовлення, використовує цитування, вдало імпровізує. Доповідь викликає велике зацікавлення й жваве обговорення у студентському середовищі, наявні позитивні коментарі. Навчальна презентація виконана з дотриманням усіх вимог. Презентація повністю ілюструє й унаочнює доповідь.</p>

ЗАПИТАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

1. Семінар «Специфіка математичної підготовки здобувачів освіти в закладах передвищої освіти у залежності від майбутньої спеціальності»

1. Які математичні дисципліни вивчають здобувачі передвищої освіти, які навчаються на базі неповної середньої освіти?
2. Які математичні дисципліни вивчають здобувачі передвищої освіти, які навчаються на базі повної середньої освіти?
3. Що характеризує математичну дисципліну?
4. Дайте загальну характеристику цільової, змістової і процесуальної моделей математичною дисципліни?
5. На основі яких нормативних документів розробляються цільова і змістова моделі математичних дисциплін для здобувачів, які її вивчають на базі неповної середньої освіти? А на основі яких на базі повної середньої освіти?

2. Розв'язування практичних завдань з методика навчання здобувачів передвищої освіти алгебри і початкам аналізу з урахуванням майбутньої спеціальності

1. Мета, завдання і основні етапи методичного аналізу теми.
2. Методичний аналіз теми «Тригонометричні функції» для рівня стандарту і для профільного рівня.
3. Розробка на основі виконаного методичного аналізу календарного планування цієї теми для різних рівнів навчання, з урахуванням майбутньої спеціальності здобувачів освіти.

3. Розв'язування практичних завдань з методика навчання здобувачів передвищої освіти стереометрії з урахуванням майбутньої спеціальності

1. Мета, завдання і основні етапи методичного аналізу теми.
2. Методичний аналіз теми «Паралельність прямих і площин у просторі» для рівня стандарту і для поглибленого.

3. Розробка на основі виконаного методичного аналізу календарного планування цієї теми для різних рівнів навчання, з урахуванням майбутньої спеціальності здобувачів освіти.

4. Розв'язування практичних завдань з методики навчання лінійної та векторної алгебри і аналітичної геометрії

1. Які основні теми лінійної та векторної алгебри і аналітичної геометрії вивчають у закладах передвищої освіти на базі повної середньої освіти?

2. Методичний аналіз теми «Матриці та визначники».

5. Круглий стіл «Специфіка математичної підготовки здобувачів освіти в ЗВО у залежності від майбутньої спеціальності».

1. Провести аналіз початкових програм з математики для вищої школи з фаху економічної, технічної, медичної, психологічної спрямованості.

2. Довести, що математична підготовка здобувачі вищої освіти суттєво залежить від їхньої майбутньої спеціальності.

6. Методичний аналіз тем «Вступ до математичного аналізу» та «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних».

1. Особливості методичного аналізу теми «Вступ до математичного аналізу».

2. Особливості методичного аналізу теми «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних».

7. Методичний аналіз тем «Невизначений інтеграл» та «Визначений інтеграл»

1. Особливості методичного аналізу теми «Невизначений інтеграл».

2. Особливості методичного аналізу теми «Визначений інтеграл».

8. Дискусія «Сучасні технології навчання математики в закладах вищої освіти»

Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

1. Які сучасні педагогічні та інформаційні технології доцільно використовувати у навчанні математики в ЗВО?
2. Чи є перспективною дослідницька технологія у навчанні вищої математики? Навести приклади.
3. Якими, на вашу думку, є перспективи STEM-освіти у навчанні вищої математики в ЗВО? Привести приклади.
4. Чи доцільно застосовувати технологію Інтелект-карт у навчанні вищої математики?

9. Майстер-клас «Методика підготовки, проведення і аналізу лекцій з вищої математики»

1. План-конспект лекції на тему «Невизначений інтеграл».
2. Демонстрація презентації до лекції.
3. Аналіз представленої лекції.

10. Майстер-клас «Методика підготовки, проведення і аналізу практичних занять з вищої математики»

1. План-конспект практичного заняття на тему “Невизначений інтеграл”.
2. Демонстрація презентації до практичного заняття.
3. Проведення тестування або самостійної роботи з теми практичного заняття за варіантами різних рівнів складності.
3. Аналіз представленого практичного заняття.

ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ

I. Загальні основи методики навчання.

1. Навчальна дисципліна «Вища математика» в закладах передвищої та вищої освіти у історичному аспекті.
2. Основні категорії методики навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти. Мета, завдання і етапи методичного аналізу тем. Приклади.
3. Моделі навчальних дисциплін «Математика»/ «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія»/ «Вища математика» в закладах передвищої освіти.
4. Специфіка математичної підготовки здобувачів вищої освіти у залежності від майбутньої спеціальності.
5. Основні теми навчальної дисципліни «Вища математика» і можливі варіанти порядку їх вивчення.
6. Залежність основних складових теоретичного матеріалу теми «Лінійна та векторна алгебра» від майбутньої спеціальності здобувачів освіти.
7. Залежність практичної складової (типові вправи) змістової моделі від спеціальності студентів на прикладі теми «Матриці і визначники».
8. Залежність практичної складової від спеціальності студентів на прикладі теми «Системи лінійних рівнянь».
9. Методичні особливості навчальних систем/серій типових вправ/завдань дисципліни «Вища математика» (означення, види, стратегія викладача під час розробки, приклади).
10. Методичне забезпечення навчальної дисципліни «Вища математика» (програми, підручники та навчальні посібники, інтернет ресурси, методичні рекомендації, плани-конспекти лекцій та ін.).
11. Контроль навчальних досягнень студентів (модульні контрольні роботи, тестовий контроль, залік, екзамен).
12. Загальні характеристики провідних форм навчання математики в ЗВО (лекцій і практичних занять).

13. Етапи підготовки викладача до проведення практичних занять з вищої математики.
14. Вимоги до плану-конспекту практичного заняття. Приклади. Схема методичного аналізу проведеного практичного заняття.
15. Використання сучасних педагогічних та інформаційних технологій у навчанні математики в ЗВО (інтелект-карт, дослідницької, проектної, STEM-освіти та ін.).

II. Методичний аналіз окремих тем.

1. Методичний аналіз теми «Матриці та визначники» (місце і значення, зв'язки з іншими темами; структура теми).
2. Методичний аналіз теми «Матриці та визначники» (методичні особливості навчання основним поняттям і твердженням теми).
3. Методичний аналіз теми «Матриці та визначники» (методичні особливості навчання розв'язуванню основних видів вправ теми).
4. Методичний аналіз теми «Системи лінійних рівнянь» (місце і значення, зв'язки з іншими темами; базові знання і уміння; структура теми)..
5. Методичний аналіз теми «Системи лінійних рівнянь» (методичні особливості навчання основним поняттям і твердженням теми).
6. Методичний аналіз теми «Системи лінійних рівнянь» (методичні особливості навчання розв'язуванню основних видів вправ теми).
7. Методичний аналіз теми «Границі послідовності та функції» (місце і значення, зв'язки з іншими темами; базові знання і уміння; структура теми).
8. Методичний аналіз теми «Границі послідовності та функції» (методичні особливості навчання основним поняттям і твердженням теми).
9. Методичний аналіз теми «Границі послідовності та функції» (методичні особливості навчання розв'язуванню основних видів вправ теми).
10. Методичний аналіз теми «Диференціювання функцій однієї та багатьох змінних» (місце і значення, зв'язки з іншими темами; базові знання і уміння; структура теми).
11. Методичний аналіз теми «Диференціювання функцій однієї та багатьох змінних» (методичні особливості навчання основним поняттям і твердженням теми).

12. Методичний аналіз теми «Диференціювання функцій однієї та багатьох змінних» (методичні особливості навчання розв'язуванню основних видів вправ теми).
13. Методичний аналіз теми «Первісна. Невизначений інтеграл»(місце і значення, зв'язки з іншими темами; базові знання і уміння; структура теми).
14. Методичний аналіз теми «Первісна. Невизначений інтеграл» (методичні особливості навчання основним поняттям і твердженням теми).
15. Методичний аналіз теми «Первісна. Невизначений інтеграл» (методичні особливості навчання розв'язуванню основних видів вправ теми).

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПРОЄКТІВ З МАТЕМАТИКИ, СПРЯМОВАНИХ НА ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПРОДУКТИВНОЇ ТВОРЧОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

	Тема, що вивчається	Теми проєктів, для позакласної роботи				Теми проєктів, для включення до уроку
		Дослідницькі	Інформаційні	Творчі	Практичні	
Алгебра 10 клас	Тригонометричні рівняння і нерівності	«Дослідницькі завдання з параметрами», «Графічний метод та геометричні задуми при розв'язанні тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем»	«Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера», «Принцип Діріхле», «Рівняння Ейлера»	«Фінансова математика», «Гіперболічні функції та їх зв'язок з тригонометричними»	«Задачі з тригонометрії з практичним змістом», «Розв'язання тригонометричних рівнянь зі складним аргументом»	«Нестандартні способи розв'язання тригонометричних рівнянь»
Алгебра 11 клас	Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики	«Застосування аналізу виробничої та статистичної функції при керуванні виробництвом», «Комплексні функції в кінематиці та динаміці», «Імовірнісно-статистичний підхід до комп'ютерної обробки даних»	«Алгебра логіки», «З історії виникнення і розвитку теорії множин», «Трикутник Паскаля», «Історія розвитку стохастики», ««Деревинні» графи та пов'язані з ними комбінаторні задачі»	«Властивості перетину та об'єднання множин в гуманітарних науках»	«Математичне моделювання гри в теніс», «Імовірність виграшу у лотереї», «Навчальний посібник «Стохастика в малюнках»»	«Розв'язання логічних задач за допомогою схем та таблиць», «Статистичні характеристики та дослідження»
Геометрія 10 клас	Паралельність прямих і площин	«Алгоритми розв'язання текстових задач з математики»	«Одиниці вимірювання довжини в різних країнах у різний час»	«Без мірної лінійки», «Яким я бачу світ кривих»	«Геометричні задачі з практичним змістом»	«Основні задачі на побудову»

Геометрія 10 клас	Декартові координати і вектори в просторі	«Розв'язання рівнянь та систем рівнянь векторним способом»	«Області застосування принципу координатної площини», «Відкриття координатної площини Рене Декартом»	Рольова гра «Суперечливі погляди на математичні твердження»	«Номограми з вирівняних точок з паралельними шкалами»	Виведення формул площ многокутників за координатами їх вершин»
Геометрія 11 клас	Об'єми многогранників	«Яскравий світ фракталів», «Принцип збереження об'єму», «Латана ковдра місіс Паркінс»	«Обчислення площі діагонального перерізу та площі поверхні зрізаної піраміди»	«Геометрія в архітектурі давньоруського зодчества»	«Конструюючи красу орнаменту», «Планування та побудова стереометричного містечка»	«Побудова креслень взаємно пересічних поверхонь»

**РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОЄКТІВ НА
УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ.**

Тип уроку	Тип проекту	Форма презентації результатів виконання проекту
Урок засвоєння нових знань	Інформаційний Дослідницький	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз
Урок формування навичок і вмінь	Інформаційний Дослідницький Творчий	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз, виготовлення газет, журналів, буклетів, довідників
Урок узагальнення і систематизації знань	Інформаційний Дослідницький Творчий	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз, виготовлення газет, журналів, буклетів, довідників, розробка збірки, е-посібника, навчального посібника, сайту, відеоролику
Урок практичного застосування знань, умінь і навичок	Творчий Практичний	Виготовлення моделі, плакатів, макетів, виставка робіт, газет, журналів, буклетів, довідників, розробка збірки, е-посібника, навчального посібника, сайту, відеоролику, рольова гра, бізнес-план, реклама
Урок контролю і корекції знань, умінь і навичок	Дослідницький Творчий	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз, виготовлення газет, журналів, буклетів, довідників, розробка збірки, е-посібника, навчального посібника, сайту, відеоролику

Навчальний проєкт «Правильні многогранники»

У профільній школі урок засвоєння нових знань з геометрії пропонується провести з використанням методу проєктів відповідно до розробленого плану навчального проєкту. Проєкт «Правильні многогранники» в 11 класі з геометрії зводиться до наступного – клас об'єднується в групи. Кожна група отримує певний вид правильного многогранника та завдання. Групи готують доповіді про правильні многогранники (їх елементи, кількісні характеристики), використовуючи історичні відомості. Визначають напрям роботи і особисте завдання кожного члена. Учні кожної групи готують презентацію відповідно до певного виду правильного многогранника.

План навчального проєкту

Назва проєкту:	Правильні многогранники
Навчальний предмет:	Математика
Класи:	11 клас
Мета проєкту:	домогтися засвоєння учнями означення правильного многогранника та п'яти видів правильних многогранників; сформувати в учнів поняття про елементи правильних многогранників; вдосконалити навички розв'язування задач про правильні многогранники на основі знань про многогранні кути; розвивати творчу активність учнів, створювати умови для вияву ініціативи учнів під час вибору завдань; виховувати в учнів прагнення до самовдосконалення, задоволення пізнавальних потреб.
Ключове питання:	Чи все ми помічаємо многокутники навколо нас?
Тематичні питання:	Чи все можливо розкласти на геометричні тіла? Чи можливо все описати мовою математики? Чи створена людина із геометричних тіл?
Стислий опис проєкту:	Клас, готуючись до проєкту, об'єднується у п'ять груп, кожна з яких презентує певний многогранник. До кінця проєкту всі учні мають оволодіти знаннями про п'ять видів правильних многогранників. Кожному учню необхідно бути уважним під час відповіді товаришів і заповнити таблицю, що допоможе краще запам'ятати матеріал.

Назва многогранника	V	Г	P	V+Г-P=2
Тетраедр	4	4	6	4+4-6=2
Гексаедр	8	6	12	8+6-12=2
Октаедр	6	8	12	6+8-12=2
Ікосаедр	12	20	30	12+20-30=2
Додекаедр	20	12	30	20+12-30=2

Навчальні предмети, з якими пов'язаний навчальний проєкт:

Хімія, біологія, медицина, астрономія, образотворче мистецтво, історія.

Державні освітні стандарти та навчальні програми:

Державний стандарт базової середньої освіти.

Математична освітня галузь

- досліджує проблемні ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;
- моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблем;
- розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою.

Технологічна освітня галузь

- формулює ідею та втілює задум у готовий продукт за алгоритмом проєктно-технологічної діяльності;
- творчо застосовує традиційні і сучасні технології.

Інформатична освітня галузь

- знаходить, аналізує, перетворює, узагальнює, систематизує та подає дані, критично оцінює інформацію для розв'язання життєвих проблем.

Мовно-літературна освітня галузь:

- взаємодіє з іншими особами в усній формі, сприймає і використовує інформацію для досягнення життєвих цілей в різних комунікаційних ситуаціях;
- приймає, аналізує, інтерпретує, критично оцінює інформацію та використовує її для збагачення власного досвіду і духовного розвитку
- сприймає усну інформацію та письмові тексти іноземною мовою в умовах безпосереднього та опосередкованого міжкультурного спілкування.

Навчальні цілі та очікувані результати навчання

Поглибити знання про опуклі многогранники, а саме: дослідження властивостей правильних многогранників; практичне використання кількісних характеристик правильних многогранників; познайомити з історичними відомостями про правильні многогранники.

Залучати учнів до використання дослідницьких методів під час вивчення тем шкільної програми.

Учні під час проєкту засвоюють навички:

1. Планувати свою діяльність, розподіляти обов'язки та узгоджувати свою діяльність з іншими, співпрацювати в команді.
2. Обговорювати результати роботи груп, оцінювати їх.
3. Аналізувати весь матеріал та структурувати його для подальшої роботи.
4. Порівнювати зміст тез із критеріями, запропонованими вчителем.

Вхідні знання та навички:

1. Знання правил побудови об'ємних фігур.
2. Уміння знаходити елементи та кількісні характеристики правильних многогранників.
3. Навички роботи з комп'ютером, досвід роботи в Інтернеті та з додатковою літературою.

Планування реалізації проекту

Що потрібно зробити перед початком проекту?

Діяльність	Хто це зробить або допоможе зробити?	Коли це слід зробити?
Зарезервувати час у комп'ютерному класі або бібліотеці	Учителі математики та інформатики, лаборант	За тиждень до початку роботи над презентацією
Знайти та зібрати матеріали, що будуть використовуватися у вашому проекті	Учитель математики	Під час підготовки проекту
Встановити до папки «Вибране» закладки на сайти, які будуть використовуватися в проекті	Учитель математики, лаборант	Під час підготовки проекту
Провести додаткове заняття з класом	Учитель математики	На початку про ведення проекту, перед підготовкою презентацій
Отримати допомогу від інших організацій (батьківської та шкільної ради)	Батьки, учні	Протягом проведення проекту
Призначити спеціальний урочистий вечір для демонстрації закінчених учнівських робіт	Учитель математики	Відповідно до обставин
Розмістити готові роботи на спеціальному стенді	Актив класу	Тиждень математики

Запросити директора школи, представників адміністрації для ознайомлення з роботою учнів	Учні	За два дні до презентації робіт
Запросити батьків для допомоги	Учитель математики	Під час підготовки проєкту
Розподілити час роботи на комп'ютерах, визначити час роботи по змінах	Учитель інформатики, лаборант	Перед початком роботи над презентацією
Переконатися, що учні попередньо мають відповідні навички роботи з комп'ютером, та забезпечити умови навчання для тих, хто таких навичок не має	Учитель інформатики, старшокласники	На початку роботи над презентацією
<i>Що потрібно зробити протягом проєкту?</i>		
Ознайомити учнів з критеріями оцінювання їхньої роботи в проєкті	Учитель математики	На початку проведення проєкт
Проглянути разом з учнями відібраний для проєкту матеріал, надати рекомендації для подальшої роботи	Учитель математики	Протягом проведення проєкту
Організувати самостійну роботу учнів у проєкті	Учителі математики та інформатики	Протягом проведення проєкту
Обговорити з учнями майбутню форму подання результатів проєкту	Учитель математики	На початку проведення проєкту
Зробити фотографії учнів за роботою	Редколегія шкільної газети	Протягом проведення проєкту
Оцінити учнівські проєкти	Учителі математики та інформатики, учні	Після презентації та протягом проведення проєкту
Провести оцінювання проєкту в цілому, отримати відгуки про те,	Учителі математики та інформатики, учні, батьки	Після проведення проєкту

наскільки вдалим він був		
Що потрібно зробити по завершенні проєкту?		
Очистити, видалити або відсортувати вміст папки «Вибране» та видалити зайві файли на комп'ютері (комп'ютерах)	Учитель інформатики	Через два тижні після проведення проєкту
Повернути обладнання, книги, приладдя	Батьки	Після проведення проєкту
Подумати про наступний проєкт, в якому можна ефективно застосувати комп'ютерні технології та результати цього проєкту	Учителі математики та інформатики	Постійно
Запланувати проведення наступного проєкту	Учителі математики та інформатики	Після проведення останнього проєкту
Термін для реалізації проєкту:	10-14 днів	
Наочність:	Моделі правильних многогранників, слайди про многогранники	
Диференціація навчання: Розподіл обов'язків учнів у межах групи, враховуючи рівні навчальних досягнень		
Оцінювання знань та вмінь учнів: Листок оцінювання, оцінювання вчителем		

Листок оцінювання

Отримав	Максимум	Математика
	10	Математичні терміни встановлені та пояснені
	10	Є всі відповідні написи і пояснення до рисунків
	10	Ключове питання показане і хід роботи відображає його розв'язання на прикладі геометричних фігур
	30	Усього з математики
Отримав	Максимум	Зміст
	5	Головна тема обговорена й пов'язана з ключовим питанням
	5	Матеріал подано у формі, необхідній для зацікавлення членів інших груп дослідження матеріалом
	5	Повідомлення написані з використанням питань: що?

		хто? коли? як?
	5	Список учасників роботи, та яку саме роботу хто виконував, включаючи використані матеріали та посилання
	20	Усього за зміст
Отримав	Максимум	Оформлення
	5	Усі елементи презентації пов'язані з ключовим питанням
	5	Місце в презентації використане відповідним чином, ефективно у належному форматі
	5	Тексти не мають орфографічних та граматичних помилок
	5	Зображення (рисунок, таблиці, розгортки, слайди) збагачують презентацію
	20	Усього за оформлення

По закінченні визначається найкраща підготовка в кількох номінаціях: «Краща модель», «Кращий слайд», «Краще пояснення», «Краща історична довідка».

Діяльність учнів та етапи проведення проєкту

На I етапі відбувається презентація теми майбутнього проєкту, обговорюються основні аспекти її реалізації, а саме – формуються групи за інтересами, обумовлюються джерела інформації.

Учні за бажанням об'єднуються у п'ять груп (по 5 чи 6 учнів у групі). Кожна група отримує своє завдання.

Презентація многогранників

Групи готують доповіді про правильні многогранники (їх елементи, кількісні характеристики), використовуючи історичні відомості.

Визначають напрям роботи і особисте завдання кожного члена.

I група «Правильний тетраедр».

II група «Правильний гексаедр».

III група «Правильний октаедр».

IV група «Правильний ікосаедр».

V група «Правильний додекаедр».

На II етапі діти працюють за джерелами інформації над розкриттям вибраної підтеми до основної теми проєкту. Робота відбувається індивідуально, в парах та колективним обговоренням відомостей, які отримані з переглянутої літератури чи Інтернету. На цьому етапі вчитель проводить консультації з членами груп щодо доцільності здобутого матеріалу. Відбувається корекція та подальший пошук інформації.

На III етапі проводиться оформлення матеріалів, узагальнення здобутих даних та аналіз нових фактів. У групах обговорюються результати роботи кожного члена команди. Повідомлення готується з урахуванням наочності та зацікавлення учнів інших груп.

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЄКТ «КУТИ В ПРОСТОРИ»

У профільній школі урок узагальнення та систематизації знань з геометрії в 10 класі пропонується провести з використанням методу проєктів. Цей проєкт передбачає представлення результату роботи за опорним конспектом у формі буклету.

УРОК-ПРОЄКТ

Тема. КУТИ В ПРОСТОРИ

Мета: узагальнити й систематизувати знання учнів з теми «Кути в просторі»; закріпити вміння та навички учнів розв'язувати задачі на знаходження кутів між прямою та площиною, між прямою та площинами; розвивати уяву, логічне мислення, нестандартне мислення; виховувати інтерес, уміння працювати в групі; ознайомити учнів з проектною технологією.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань.

Комплексне використання методів: робота в групах, проектна технологія.

Обладнання: стереометричний набір, підручник, схеми на дошці.

Структура уроку

1. Повідомлення теми та мети

2. Мотивація. Ознайомлення з методом проєктів.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Узагальнення та систематизація матеріалу (складання проєкту за планом).
5. Розв'язування вправ. Закріплення вмінь та навичок.
6. Підбиття підсумків уроку.
7. Домашнє завдання.
8. Оцінювання учнів.

ХІД УРОКУ

1. ПОВІДОМЛЕННЯ ТЕМИ ТА МЕТИ

2. МОТИВАЦІЯ

Під час вивчення стереометрії в 10 та 11 класах нам доведеться знаходити кути як між прямою та площиною, так і між площинами в одній задачі, застосовувати знання для вивчення інших тем. Тому сьогоднішній урок має велике значення. Крім того, сьогодні на уроці ми будемо складати проєкт, який має назву «Кути у просторі».

Скажіть, яка, на вашу думку, мета нашого проєкту? (*Це мета уроку*)

3. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

(*Підготовчий етап до складання проєкту*)

Метод «Незакінчене речення»

- 1) Якщо дві прямі перетинаються у просторі, то вони утворюють... (*Чотири кути*)
- 2) Кут між даними прямими – це... (*Кутова міра найменшого з них*)
- 3) Кут між прямими – це не фігура, а... (*Величина*)
- 4) Кут між мимобіжними прямими – це кут... (*Між прямими, що перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим*)
- 5) Дві прямі називаються перпендикулярними, якщо... (*Кут між ними дорівнює 90°*)
- 6) Перпендикуляром, опущеним з даної точки на площину, називається відрізок... (*Що сполучає дану точку з точкою на площині і лежить на прямій, що*

перпендикулярна до площини)

7) Відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром, називається... (Похилою)

8) Рівні похилі мають... (Рівні проєкції). Наведіть іншу властивість. (Більша похила має більшу проєкцію)

9) Проєкція – це... (Відрізок, який сполучає основу перпендикуляра та основу похилої)

Метод «Мікрофон»

1. Дано $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими AB_1 і AD_1 .

2. Дано $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Знайдіть кут між мимобіжними прямими AD_1 і $B_1 C$, якщо кут $\angle B_1 C B = 50^\circ$.

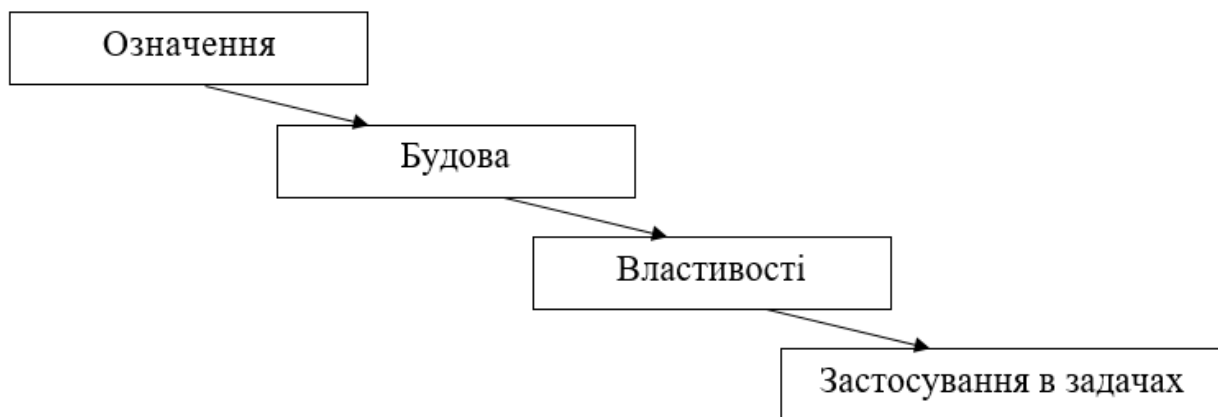
3. На рисунку покажіть похилу, її проєкцію та перпендикуляр.

Учням пропонується виділити в зошиті чисту сторінку для складання схеми-проекту, де робляться записи в процесі роботи на уроці.

4. УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ

(Клас об'єднується в чотири групи. Перша й друга складають проєкт з теми «Кут між прямою та площиною», а третя і четверта – «Кут між площинами»)

Схема складання проєкту (на дошці):

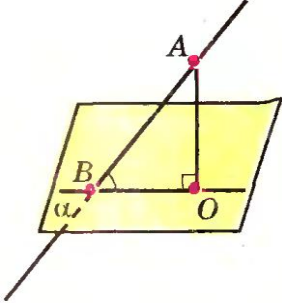
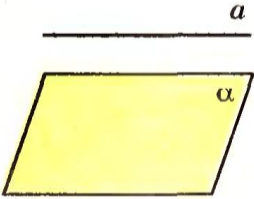
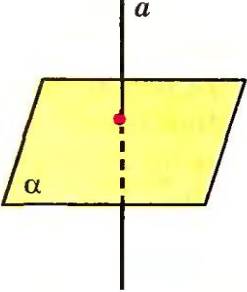


(На підготовку учням дається 3 хв.)

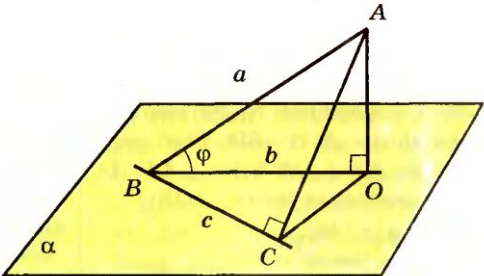
Група 1

1-й учень. Формулює означення. (Кут між прямою та площиною називається кут між цією прямою та її проекцією на площину).

2-й учень (креслить рисунок). Показує пряму, її проекцію, кут.

	<p>BO – проекція АВ на площину α, $AO \perp \alpha$; $\angle ABO$ – кут між прямою АВ і площиною α.</p>
<p>Особливі випадки</p>	
	$\frac{\alpha \perp \alpha}{a \text{ лежить в } \alpha} \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 0^\circ$
	$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 90^\circ$

3-й учень. Формулює теорему (властивість кута між прямою та площиною).

<p>Теорема. Кут між похилою та площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої</p>	
---	--

Учні розв'язують задачі на задану тему.

Група 2

4-й учень.

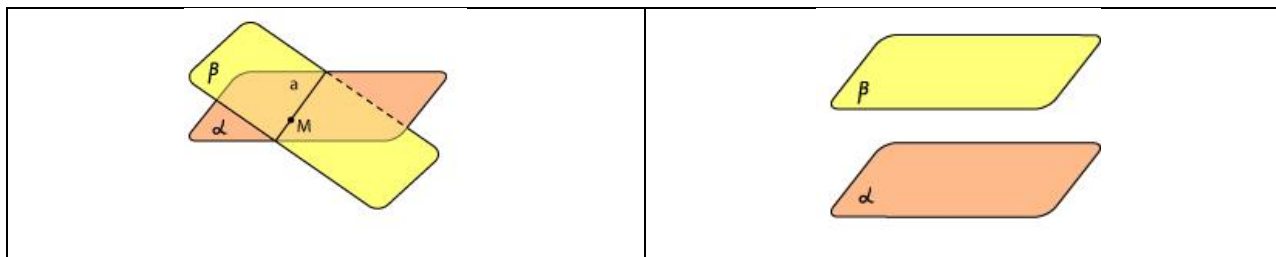
Задача 1. З точки P до площини β проведено похилу, яка утворює з площиною кут 30° . Знайдіть довжину похилої та відстань від точки P до площини β , якщо проекція похилої на площину дорівнює 6 см.

5-й учень.

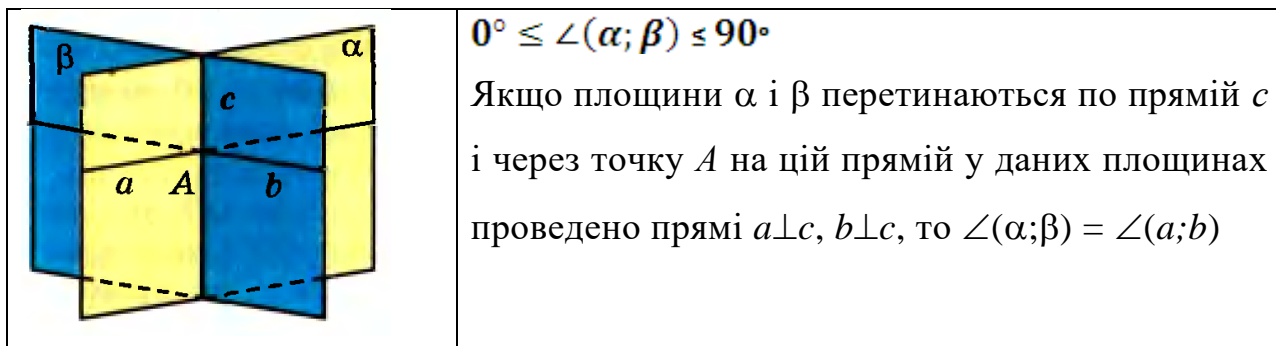
Задача 2. З точки M до площини α проведені похилі MB і MC , які утворюють з площиною кути по 30° . Знайдіть відстань від точки M до площини α , якщо $\angle BMC = 90^\circ$, а довжина відрізка BC дорівнює 8 см.

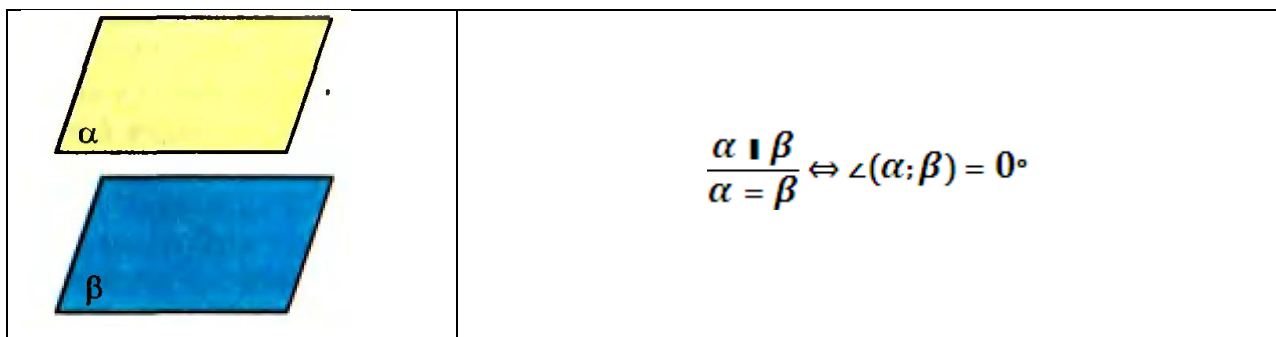
Група 3

6-й учень. Демонструє взаємне розташування двох площин у просторі.



7-й учень. Формулює означення: кутом між площинами, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину. Якщо площини паралельні, то кут між ними дорівнює нулю.





Група 4

Учні розв'язують задачі за темою.

8-й учень.

Задача 1. Площини α і β перетинаються по прямій a . У площині α вибрано точку K і з неї проведено перпендикуляр KM до площини β . Відстань від точки K до площини β дорівнює 3 см, а відстань від точки M до прямої a дорівнює 4 см. Знайдіть кут між площинами α і β .

9-й учень.

Задача 2. Кут між площинами рівнобедрених трикутників ABC і ABD дорівнює 60° (AB – спільна основа трикутників). Знайдіть відстань між точками C і D , якщо $AC = 10$ см, $AD = 17$ см, $AB = 16$ см.

5. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ.

Чи зрозуміли учні, у чому полягає метод проєктів?

(Учні обговорюють схему, яку намалювали під час роботи на уроці)



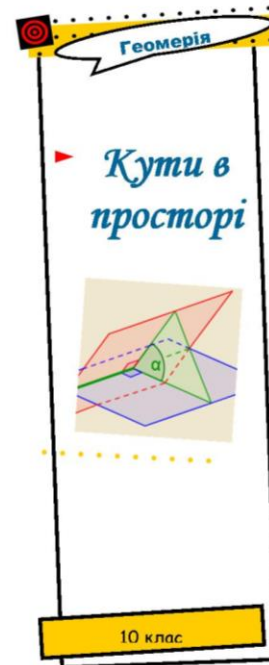
(Схема заповнюється впродовж уроку.)

6. ЗАВДАННЯ ДОДОМУ

Опрацювати схему в зошиті, представити буклет за опорним конспектом.

7. ОЦІНЮВАННЯ УЧНІВ

Буклет за прєєктом «Кути в просторі»



Кут між прямими

1. Прямі лежать в одній площині:

а) Прямі перетинаються

φ — найменший з утворених кутів
 $\angle(a; b) = \varphi$
 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$

б) Прямі паралельні

$\angle(a; b) = 0^\circ$
 $\varphi = 0^\circ$

в) Прямі перпендикулярні

$\angle(a; b) = 90^\circ$
 $\varphi = 90^\circ$

г) Прямі паралельні до однієї прямої

$a' \parallel a, b' \parallel b$
 $\angle(a; b) = \angle(a'; b') = \varphi$
 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$

д) Прямі перпендикулярні до однієї прямої

$\angle(a; b) = 90^\circ$
 $\varphi = 90^\circ$

Кут між прямою і площиною

BO — проекція АВ на площину α ,
 $AO \perp \alpha$;
 $\angle ABO$ — кут між прямою АВ і площиною α .

Особливі випадки:

$\alpha \parallel a$
 лежить в α $\Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 0^\circ$

$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 90^\circ$

Кут між площинами

$0^\circ \leq \angle(\alpha; \beta) \leq 90^\circ$

Якщо площини α і β перетинаються по прямій c і через точку A на цій прямій у даних площинах проведено прямі $a \perp c, b \perp c$, то $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$

$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \angle(\alpha; \beta) = 0^\circ$

**Методичний аналіз теми «Первісна. Невизначений інтеграл.
(виконала студентка М51 Побережна Валентина, 2023 р.)**

1. Зв'язки навчального матеріалу даної теми з іншими темами

Поняття похідної та інтеграла пронизує всю сучасну математику. Первісна та невизначений інтеграл мають широкий спектр застосувань в різних науках, включаючи фізику, економіку, інженерію та інші дисципліни. Ось декілька прикладів їх застосування:

Первісна:

Фізика: В фізиці первісна функція використовується для знаходження фізичних величин, які відповідають похідним. Наприклад, визначена первісна функції швидкості дозволяє знайти переміщення об'єкту. Первісна функція сили дозволяє знайти потенціальну енергію.

Економіка: В економічних моделях первісна функція може представляти собою функцію корисності або функцію витрат. Її використовують для аналізу та оптимізації економічних рішень, таких як максимізація корисності або мінімізація витрат.

Інженерія: У різних галузях інженерії, таких як електротехніка, механіка та контроль процесів, первісна функція допомагає знаходити аналітичні рішення для диференціальних рівнянь, які моделюють системи. Це дає змогу зрозуміти та прогнозувати поведінку системи.

Статистика: В статистиці первісна функція використовується для обчислення моментів випадкових величин, таких як середнє значення, дисперсія, скос та куртоз. Вона допомагає описати розподіл величини та знаходити статистичні характеристики.

Фінанси: У фінансових моделях первісна функція може використовуватись для оцінки фінансових інструментів, таких як опціони або облігації. Вона дозволяє визначити поточну вартість та ціну опціону на основі розрахункових параметрів.

Інтеграл:

Фізика: У фізиці інтеграли використовуються для обчислення фізичних величин, таких як маса, об'єм, центр мас, момент інерції, робота, енергія та імпульс.

Економіка: У економічних дослідженнях інтеграли використовуються для обчислення показників, таких як загальний попит або пропозиція, виробнича функція, функція корисності та інші. Вони допомагають визначити оптимальні рішення щодо виробництва, споживання та інвестицій.

Інженерія: У багатьох галузях інженерії, таких як механіка, електротехніка та контроль процесів, інтеграли використовуються для моделювання та аналізу систем. Наприклад, при розрахунку електричних колах застосовуються інтеграли для обчислення струму, напруги та потужності.

Статистика: У статистиці інтеграли використовуються для обчислення ймовірностей, функцій розподілу, середніх значень та інших характеристик випадкових величин. Вони є основними інструментами при аналізі даних та статистичному моделюванні.

Космонавтика: У дослідженнях космосу інтеграли використовуються для моделювання руху тіл у космосі.

2. Базові знання та вміння

Основна мета вивчення полягає у запровадженні поняття про первісну, інтеграл, операції інтегрування як оберненої до операції диференціювання; застосуванні інтеграла до обчислення площ криволінійних трапецій і об'ємів найпростіших тіл обертання.

Вимоги до знань і вмінь:

- знати означення первісної, інтеграла, розуміти зміст операції інтегрування як оберненої до операції диференціювання;
- уміти знаходити первісні та найпростіші інтеграли, користуючись таблицею і правилами знаходження первісних;
- уміти застосовувати інтеграл до обчислення площ криволінійних трапецій і об'ємів найпростіших тіл обертання.

3. Зв'язок з іншими темами

Аналіз теми демонструє встановлення логічної організації навчального матеріалу в темі, з'ясування, які твердження доводяться, які вводяться як факти, визначення рівня логічної строгості доведень, методів використаних для доведень, з'ясування математичних обґрунтувань виконуваних перетворень, досліджень, доведень, осмислення застосованих у темі математичних прийомів і методів.

Основною операцією диференціального числення є операція відшукування похідної f' заданої функції f . Під час розв'язування задач, зокрема з фізики і геометрії, доводиться виконувати обернену операцію, тобто за відомою похідною деякої функції визначати саму функцію. Тому темі "Первісна та інтеграл" передують теми "Похідна та її застосування". Така послідовність вивчення матеріалу створює передумови для:

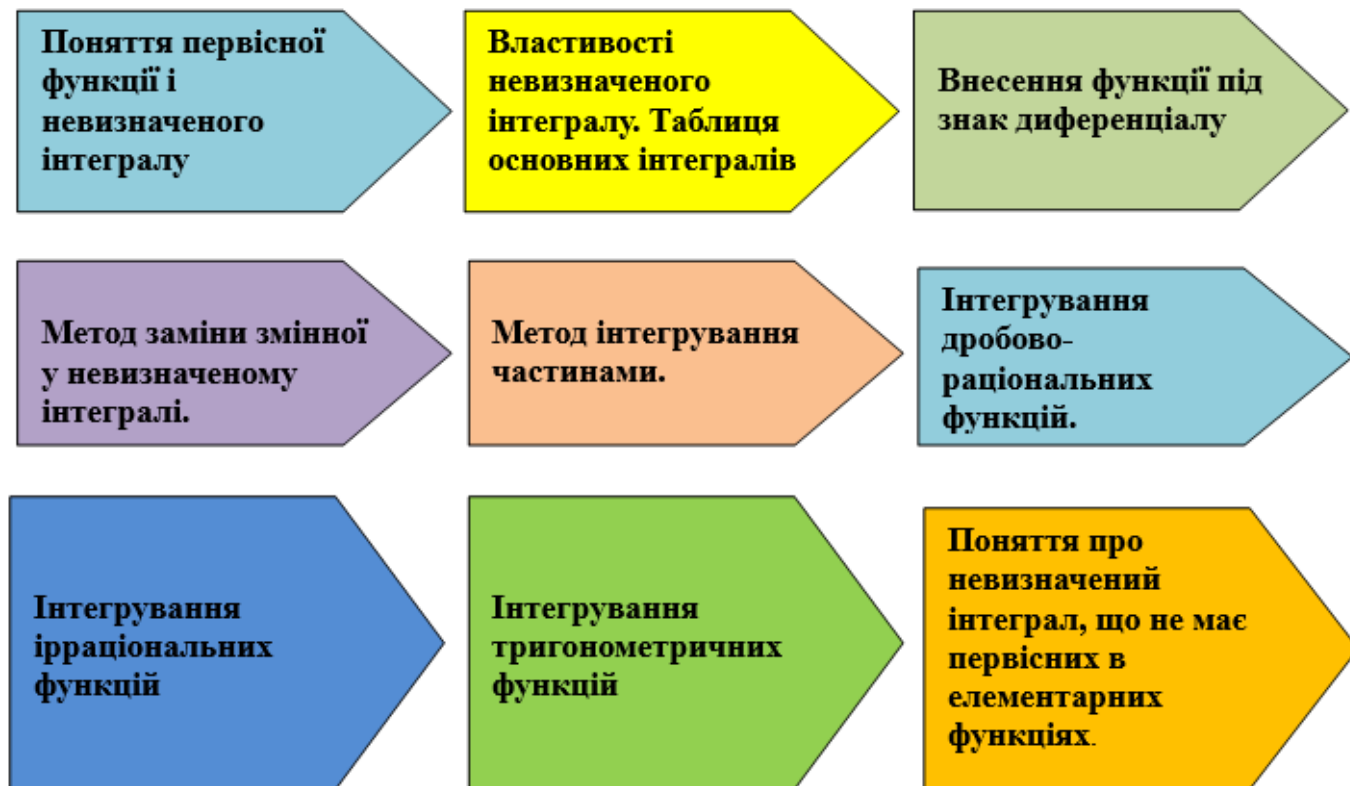
- 1) розуміння взаємозв'язку між операціями диференціювання та інтегрування функцій, а також основної ідеї методу диференціального й інтегрального числення;
- 2) усвідомлення того факту, що апарат похідної та інтеграла - основа методу математичного аналізу. З одного боку, він виступає як мова, що описує багато явищ, процеси світу. З іншого - як інструмент, за допомогою якого з урахуванням особливостей мови досліджуються ці явища і процеси

Студенти повинні володіти матеріалом, пов'язаним із диференційованим численням.

Базові знання і уміння студентів перед вивченням теми:

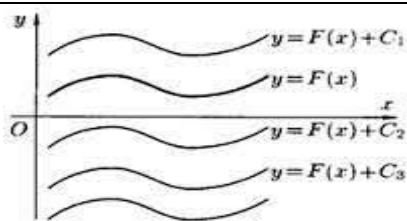
- знати означення похідної та таблицю похідних
- вміти використовувати різні правила та прийоми диференціювання для обчислення похідних та диференціалів
- знати застосування похідної.

4. Зміст теми



5. Теоретичний матеріал з теми

Означення первісної
<p>Функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.</p> <p>Функція $F(x)=x^2$ є первісною для функції $f(x)=2x$, оскільки $F'(x)=(x^2)'=2x=f(x)$</p>
Основна властивість первісної
<p>Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C – довільна стала, то $F(x)+C$ є також первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x)+C$, де C – довільна стала.</p>



Графіки будь-яких первісних одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ОУ.

Таблиця первісних

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0 dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Правила знаходження первісних

Первісна суми функцій дорівнює сумі первісних функцій: тобто якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ – первісна для функції $f(x)+g(x)$

• Наприклад.

Знайти загальний вигляд первісної для функції $x^3 + 7$

Розв'язання: Однією з первісних для функції x^3 є $\frac{x^4}{4}$, а для $7 - 7x$, то загальна первісна має вигляд

$$\frac{x^4}{4} + 7x + C$$

Сталий множник можна виносити за знак первісної, тобто якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ і C – стала, то $CF(x)$ – первісна для $Cf(x)$.

• Наприклад.

Знайти загальний вигляд первісної для функції $3\sin x$.

Розв'язання: Первісною для функції $\sin x$ є $-\cos x$. Тому первісна має загальний вигляд $-3 \cos x + C$.

<p>Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ і $k \neq 0$, b – стала, то $1/k F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$.</p>	<p>• <u>Наприклад.</u> Знайти загальний вигляд первісної для функції $4\cos(3x + 2)$. <i>Розв'язання:</i> 4 вносимо за знак первісної. Первісною від функції $\cos x$ є $\sin x$. Тому первісна має загальний вигляд $4 \cdot \frac{1}{3} \sin(3x + 2) + C = \frac{4}{3} \sin(3x + 2) + C$.</p>
--	---

Означення невизначеного інтегралу

Означення	Приклад
<p>Сукупність усіх первісних для даної функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x) dx$, тобто</p> $\int f(x) dx = F(x) + C,$ <p>де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.</p>	<p style="text-align: center;">$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$</p> <p>оскільки для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ всі первісні можна записати так: $\frac{x^4}{4} + C$ (див. пункт 2 табл. 18).</p>

4. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

<p>1. Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F + G$ — первісна для $f + g$. <i>Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.</i></p>	<p>1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ <i>Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.</i></p>
<p>2. Якщо F — первісна для f і c — стала, то cF — первісна для функції cf.</p>	<p>2. $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx,$ де c — стала. <i>Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.</i></p>
<p>3. Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ — первісна для функції $f(kx + b)$.</p>	<p>3. $\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$</p>

Таблиця інтегралів

$$1. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C,$$

$$2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0),$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C,$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1,$$

$$12. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$13. \int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C,$$

$$14. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Методи інтегрування

1. Метод безпосереднього інтегрування

Одним з найпростіших методів інтегрування є метод безпосереднього інтегрування, який полягає у використанні властивостей НІ та табличних інтегралів

Приклад

$$\begin{aligned} \int (2 + x + 4x^2) dx \\ &= \int 2 dx + \int x dx + \int 4x^2 dx = \\ &= 2x + \frac{x^2}{2} + x^4 + C \end{aligned}$$

$$\int (x-1)^2 dx = \int (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + x + C$$

2. Метод заміни змінної
Суть методу можна сформулювати в наступній теоремі

Теорема 1.1. Нехай функції $f(u)$ і $u = u(x)$ визначені на певних проміжках, причому $u = u(x)$ диференційована. Тоді,

Приклад

$$\begin{aligned} \int (2+x)^{21} dx &= \int (2+x)^{21} (2+x)' dx = \left. \begin{matrix} u = 2+x \\ du = (2+x)' dx \end{matrix} \right| = \\ &= \int u^{21} du = \frac{u^{21+1}}{21+1} + C : \end{aligned}$$

якщо $f(u)$ має первісну $F(u)$, то справедливо
 $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$.

Доведення. Оскільки функція $f(u(x))$ визначена, то буде визначеною і первісна $F(u(x))$. Нагадаємо, що похідна від складеної функції обчислюється за формулою
 $(F(u))' = F'(u)u'$.

Таким чином, продиференціювавши, отримаємо
 $(\int f(u(x))u'(x)dx)' = (F(u(x)) + C)'$;
 $f(u(x))u'(x) = (F(u(x))' + C)'$;
 $f(u(x))u'(x) = F'(u(x))u'(x)$;
 $f(u(x)) = F'(u(x))$.

Остання рівність є правильною в силу означення первісної. Що й потрібно було довести

$$\int x(x^2 - 1)^7 dx = \int (x^2 - 1)^7 \frac{(x^2 - 1)'}{2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 1 \\ du = (x^2 - 1)' dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int u^7 du = \frac{1}{2} \frac{u^8}{8} + C = \frac{(x^2 - 1)^8}{16} + C;$$

3. Інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами базується на формулі:
 $\int u dv = uv - v du$, де $u(x)$, $v = v(x)$ – дві неперервно диференційовані функції від x

Для застосування формули підінтегральний вираз потрібно розкласти на два множники, один з яких позначаємо як $u(x)$, другий – $dv(x) = v'(x)dx$. Після цього знайти $\int du(x) = u'(x)dx$, $v(x) = \int dv$, (можна вважати, що стала

Приклад

$$a) \int x^n \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x^n dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x -$$

$$- \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$$

<p>інтегрування $C = 0$) та підставити у праву частину формули</p> <p>Мета застосування методу інтегрування частинами – одержати праворуч у формулі інтеграл простіший ніж ліворуч.</p>	$\begin{aligned} \int x \cos 3x dx &= \left \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos 3x dx \\ du = dx \quad v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right = \\ &= \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C. \end{aligned}$
<p>Метод внесення під знак диференціала</p> <p>Елементарні функції можна внести під знак інтеграла. Цей прийом дозволяє значно спростити перетворення підінтегрального виразу з метою підведення його до табличного вигляду.</p>	<p>Розв'язання (в підінтегральній функції виділяється така її частина, яка при внесенні її під знак інтеграла дозволить отримати табличний інтеграл).</p> $\begin{aligned} 1) \int \cos^3 x \cdot \sin x dx &= \left \begin{array}{l} d(\cos x) = -\sin x dx \\ \sin x dx = -d(\cos x) \end{array} \right = -\int \cos^3 x \times \\ &\times d(\cos x) \stackrel{67.6}{=} \left \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C \right = -\frac{\cos^4 x}{4} + C. \\ 2) \int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x} &= \left d(\ln x) = \frac{1}{x} dx \right = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \\ &= \left \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + C \right = \\ &= \frac{(\ln x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2 \ln^2 x} + C. \end{aligned}$

6. Методичні особливості навчання

Поняття первісної вводиться так: знаючи похідні деяких функцій, доводиться розв'язати обернену задачу - з похідної відновити функцію. Розглянемо конкретний приклад: Похідною якої функції є $3x^2$, учні зразу ж здогадаються, що це x^3 . після розгляду кількох подібних прикладів слід сформулювати означення: F називається

первісною функцією функції f на заданому проміжку, якщо кожному x з цього проміжку: $F'(x) = f(x)$

Наступним етапом повинно бути з'ясування неоднозначності первісної. Спочатку треба розглянути декілька прикладів. Далі формулюємо основні властивості первісної: якщо на деякому проміжку для функції f первісною є F , то первісною для неї на цьому проміжку є також функція $F + c$, де $c = \text{const}$. (ВАЖЛИВО: в будь-якому невизначеному інтегралі до відповіді приплюсовується C)

Надалі необхідно розібратися у позначках та термінах: \int – значок інтеграла, $f(x)$ – підінтегральна функція і т.д. Роз'яснюємо, що розв'язати невизначений інтеграл (не обов'язково табличний) це означає перетворити його на певну множину функцій, користуючись деякими правилами, прийомами та таблицею, а не якусь одну функцію.

Пояснення мають бути чіткими, зрозумілими та аргументованими. Важливо донести, що знаходження похідних та знаходження невизначених інтегралів (диференціювання та інтегрування) – це дві взаємно зворотні дії. Інакше кажучи, якщо продиференціювати правильну відповідь, то обов'язково має вийти підінтегральна функція. Цей метод можна використовувати як засіб перевірки зроблених обчислень.

Можна донести, що на жаль, немає хороших і зручних формул для інтегрування добутку та суми: Тому, якщо є можливість, спочатку необхідно перетворити підінтегральну функцію, для спрощення обчислень.

Ознайомлюючи з методами інтегрування потрібно чітко показати їх зміст, особливості та умови використання. Обчислення бажано виконувати з коментуванням:

Внесення функції під знак диференціалу використовується, коли у таблиці інтегралів є схожа формула, але дано складний вираз. Наприклад:

функцію $(3x + 1)$ під знак диференціалу.

$$d(3x + 1) = (3x + 1)' dx = 3 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{d(3x + 1)}{3}$$

$$\int \sin(3x + 1) dx = \int \sin(3x + 1) \cdot \frac{d(3x + 1)}{3} = \frac{1}{3} \int \sin(3x + 1) \cdot d(3x + 1) =$$

Тепер можна користуватися табличною формулою:

$$= -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C$$

При методі заміни змінної у невизначеному інтегралі здійснюється прямий перехід до нової змінної. Ідея методу заміни полягає в тому, щоб складний вираз замінити однією літерою. Для використання методу заміни змінної: у підінтегральному виразі має знаходитися деяка функція та її похідна: $\int \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx$.

Як ми вже говорили, для вирішення цього інтеграла нам треба таблична формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

$$\int \sin(3x + 1) dx = \left[\begin{array}{l} 3x + 1 = t \\ d(3x + 1) = dt \\ (3x + 1)' dx = dt \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3} dt = \frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \cos t + C = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x + 1) + C$$

Спростити інтеграл це і є мета заміни!

Метод інтегрування частинами дозволяє проінтегрувати деякі функції, яких немає у таблиці, деякий добуток функцій та деякі дроби. Для всіх перелічених випадків існує один-єдиний інструмент, який називається формула інтегрування частинами: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Важливо зауважити, що використати цей метод можна не завжди.

Частинами беруться інтеграли наступних видів:

1. Логарифми та логарифми помножені на багаточлен. Логарифм не обов'язково є натуральним.

$$\int \ln x \, dx, \quad \int (x^2 + 3) \cdot \ln x \, dx, \quad \int x \cdot \ln^2 x \, dx$$

Правило: В інтегралах такого типу за u завжди позначається логарифм.

2. Добуток показникової (експоненціальної) функції та багаточлена.

$$\int x \cdot e^x \, dx, \quad \int (x^2 - 2x + 3) \cdot e^{-2x} \, dx, \quad \int x \cdot 4^x \, dx$$

Правило: За u завжди позначається багаточлен.

3. Тригонометричні функції помножені на будь-який багаточлен.

$$\int x \cdot \cos 6x \, dx, \quad \int x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx, \quad \int (x^2 + 5x) \cdot \sin 2x \, dx$$

Правило: За u завжди позначається багаточлен.

4. Обернені тригонометричні функції помножені на багаточлен.

$$\int \arcsin x \, dx, \quad \int x^2 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$$

Говорячи про тригонометричні інтеграли, слід зауважити, що у багатьох інтегралах тригонометричні функції знаходяться в будь-яких степенях. Такі інтеграли розв'язуються методом пониження степені, використанням основної тригонометричної тотожності, формул універсальної тригонометричної підстановки. Обов'язково слід наголосити та нагадати про парність та непарність даних функцій.

Методично правильне пояснення сприяє ефективному засвоєнню знань учнями.

4. Типові вправи з теми:

Первісна

Завдання 1

Встановити відповідність між функціями $f(x)$ та їх первісними $F(x)$:

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $f(x) = \cos 0,25x + \sin 4x$ | A | $F(x) = \sin 0,25x - \cos 4x + C$ |
| 2. $f(x) = \cos 4x + \sin 0,25x$ | B | $F(x) = 4 \sin 0,25x - 4 \cos 0,25x + C$ |
| 3. $f(x) = 0,25 \cos 0,25x + 4 \sin 4x$ | C | $F(x) = \sin 4x - \cos 0,25x + C$ |

4. $f(x) = 4\cos 4x + 0,25\sin 0,25x$ D $F(x) = 0,25\sin 4x - 4\cos 0,25x + C$

E $F(x) = 4\sin 0,25x - 0,25\cos 4x + C$

Враховуючи правила знаходження первісної складної функції, маємо такі правильні відповідності: 1 – E; 2 – D; 3 – A; 4 – C

Завдання 2

Для функції $y = 4x^3 - 2x - 3$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку: A(-1; -3).

Розв'язання

Знайдемо загальний вигляд первісної функції $y = 4x^3 - 2x - 3$:

$$F(x) = x^4 - x^2 - 3x + C.$$

Підставимо замість $F(x)$ значення ординати точки A, замість x – значення абсциси:

$$-3 = (-1)^4 - (-1)^2 - 3(-1) + C; \quad C = -3 - 3; \quad C = -6;$$

$$F(x) = x^4 - x^2 - 3x - 6. \quad \text{Відповідь: } F(x) = x^4 - x^2 - 3x - 5.$$

Завдання 3.

Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6t - t^2$ (м/с). Знайти шлях, пройдений тілом від початку руху до його зупинки.

Розв'язання

Знайдемо, час, коли зупиниться тіло. Швидкість у цей момент дорівнює нулю. Отже для початку розв'яжемо рівняння:

$$6t - t^2 = 0; \quad t(6 - t) = 0; \quad t = 0 \text{ або } 6 - t = 0; \quad t = 0 \text{ або } t = 6.$$

Тобто тіло зупиниться через 6 секунд після початку руху.

Знайдемо загальний вигляд первісної функції та шукану відстань, використовуючи формулу: $S = S(6) - S(0)$; $S(t) = 3t^2 - t^3/3 + C$; $S(0) = 0$, $S(6) = 3 \cdot 36 - 216/3 = 108 - 72 = 36$ (м).

Відповідь: 36м

Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$, якщо:

1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + C$, $f(x) = 3x^2 - 6x$, $x \in R$;

2) $F(x) = \sqrt{2x-3} + C$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + C$, $x > 1,5$;

$$3) F(x) = \cos \frac{x}{5} + C, f(x) = -5 \sin \frac{x}{5}, x \in R.$$

Безпосереднє інтегрування

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int (3x^2 - 2x - 1) dx$.

Використовуючи формули $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$. І $\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$ знаходимо:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x - 1) dx &= \int 3x^2 dx - \int 2x dx - \int 1 dx = 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx - \int dx = 3 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} - x + c = \\ &= x^3 - x^2 - x + c. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл: $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$.

Скориставшись формулою $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, зводимо під інтегральний вираз до табличного:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = \int 2 \cos x dx = 2 \int \cos x dx = 2 \sin x + C.$$

1. $\int (3x + 4)^4 dx = \frac{1}{3} \int (3x + 4)^4 d(3x + 4) = \frac{1}{3} \frac{(3x + 4)^5}{5} + C$
2. $\int \sqrt{2x + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2x + 1)^{3/2}}{3} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x + 1)^3} + C$
3. $\int \frac{dx}{3x - 2} = \frac{1}{3} \ln |3x - 2| + C.$
4. $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$
5. $\int \sin(2x - 3) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x - 3) + C$
6. $\int \cos \frac{x}{3} dx = 3 \sin \frac{x}{3} + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2(4x - 2)} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}(4x - 2) + C$
8. $\int \operatorname{tg}(2 - 3x) dx = \frac{1}{3} \ln |\cos(2 - 3x)| + C$
9. $\int \frac{x dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$
10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}} = \frac{1}{3} \arcsin x^3 + C$
11. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}} = \arcsin \ln x + C$
12. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 4}} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + \sqrt{x^4 + 4}| + C;$

Метод заміни змінної

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \left. \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = \\
 &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2 \ln |t+1| + C = \\
 &= 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \left. \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = 6 \int \frac{t^5}{t^3 - t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t-1} dt = 6 \int \frac{(t^3-1)+1}{t-1} dt = \\
 &= 6 \int \left(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = 6 \int (t^2 + t + 1) dt + 6 \int \frac{1}{t-1} dt = \\
 &= 6 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right) + C = \\
 &= 6 \left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln |\sqrt[6]{x} - 1| \right) + C.
 \end{aligned}$$

$$13) \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctan^2 x} = \int \arctan^2 x \frac{dx}{x^2+1} = \left. \begin{array}{l} v = \arctan x \\ dv = \frac{dx}{x^2+1} \end{array} \right\} = \int v^{-2} dv = \frac{v^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{\arctan x} + c.$$

14)

$$\int \frac{e^x dx}{1-5e^{2x}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{5}e^x = v \\ dv = \sqrt{5}e^x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}e^x dx}{1-(\sqrt{5}e^x)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| + c = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}e^x}{1-\sqrt{5}e^x} \right| + c$$

$$15) \int 2^{3x} dx = \left. \begin{array}{l} v = 3x \\ dv = 3dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int a^v dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^v}{\ln a} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} + c.$$

$$16) \int 5^{\ln x} \frac{dx}{x} = \left. \begin{array}{l} v = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \frac{5^v}{\ln 5} + c.$$

$$17) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left. \begin{array}{l} v = \sqrt{x} \\ dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} = 2 \int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x} + c.$$

$$18) \int e^{-3x} dx = \left. \begin{array}{l} v = -3x \\ dv = -3dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c.$$

$$19) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}} = \left. \begin{array}{l} v = \cos x \\ dv = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -2\sqrt{v} + c = -2\sqrt{\cos x} + c.$$

$$20) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left. \begin{array}{l} v = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\sqrt{v} + c = 2\sqrt{\ln x} + c.$$

$$21) \int \frac{dx}{5x+1} = \left. \begin{array}{l} v = 5x+1 \\ dv = 5dx \end{array} \right\} = \frac{1}{5} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{5} \ln |v| + c = \frac{1}{5} \ln |5x+1| + c.$$

$$22) \int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx = \left. \begin{array}{l} v = x^3+x \\ dv = (3x^2+1)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dv}{v} = \ln |v| + c = \ln |x^3+x| + c.$$

Інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^n \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x^n dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \\ &- \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int x \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos 3x dx \\ du = dx \quad v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

в) для обчислення інтеграла $\int e^x \cos x dx$ двічі застосовується формула (4), в результаті чого дістанемо лінійне рівняння відносно заданого інтеграла, який позначимо через I .

Приклад 6. Знайти інтеграл: $\int x e^x dx$.

$$\begin{aligned} I = \int e^x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad dv = \cos x dx \\ du = e^x dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad dv = \sin x dx \\ du = e^x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) = \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Отже маємо рівняння

$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$, розв'язуючи яке дістанемо

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

г) для обчислення інтеграла $\int x^2 e^x dx$ двічі застосовується формула (4).

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = e^x dx \\ du = 2x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^x dx \\ du = dx; \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 1) + C. \end{aligned}$$

1. Вправи для самостійної роботи

Знайти первісні для функцій:

1) $y = x^7$;

2) $y = (3x - 1)^7$;

3) $f(x) = 6x^2 - 3x + 1$;

4) $f(x) = \frac{3}{x^5} + \frac{4}{x^3} + 2$;

5) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$;

6) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

7) $y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$;

$$8) f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{x}{4} - 1\right)}.$$

Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

$$а) f(x) = 2x^5 - 5x^2; \quad б) f(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \quad в) f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}; \quad г) f(x) = 5 \cdot \sqrt[4]{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

$$а) f(x) = 5\cos x - 3\sin x; \quad б) f(x) = 2e^x + 3\cos x; \quad в) f(x) = \frac{4}{x} + 10^x;$$

$$г) f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}.$$

$$3. \text{ Знайдіть невизначені інтеграли: } а) \int (5x^4 + 2x^3) dx; \quad б) \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} \right) dx;$$

$$в) \int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}) dx; \quad г) \int (4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}) dx.$$

4. Знайдіть невизначені інтеграли:

$$а) \int (e^x - 2\cos x) dx; \quad б) \int (3e^x - \sin x) dx;$$

$$в) \int \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x \right) dx; \quad г) \int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{3}{x} - 2e^{-x} \right) dx.$$

5. Знайдіть невизначені інтеграли:

$$а) \int (2x - 3)^5 dx; \quad б) \int (4 - 5x)^7 dx; \quad в) \int 5\cos 3x dx;$$

$$г) \int 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx; \quad д) \int \frac{4dx}{(3x - 1)^2}; \quad е) \int \frac{3dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$$

$$1) \int (x^2 + 1)^4 x dx; \quad 2) \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}; \quad 3) \int \frac{dx}{4 - 3x^2}; \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x^2}};$$

$$5) \int x\sqrt{x} dx; \quad 6) \int \sqrt[3]{x} dx; \quad 7) \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}; \quad 8) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad 9) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$10) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4 - \cos x}}; \quad 11) \int \frac{dx}{2 + 3x}; \quad 12) \int \frac{e^x dx}{3 - 4e^x}; \quad 13) \int \frac{\sin x dx}{2 + 3\cos x};$$

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях : навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Базовий рівень підготовки / І. В. Лов'янова. – 3-тє видання, доповнене і перероблене. – Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет, 2022. – 128 с.
2. Моторіна В.Г. Методика вивчення математичних понять, тверджень. Задачі як засіб навчання математики. Сучасна математична освіта: методологія, теорія, практика: колективна монографія / за загальною редакцією проф. Жерновникової О. А. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2021. 250 с. С. 162-180.
3. Теорія і методика викладання в вищій школі. Конспект лекцій з навчальної дисципліни : навч. посіб.; укладач І. О. Козак. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 116 с. URL: https://cpsm.kpi.ua/Doc/pvsh_lek_phd.pdf
4. Стинська В.В. Методика викладання у вищій школі: навчальний посібник. Івано-Франківськ, 2022. – 180 с. URL: <http://surl.li/krkmb>

Допоміжна література

1. Клепко В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ: Центр навчальної літератури, 2019. 594 с.
2. Мальчиков В.В., Третиник В.В., Костенко К.О. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Частина 1. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 194 с.
3. Попов В. Г., Кирилова О. І. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних : навч. посібник. Одеса : НУ «ОМА», 2017. 236 с.
4. Попов В. Г., Кирилова О. І. Інтегральне числення та його застосування. Навчальний посібник. Одеса : НУ «ОМА», 2019. 136 с.