МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ЦИФРОВІЗАЦІЇ ОСВІТИ НАПН УКРАЇНИ
Державний заклад
ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені К. Д. Ушинського

МАТЕРІАЛИ ДЕВ'ЯТОЇ МІЖНАРОДНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ З АДАПТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ УПРАВЛІННЯ НАВЧАННЯМ ATL-2023

25 – 27 жовтня 2023 р.

Одеса – 2023

Друкується за рішеннями:
Вченої ради НПУ імені К. Д. Ушинського (протокол №4 від 30.11.2023)
Вченої ради Інституту цифровізації освіти НАПН України
(протокол №15 від 30.11.2023)

А28 ***Адаптивні технології управління навчанням**: збірник матеріалів дев'ятої міжнародної конференції.* Одеса-Київ, 25–27 жовтня 2023 р. – Київ: ІЦО НАПН України, 2023. 92 с.

ISBN 978-617-8330-10-1

Організатори конференції започаткували традицію обміну досвідом зі створення та використання адаптивних технологій управління навчанням. У конференції приймають участь науковці України, Словенії, Ізраїлю, Литви, Казахстану, Болгарії, Латвії.

Тематика конференції охоплює наступне коло питань: психолого-педагогічні проблеми адаптивного навчання; інформаційні та інтелектуальні технології в управлінні навчанням; методика адаптивного навчання інформатиці у ВНЗ та школі; освітні вимірювання в адаптивному управлінні; адаптивні технології соціальної інформатики; системи управління контентом.

ISBN 978-617-8330-10-1

УДК 372.851

ГЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ НА ОЛІМПІАДАХ ШКОЛЯРІВ З МАТЕМАТИКИ

Сапрікін С. М., Цикалюк В. І.

Університет Ушинського

Анотація. Сапрікін С.М., Цикалюк В.І. Методи доведення геометричних нерівностей на олімпіадах школярів з математики. Розглянуто деякі методи та прийоми розв’язування задач на доведення геометричних нерівностей, що зустрічаються на Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики.

Ключові слова: геометричні нерівності, учнівські олімпіади з математики.

Summary. Saprikin S.M., Tsykaliuk V.I. Methods of proving geometric inequalities in mathematical Olympiads for pre-college students. Some methods and techniques for solving problems on proving geometric inequalities in Ukrainian Olympiads in mathematics for pre-college students are considered.

Key words: geometric inequalities, mathematical Olympiads.

В галузі математики, де геометрія і алгебра спільно ткались в єдину тканину, існує захоплива область вивчення, в якій абстрактні числа і геометричні об'єкти взаємодіють, розкриваючи перед нами фундаментальні закони та властивості. Ця область включає в себе тему "Геометричні нерівності ". Ця тема відкриває широкі можливості для застосування та розвитку аналітичних та геометричних навичок школярів на олімпіадах.

Олімпіади з математики завжди відзначались нестандартністю та складністю завдань, які вони пропонують учасникам. Одним з цікавих типів завдань, що пропонуються на математичних змаганнях, є завдання, пов'язані із доведенням геометричних нерівностей. Запропоновані завдання такого типу не лише спонукають учасників до заглиблення в математичній теорії, а й вимагають від них застосувати творчий та нетрадиційний підхід до розв’язування, відкривають перед молоддю нові горизонти математичної майстерності. У цьому контексті, аналізуючи завдання українських учнівських олімпіад з математики, ми виділили спеціальні методи та прийоми, які є характерними розв'язуванні завдань, пов'язаних з геометричними нерівностями.

Олімпіадні задачі, що стосуються геометричних нерівностей, можна поділити на дві групи: задачі, умова яких безпосередньо пов’язана з геометричними об’єктами, і задачі, в умові яких формально ніяких геометричних об’єктів немає, але геометрична інтерпретація умови суттєво спрощує розв’язання. Проілюструємо сказане прикладами.

1. Геометрична інтерпретація умови.

Найчастіше в таких завданнях потрібна нерівність (яка формально суто алгебраїчна) зводиться до нерівності трикутника.

Приклад. Для довільних чисел x, y доведіть нерівність

$$\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} \le \sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}+20$$

([1], 9 клас, задача 2)

Для розв'язання цієї задачі на вирази, наведені в умові, потрібно подивитись як на відстані між точками площини з певними координатами. А саме, розглянемо точки *A(-4,-2), B(2,6), C(5,6) D(5,-4)* та *M(x;y)* на координатній площині.

Тоді наведену в умові нерівність можна записати таким чином таким чином: $MA + MD - MB - MC \leq 20$.

Знайдемо найбільше можливе значення виразу

$$S(M) = MA + MD - MB - MC.$$

Згідно з нерівністю нерівності трикутника, $MA - MB \leq AB$ *і* $MD - MC \leq CD$.

Отже, справджується нерівність:

$$S(M) = (MA - MB) + (MD - MC) \leq AB + CD.$$

Знайдемо довжину відрізків AB та CD:

$$AB = \sqrt{(2+4)^2 + (6+2)^2} = 10,$$

$$CD = \sqrt{(5-5)^2 + (-4-6)^2} = 10.$$

Отже, $S(M) \leq 20$.

Виконаємо ще одну додаткову побудову – точку X, яка є точкою перетину прямих AB і CD. Очевидно, що для цієї точки

$$S(X) = (XA - XB) + (XD - XC) = AB + CD = 20.$$

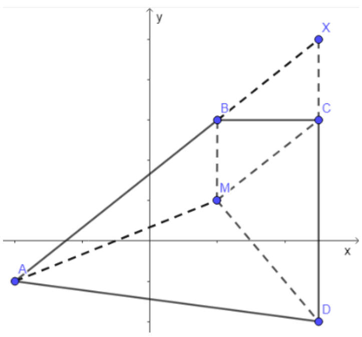
2. В умові задана нерівність для геометричних об'єктів.

Приклад. Довести нерівність $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, де S – площа трикутника, p – його півпериметр. ([2], задача 18.13)

Одним з можливих шляхів доведення таких нерівностей полягає в зведенні всіх величин до однакових елементів з подальшим застосуванням однієї з класичних нерівностей, в нашому прикладі – нерівності Коші для середніх.

За формулою Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Після цього виразимо значення $\frac{S^2}{p}$ у вигляді $\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$. Далі використаємо нерівність Коші для середнього арифметичного та середнього геометричного:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3.$$



Оскільки $\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$, то $\frac{S^2}{p} \leq \frac{p^3}{27}$. Звідси випливає потрібна нерівність.

Література

1. LXXVII Київська міська олімпіада юних математиків [Електронний ресурс] URL: https://bit.ly/3tkYXlC.
2. Федак, І. В., Готуємося до олімпіади з математики: Ч.ІІ. Геометрія та нестандартні конструкції. [Електронний ресурс] URL: https://bit.ly/3ts9WcT.