

Державний заклад «Південноукраїнський національний університет імені  
К. Д. Ушинського»

Фізико-математичний факультет  
Кафедра фізики

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДО ДИСЦИПЛІНИ  
«ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА (ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ)»**

для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності  
014 Середня освіта (Фізика)

м. Одеса 2023

**УДК: 378.147:537.**

Рекомендовано до друку вченою радою  
Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний  
університет імені К. Д. Ушинського»  
Протокол від «\_\_\_» вересня 2023 року № \_\_\_

**РЕЦЕНЗЕНТИ:**

**Гоцульській В. Я.** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики та астрономії Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

**Шевчук В. Г.** – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики та астрономії Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

**Укладачі:**

**Шкатуляк Н. М.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики, **Усов В. В.** – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри технологічної та професійної освіти

Навчальний посібник до навчальної дисципліни «Загальна фізика (Електрика та магнетизм)» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня спеціальності 014 Середня освіта (Фізика) / укладачі Н. М. Шкатуляк, В. В. Усов. – Одеса : Університет Ушинського, 2023. – 178 с.

*У посібнику викладено основні теоретичні та експериментальні відомості про такі питання: електричне поле у вакуумі та в діелектриках, провідники в електричному полі, постійний електричний струм, магнітне поле в вакуумі, магнітне поле в речовині, електромагнітна індукція, рівняння Максвелла, електромагнітні коливання і змінний струм. Навчальний посібник дозволить скласти уявлення про процеси і закономірності, що визначають виникнення та властивості електричного та магнітного полів та їх взаємозв'язку, властивості електро та радіо матеріалів, поведінки магнітних матеріалів у магнітному полі, електромагнітної індукції, а також набути певних практичних навичок аналізу електричних та магнітних явищ речовини шляхом розв'язання задач та відповідей на контрольні запитання.*

*Навчальний посібник розрахований на здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за ОПП «014 Середня освіта. Фізика» для самостійного поглибленого вивчення курсу.*

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ.....	7
1.1 Електричний заряд.....	7
1.2. Закон Кулона.....	9
1.3. Електричне поле. Напруженість поля.....	10
1.4. Потенціал електричного поля.....	12
1.5. Властивості векторних полів.....	16
1.6. Зв'язок між напруженістю поля і потенціалом.....	20
1.7. Теорема Гаусса.....	21
1.8. Розрахунок векторних полів за теоремою Гаусса.....	24
1.8.1. Поле рівномірно зарядженої сфери.....	24
1.8.2. Поле нескінченної рівномірно зарядженої нитки.....	25
1.8.3. Поле рівномірно зарядженої нескінченної площини.....	27
1.8.4. Поле двох паралельних нескінченних рівномірно площин.....	28
Питання для самоперевірки.....	31
2. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ.....	32
2.1. Полярні діелектрики.....	35
2.2.Неполярні діелектрики.....	36
2.3. Іонні кристали.....	37
2.4.Сегнетоелектрики і п'єзоелектрики.....	39
Питання для самоперевірки.....	42
3. ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ.....	42
3.1. Електроємність.....	44
3.2. Конденсатори.....	45
3.3. Енергія електричного поля.....	48
3.4. Енергія заряджених провідників і конденсатора.....	49
Питання для самоперевірки.....	53
4. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ.....	53

	4
4.1. Закон Ома для однорідної ділянки кола (в інтегральній формі).....	55
4.2. Закон Ома для неоднорідної ділянки і для замкненого ланцюга.....	56
4.3. Закон Джоуля-Ленца.....	59
4.4. Правила Кірхгофа.....	60
4.5. Класична електронна теорія металів.....	64
4.6. Закони Ома і Джоуля-Ленца у диференціальній формі.....	67
4.7. Закони Ома і Джоуля-Ленца за електронною теорією.....	68
4.8. Основні висновки з класичної електронної теорії.....	71
Питання для самоперевірки.....	73
Задачі для самостійного розв'язування з електрики.....	74
5. МАГНЕТИЗМ.....	75
5.1. Магнітне поле.....	75
5.2. Закон Біо-Савара-Лапласа.....	80
5.2.1. Магнітне поле нескінченного прямолінійного провідника зі струмом.....	81
5.2.2. Магнітне поле в центрі прямокутної рамки зі струмом.....	83
5.2.3. Магнітне поле кругового струму.....	84
5.3. Магнітний потік. Теорема Гаусса для магнітного поля.....	85
5.4. Циркуляція вектора магнітної індукції. Магнітне поле соленоїда.....	86
Питання для самоперевірки.....	95
6. ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ СИЛИ МАГНІТНОГО ПОЛЯ.....	96
6.1. Рамка зі струмом в магнітному полі.....	99
6.2. Сила Лоренца.....	100
6.3. Ефект Холла.....	102
Питання для самоперевірки.....	108
7. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ.....	109
7.1. Феромагнетики.....	111
Питання для самоперевірки.....	120
8. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА.....	121
8.1. Електромагнітна індукція.....	121

8.2. Правило Ленца.....	123
8.3. Явище самоіндукції. Індуктивність.....	126
8.4. Взаємна індукція.....	128
8.5. Енергія магнітного поля.....	131
Питання для самоперевірки.....	134
9. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА.....	135
9.1. Система рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формі..	141
9.2. Класифікація задач електродинаміки.....	146
Питання для самоперевірки.....	147
Задачі для самостійного розв'язування з магнетизму.....	148
10. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ЗМІННИЙ СТРУМ.....	149
10.1. Ланцюг змінного струму з активним опором і індуктивністю.....	150
10.2. Ланцюг змінного струму з індуктивним опором.....	153
10.3. Ланцюг змінного струму з активним опором і індуктивністю.....	158
10.4. Ємнісний опір.....	161
10.5. Ланцюг змінного струму з конденсатором.....	162
10.6. Ланцюг змінного струму з активним опором і ємністю.....	164
10.7. Коливальний контур.....	165
10.7.1. Послідовний контур.....	165
10.7.2. Паралельний контур.....	168
10.8. Умови виникнення в контурі незгасаючих коливань.....	172
Питання для самоперевірки.....	173
ДОДАТОК.....	174
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	177

## ВСТУП

Курс «Загальна фізика» є базовим для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю «014 Середня освіта (Фізика)» і складається з шести розділів: «Фізичні основи механіки», Молекулярна фізика та термодинаміка», «Електродинаміка», «Оптика», «Квантова фізика», «Атомна та ядерна фізика». Відомо, що розділ «Електродинаміка» містить два підрозділи: «Електрика» та «Магнетизм». Зазначені розділи фізики мають певні труднощі для опанування здобувачами відповідними знаннями, вміннями та компетентностями, зокрема щодо електромагнітної теорії поля, природи магнетизму та магнітних властивостей речовини. Запропонований навчальний посібник «Загальна фізика (електрика та магнетизм)» спрямований на полегшення опанування необхідним матеріалом з електрики та магнетизму шляхом самостійної поглибленої підготовки здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю «014 Середня освіта (Фізика)». У основу посібника покладено модульний курс, складений відповідно до вимог державного стандарту, що включає такі етапи: вивчення теоретичного матеріалу, його осмислення і закріплення, набуття та розвиток відповідних компетентностей.

Для реалізації поставленого завдання у посібнику викладені теоретичні основи та матеріал з практичної підготовки у вигляді розв'язання задач з таких розділів: електричне поле у вакуумі, електричне поле в діелектриках, провідники в електричному полі, постійний електричний струм, магнітне поле в вакуумі, магнітне поле в речовині, електромагнітна індукція, рівняння Максвелла, електромагнітні коливання і змінний струм. Після кожного вищезазначеного розділу запропоновано контрольні питання з відповідної теми, що сприятиме більш ретельному самостійному вивченню відповідних навчальних тем. В посібнику передбачено розв'язання студентами задач з відповідних тем. З цієї метою в посібнику приведено приклади розв'язання аналогічних задач. Розв'язання супроводжуються детальними настановами, представлено необхідний довідковий матеріал.

## ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

### 1.1. Електричний заряд.

Всі тіла в природі здатні набувати електричний заряд, наявність якого виявляється по силі взаємодії між зарядженими тілами. Електричний заряд є фундаментальною властивістю мікрочастинок: електронів, позитронів, протонів, антипротонів, пі-мезонів, К-мезонів,  $\tau$  і  $\mu$ -мезонів та інших. Електричний заряд існує у двох видах, які умовно називають позитивними і негативними. Це вперше встановив Ш.Дюфе у 1733р. Він назвав ці два різні види електрики: «скляна» та «смоляна» електрика.

Заряди однакових знаків відштовхуються, а протилежних притягуються.

Першу теорію електрики створив Б. Франклін у 1749р. Він же ввів уявлення про позитивний (надлишок електричної рідини) і негативний заряд (нестачі електричної рідини). Надалі, щоб не змінювати маркування генераторів і усталену термінологію довелося електронам приписати негативний заряд.

Франклін першим висунув гіпотезу про збереження електричного заряду. Але тільки Фарадей у 1843р. сформулював та експериментально довів цей закон: *У будь-якій електрично ізольованій системі алгебраїчна сума зарядів не змінюється.*

Цей закон є одним із фундаментальних законів фізики.

Система називається ізольованою, якщо через поверхню, що її обмежує, не можуть проникати заряджені частинки. У замкнутій системі заряди можуть з'являтися парами - позитивний і негативний заряди.

Електричний заряд - скалярна фізична величина, що є кількісною мірою здатності частинок до електромагнітної взаємодії і вимірюється в кулонах (Кл).

Зарядові  $q = I\text{Кл}$  відповідає такий заряд, який переноситься через поперечний переріз провідника постійним струмом  $I = 1\text{ А}$  за час  $t = 1\text{ с}$ :

$$q = I \cdot t$$

$$[q] = 1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с.}$$

Заряд 1 Кл досить великий. На практиці використовують такі одиниці вимірювання - нКл, мкКл.

Електричний заряд - властивість матерії, тому заряди не існують без матеріальних носіїв.

Мінімальним за абсолютним значенням є заряд всіх елементарних частинок  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Всі електричні заряди кратні елементарному заряду.

Існують моделі точкового і безперервного розподілу заряду.

Тіла, розмірами яких можна знехтувати порівняно з відстанню між ними і на поверхні яких знаходиться заряд, називають точковими зарядженими тілами (зарядами).

В даному розділі будемо розглядати нерухомі заряди і відповідні їм статичні (тобто незмінні в часі) електричні поля. На практиці доводиться мати справу з реальними зарядженими тілами, електричний заряд яких не зосереджений в точці, а розподілений по всьому тілу. Тому необхідно ввести поняття густини розподілу заряду. Залежно від форми тіла розрізняють:

– *лінійну густину заряду*  $\tau$ :

$$\tau = \frac{dq}{dl}$$

з розмірністю [Кл/м], де  $dq = \tau dl$  вважається точковим зарядом, зосередженим на нескінченно малому відрізку довжини  $dl$ ;

– *поверхневу густину заряду*  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{dq}{dS};$$

з розмірністю [Кл/м<sup>2</sup>], де  $dq = \sigma dS$  - точковий заряд нескінченно малої поверхні зарядженого тіла.

– *об'ємну густину заряду*  $\rho$ :



$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

з розмірністю [Кл/м<sup>3</sup>], де  $dq = \rho dV$ - точковий заряд нескінченно малого об'єму зарядженого тіла.

## 1.2. Закон Кулона

Закон, який визначає силу взаємодії точкових зарядів, був сформульований Кулоном в 1785 р.: *величина сили взаємодії між двома точковими зарядами у вакуумі прямо пропорційна добутку величин зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:*

$$F_0 = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, (1)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. У міжнародній системі одиниць СІ  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , де:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м називається *електричною сталою*.

Або у векторній формі:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$

або

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

де  $\vec{F}_{12}$  – сила, що діє на один точковий заряд з боку другого,  $\vec{e}_{12}, \frac{\vec{r}}{r}$  – орт-вектор вектора  $\vec{r}$ .

Якщо взаємодіючі заряди знаходяться не у вакуумі, а в якому-небудь середовищі, то величина сили взаємодії убуває в  $\epsilon$  раз:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_1}{\epsilon r^2}, (2)$$

де  $\epsilon$  - відносна діелектрична проникність середовища.

У векторній формі закон Кулона має вигляд

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_1}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (3)$$

Сила спрямована вздовж прямої, яка з'єднує ці заряди(рис. 1).

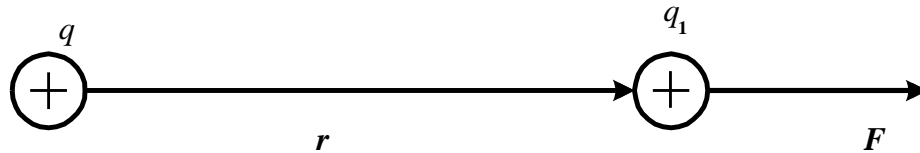


Рис.1. До визначення закону Кулона

У разі однойменних зарядів вектор  $\vec{F}$  збігається за напрямком з радіусом-вектором. Для різнойменних зарядів їхні напрямки протилежні.

### 1.3. Електричне поле. Напруженість поля

*Електричне поле* - це вид матерії, за допомогою якої здійснюється електрична взаємодія заряджених тіл. Воно оточує будь-яке заряджене тіло й виявляє себе дією на заряджені тіла.

*Електростатичне поле* - це електричне поле, яке існує навколо нерухомих у даній системі відліку тіл або частинок, що мають електричний заряд. Головна властивість електричного поля полягає в його здатності діяти на електричні заряди з деякою силою.

Заряди взаємодіють через *електричне поле*, яке діє на поміщений в нього *пробний* електричний заряд  $q_1$ . Силова характеристика електричного поля - напруженість  $\vec{E}$  чисельно дорівнює силі, що діє на позитивний одиничний заряд, поміщений у дану точку поля:

$$E = F/q_1. \quad (4)$$

Напруженість - однозначна характеристика електричного поля. Виходячи із закону Кулона у векторній формі, впливає

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (5)$$

Напруженість поля точкового заряду залежить тільки від заряду джерела поля  $q$ . На будь-який точковий заряд  $q_1$  в точці поля з напруженістю  $\mathbf{E}$  буде діяти сила

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}. \quad (6)$$

Кожен заряд створює своє поле незалежно від присутності інших зарядів. Звідси впливає *принцип суперпозиції полів*: напруженість поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожен із зарядів окремо:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i. \quad (7)$$

Силову лінією називається лінія, дотичні до якої в кожній точці збігаються з напрямом вектора  $\mathbf{E}$  в даній точці (рис. 2). За направлення силових ліній прийнято напрямом сили, що діє на *позитивний* заряд.

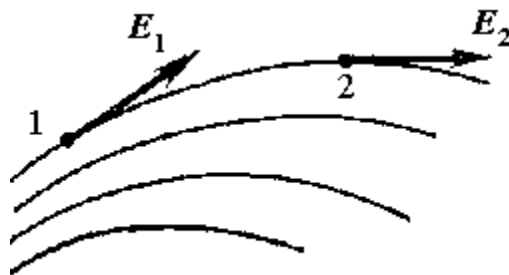


Рис. 2. Силові лінії електричного поля

На рис. 3 наведені приклади силових ліній точкового позитивного і точкового негативного зарядів. Лінії напруженості точкового заряду - це

прямі, які *виходять* із заряду, якщо він позитивний, і лінії, що *входять* в заряд, якщо він негативний.

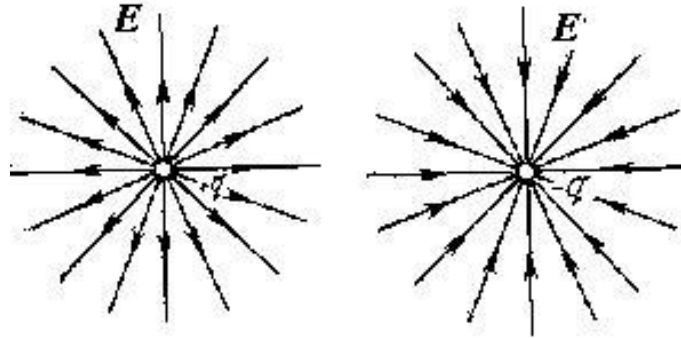


Рис. 3. Лінії напруженості точкового заряду

#### 1.4. Потенціал електричного поля

Другою основною характеристикою поля є *потенціал*  $\phi$ . Для його визначення обчислимо роботу, яка здійснюється силами поля нерухомого точкового заряду  $q$  при переміщенні в цьому полі точкового заряду  $q_1$  з точки 1 в точку 2 по довільній траєкторії (рис. 4). На заряд  $q_1$  діє електрична сила Кулона, яка є *центральною*.

Розглядаючи гравітаційне поле, яке також є центральним, ми бачили, що поле центральних сил *консервативно*, тобто робота, що здійснюється силами поля по переміщенню заряду з однієї точки в іншу, не залежить від форми шляху.

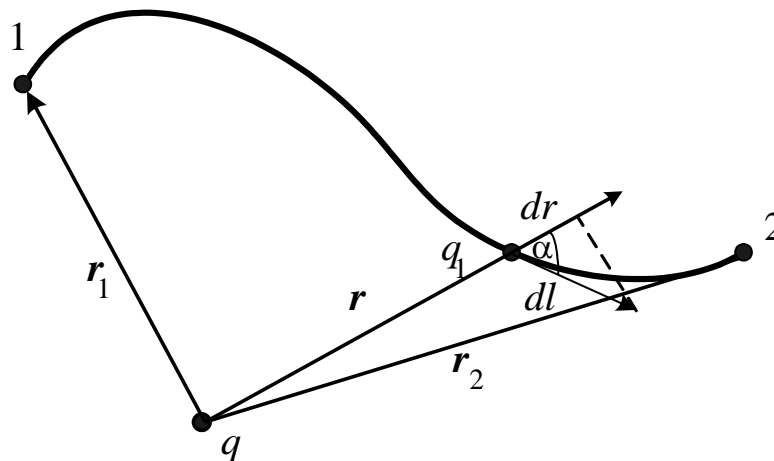


Рис. 4. До визначення роботи електростатичного поля

по переміщенню точкового заряду

На нескінченно малій ділянці траєкторії  $dl$  відбувається елементарна робота  $dA$ :

$$dA = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_1}{\epsilon r^2} \cdot dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_1}{\epsilon r^2} dr. \quad (8)$$

При переміщенні заряду з точки 1 в точку 2 робота дорівнює

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F dl = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (9)$$

Звідси видно, що робота сил електричного поля не залежить від форми траєкторії, визначається тільки початковим і кінцевим положеннями переміщуваного заряду. Таке поле є потенціальним. Вище ми бачили, що такий же характер має гравітаційне поле. Роботу сил потенціального поля можна представити як убуток потенціальної енергії:

$$A_{12} = -\Delta W_p = -(W_{p2} - W_{p1}) = W_{p1} - W_{p2}. \quad (10)$$

З порівняння формул (9) і (10) виходить вираз для потенціальної енергії взаємодії двох точкових зарядів:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{qq_1}{r} + \text{const} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{qq_1}{r}. \quad (11)$$

Константа в виразі (11) приймається рівною нулю, оскільки при видаленні заряду  $q_1$  на нескінченність ( $r \rightarrow \infty$ ) потенціальна енергія взаємодії прагне до нуля. Потенціальний характер електричного поля дозволяє ввести

енергетичну характеристику поля - потенціал ( $\varphi$ ), який визначається як величина, чисельно рівна потенціальної енергії одиничного позитивного заряду, що знаходиться в даній точці поля:

$$\varphi = \frac{W_p}{+q_1}. \quad (12)$$

З урахуванням (16) і (15) отримаємо вираз для потенціалу поля точкового заряду:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}. \quad (13)$$

Звідси випливає, що потенціал є однозначною енергетичною характеристикою поля в даній точці, так як залежить тільки від заряду джерела поля  $q$ . Заряд  $q_1$ , що знаходиться в полі з потенціалом  $\varphi$ , володіє потенціальною енергією:

$$W_p = q_1 \varphi. \quad (14)$$

Роботу сил поля по переміщенню заряду з точки 1 в точку 2 можна представити через різницю потенціалів:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q_1(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (15)$$

Якщо заряд  $q_1$  перенести з точки 1 в нескінченність, де потенціал дорівнює нулю ( $\varphi=0$ ), то робота сил поля буде дорівнювати

$$A_{1\infty} = q_1 = q_1 \varphi. \quad (16)$$

Звідси випливає інше визначення потенціалу: *потенціал чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють сили поля над одиничним позитивним зарядом ( $q_1=+1$  Кл) при переміщенні його з даної точки поля в нескінченність.*

Одиницею вимірювання потенціалу в системі СІ є 1 Вольт (1 В). Із виразу (16) випливає, що  $\phi_1=A_{1\infty}/q_1$ , тобто  $1 \text{ В}=1 \text{ Дж/Кл}$ .

У деяких випадках використовується позасистемна одиниця енергії – *електронвольт (1eВ)* – це енергія, яку набуває частинка, що має елементарний заряд, при проходженні різниці потенціалів в 1 вольт:

$$1 \text{ эВ}=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В}=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Задача 1.

Тонкий прямий стрижень довжиною 10 см рівномірно заряджений з лінійною густиною заряду 1 нКл/см. На продовженні осі стрижня, на відстані 20 см від найближчого кінця, знаходиться точковий заряд 20 нКл. Визначити силу взаємодії стрижня і точкового заряду.

Дано:

$$q_1 = 20 \text{ нКл} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$$

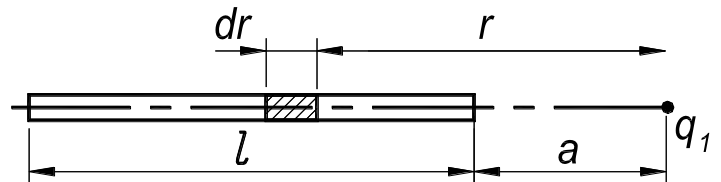
$$\tau = 1 \text{ нКл/см} = 10^{-7} \text{ Кл/м}$$

$$l = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$a = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$F = ? \text{ Рис. 5}$$



Рішення. Оскільки заряджений стрижень не є точковим зарядом, то закон Кулона безпосередньо застосувати не можна. Розіб'ємо стрижень на малі елементи (рис. 5) і виділимо на стрижні елемент  $dr$  із зарядом  $dq = \tau dr$ . Цей заряд можна розглядати як точковий. Тоді за законом Кулона

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 dq}{\epsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \tau dr}{\epsilon r^2},$$

Оскільки сили  $d\vec{F}$  взаємодії заряду  $q_1$  і зарядів  $dq$  на різних елементах стрижня спрямовані в одну сторону, то геометричну суму сил можна замінити алгебраїчною. Інтегруючи цей вираз, знайдемо силу взаємодії точкового заряду і стержня:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \tau}{\epsilon} \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 \tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{q_1 \tau l}{4\pi\epsilon_0 \epsilon (a+l)a}.$$

Зробимо обчислення з урахуванням того, що  $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  м/Ф:

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-7} \cdot 0,1}{1 \cdot (0,2 + 0,1) \cdot 0,2} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

Відповідь:  $F = 3 \cdot 10^{-5}$  Н.

### 1.5. Властивості векторних полів

Теорія поля є диференціальне та інтегральне обчислення функцій векторного аргументу. Розділ математики, що вивчає теорію поля, називається векторним аналізом.

Теорія електромагнітного поля була створена шотландським та англійським вченим Джеймсом Клерком Максвеллом (1831–1879) на основі математичного узагальнення основних експериментальних законів електрики і магнетизму, відомих на той час, таких як закон



**Максвелл Джеймс Кларк**



електромагнітної індукції Фарадея, закон Біо-Савара-Лапласа, теорема Гаусса для електростатики, закон збереження електричного заряду, закон повного струму.

Максвелл заклав основи сучасної класичної електродинаміки, ввів у фізику поняття струму зміщення, та електромагнітного поля, показав, що електромагнітне поле поширюється з кінцевою швидкістю, яка дорівнює  $3 \times 10^{10}$  м/с, що світло є електромагнітною хвилею тощо.

Максвелл записав свої рівняння у вигляді диференціальних рівнянь.

Поля поділяють на два види: векторні й скалярні. Векторним (скалярним) полем називають деякий простір, в кожній точці якого визначений деякий вектор  $\vec{a}(\vec{R})$  (скаляр  $\phi(\vec{R})$ ), де  $\vec{R}$  – радіус-вектор точки. Прикладами скалярних полів можуть бути: поле розподілених у просторі мас, поле густин тіла, поле тисків, поле температур тощо. Прикладами векторних полів можуть бути: поле напруженостей електричного поля, поле швидкостей рідини, що протікає, поле напруженостей магнітного поля, поле імпульсів, поле прискорень, тощо.

Введемо поняття потоку векторного поля.

Потоком вектора  $\vec{A}$  через деяку поверхню  $S$  називають величину, що дорівнює інтегралу за поверхнею  $S$  від скалярного добудку  $(\vec{A} \cdot d\vec{S})$ :

$$\Phi_A = \int_S (\vec{A} \cdot d\vec{S}) = \int_S (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS,$$

де  $\vec{n}$  – орт-нормаль до елемента поверхні  $dS$ .

Аналогічно, для вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$ :

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS$$

Дивергенцією називається границя відношення потоку вектору  $\vec{A}$  через поверхню, що обмежує деякий об'єм, до величини цього об'єму, коли останній прагне до нуля:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{A} d\vec{S})}{V}.$$

Дивергенція дорівнює питомій потужності джерел поля. Якщо  $\operatorname{div} \vec{A} > 0$  то векторне поле має джерело. Якщо  $\operatorname{div} \vec{A} < 0$ , то говорять, що векторне поле має негативні джерела або стоки. Векторні лінії поля завжди починаються на позитивних джерелах і закінчуються на негативних. Якщо  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ , то поле не має ні джерел ні стоків. Це поле називається вихровим, і його векторні лінії замкнуті.

Циркуляцією деякого вектора  $\vec{A}$  називається інтеграл за замкненим контуром  $l$  від скалярного добутку  $(\vec{A} d\vec{l})$ :

$$C = \oint_l (\vec{A} d\vec{l}).$$

Ротором вектора  $\vec{A}$  називають такий вектор нормальна складова якого дорівнює границі відношення циркуляції цього вектора до поверхні, яку обмежує цей контур, коли остання прагне до нуля:

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{A} d\vec{L})}{S}.$$

Вектор  $\operatorname{rot} \vec{a}$  можна обчислити за допомогою формули

$$\operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Якщо ротор векторного поля не дорівнює нулю, то поле називається вихровим. Таке поле має замкнуті векторні лінії. Якщо  $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ , то поле називається потенціальні, векторні лінії такого поля не замкнуті і мають початок і кінець (джерела і стоки).

Введемо поняття градієнт ( $\operatorname{grad}$ ). Нехай задане скалярне поле. Тоді йому можна поставити у відповідність деяке векторне поле:

$$\text{grad}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Тоді

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орт-вектори осей координат.

Введемо деякий векторний диференціальний оператор  $\nabla$  (набла) [7, 8],

який має компоненти  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ . Цей оператор називається оператор набла,

чи оператор Гамільтона. Тоді

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор набла фізичного сенсу він не має. Він має сенс разом зі скалярною чи векторною функцією, яка стоїть за ним (умовно множиться на ці функції).

Якщо справа від  $\nabla$  знаходиться скаляр  $\varphi$ , то такий «добуток» є вектор:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

який називається градієнтом (*grad*) функції  $\varphi$ .

Якщо після  $\nabla$  стоїть вектор, тобто «помножити» його скалярно на вектор  $\vec{a}$ , отримаємо скаляр:

$$(\nabla\vec{a}) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

Цей скалярний вираз називається дивергенцією (*div*) вектора  $\vec{a}$ .

Якщо вектор набла  $\nabla$  «помножити» векторно на  $\vec{a}$ , отримаємо вектор *rot* $\vec{a}$ .

Запишемо градієнт, дивергенцію і ротор через вектор набла:

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi$$

$$(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a}$$

$$[\nabla \vec{a}] = \text{rot} \vec{a}$$

$\nabla$  – диференціальний оператор. Оператор набла діє на всі функції, що стоять справа від нього. При перетворенні виразів, у які входить оператор набла ( $\nabla$ ), треба користуватись правилами і диференціального числення, і векторної алгебри.

Наприклад,

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \psi\text{grad}\varphi + \varphi\text{grad}\psi.$$

$$\text{div}(\varphi\vec{a}) = (\nabla_{\varphi}\varphi\vec{a}) + (\nabla_a\varphi\vec{a}) = (\vec{a}\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\vec{a}) = (\vec{a}\text{grad}\varphi) + \varphi\text{div}\vec{a}.$$

Основні теореми векторного аналізу в інтегральній формі:

$$\oint_S (\vec{A} d\vec{S}) = \int_V (\nabla \vec{A}) dV \quad \text{- теорема Остроградського-Гаусса}$$

$$\oint_L (\vec{A} d\vec{L}) = \int_S ([\nabla \vec{A}] d\vec{S}) \quad \text{- теорема Стокса}$$

### 1.6. Зв'язок напруженості і потенціалу

За визначенням

$$\vec{F} = -\text{grad}W_{\Pi}$$

Зв'язок сили з напруженістю

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

і потенціальної енергії з потенціалом

$$W_{\Pi} = q\varphi.$$

Тоді

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

За визначенням оператор набла

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Звідси

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

А зв'язок вектора напруженості і потенціалу запишеться як

$$\vec{E} = -\nabla \varphi.$$

Якщо в електричному полі виділити деякий напрям  $\vec{l}$  і спроектувати вектор напруженості поля на цей напрям, то можна записати:

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$$

Поверхня, всі точки якої мають однаковий потенціал, називається *еквіпотенціальною поверхнею*.

З останньої формули випливає, що силові лінії електричного поля ортогональні еквіпотенціальним поверхням.

### 1.7. Теорема Гаусса

Напруженість  $E$  є основною силовою характеристикою електричного поля. Крім цієї величини вводиться також *вектор електричної індукції* (електричного зміщення), який пов'язаний з вектором  $E$  співвідношенням

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (17)$$

Вектор  $D$  пропорційний вектору  $E$ , і силові лінії вектора  $D$  співпадають з силовими лініями напруженості. Модуль вектора  $D$  не залежить від властивостей середовища і не змінюється при переході через кордон розділу діелектриків.

Введемо поняття *потіку вектора*  $\mathbf{E}$  (або  $\mathbf{D}$ ) через площадку і визначимо *елементарний потік*  $dN_E$  через нескінченно малу площадку  $dS$ , в межах якої поле однорідне. Нехай площа орієнтована під довільним кутом  $\alpha$  до вектору  $\mathbf{E}$  в даній точці (рис. 6).

Елементарним потоком вектора  $\mathbf{E}$  через  $dS$  називається скалярний добуток вектора  $\mathbf{E}$  на вектор площадки  $dS$ , тобто

$$dN_E = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha = E_n dS, \quad (18)$$

де

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS. \quad (19)$$

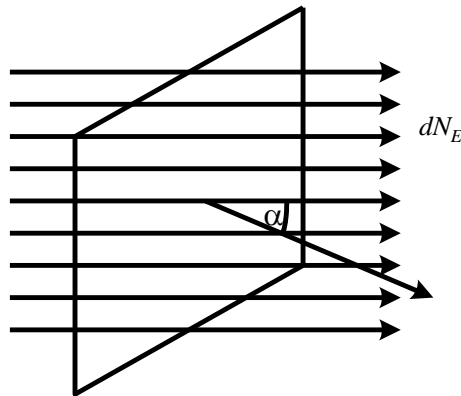


Рис. 6. До визначення потоку вектора

Якщо поверхня  $S$  має довільну форму, а поле, в якому вона знаходиться, неоднорідне, то всю поверхню можна розбити на нескінченно малі ділянки  $dS$ , в межах кожного з яких поле можна вважати однорідним. Тоді повний потік  $N_E$  через всю поверхню  $S$  визначиться підсумовуванням (точніше, інтегруванням) елементарних потоків через всі площадки  $dS$ :

$$N_E = \int_S E_n dS. \quad (20)$$

Аналогічно визначається потік вектора  $\mathbf{D}$ :

$$N_D = \int_S D_n ds. \quad (21)$$

Потік  $N_D$  вважається позитивним, якщо силові лінії вектора  $\mathbf{E}$  виходять з даної поверхні (тобто  $\cos\alpha < 0$ ), і негативним, якщо силові лінії входять в замкнуту поверхню (тобто  $\cos\alpha > 0$ ).

Потік через замкнуту поверхню записується у вигляді

$$N_E = \oint_S E_n dS. \quad (22)$$

Одним з простих методів обчислення полів у випадку безперервного розподілу зарядів є застосування теореми Гаусса. Для довільної замкнутої поверхні  $S$  і поля в будь-якому середовищі з діелектричної проникністю  $\epsilon$  ця теорема формулюється так:

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^N q_i, \quad (23)$$

Тобто потік вектора електричного зміщення через довільну замкнуту поверхню чисельно дорівнює алгебраїчній сумі  $N$  зарядів, що знаходяться всередині цієї поверхні.

У вакуумі  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , і тому запис теореми Гаусса для вектора напруженості електричного поля у вакуумі має вигляд

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}. \quad (24)$$

Якщо всередині замкнутої поверхні знаходяться не дискретні точкові заряди, а вільні заряди, розподілені безперервно з деякою об'ємною густиною  $\rho$ , то

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV,$$

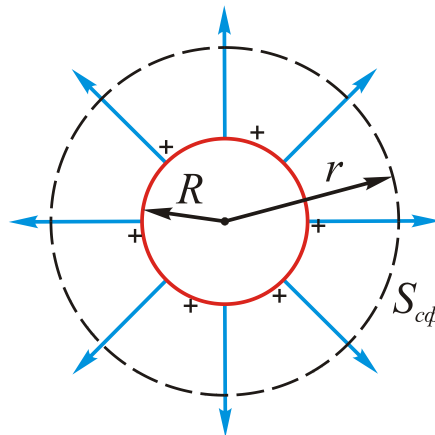
і теорема Гаусса приймає вигляд

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV. \quad (25)$$

Вираз (25) являє собою третє рівняння Максвелла *вінтегральній формі* і характеризує структуру електричного поля. Фізичний сенс цієї теореми полягає в тому, що вона *пов'язує джерела електричного поля (тобто заряди)* з *силовою характеристикою цього поля (тобто з векторами  $\mathbf{D}$  або  $\mathbf{E}$ )*.

## 1.8. Розрахунок векорних полів за теоремою Гаусса

### 1.8.1. Поле рівномірно зарядженої сфери



Весь простір можна розділити на дві частини: поза зарядженої сферичної поверхні і всередині неї.

#### а) Поле поза сферичною поверхнею ( $r > a$ )

Нехай є сфера радіуса  $a$ , заряджена рівномірно. В якості допоміжної поверхні зручно взяти сферу радіуса  $r$ , концентричну із заданою сферою. Вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярний елементам сферичної поверхні і зберігає



постійне числове значення. Відповідно до формули (25), значення  $E$  на поверхні  $r = \text{const}$  ( $r > a$ ) дорівнює

$$E = q / \epsilon_0 S_n = q / 4\pi\epsilon_0 r^2. \quad (26)$$

Отже, заряд, розподілений рівномірно по поверхні сфери, створює поза нею таку ж напруженість поля, що і точковий заряд такої ж величини, що знаходиться в центрі сфери.

б) Поле всередині сферичної поверхні ( $r < a$ )

Продовжимо розглядати допоміжну поверхню радіуса  $r < a$ . Оскільки усередині цієї поверхні зарядів немає ( $q = 0$ ), то потік  $N_E = 0$ , отже,  $E = 0$ .

На рис.7 показана залежність абсолютного значення напруженості  $E$  від  $r$ .

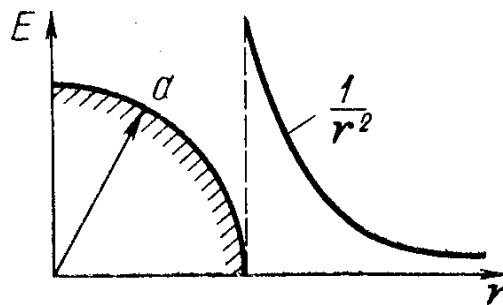


Рис.7. Залежність напруженості поля  $E$  від відстані  $r$  для рівномірно зарядженої поверхні

1.8.2. Поле нескінченної рівномірно зарядженої нитки (тонкого циліндра)

В цьому випадку допоміжну поверхню доцільно вибрати у вигляді коаксіального, з ниткою циліндра радіуса  $R$  довжиною  $l$  (рис.8).

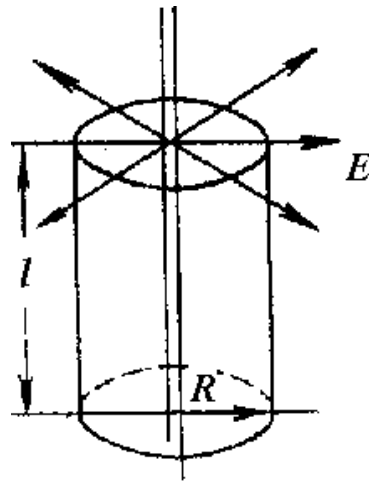


Рис. 8. До визначення напруженості поля нескінченної рівномірно зарядженої нитки (тонкого циліндра)

З симетрії завдання слід, що силові лінії вектора  $E$  спрямовані уздовж радіусів і лежать в площинах, перпендикулярних осі нитки. Тому потік вектора  $E$  через таку замкнуту поверхню визначиться тільки потоком через його бічну поверхню  $S_0$

$$E = q / \epsilon_0 S_0, \quad (27)$$

де  $S_0 = 2\pi Rl$  - площа бічної поверхні;

$q = \tau l$  - заряд нитки довжиною  $l$ ;

$\tau$  - лінійна густина заряду.

Тоді при  $R \geq r$  на основі теореми Гаусса з формули (27) отримаємо

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S_{\text{біч}}} = \frac{\tau l}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r}, \quad (28)$$

Тобто напруженість поля циліндричної нитки визначається лінійною густиною заряду і обернено пропорційна відстані від осі нитки.

### 1.8.3. Поле рівномірно зарядженої нескінченної площини

З симетрії задачі і рівномірності розподілення заряду випливає, що силові лінії вектора  $\mathbf{E}$  перпендикулярні площині, поле є однорідним. У точках, симетричних щодо площини, напруженості поля однакові за величиною і протилежні за напрямком.

З характеру розглянутого поля зручно вибрати допоміжну поверхню у вигляді циліндра з твірною, паралельною до силових ліній вектора  $\mathbf{E}$  (рис. 9), і з основами  $\Delta S$ , розташованими симетрично відносно площини. Застосуємо теорему Гаусса: потік через бічну поверхню буде відсутнім, оскільки  $E_n$  дорівнює нулю, а для основ  $E_n = E$  в кожній точці.

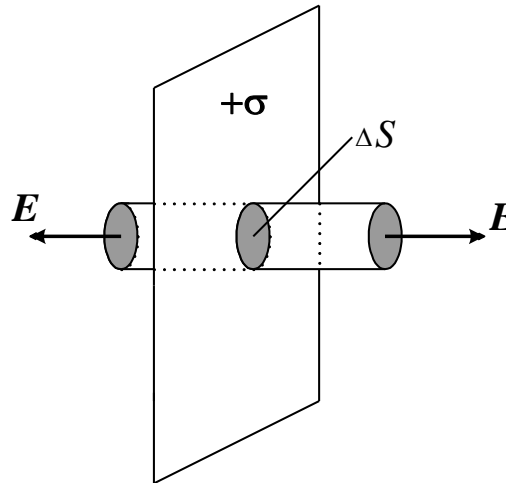


Рис.9. До визначення поля нескінченної рівномірно зарядженої площини

Отже, сумарний потік через допоміжну поверхню дорівнює  $2E\Delta S$ . У середині ж поверхні зосереджений заряд  $q = \sigma\Delta S$ , де  $\sigma$  - поверхнева густина заряду (позитивна). Згідно теоремі Гаусса

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}, \quad (29)$$

звідки випливає, що напруженість поля, створюваного площиною, дорівнює

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (30)$$

З виразу (30) видно, що поле є *однорідним* і визначається тільки поверхневою густиною заряду.

#### 1.8.4. Поле двох паралельних нескінченних рівномірно заряджених площин

Припустимо, що ми маємо тепер дві площини, заряджені з однаковою поверхневою щільністю  $\sigma$ , але заряди обох площин мають протилежні знаки (рис. 10).

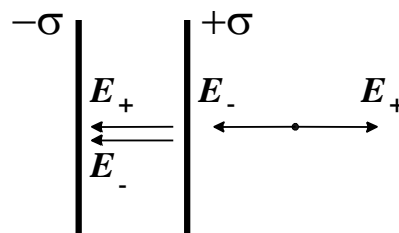


Рис. 10. До визначення поля двох паралельних нескінченних рівномірно заряджених площин

За абсолютною величиною напруженості полів, створюваних кожною площиною, однакові ( $E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ). На основі принципу суперпозиції полів видно: поза пластин напруженість поля дорівнює нулю, а між площинами напруженості полів, створюваних обома пластинами, підсумовуються і в зазорі

$$E = E_+ + E_- = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (31)$$

Розглянутий випадок є моделлю поля плоского конденсатора, якщо зазор  $d$  між пластинами набагато менше розмірів пластин.

### Задача 2

Електричне поле створено тонкою нескінченно довгою ниткою, рівномірно зарядженою з лінійною густиною заряду  $20 \text{ нКл/м}$ . На відстані  $40 \text{ см}$  від нитки знаходиться плоский круглий майданчик радіусом  $1 \text{ см}$ . Визначити потік вектора напруженості через площадку, якщо між її площината лінія напруженості, що проходить через середину майданчика становить кут  $30^\circ$ .

Дано:

$$\tau = 20 \text{ нКл/м} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}$$

$$a = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$$

$$R = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$\beta = 30^\circ$$

\_\_\_\_\_

$N_E - ?$

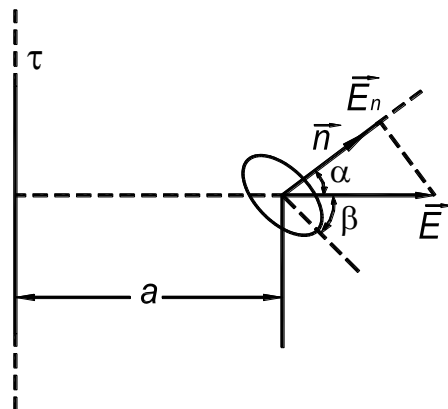


Рис.11

Рішення. Поле, створюване ниткою (дуже тонким циліндром), є неоднорідним, так як воно змінюється в просторі,

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\epsilon r}$$

Тому потік вектора  $\vec{E}$  дорівнює

$$N_E = \int_S E_n dS = \int_S E \cos\alpha dS,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $E$  і  $n$ . Так як лінійні розміри площадки малі в порівнянні з відстанню до нитки ( $a \gg R$ ), то  $E$  в межах площадки змінюється незначно. Тому значення  $E$  і  $\cos\alpha$  під знаком інтеграла можна замінити їх середніми значеннями  $\langle E \rangle$  і  $\langle \cos\alpha \rangle$  і винести за знак інтеграла:

$$N_E = \langle E \rangle \langle \cos\alpha \rangle \int_S dS = \langle E \rangle \langle \cos\alpha \rangle S,$$

де  $S = \pi R^2$ .

Замінюючи  $\langle E \rangle$  і  $\langle \cos\alpha \rangle$  їх наближеними значеннями  $E_A$  і  $\cos\alpha_A$ , обчисленими для середньої точки майданчика, отримаємо

$$N_E = E_A S \cos\alpha_A = E_A \pi R^2 \cos\alpha_A.$$

Зрис.11 випливає, що  $\cos\alpha_A = \cos(\pi/2 - \beta) = \sin\beta$ . Тому

$$N_E = E_A \pi R^2 \sin\beta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\epsilon a} \pi R^2 \sin\beta.$$

Проводимо обчислення, враховуючи, що  $1/2\pi\epsilon_0 = 2 \cdot 9 \cdot 10^9$  м/Ф:

$$N_E = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 0,4} 0,5 \cdot 3,14 \cdot (10^{-2})^2 = 0,14 \text{ В} \cdot \text{м}$$

Відповідь:  $N_E = 0,14 \text{ В} \cdot \text{м}$ .

## Питання для самоперевірки

1. Які поля називають електростатичними?
2. Яка фізична величина визначає електромагнітну взаємодію?
3. Як називається процес, який приводить до появи на тілах електричних зарядів?
4. Чи може заряд існувати незалежно від частинки?
5. В яких одиницях вимірюють електричний заряд?
6. Чи створюємо ми заряди при електризації тіл?
7. Які існують способи електризації тіл.
8. Якщо тіло електрично нейтральне, то чи означає це, що воно не містить електричних зарядів?
9. Чи справедливе твердження, що в замкнутій системі алгебраїчна сума зарядів всіх тіл залишається незмінною?
10. При збільшенні відстані між зарядами в три рази сила їх взаємодії...
11. Величина, яка характеризує електричні властивості середовища - це...
12. Що таке напруженість електростатичного поля?
13. Як визначається напрямок вектора напруженості?
14. Що таке потік вектора напруженості?
15. Яка лінія називається силовою? Чому силові лінії не можуть перетинатися?
16. Які лінія називається екіпотенціальною?
17. Доведіть, що екіпотенціальні і силові лінії ортогональні.
18. Від чого залежить густина силових і екіпотенціальних ліній?
19. У чому полягає фізичний зміст теореми Гаусса?
20. Розрахуйте, використовуючи теорему Гаусса:
  - а) поле рівномірно зарядженої нескінченної площини; б) поле двох нескінченних паралельних різнойменно заряджених площин; в) поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні; г) поле об'ємно зарядженої кулі; д) поле рівномірно зарядженого нескінченного циліндра (нитки);
21. Яким чином теорема Гаусса і висновок із неї можуть бути непрямим підтвердженням справедливості закону Кулона?

## 2. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ

*Електричним диполем* називається сукупність двох однакових за величиною різнойменних точкових зарядів ( $+q$  і  $-q$ ), відстань  $l$  між якими мала.

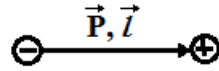


Рис. 12. До визначення електричного диполя.

*Віссю диполя* називається пряма лінія, що проходить через обидва заряди. Диполь є моделлю молекули діелектриків.

Характеристикою диполя є *дипольний момент*. 
$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Дипольний момент спрямований від негативного заряду до позитивного і дорівнює добутку модуля заряду на довжину вектора, що з'єднує негативний і позитивний заряди і називається *плечем* диполя.

Для системи зарядів:

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$$

Розглянемо диполь у однорідному зовнішньому електричному полі, ( $E = \text{const}$ ).

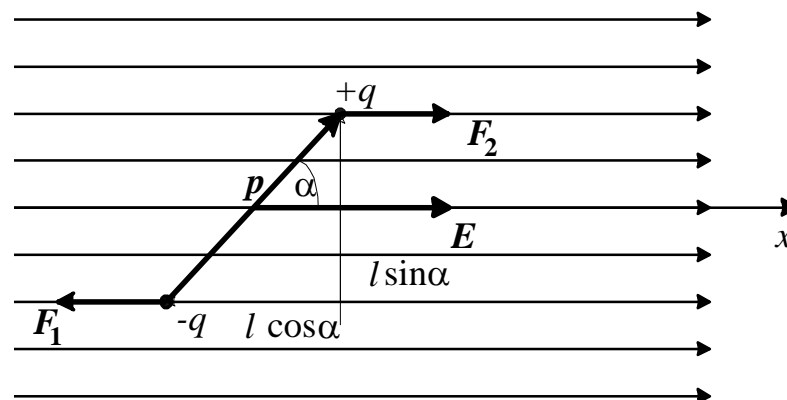


Рис.13. Диполь у зовнішньому однорідному полі



Як бачимо з рис. 13, на заряди  $+q$  і  $-q$  з боку зовнішнього електричного поля діє пара сил  $F$ , плече цієї пари дорівнює  $h = l \cdot \sin \alpha$ , модуль кожної з сил дорівнює  $F_1 = F_2 = F = qE$ , а момент обертання дорівнює

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha, (32)$$

Тобто прагне повернути диполь так, щоб його електричний момент встановився уздовж ліній напруженості поля ( $\alpha = 0$ ). У такому положенні на диполь будуть діяти тільки сили розтягування. Отже, *однорідне електричне поле має на диполь лише орієнтаційну дію.*

Нехай диполь знаходиться в неоднорідному електричному полі ( $E \neq \text{const}$ ).

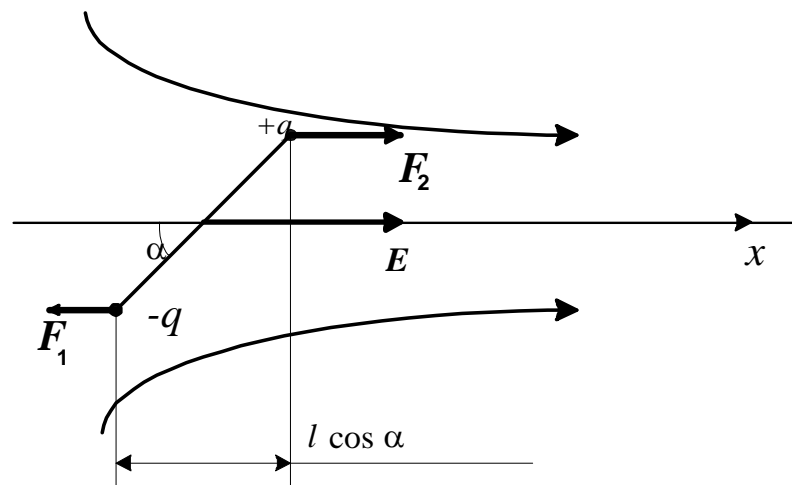


Рис.14. Диполь у зовнішньому неоднорідному полі.

У неоднорідному полі (рис. 14) на заряди диполя діють різні за величиною сили і після повороту диполь буде втягуватися в область сильнішого поля під дією різниці сил  $F_1$  і  $F_2$ .

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \\ &= q \frac{\Delta \vec{E}}{l} l = (l \rightarrow 0) = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}. \end{aligned}$$

У напрямі осі  $x$ :

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad F = q \Delta E = ql \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha$$

Такою буде сила, що втягує диполь у неоднорідне поле при гострому куті  $\alpha$ , і відштовхуюча при тупому.

*Момент сил діючих на диполь.* Знайдемо момент зовнішніх сил щодо центру мас диполя в електростатичному полі:

$$\vec{M} = [\vec{r}_+ \vec{F}_+] + [\vec{r}_- \vec{F}_-] = [\vec{r}_+, q\vec{E}_+] - [\vec{r}_-, q\vec{E}_-]$$

При малій відстані між зарядами  $E_+ = E_-$  і  $r_+ - r_- = l$ :

$$\vec{M} = [(\vec{r}_+ - \vec{r}_-), q\vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}]$$

Момент сил прагне розвернути диполь так, щоб його електричний момент  $\vec{p}$  встановився б у напрямку поля  $\vec{E}$ . Таке положення є стійким.

Таким чином, у неоднорідному полі диполь прагнучим повернутися по полю і одночасно втягуватися в область з великим  $\vec{E}$ .

*Діелектрики* відрізняються від *провідників* тим, що в них немає вільних електрично заряджених частинок, тобто *носіїв струму*.

Якщо центри ваги позитивних і негативних зарядів величиною  $q$  кожен перебувають на відстані  $l$  один від одного, то атоми і молекули можна розглядати як диполі.

Залежно від будови діелектрики поділяються на три типи:

1. Полярні. Молекули цих діелектриків навіть за відсутності електричного поля мають великий дипольний момент (до таких діелектриків відносяться, зокрема, вода, нітробензол і ін.).

2. Неполярні. Молекули цих діелектриків симетричні і мають мізерно малий дипольний момент (до діелектриків такого типу відносяться водень, азот, парафін та ін.).

3. Іонні кристалічні тверді діелектрики. До таких діелектриків відносяться, наприклад, з'єднання типу NaCl, тобто з'єднання позитивного іона металу (в даному прикладі натрію) і негативного іона галоїда (хлору).

У зовнішньому електричному полі відбувається поляризація діелектрика. Механізм поляризації залежить від типу діелектрика.

## 2.1. Полярні діелектрики

За відсутності поля внаслідок теплового руху електричні моменти молекул-диполів орієнтовані в просторі хаотично, тобто вектори їх диполів направлені в різні боки. Тому сумарний дипольний момент діелектрика, в цілому, дорівнює нулю. При внесенні полярного діелектрика в електричне поле електричний момент кожного диполя орієнтується уздовж силових ліній поля.

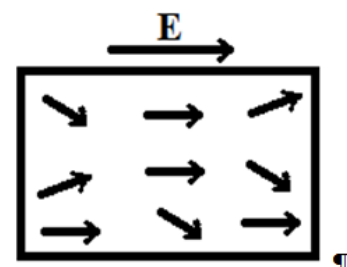
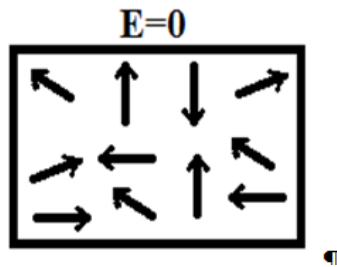


Рис. 15. Полярний діелектрик у відсутності зовнішнього електричного поля. Рис. 16. Полярний діелектрик у зовнішньому електричному полі

Степінь орієнтації тим вище, чим більше напруженість поля і чим нижче температура. Заряди внутрішніх диполів компенсують один одного. На границях діелектрика, перпендикулярних полю, залишаються некомпенсовані заряди. Ці заряди називаються *зв'язаними*. Ці заряди істотно відрізняються від зарядів, що виникають в електричному полі на провідниках (електростатична індукція), тим, що вільні заряди можна зняти з провідника, а зв'язані невіддільні від діелектрика.

Зв'язані заряди створюють всередині діелектрика електричне поле з напруженістю  $E'$ , яка спрямована протилежно напруженості зовнішнього поля. Це поле, створене зв'язаними зарядами, складається із зовнішнім полем. В результаті напруженість сумарного поля  $E$  стає менше, ніж напруженість

зовнішнього поля. Це означає, що сили, діючі на електричний заряд в діелектрику, менше сил, що діють на той же заряд у вакуумі:

$$E = E_0 - E'. \quad (33)$$

Поляризація полярних діелектриків називається *орієнтаційною*.

## 2.2. Непольярні діелектрики

Під час відсутності зовнішнього поля в неполярних діелектриках дипольні моменти молекул дорівнюють нулю. Якщо такий діелектрик помістити в зовнішнє електричне поле, то центри ваги позитивних і негативних зарядів зміщуються в протилежні сторони, утворюючи диполі. Дипольні моменти таких диполів називаються *індукованими*, або *наведеними*. Величини цих моментів пропорційні величині напруженості зовнішнього поля.

Зняття зовнішнього поля призводить до зникнення дипольних моментів. Наведені дипольні моменти орієнтовані строго уздовж ліній поля, що призводить, як і в полярних діелектриках, до появи *зв'язаних* зарядів на поверхнях діелектрика (рис. 14).

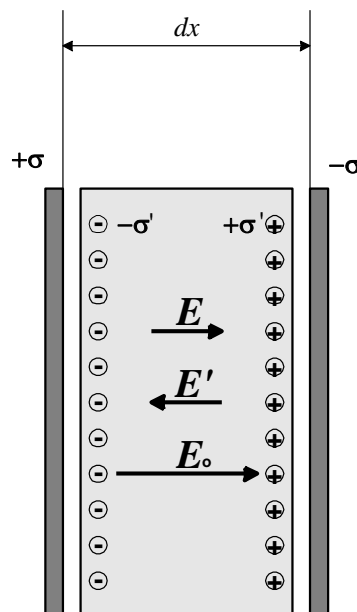


Рис.17. Зв'язані заряди на поверхні діелектрику

Такі діелектрики характеризуються *деформаційною*, або *пружною*, поляризацією.

### 2.3. Іонні кристали

У діелектриків, які мають іонну кристалічну структуру, спостерігається зміщення всіх позитивних іонів уздовж силових ліній поля, а негативних іонів - в протилежну сторону. Таке зміщення відбувається по всьому об'єму кристалу, що призводить до появи загального електричного моменту всього діелектрика. На поверхнях діелектрика з'являються зв'язані заряди зворотного електричного поля, тобто такого поля, вектор напруженості якого направлено в сторону, протилежну напрямку вектора напруженості зовнішнього поля.

Степінь поляризації діелектриків характеризується *вектором поляризації*  $\mathbf{P}$ , що визначає електричний момент одиниці об'єму діелектрика для фізично малого обсягу, в межах якого параметри діелектрика можна вважати постійними:

$$\mathbf{P} = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i}{\Delta V}. \quad (34)$$

Величина вектора  $\mathbf{P}$  залежить від величини дипольних моментів молекул  $\mathbf{p}_i$ , від числа молекул в одиниці об'єму (тобто від густини речовини) і від степені орієнтації диполів (для полярних діелектриків).

Вектор  $\mathbf{P}$  залежить від поверхневої густини  $\sigma$  зв'язаних зарядів.

У діелектриків будь-якого типу, крім *сегнетоелектриків*, вектор поляризації пропорційний напруженості поля в діелектрику:

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (35)$$

де  $\chi$  - *діелектрична сприйнятливість*, яка характеризує схильність діелектрика до поляризації, причому  $\chi$  - безрозмірна величина.

Для неполярних молекул зв'язок між діелектричною сприйнятливістю і

поляризованістю молекул  $\beta$ , яка залежить тільки від будови молекул, визначається наступним виразом:

$$\chi = n\beta, (36)$$

де  $n$  - число молекул в одиниці об'єму (концентрація).

На рис.14 бачимо, що вектор напруженості електричного поля всередині

діелектрика  $\mathbf{E}'$  дорівнює  $\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$  і направлений протилежно вектору

напруженості зовнішнього поля  $\mathbf{E}_0$ . Напруженість результуючого поля дорівнює

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'. (37)$$

Напруженість електричного поля дорівнює

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \chi \mathbf{E}. (38)$$

Тому вектор напруженості поля в діелектрику дорівнює

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \chi} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon}. (39)$$

Тобто

$$\epsilon = \chi + 1. (40)$$

Вектор електричної індукції  $\mathbf{D}$  і вектор поляризації  $\mathbf{P}$  пов'язані між собою так:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. (41).$$

## 2.4. Сегнетоелектрики і п'єзоелектрики

Речовини, що володіють спонтанною поляризацією під час відсутності зовнішнього поля, отримали назву *сегнетоелектриків*, за назвою *сегнетової солі*. Сегнетоелектрики мають такі особливості:

1. Діелектрична проникливість сегнетоелектриків має дуже високі значення ( $\epsilon \gg 1$ , у сегнетової солі  $\epsilon \approx 10^4$ ). У деякому температурному інтервалі  $\epsilon$  досягає  $10^4$ - $10^5$ .

2. Діелектрична проникливість є функцією напруженості поля.

3. Значення вектора поляризації  $\mathbf{P}$  визначається не тільки напруженістю поля в даний момент часу, але і полем, яке існувало в попередньому часі. Це явище називається *гістерезисом*.

Сегнетоелектрики - кристалічні речовини. Взаємодія молекул в сегнетоелектриках призводить до того, що в кристалі утворюються області, в яких дипольні моменти молекул паралельні один одному. Ці області *спонтанної* (мимовільної) поляризації називаються *доменами*. Під дією зовнішнього поля дипольні моменти доменів повертаються як ціле уздовж напруженості поля.

Вище певної температури кристал втрачає свої особливі властивості і стає звичайним діелектриком. Це так звана *точка Кюрі*. При цій температурі внаслідок теплового руху змінюється кристалічна структура, тобто відбувається *фазовий перехід*.

Деякі кристали під дією механічних деформацій поляризуються. Це явище називається *п'єзоелектром*, а кристали – п'єзоелектриками. Стиснення або розтягування кристала приводить до появи на протилежних гранях електричних поляризаційних зарядів.

*П'єзоелектр* використовується при створенні датчиків, які реєструють механічні деформації (вібрації, звук та ін.).

*Зворотний п'єзо ефект*: при додатку до кристалу зовнішньої різниці потенціалів він відчуває деформації стиснення або розтягування. Це явище використовується для отримання ультразвукових (УЗ) коливань.

Один з найбільш відомих п'єзоелектриків - кварц.

### Задача 3

Між двома паралельними пластинами, зарядженими до різниці потенціалів 600 В, знаходяться два шари діелектриків: скла товщиною 5 мм і ебоніту товщиною 3 мм. Площа кожної пластини 200 см<sup>2</sup>. Визначити напруженість поля, індукцію і падіння потенціалу в кожному шарі.

Дано:

$$U = 600 \text{ В}$$

$$\epsilon_1 = 7 \text{ (скло)}$$

$$d_1 = 5 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\epsilon_2 = 3 \text{ (ебоніт)}$$

$$d_2 = 3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$S = 200 \text{ см}^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$$

---


$$E - ? D - ?$$

$$U_1 - ? U_2 - ?$$

Розв'язання. При переході через границю поділу діелектриків нормальна складова вектора  $D$  в обох шарах діелектриків має однакові значення  $D_{1n} = D_{2n}$ .

Між пластинами силові лінії вектора  $D$  перпендикулярні до межі-це поділ діелектриків, отже,  $D_{1n} = D_1$  і  $D_{2n} = D_2$ . Тому

$$D_1 = D_2 = D.$$



Враховуючи, що  $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ , і скорочується на  $\varepsilon_0$ , отримаємо

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2,$$

де  $E_1$  і  $E_2$  – напруженості поля в першому і в другому шарах ;  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  – діелектрична проникність шарів.

Різниця потенціалів між пластинами, очевидно, дорівнює сумі напруг на шарах діелектриків:

$$U = U_1 + U_2.$$

Вмежах кожного шару поле однорідне, тому  $U_1 = E_1 d_1$  і  $U_2 = E_2 d_2$ .

З урахуванням цієї рівності отримаємо:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Спільне вирішення цих рівнянь

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}.$$

Провівши обчислення , отримаємо

$$E_1 = \frac{3 \cdot 600}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$E_2 = \frac{7 \cdot 600}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 11,7 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$U_1 = E_1 d_1 = 5 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 250 \text{ В}; \quad U_2 = E_2 d_2 = 11,7 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 350 \text{ В};$$

$$D = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 10^4 = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

### Питання для самоперевірки

1. Що називається електричним диполем?
2. Що таке діелектрики і чим вони відрізняються від провідників?
3. Що таке полярні діелектрики? Які речовини відносяться до цього типу?
4. Що таке неполярні діелектрики, і які речовини відносяться до цього типу?
5. Які кристали називаються іонними?
6. Що таке орієнтаційна поляризація і чим вона відрізняється від деформаційної поляризації?
7. Що таке діелектрична сприйнятливість?
8. Что таке поляризованість кристала?
9. Дайте визначення вектора поляризації.
10. Як пов'язані між собою вектор поляризації і вектор електричної індукції?
11. Что таке сегнетоелектрики?
12. Что таке п'єзоефект? Що таке прямий п'єзоефект і що таке зворотний п'єзоефект?

### 3. ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

Властивості провідників визначаються наявністю в них вільних електрично заряджених частинок, наприклад електронів в металах.

Якщо провідник внести в постійне електричне поле, то вільні електрони почнуть переміщатися проти напрямку поля  $E_0$  (рис.15).

Електрони зосередяться на поверхні, зверненої до позитивного полюсу джерела поля, а на протилежному боці провідника залишається некомпенсований заряд (позитивний) такої ж величини. Такий поділ буде відбуватися до тих пір, поки напруженість усередині провідника не стане

рівною нулю, а лінії напруженості поза провідником - перпендикулярними до його поверхні

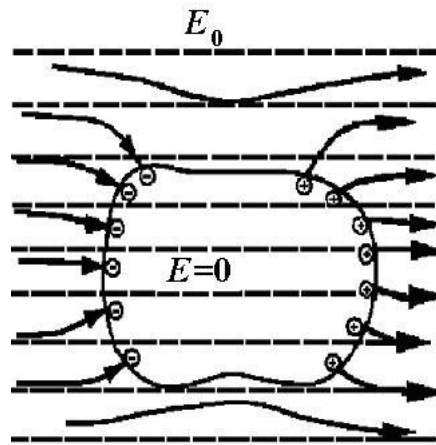


Рис. 18. Провідник у зовнішньому електричному полі.

Отже, нейтральний провідник, внесений в електричне поле, розриває лінії напруженості. Вони закінчуються на негативних зарядах і починаються на позитивних.

Поділ зарядів на провіднику під впливом зовнішнього електричного поля називається явищем *електростатичної індукції*. У процесі поділу зарядів по провіднику протікає струм. Час протікання залежить від довжини провідника і становить незначні частки секунди. Після розділення зарядів струм припиняється.

Рівновага зарядів в провіднику може спостерігатися лише в тому випадку, якщо напруженість поля всередині провідника дорівнює нулю:

$$E = 0. \quad (42)$$

Звідси випливає, що різниця потенціалів між будь-якими двома точками провідника дорівнює нулю.

З виразу  $E = -(\frac{d\phi}{dt})$  випливає, що при  $E = 0, d\phi = 0$ , тобто на поверхні провідника потенціал постійний:

$$\varphi=0. \quad (43)$$

Таким чином, потенціал всіх точок провідника однаковий, а поверхня провідника-це *еквіпотенціальна поверхня*.

*Отже, силові лінії зовнішнього електричного поля завжди перпендикулярні до поверхні провідника в будь-якій її точці.*

Якщо розглянути залежність густини заряду на поверхні провідника від її кривизни, то можна переконатися, що поверхнева густина заряду вище там, де більша позитивна кривизна поверхні, тобто в районах малих виступів на поверхні провідника, загострень і т. д.

### 3.1. Електроємність

Досвід показує, що потенціал *відокремленого* провідника зростає пропорційно збільшенню електричного заряду на провіднику, тобто з урахуванням коефіцієнту пропорційності можна записати так:

$$q=C\Delta\varphi, \quad (44)$$

де *C-електрична ємність* відокремленого провідника.

*Ємність відокремленого провідника чисельно дорівнює кількості електрики, яку треба повідомити провіднику, щоб його потенціал збільшився на одиницю.*

Величина ємності визначається геометричними розмірами і формою провідника, а також властивостями навколишнього середовища. Ємність відокремленого провідника зростає пропорційно діелектричній проникності середовища:

$$C/C_0=\varepsilon,$$

де *C* –ємність провідника в середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon$ ;

*C*<sub>0</sub> — ємність цього ж провідника у вакуумі.

З визначення ємності вираження (44) можна встановити одиницю її вимірювання. В системі одиниць СІ за одиницю ємності обрано ємність провідника, на якому зміна заряду в 1 Кл викликає зміну потенціалу в 1 В.

Ця одиниця називається *Фарадом*:  $1\text{Ф} = 1\text{ Кл} / \text{В}$ .

Оскільки 1 Фарад – це дуже велика величина, наприклад, електроємність земної кулі (радіус Землі дорівнює 6731 км), то на практиці зазвичай користуються кратними одиницями:  $1\text{ мкФ} = 10^{-6}\text{ Ф}$  і  $1\text{ пФ} = 10^{-9}\text{ Ф}$ .

Ємність сферичного відокремленого провідника. Використовуючи формулу для потенціалу сферичного провідника і з урахуванням (3441), можна отримати:

$$C = \frac{q}{q/4\pi\epsilon\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (45)$$

### 3.2. Конденсатори

Відокремлений провідник має досить малу електроємність. Крім того, поняття "відокремлений провідник" є абстракцією. В реальності поблизу завжди присутні сусідні тіла, що змінюють ємність провідника, який ми вважаємо "відокремленим". Тому представляють практичний інтерес такі пристрої, які не змінюють своєї електричної ємності під впливом сусідніх тіл. Такі пристрої називаються *конденсаторами*.

Два зближених на дуже малу відстань провідника утворюють пристрій великої ємності, тобто конденсатор. Провідники, які утворюють конденсатор, називаються його *обкладками*. Щоб зовнішні тіла не надавали вплив на ємність конденсатора, обкладкам надають таку форму, щоб поле, створюване накопичувані на них заряди, було практично зосереджено всередині конденсатора. Цій умові задовольняють дві пластини, розташовані близько одна до одної, два коаксіальних циліндра, дві концентричні сфери.

Конденсатори бувають плоскі, циліндричні і сферичні.

Оскільки поле заключено всередині конденсатора, лінії вектора зміщення починаються на одній обкладці і закінчуються на іншій. Отже, вільні заряди, виникаючі на різних обкладках, мають однакову величину і різні за знаком.

Під ємністю конденсатора розуміється фізична величина, чисельно рівна заряду, який потрібно додатково повідомити обкладці конденсатора, щоб напруга між обкладками збільшилася на одиницю:

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta U}. \quad (46)$$

Ємність конденсатора вимірюється в Фарадах. Величина ємності визначається геометрією конденсатора (розмірами і формою обкладок, величиною зазору між ними), а також діелектричними властивостями середовища в про-просторі між обкладками.

У плоскому конденсаторі при малій величині зазору між пластинами  $d$  поле між обкладками можна вважати однорідним. Напруженість поля між обкладками дорівнює

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

де  $S$  — площа однієї пластини.

В однорідному полі зв'язок між напругою та напруженістю визначається виразом

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

тобто

$$\Delta U = \frac{d \Delta q}{\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

звідки знайдемо ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (47)$$

Аналогічним способом можна знайти ємність *циліндричного ісферичного* конденсаторів.

#### Задача 4

Між пластинами плоского конденсатора, зарядженого до різниці потенціалів 600 В, знаходяться два шари діелектриків: скла товщиною 5 мм і ебоніту товщиною 3 мм. Площа кожної пластини 200 см<sup>2</sup>. Визначити електроємність конденсатора.

Дано:

$$U=600 \text{ В}$$

$$d_1= 5 \text{ мм}=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$d_2= 3 \text{ мм}=3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$S=200 \text{ см}^2= 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$C$  - ?

Розв'язання. Завдання є продовженням попередньої задачі з тими ж умовами. Визначимо електроємність конденсатора:

$$C = q / U, (48)$$

де  $q = \sigma S$  заряд кожної пластини конденсатора.

З огляду на те, що поверхнева густина зарядів  $\sigma$  на пластинах конденсатора чисельно дорівнює модулю електричного зміщення, тобто  $\sigma = D$ , отримаємо

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{U} = \frac{DS}{U}.$$

Перевіримо, чи дає розрахункова формула одиницю електроємності (Ф). Для цього в праву частину формули замість символів величин підставимо їх

$$\text{оди-ниці вимірювань: } \frac{[D][S]}{[U]} = \frac{\text{Кл} / \text{м}^2 \times \text{м}^2}{\text{В}} = \text{Ф}.$$

Провівши обчислення, отримаємо (пФ):

$$C = \frac{3,1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{600} = 103 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 103 \text{ пФ}.$$

Відповідь:  $C=103$  пФ

### 3.3. Енергія електростатичного поля

Як було показано раніше, сили взаємодії заряджених тіл консервативні, так як їх робота не залежить від форми шляху. Значить, система заряджених тіл володіє *потенціальною енергією*.

Розглянемо взаємодію точкових зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , що знаходяться на відстані  $r_{12}$  один від одного. Заряд  $q_2$ , що знаходиться в полі заряду  $q_1$ , володіє потенційною енергією:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{12}} = q_2 \Phi_2, \quad (49)$$

де  $\Phi_2$ — потенціал поля, створюваного зарядом  $q_1$  у точці, в якій знаходиться заряд  $q_2$ .

Аналогічно потенційна енергія заряду  $q_1$  в полі, створюваному зарядом  $q_2$ :

$$W_p = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\epsilon r_{12}} = q_1 \Phi_1. \quad (50)$$

Очевидно, що кожне з цих виразів визначає енергію взаємодій наслідком зарядів  $W = W_p$ , тому вираз для  $W$  в симетричному вигляді відносно обох зарядів має вигляд

$$W = \frac{q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2}{2}. \quad (51)$$



Аналогічний вираз для системи, що складається з  $N$  точкових зарядів, записується так:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i. \quad (52)$$

де  $\varphi_i$  - потенціал, створюваний усіма зарядами, крім  $i$ -го, в точці розташування  $i$ -го заряду. З отриманих формул видно, що *потенційна енергія однойменних зарядів позитивна, різнойменних- від'ємна*.

Знак потенційної енергії має певний фізичний зміст. Дійсно, *будь-яка система прагне до мінімуму потенційної енергії*. Тому сили, що діють в системі, повинні мати таке направлення, щоб енергія системи зменшувалася. Наприклад, якщо заряди притягуються, то при зменшенні відстані між ними енергія системи буде зменшуватися. Якщо ж заряди відштовхуються, то енергія зменшується при збільшенні відстані між ними. Це призводить до того, що заряди прагнуть розійтися на ще більшу відстань.

### 3.4. Енергія заряджених провідників і конденсатора

Заряд провідника, зосереджений на його поверхні, можна розглядати як сукупність точкових зарядів. Отже, можна використовувати формулу (52) для потенційної енергії системи точкових зарядів. Оскільки всі точки мають однаковий потенціал, тобто є *еквівалентно-потенційними* точками, то з формули (52) випливає

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi q_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q\varphi}{2}. \quad (53)$$

Заряд провідника пов'язаний з його ємністю і потенціалом виразу  $q=C\varphi$ . Тоді вираз (53) записується в такому вигляді

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (54)$$

Конденсатор складається з двох провідників із зарядами  $+q$  і  $-q$ . Різниця потенціалів на цих провідниках

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Енергія конденсатора визначається наступним виразом:

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 \sum q_+ + \frac{1}{2} \varphi_2 \sum q_- = \frac{1}{2} [\varphi_1(+q) + \varphi_2(-q)] = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2}. \quad (55)$$

З урахуванням того, що ємність конденсатора дорівнює  $C = q / U$ , формулу для енергії зарядженого конденсатора можна також представити в наступному вигляді:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (56)$$

Енергію плоского конденсатора можна виразити через величини, які характеризують електричне поле в зазорі між обкладками. Для цього у формулі (56) можна врахувати, що  $C = \varepsilon_0 \varepsilon S / d$  і  $U = Ed$ . Тоді

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd, \quad (57)$$

де  $Sd = V$  — об'єм простору між пластинами конденсатора, де зосереджено електричне поле.

Формула (56) пов'язує енергію конденсатора з зарядом на його обкладках, а формула (57) — з напруженістю поля.

Виникає питання, що є носієм енергії — заряди чи поле, в якому ця енергія зосереджена?

Електростатика не може дати відповідь на це питання, так як постійні поля і заряди, які створюють їх, не можуть існувати окремо один від одного. У *електродинаміці* розглядаються змінні в часі поля, які можуть існувати незалежно від побуджених ними зарядів і поширюватися в просторі у вигляді електромагнітних хвиль. Ці хвилі переносять енергію (радіохвилі, світло і т. д.). І, отже, *носієм енергіїє поле*.

*Енергія* - одна з характеристик стану матерії, отже, поняття про енергію не може бути відірване від поняття про матерії. Електричне поле - *одна з форм матерії*.

З формули (57) можна визначити енергію, що припадає на одиницю об'єму поля, тобто *густину енергії поля*:

$$w_E = \frac{W_E}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}. \quad (58)$$

Ця формула отримана для однорідного поля плоского конденсатора, в якому енергія поля розподілена між пластинами практично з однаковою густиною. Однак теорія показує, що ця формула справедлива і для самого загального випадку - *неоднорідного і змінного в часі* поля.

У разі *неоднорідного* поля об'ємна густина енергії визначається за формулою

$$w_E = \frac{dW_E}{dV}. \quad (9)$$

#### Задача 5

Плоский скляний конденсатор, заряджений до різниці потенціалів 1000 В, має енергію 100 мкДж. Площа пластин становить 100 см<sup>2</sup>. Визначити відстань між пластинами, напруженість і об'ємну густину енергії електричного поля конденсатора.

Дано:

$$U = 1000 \text{ В}$$

$$W = 100 \text{ мкДж} = 10^{-4} \text{ Дж}$$

$$S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$\varepsilon = 7$$

---


$$d = ? ; E = ? ; w_E = ?$$

Розв'язання. Енергія плоского конденсатора визначається виразом

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

де  $C$  – ємність, а  $U$  – різниця потенціалів на його обкладках. Вираз для ємності має вигляд

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де  $S$  – площа пластин,  $d$  – відстань між ними,  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникливість речовини між обкладинками. З цих формул отримуємо вираз для відстані між обкладинками:

$$d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2W} = \frac{7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-4}} = 3,098 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 3,1 \text{ мм}.$$

Напруженість електричного поля (В / м) дорівнює

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000}{3,1 \cdot 10^{-3}} = 326 \cdot 10^3 \text{ В / м}.$$

Об'ємна густина енергії електричного поля конденсатора:

$$w_E = \frac{W_E}{S \cdot d} = \frac{10^{-4}}{10^{-2} \cdot 3,1 \cdot 10^{-3}} = 3,226 \text{ Дж / м}^3.$$

### Питання для самоперевірки

1. Від чого залежить потенційна енергія системи двох зарядів?
2. Що є носієм енергії - заряди чи поле, в якому ця енергія зосереджена?
3. Який знак має потенційна енергія позитивних зарядів?
4. Який знак має потенційна енергія різнойменних зарядів?
5. Напишіть формулу для електроємності плоского конденсатора.
6. Напишіть формулу для електроємності циліндричного конденсатора.
7. Що таке густина енергії електричного поля?
8. У яких одиницях вимірюється густина енергії електричного поля?

### 4. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

*Електричним струмом називається спрямований рух електричних зарядів під дією електричного поля.*

В металах носіями струму є вільні електрони, тобто зовнішні, найбільш слабо пов'язані з власним атомом електрони, подібно електронній «хмарі» рухаються усередині кристалічної решітки металу.

Характеристиками струму є сила струму  $I$  і густина струму  $j$ :

$$I = dq/dt, \quad (60)$$

тобто сила струму визначається величиною заряду  $dq$ , що переноситься через будь-який перетин провідника за одиницю часу. Якщо струм не змінюється з часом, він називається постійним. В цьому випадку

$$I = q/t. \quad (61)$$

Одиницею струму в системі СІ є Ампер (1 А).

Розподіл струму по перетину характеризується густиною струму  $j$ :

$$j = dq/dSdt. \quad (62)$$

Густина струму чисельно дорівнює заряду, що переноситься в одиницю часу через одиничну площадку, розташовану нормально до руху зарядів.

Умовно за напрямок  $j$  прийнято напрямок руху позитивних носіїв струму. У металах, де носії струму - електрони мають негативний знак, напрямок струму протилежно руху носіїв. У розчинах електролітів або в іонізованих газах, де присутні заряди обох знаків, густина струму складається з густини струму позитивних зарядів і густини струму негативних зарядів, причому ці струми спрямовані в *протилежні* сторони:

$$j = j_+ + j_-.$$

Якщо в одиниці об'єму міститься  $n$  носіїв то під дією напруженості електричного поля носії набувають швидкість  $v_{др}$ , тоді за одиницю часу через одиничну площадку пройде  $nv_{др}$  носіїв, які перенесуть заряд  $nev_{др}$  (тут  $e$  - елементарний заряд, тобто заряд, рівний заряду електрона). Таким чином, для густини струму виходить наступний вираз:

$$j = env_{др}. \quad (63)$$

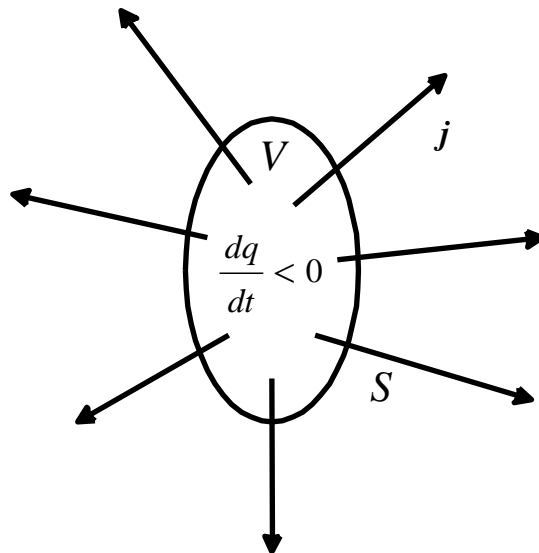


Рис. 19. До визначення рівняння безперервності

Для сили струму, що протікає через подумки виділену в провідному середовищі замкнуту поверхню  $S$ , що обмежує деякий об'єм  $V$  (рис. 19), справедливим є рівняння безперервності в інтегральному вигляді:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S j_n dS, \quad (64)$$

яке є наслідком закону збереження заряду.

Для *стаціонарних струмів* (тобто таких струмів, коли розподіл зарядів в даній точці не змінюється з плином часу, але змінюється від точки до точки) рівняння безперервності набуде вигляду

$$\oint_S j_n dS = 0. \quad (65)$$

Умові стаціонарності в рівнянні задовольняє постійний струм, поточний по замкнутому ланцюзі. Отже, лінії постійного струму завжди замкнені, не мають джерел, ніде не починаються і ніде не закінчуються.

#### 4.1. Закон Ома для однорідної ділянки кола (в інтегральній формі)

Однорідним називається провідник, який не містить джерел струму. Для того, щоб в провіднику довжиною  $l$  (рис. 20) тривалий час міг протікати постійний струм  $I$ , необхідно всередині провідника підтримувати постійне електричне поле напруженістю  $E$ :

$$E = - \frac{d\varphi}{dl} = - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{U}{l}, \quad (66)$$

а на кінцях провідника - постійну різницю потенціалів

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const.}$$

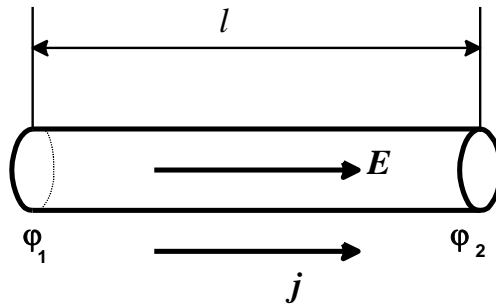


Рис. 20. До визначення закону Ома

Відомий закон Ома в *інтегральній формі* встановлює, що сила струму в провіднику прямо пропорційна напрузі  $U$  на його кінцях:

$$I = \sigma R = \left( \frac{1}{R} \right) U. \quad (67)$$

Коефіцієнтом пропорційності є *електропровідність*  $\sigma$ , а зворотна їй величина  $R = 1 / \sigma$  називається *опором* провідника. Одиниця опору в системі одиниць СІ 1 Ом - це опір провідника, по якому тече струм в 1 А при напрузі на його кінцях в 1 В.

Величина опору провідника  $R$  залежить від його геометричних розмірів і форми, а також від матеріалу, з якого виготовлений провідник:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (68)$$

де  $\rho$  - питомий опір провідника, що вимірюється в Ом·м;

$l$  - його довжина;

$S$  - площа його поперечного перерізу.

#### 4.2. Закон Ома для неоднорідної ділянки і для замкнутого ланцюга

Для підтримки постійного струму в ланцюзі необхідне *зовнішнє джерело*, що забирає енергію ззовні і перетворює її в енергію руху зарядів.



Всередині провідника сили електричного поля переміщують заряди в сторону зменшення потенціалу, а поза провідником зовнішні (тобто сторонні) сили повинні переносити заряди в напрямку зростання потенціалу, тобто *проти сил електростатичного поля* (рис. 21). Тому сили, що викликають поділ зарядів у зовнішньому ланцюзі (джерелі), називаються *сторонніми силами*. Вони мають *неелектричну* природу (механічні, хімічні та ін.).

Дія джерела характеризується *електрорушійною силою* (ЕРС), яка дорівнює роботі сторонніх сил по переміщенню в ланцюзі *одиночного позитивного заряду*:

$$\mathcal{E} = \frac{A^{ст}}{q}. \quad (69)$$

ЕРС, як і потенціал, вимірюється в вольтах. Сторонню силу  $F^{ст}$ , діючу на заряд  $q$ , можна представити у вигляді

$$F^{ст} = q E^{ст}, \quad (70)$$

де  $E^{ст}$ -*напруженість* поля сторонніх сил.

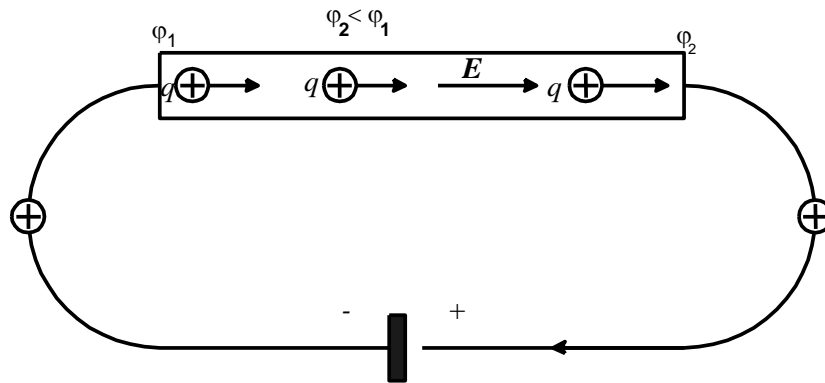


Рис. 21. Поле сторонніх сил

ЕРС, яка діє в замкнутому ланцюзі, може бути визначена як *циркуляція вектора напруженості сторонніх сил*:

$$\mathcal{E} = \oint_l E_l^{cm} dl. \quad (71)$$

Вираз закону Ома для неоднорідної ділянки замкненого ланцюга, на ділянці 1 - 2 якої включено стороннє джерело струму  $dl$ , має вигляд

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_l^{cm} dl. \quad (72)$$

Крім сторонніх сил, на заряд діють також сили електростатичного поля  $F_E = qE$ . Робота, що здійснюється результуючої силою над зарядом  $q$  на ділянці ланцюга 1 - 2, визначається виразом

$$A_{12} = q \int_1^2 E_l^{cm} dl + q \int_1^2 E_l dl = q E_{12} + q(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (73)$$

*Величина, що чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють електростатичними і сторонніми силами при переміщенні позитивного одиничного заряду, називається падінням напруги на даній ділянці ланцюга.*

Закон Ома для неоднорідної ділянки ланцюга має вигляд

$$U_{12} = (\Phi_1 - \Phi_2) + \mathcal{E}_{12}; \quad I = \frac{U_{12}}{R}. \quad (74)$$

При відсутності сторонніх сил ( $\mathcal{E}_{12}=0$ ) напруга збігається з різницею потенціалів на кінцях ділянки. Для замкненого ланцюга робота електростатичних сил дорівнює нулю. В цьому випадку  $\Phi_1 = \Phi_2$ , і отримаємо закон Ома для замкнутого ланцюга:

$$I = \mathcal{E}_{12} / R_{\text{полн}}, \quad (75)$$

або

$$I = \mathcal{E}_{12} / (R + r_0), \quad R_{\text{полн}} = R + r_0, \quad (76)$$

де  $R_{\text{полн}}$  - повний опір ланцюга;

$r_0$  - внутрішній опір джерела;

$R$ -опір навантаження.

Силіві лінії електростатичного поля не утворюють замкнутих петель, і робота його сил за замкнутим контуром дорівнює нулю:

$$\oint_l E_l dl = 0. \quad (77)$$

Це означає, що електростатичне поле є полем потенціального.

На відміну від електростатичного поля поле сторонніх сил має *вихровий характер*: лінії напруженості цього поля замикаються *всередині джерела*, і *робота по перенесенню заряду в замкнутому ланцюзі визначається дією сторонніх сил*, тобто енергією, витраченою в джерелі:

$$A = \oint_l E_l^{CT} dl \neq 0. \quad (78)$$

#### 4.3. Закон Джоуля-Ленца

Закон Джоуля-Ленца оцінює теплову дію струму. Відповідно до закону збереження енергії тепло виділяється за рахунок роботи сил поля по переміщенню зарядів. Для нескінченно малого заряду  $dq$

$$dQ = dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = dq \cdot U = I^2 R dt, \quad (79)$$

де  $U$  – різниця потенціалів, або *падіння напруги* на ділянці, за яким переноситься заряд.

Вираз (79) – це закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі, оскільки тепло виділяється у *всьому об'ємі провідника* за нескінченно малий проміжок часу.

За *кінцевий відрізок часу* від  $t_1$  до  $t_2$  виділяється тепло

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt. \quad (80)$$

Струм  $I$  у виразі (80) є функцією часу.

#### 4.4. Правила Кірхгофа

Правила Кірхгофастосовуються для вирішення завдань з розгалуженими ланцюгами постійного струму, в різних гілках яких діють не один, а кілька джерел ЕРС, одного закону Ома вже недостатньо.

##### *Перше правило Кірхгофа*

Це правило відноситься до *вузлів* розгалуженого ланцюга. *Вузлом* називається точка, в якій сходяться не менше трьох провідників. Наприклад, в ланцюзі, зображеного на рис. 22, налічується *два* вузла: в точці  $A$  і в точці  $B$ . В цих точках відбувається розгалуження струмів.

З рівняння безперервності (64) випливає, що в будь-якій точці ланцюга, в будь-якому вузлу наявний заряд повинен залишатися постійним.

*Позитивними* вважаються струми, поточні по напрямку до вузла, а ті що *виходять* з вузла - *негативними*. Попередньо задаються їх напрямки.

Перше правило Кірхгофа: *сума струмів, що сходяться у вузлу, дорівнює нулю*:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (81)$$

При цьому враховуються знаки струмів. Наприклад, для вузла  $A$  ланцюга, зображеного на рис. 22, маємо

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (82)$$

Перше правило Кірхгофа є, по суті, наслідком закону збереження заряду: в вузлу заряд не накопичується, а потенціал залишається постійним.

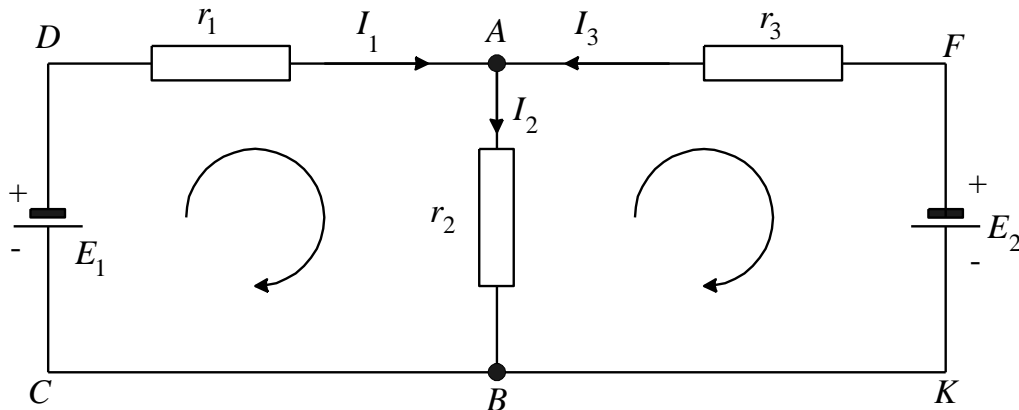


Рис. 22. До визначення правил Кірхгофа

Слід додати, що не всі вузли є незалежними: якщо в ланцюзі є всього  $N$  вузлів, то рівнянь за першим правилом Кірхгофа може бути складено  $N-1$ , за числом незалежних вузлів. Рівняння для  $N$ -го вузла може бути отримано шляхом лінійної комбінації попередніх  $N-1$  рівнянь. У ланцюзі, зображеного на рис. 22, всього два вузла, незалежний – тільки один з них. Якщо вибрати в якості незалежного вузол  $A$ , то для нього рівняння має вигляд (82). Якщо тепер скласти рівняння для вузла  $B$ , то для нього отримаємо

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (83)$$

Це рівняння - залежне, так як може бути отримано шляхом множення рівняння (82) на (-1).

### *Друге правило Кірхгофа*

Друге правило Кірхгофа відноситься до довільних замкнутих контурів, які можна виділити в даному розгалуженому ланцюзі. На рис.22 можна виділити три контури:  $ABCD$ ,  $AFKB$  і  $DFKCD$ . Необхідно задатися напрямком обходу

контурів, яке вибирається довільно. Напрямки обходу контурів  $ABCD$  і  $AFKBA$  вказані стрілками (за годинниковою стрілкою).

Позитивними вважаються струми, напрямки яких збігаються з напрямом обходу, і негативними ті, напрямки яких протилежні напрямку обходу. ЕРС вважається позитивною, якщо вона діє в напрямку обходу контуру, і негативною, якщо в протилежному напрямку.

Друге правило Кірхгофа: в будь-якому довільно обраному замкнутому контурі алгебраїчна сума падінь напруги на ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі всіх ЕРС, що діють в цьому контурі:

$$\sum_{k=1}^m I_k R_k = \sum_{k=1}^m E_k. \quad (84)$$

З  $N$  можливих контурів незалежними будуть будь-які  $N - 1$ , а  $N$ -й контур буде залежним, тобто для нього рівняння за другим правилом Кірхгофа може бути отримано шляхом лінійної комбінації попередніх  $N-1$  рівнянь.

Для ланцюга, зображеного на рис. 22, потрібно скласти два рівняння, користуючись другим правилом Кірхгофа.

Для контуру  $ABCD$

$$r_1 I_1 + I_2 = -E_1. \quad (85)$$

Для контуру  $AFKBA$

$$-r_2 I_2 - r_3 I_3 = E_2. \quad (86)$$

Система рівнянь (83), (85) і (86) вирішується як звичайна система з трьох лінійних рівнянь. Складаємо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ r_1 & r_2 & 0 \\ 0 & -r_2 & -r_3 \end{vmatrix}. \quad (87)$$

Для знаходження, наприклад, струму  $I_1$  обчислюють визначник:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -E_1 & r_2 & 0 \\ E_2 & -r_2 & -r_3 \end{vmatrix}, \quad (88)$$

що виходить з визначника  $\Delta$  шляхом заміни стовпця, складеного з коефіцієнтів при  $I_1$ , стовпцем, складеним з вільних членів. Тоді

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}. \quad (89)$$

І аналогічно для інших невідомих струмів.

#### Задача 6

Сила струму в провіднику опором 20 Ом рівномірно наростає від 0 до 4 А протягом 2 с. Визначити кількість теплоти, що виділилася в провіднику за перші півтори секунди.

Дано:

$$R = 20 \text{ Ом}$$

$$I_1 = 0 \text{ А}, I_2 = 4 \text{ А}$$

$$t_1 = 0, t_2 = 2 \text{ с}, t_3 = 1,5 \text{ с}$$

---

$Q$  - ?

Розв'язання. Відповідно до закону Джоуля-Ленца теплова потужність, що виділяється на опорі  $R$ , дорівнює

$$P = I^2 R.$$

Кількість тепла  $dQ$ , що виділяється за час  $dt$  на опорі  $R$ , дорівнює

$$dQ = P dt = I^2 R dt. \quad (90)$$

За умовою задачі сила струму рівномірно наростає, тобто є лінійною функцією часу

$$I = at + b. \quad (91)$$

У початковий момент  $t_1 = 0$  струм  $I_1$  дорівнює нулю, тому в рівнянні (91) маємо  $b = 0$ . Таким чином,

$$I = at. \quad (92)$$

Коефіцієнт "a" знайдемо з умови, що  $I_2 = 4 \text{ A}$  при  $t_2 = 2 \text{ c}$

$$I_2 = at_2.$$

Звідки отримуємо

$$a = \frac{I_2}{t_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ A/c}.$$

Підставляючи в формулу (90) вираз (92) і інтегруючи за часом від 0 до  $t_3$ , знайдемо кількість виділеного тепла

$$Q = \int_{t_1}^{t_3} I^2 R dt = a^2 R \int_{t_1}^{t_3} t^2 dt = \frac{a^2 R}{3} (t_3^3 - t_1^3). \quad (93)$$

Підставляючи в формулу (93) значення параметрів, що входять до неї, отримаємо

$$Q = \frac{2^2 \cdot 20}{3} (1,5^3 - 0) = 90 \text{ Дж}.$$

#### 4.5. Класична електронна теорія металів

За класичним уявленням вважалося, що метал складається з позитивно заряджених іонів, розташованих нерухомо в вузлах кристалічної решітки, і з вільних електронів, які не пов'язані з решіткою. Такі вільні електрони рухаються між іонами з невеликим опором, подібно "електронного газу". До електронного газу були застосовані поняття добре розробленої статистичної



теорії газів. Ця теорія базується на класичній статистиці Максвелла-Больцмана.

*Середньою довжиною вільного пробігу електрона  $\bar{\lambda}$  називається відстань між двома послідовними зіткненнями електрона з іонами у вузлах кристалічної решітки. Вважається що  $\bar{\lambda}$  не залежить від швидкості електрона і за порядком величини порівняннa з постійною решітки металу.*

Як і в молекулярно-кінетичній теорії газів, вважається, що електрони здійснюють безладний тепловий рух із середньою швидкістю

$$\bar{v}_{\text{тепл}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (94)$$

де  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град - постійна Больцмана,

$m = 0,91 \cdot 10^{-30}$  кг - маса електрона.

Користуючись цією формулою, можна оцінити значення середньої швидкості хаотичного теплового руху при кімнатній температурі ( $T \sim 300$  К). При цих значеннях порядок середньої швидкості теплового руху становить  $10^5$  м/с.

Під впливом зовнішнього електричного поля з напруженістю  $E$  електрони набувають середню швидкість спрямованого руху  $\bar{v} = v$ . За умовою, що  $\bar{v} < v_{\text{тепл}}$ , яке виконується при не дуже сильних полях ( $E < 10^5$  В/см), можна вважати, що швидкість спрямованого руху електронів пропорційна напруженості електричного поля, тобто у векторному вигляді

$$v = uE. \quad (95)$$

Коефіцієнт пропорційності  $u$  називається *рухливістю* електрона.

*Рухливість електрона чисельно дорівнює середній швидкості його спрямованого руху під впливом одиничного електричного поля.*

Густина струму в провіднику залежить від середньої швидкості направленої руху вільних електронів. Сила струму через площу перетину  $S$ , перпендикулярного до напрямку руху зарядів (рис. 3.20), дорівнює

$$I = enS, \quad (96)$$

де  $n$  - концентрація електронів, тобто їх число в одиниці об'єму,  $e$  - елементарний заряд.

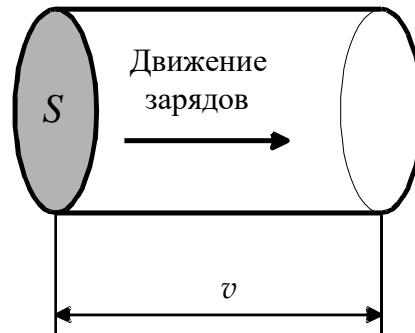


Рис.23

Струм можна виразити через його густину ( $I = jS$ ). Тоді на підставі отримуємо в векторній формі:

$$\mathbf{j} = en\mathbf{v}. \quad (97)$$

Або з урахуванням (95)

$$\mathbf{j} = env\mathbf{E}. \quad (98)$$

Можна оцінити середню швидкість  $v$  упорядкованого руху електронів в металі, приймаючи значення густини  $j$  рівним  $10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/м}^2$ . Це величина допустимої густини струму в електричних приладах, при якій провідники помітно не нагріваються. Заряд електрона дорівнює  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, а концентрація вільних електронів має порядок величини  $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ . Тоді

$$v = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

що значно менше, ніж середнє значення швидкості хаотичного теплового руху, отримане за формулою (94).

#### 4.6. Закони Ома і Джоуля-Ленца в диференціальній формі

Зв'язок між щільністю струму  $\mathbf{j}$  і напруженістю поля  $\mathbf{E}$  в будь-якій точці провідного середовища можна знайти, якщо виділити подумки в околиці деякої точки елементарний циліндричний об'єм з утвореними, паралельними векторами  $\mathbf{j}$  і  $\mathbf{E}$  (рис. 24).

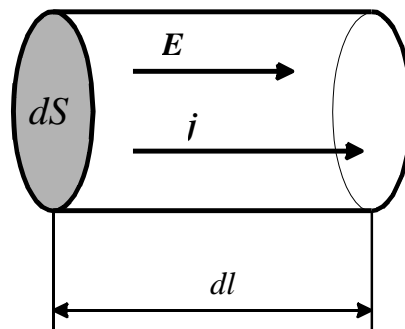


Рис.24. До визначення законів Ома і Джоуля-Ленца

Скориставшись виразом (67) до закону Ома і враховуючи вираз (68), отримаємо

$$jdS = \frac{EdldS}{\rho dl} = \frac{1}{\rho} E = \sigma E,$$

тобто

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (99)$$

Це закон Ома в диференціальній формі: *густина струму в будь-якій точці провідного середовища прямо пропорційна напруженості електричного поля в цій точці*. Коефіцієнтом пропорційності є *питома електропровідність* (провідність)  $\sigma = \frac{1}{\rho}$ .

Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі можна отримати, скориставшись виразом (79) стосовно до елементарного провідника:

$$dQ = (j dS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = j^2 \rho dl dS dt. \quad (100)$$

*Питома потужність струму*, тобто кількість тепла, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу,

$$w = \frac{dQ}{dV dt}, \quad (101)$$

звідки отримаємо

$$w = j^2 \rho. \quad (102)$$

Або з урахуванням (99) для закону Ома в диференціальній формі

$$w = jE^2. \quad (103)$$

#### 4.7. Закони Ома і Джоуля-Ленца за електронною теорією

Порівнюючи вираз (98) з законом Ома в диференціальній формі (99), для електропровідності  $\sigma$  отримаємо вираз

$$\sigma = en\mu. \quad (104)$$

Вираз для електропровідності можна отримати і на підставі класичної електронної теорії. Для цього знайдемо *середню швидкість упорядкованого руху електронів* в металі виходячи з припущення, що електрони, прискорювані полем, періодично стикаються з іонами, що знаходяться у вузлах кристалічної решітки металу, і віддають їй накопичену ними

кінетичну енергію. Ця швидкість набувається за час між двома послідовними зіткненнями, тобто на довжині вільного пробігу електрона  $\bar{\lambda}$ .

Відразу після зіткнення початкова швидкість спрямованого руху буде дорівнювати нулю ( $v = 0$ ), а за час вільного пробігу телектрон, що має масу  $m$ , рухається з прискоренням

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \quad (105)$$

Тоді в кінці шляху електрон набуває максимальну швидкість

$$v_{max} = a\tau = \frac{eE}{m} \tau.$$

В результаті середня швидкість електрона буде дорівнювати

$$v = \frac{0 + v_{max}}{2} = \frac{1}{2} v_{max},$$

тобто

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\tau}{m} \cdot E. \quad (106)$$

Час вільного пробігу  $\tau$  дорівнює середній довжині вільного пробігу  $\bar{\lambda}$ , поділеній на середню швидкість теплового руху  $\bar{v}_{тепл}$  електронів, тобто

$$\tau = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_{тепл}}.$$

Тому (106) можна переписати ще так:

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_{тепл}} \cdot E. \quad (107)$$

Якщо тепер підставити (108) в (97), то і отримаємо закон Ома в диференціальній формі, виходячи з електронної теорії:

$$j = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_{\text{тепл}}} \cdot E. \quad (108)$$

Густина струму пропорційна напруженості поля, а коефіцієнтом пропорційності є величина питомої електропровідності

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_{\text{тепл}}}. \quad (109)$$

Порівнюючи також (107) з (95), можна записати і вираз для рухливості електронів по електронній теорії:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_{\text{тепл}}}. \quad (110)$$

Формули (109) і (110) можна вважати загальними. Однак, очевидно, що в залежності від того, як будуть теоретично визначатися введені вище величини ( $\bar{\tau}$  або  $\bar{\lambda}$  і  $\bar{v}_{\text{тепл}}$ ), так само буде оцінюватися і залежність  $u$  і від інших фізичних параметрів (наприклад, від температури).

На підставі класичної електронної теорії можна отримати також запис закону Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

В кінці вільного пробігу електрон набуває максимальну швидкість  $v_{\text{max}}$ , отже, максимальну кінетичну енергію

$$W_{\text{max}}^{\text{кин}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{e^2 E^2}{2m} \tau^2,$$

яка йде на нагрівання металу. Замінюючи  $\tau$  через  $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_{\text{тепл}}}$ , отримаємо

$$W_{\text{max}}^{\text{кин}} = \frac{e^2 \bar{\lambda}^2}{2m \bar{v}_{\text{тепл}}^2} E^2.$$

Знаючи середнє число зїткнень  $\bar{z}$  кожного електрона за 1 секунду з решїткою, отримаємо енергїю, що видїляється у виглядї тепла за 1 секунду в одиницї об'єму (тобто *питому теплову потужнїсть*)

$$Q^* = \bar{z}n \cdot \frac{e^2 \bar{\lambda}^2}{2m\bar{v}_{\text{тепл}}^2} E^2.$$

Середня довжина вільного пробїгу дорївнює

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}_{\text{тепл}}}{\bar{z}},$$

звїдси, виключаючи  $\bar{z}$ , остаточно для  $Q^*$  отримаємо

$$Q^* = \frac{e^2 n \bar{\lambda}}{2m\bar{v}_{\text{тепл}}^2} E^2. \quad (111)$$

Це і є закон Джоуля-Ленца в диференціальній формї, отриманий на основї електронної теорїї. Величина тепла пропорційна квадрату напруженостї електричного поля, а коефїцієнт пропорційностї, як показує дослїд, є електропровіднїстю  $\sigma$ .

#### 4.8. Основнї висновки з класичної електронної теорїї

Вїдомий закон Вїдемана-Франца встановлює, що вїдношення коефїцієнта теплопровідностї металу до його електропровідностї  $\sigma$  є величина, однакова для всїх металїв і залежна лише вїд температури. Цей закон якїсно пояснюється за класичною електронною теорїєю. Беручи електронний газ в металах як їдеальний газ, можна отримати для вїдомий з молекулярної

$$\text{фїзики вираз } \kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v}_{\text{тепл}} \bar{\lambda} C_V,$$

де  $\rho = mn$ , а  $C_V$  - *питома теплоємнїсть* газу при постїйному об'ємї. Якщо тепер врахувати, що

$$C_V = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{\mu} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Nk}{Nm} = \frac{3}{2} \frac{k}{m},$$

де  $N$  - число Авогадро, и крім цього:

$$\frac{m\bar{v}_{\text{тепл}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

то відношенням до  $\sigma$ , тобто закон Відемана-Франца запишеться так:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \quad (112)$$

Цей вираз добре узгоджується з дослідом, однак, як виявилось згодом, цей збіг був випадковим. Коли Лоренц, використовуючи статистику Максвелла-Больцмана, врахував відмінність швидкостей електронів, що утворюють струм, то отримав в (112) коефіцієнт не 3, а 2, що не збігалось з дослідом. Застосована згодом квантова теорія для чисельного коефіцієнта дала точне значення, рівне  $\frac{\pi^2}{3} \approx 3,29$ , що близько збігалось з величиною 3 за класичною теорією, яка передбачала, що всі електрони мають однакові швидкості.

Отже, класична електронна теорія успішно пояснила закони дослідів Ома і Джоуля-Ленца, а також якісно пояснила закон Відемана-Франца. Однак вона зустрілася і з великими труднощами.

За класичною теорією електропровідності металів Друде-Лоренца передбачалося, що вільні електрони в металі подібні ідеальному молекулярному газу, до якого може бути застосована класична статистика Максвелла-Больцмана. Згідно з цією статистикою середня швидкість теплового руху електронів визначається формулою (94), тобто середня швидкість теплового руху пропорційна кореню квадратному з абсолютної температури:

$$\bar{v}_{\text{тепл}} \sim \sqrt{T}.$$

Якщо це справедливо, то відповідно до (109) і (110) рухливість електронів  $u$  і провідність металу  $\sigma$  повинні бути обернено пропорційними кореню з температури:



$$u \sim \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \text{і} \quad \sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}},$$

тобто питомий опір  $\rho = \sigma^{-1}$  за класичною електронною теорією повинен бути пропорційним кореню квадратному з температури:

$$\rho \sim \sqrt{T}.$$

Однак дослід показував, що опір металів прямо пропорційний температурі. Це була перша і основна невдача класичної електронної теорії металів. Крім того, класична електронна теорія не змогла підтвердити дослідні дані за значенням молярної теплоємності металів (закон Дюлонга і Пті).

Згідно з цим законом теплоємність одного моля металів повинна складатися з теплоємності електронного газу, що дорівнює  $\frac{3}{2}R$ , і теплоємності решітки, яка дорівнює  $3R$ . Сумарна теплоємність, отже, повинна дорівнювати  $4,5R$ , а для діелектриків, що не мають електронного газу, тільки  $3R$ . Насправді ж їх теплоємності виявилися близькими за величиною.

Подолати всі ці труднощі вдалося тільки за допомогою *квантової теорії*.

#### Питання для самоперевірки

1. Що таке електричний струм?
2. Дайте визначення величини (сили) струму.
3. Дайте визначення різниці потенціалів (напруги).
4. Напишіть формулу, яка пов'язує різницю потенціалів і напруги.
5. Що таке резистор?
6. Напишіть формулу для опору послідовно з'єднаних резисторів.
7. Напишіть формулу для опору паралельно з'єднаних резисторів.
8. Напишіть закон Ома для ділянки ланцюга. Порівняйте його з законом Ома в диференціальній (локальній) формі.

9. Яка ділянка ланцюга називається неоднорідною?
10. Запишіть закон Ома для неоднорідної ділянки ланцюга.
11. Якими характеристиками описується джерело ЕРС?
12. Сформулюйте перше правило Кірхгофа. Яку властивість заряду він відображає?
13. Запишіть формулу для першого правила Кірхгофа.
14. Сформулюйте друге правило Кірхгофа.
15. Запишіть формулу для другого правила Кірхгофа.
16. Що таке вузол електричного кола?
17. Що таке повний електричний ланцюг?

Задачі для самостійного розв'язування з електрики.

1. Електричне поле створюється точковим зарядом в 10 нКл. Як і у скільки разів зміниться напруженість електричного поля при збільшенні відстані на 40%?
2. У середині замкненої поверхні знаходиться сумарний позитивний заряд 100 нКл. Відносна діелектрична проникність середовища дорівнює 22,6. Знайти потік вектора напруженості електричного поля через цю поверхню.
3. Визначити напруженість електричного поля в центрі круглого витка радіусом 10 см, по якому рівномірно розподілений заряд 200 пКл.
4. Визначити роботу по перенесенню заряду в 1 нКл по замкнутому контуру у вигляді кола радіусом 10 см в однорідному електричному полі з напруженістю 50 В / м.
5. Потенційна енергія заряду в 2 нКл в деякій точці електричного поля дорівнює 10 мкДж. Визначити потенціал в цій точці.
6. Визначити ємність відокремленого провідника, якщо при перенесенні на провідник заряду в 2 нКл потенціал провідника збільшився на 100 В.

7. Визначити роботу, що здійснюються сторонніми силами по переміщенню електрона по замкнутому ланцюзі, якщо ЕРС. дорівнює 1 В. Роботу виразити в еВ.
8. Електрон влетів в однорідне електричне поле в напрямку силових ліній, маючи кінетичну енергію, рівну  $3,8 \cdot 10^{-16}$  Дж. Знайти значення енергії електрона, якщо він пролетів відстань, відповідне різниці потенціалів 1 кВ. Енергію виразити в еВ.
9. Джерело струму, внутрішній опір якого дорівнює 2 Ом, створює в зовнішньому опорі 8 Ом струм 2 А. Знайти максимальний струм, створюваний цим джерелом.
10. Джерело струму, ЕРС. якого дорівнює 6 В, дає максимальну силу струму 3 А. Знайти найбільшу кількість тепла, яку може бути виділено в зовнішньому опорі, рівному 1 Ом, за 1 хв.

## 5. МАГНЕТИЗМ

### 5.1. Магнітне поле.

Рухомі заряди створюють у навколишньому просторі *магнітне поле*. Оскільки електричний струм являє собою впорядковане переміщення електричних зарядів, то електричні струми створюють в навколишньому просторі магнітне поле. Існування цього поля виявляється за дією сили на стрілку компаса або на рамку зі струмом, вміщену в магнітне поле. Це було показано дослідним шляхом *Ерстедом*.

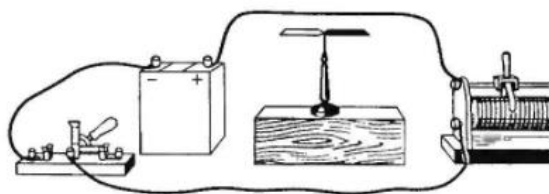


Рис. 1. Дослід Ерстеда (1820р). Г.К. Ерстед (1777-1851)

Ще вчені Давньої Греції висловлювали припущення, що магнітні й електричні явища, пов'язані один з одним. Але встановити цей зв'язок учені змогли лише 15 лютого 1820 року, коли данський фізик, професор Копенгагенського університету Г. К. Ерстед демонстрував своїм студентам теплову дію електричного струму. Біля провідника, який нагрівався електричним струмом, поруч випадково опинився компас. Один зі студентів помітив, що в момент замикання кола стрілка компаса змінювала свій напрямок, а в разі розмикання кола поверталася в початковий стан.

*Цікавий студент попросив Ерстеда пояснити, що відбувається. Однак професор не знав, що відповісти, він ніколи нічого подібного не чув.*

*До честі професора, він не відмахнувся від допитливого юнака, а просто повторив дослід і зробив... відкриття. Виявилося, що між електричним струмом і магнетизмом існує взаємозв'язок!*

Свої дослідні висновки професор описав у роботі «Досліди, які стосуються дії електричного конфлікту на магнітну стрілку» (1820р.).

Дослід А.М. Ампера.

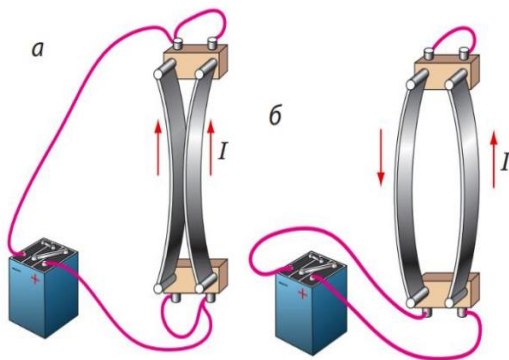


Рис. 2. Взаємодія двох паралельних провідників А.М. Ампер (1775-1836)

Андре Марі Ампер (1775—1836) відкрив магнітну взаємодію двох провідників зі струмом і зробив заяву, шокуючу для того часу, що й природу постійних магнітів можна пояснити струмами, які циркулюють усередині

молекул (про існування електронів в атомах ніхто в ті далекі часи і гадки не мав).

Висновок: електричний струм є джерелом магнітного поля.

Аналізуючи результати дослідів, учений дійшов висновку: оскільки провідники є електрично нейтральними ( вони не заряджені), , їхнє притягання або відштовхування не може пояснюватися дією електричних сил, - «поведінка» провідників є наслідком дії магнітних сил.

Свої досліди та висновки А.М. Ампер написав у роботі «Теорія електродинамічних явищ, виведена виключно з досліду» (1826р.).

Розглянемо дію магнітного поля на замкнутий плоский контур зі струмом (рамку), рис. 3. Рамка, підвішена на тонкій нитці, обертається і потім певним чином орієнтується в магнітному полі. Орієнтація рамки залежить від напрямку струму в ній. Якщо напрямок струму в рамці зміниться, то і рамка повертається на  $180^\circ$ .

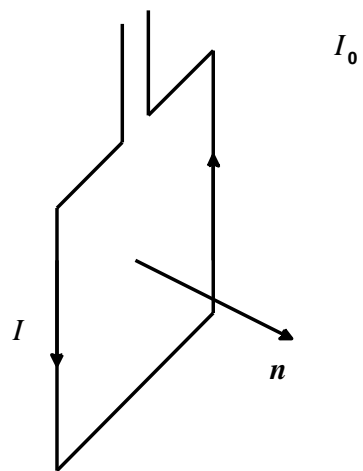


Рис. 3. Рамка зі струмом у магнітному полі

Рамка, встановившись в магнітному полі, вказує своєю нормаллю напрямком цього поля. Позитивний напрямок нормалі (тобто одиничного нормального вектора  $\mathbf{n}$ ) визначається *правилом штопору* (або *правилом "правого гвинта"*): якщо загвинчувати штопор, обертаючи його ручку в напрямку струму, то вістря штопору буде співпадати з напрямком нормалі.

За направлення магнітного поля приймається напрямок, який приймає вектор нормалі в положенні стійкої рівноваги.

Рамка може займати одне з двох положень рівноваги: одне з них положення *стійкої* рівноваги, а інше - положення *нестійкої* рівноваги.

Основна силова характеристика магнітного поля - вектор магнітної індукції  $\mathbf{B}$ , напрямок якого збігається з напрямком нормалі рамки в положенні стійкої рівноваги (рис. 4).

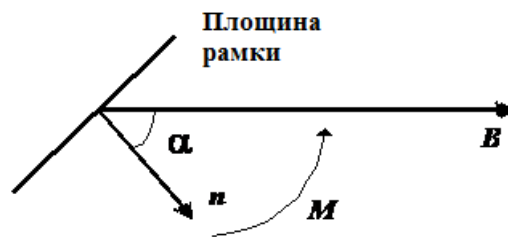


Рис. 4. Напрямок вектора магнітної індукції

Якщо повернути рамку на кут  $\alpha$  відносно попереднього положення (рис. 4), то рамка буде прагнути повернутися в початкове положення. На неї буде діяти механічний обертовий момент  $\mathbf{M}$ , пропорційний силі струму  $\mathbf{I}$  в рамці, площі рамки  $\mathbf{S}$  і синусу кута  $\alpha$  між напрямками  $\mathbf{B}$  і  $\mathbf{n}$ .

Величина цього моменту пропорційна величині магнітної індукції  $\mathbf{B}$ :

$$M = kBIS\sin\alpha. \quad (1)$$

Величина  $\mathbf{B}$  встановлюється з цього співвідношення, а коефіцієнт  $k$  вибирається рівним одиниці. Тоді отримуємо

$$M = BIS\sin\alpha. \quad (2)$$

Магнітний момент рамки - це вектор, величина якого дорівнює добутку струму на площу рамки і на число витків  $N$ :

$$\mathbf{p}_M = ISN\mathbf{n}. \quad (3)$$

Момент обертання можна представити у вигляді векторного добутку:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_M \times \mathbf{B}]. \quad (4)$$

За абсолютною величиною момент обертання дорівнює

$$M = p_M B \sin\alpha. \quad (5)$$

Момент обертання є максимальним, якщо  $\sin\alpha=1$ , тобто якщо нормаль перпендикулярна вектору  $\mathbf{B}$ . Стала рівновага досягається при  $\alpha=0$ . Якщо  $\alpha=180^\circ$ , тобто якщо вектор  $\mathbf{n}$  спрямований протилежно вектору  $\mathbf{B}$  (рис. 5), то момент обертання також дорівнює нулю, проте це - стан нестійкої рівноваги.



Рис. 5. Стан нестійкої рівноваги

Одиниця виміру магнітної індукції в системі СІ - *Тесла* (Тл).

Магнітна індукція залежить від тієї речовини, в якій створюється це магнітне поле. Це пояснюється тим, що атоми речовини володіють власним магнітним моментом, оскільки рух електронів по орбітах навколо ядра подібно мікроскопічним струмам. Магнітні моменти атомів орієнтуються в зовнішньому магнітному полі, збільшуючи його індукцію. Тому вводиться більш об'єктивна характеристика магнітного поля – вектор *напруженості* ( $\mathbf{H}$ ), який пов'язаний з вектором магнітної індукції наступним чином:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (6)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнітна стала (її розмірність - Генрі / метр);

$\mu$  - відносна магнітна проникність середовища (безрозмірна величина).

Розмірність напруженості - Ампер / метр.

## 5.2. Закон Біо-Савара-Лапласа

У загальному вигляді кількісний зв'язок між величиною струму і відстанню до точки спостереження та магнітною індукцією можна встановити тільки для *нескінченно малого провідника*. Така залежність встановлюється у вигляді закону Біо-Савара-Лапласа:

$$dB = \mu_0 \mu \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (7)$$

де  $I$  - сила струму;

$dl$  - елемент провідника;

$r$  - відстань від елемента провідника до точки спостереження;

$\alpha$  - кут між напрямком струму і напрямком на точку спостереження.

У векторній формі цей закон має вигляд:

$$d\mathbf{B}_0 = \mu_0 \frac{I [dl \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}. \quad (8)$$

Тут  $\mathbf{r}$  - *радіус-вектор*, рівний по абсолютній величині відстані  $r$ , і спрямований від елемента  $dl$  в точку спостереження  $\mathbf{M}$  (рис. 6).

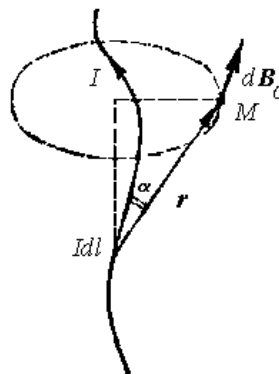




Рис.6. Магнітне поле створене елементом лінійного струму в точці  $M$ 

Вектор  $dl$  дорівнює по модулю  $dl$  і спрямований по дотичній до провідника в напрямку струму (за напрямком струму приймається напрямок руху *позитивних* зарядів).

Вектор  $d\mathbf{B}$ , перпендикулярний до площини, що містить вектори  $dl$  і  $r$ , і при заданому напрямку струму, вектор  $d\mathbf{B}$ , перпендикулярний площині креслення і спрямований за креслення в точці  $M$ .

Для обчислення за допомогою цього закону магнітного поля кінцевого провідника будь-якої форми застосовується *принцип суперпозиції полів*, за яким індукція результуючого поля  $\mathbf{B}_0$  є результатом інтегрування по всій довжині провідника.

### 5.2.1. Магнітне поле нескінченного прямолінійного провідника зі струмом

Нехай є нескінченно довгий прямолінійний провідник, по якому тече струм  $I$  (рис.7). Потрібно знайти індукцію (або напруженість) магнітного поля, створюваного цим провідником в точці  $M$ .

Подумки розділимо провідник зі струмом на безліч елементів  $Idl$ . Всі елементи  $d\mathbf{B}$ , створювані елементами струму, в даній точці мають однаковий напрямок (вектор  $\mathbf{B}$ , який є векторним добутком векторів  $dl$  і  $r$ , *спрямований перпендикулярно площині, в якій лежать перемножені вектори*, тобто в даному випадку перпендикулярно площині креслення, від нас - див. рис. 7). Тому векторне складання елементів індукції поля  $d\mathbf{B}$  можна замінити складанням їх модулів. Точка  $M$ , для якої обчислюється вектор індукції  $\mathbf{B}$ , знаходиться на відстані  $R$  від провідника. З рис. 7 видно, що

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}; \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}. \quad (9)$$

Підставимо ці вирази у формулу (7), тоді

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{IRd\alpha \sin\alpha \sin^2\alpha}{R^2 \sin^2\alpha} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \sin\alpha d\alpha. \quad (10)$$

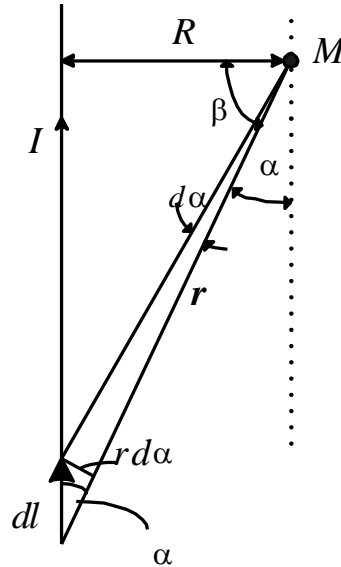


Рис.7. Магнітне поле нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом

Кут  $\alpha$  змінюється в межах від 0 до  $\pi$  радіан. Отже, результуюче поле має індукцію

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}. \quad (11)$$

Лінії магнітної індукції являють собою систему охоплюючих провідів концентричних кіл (рис. 8).

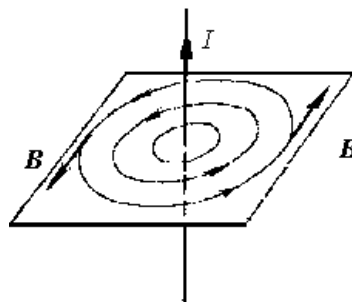


Рис. 8. Силві лінії вектора магнітної індукції

Якщо потрібно знайти магнітне поле кінцевого прямого провідника зі струмом, то задача вирішується так само, як і попередня, з тією лише різницею, що кут  $\alpha$  змінюється в межах не від  $0$  до  $\pi$ , а від  $\alpha_1$  до  $-\alpha_2$  (рис. 9).

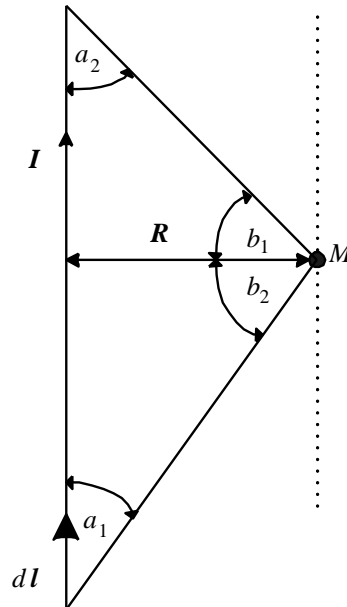


Рис. 9. До визначення магнітного поля кінцевого прямолінійного провідника зі струмом

Тому, замінивши в (11) синус кута  $\alpha$  на косинус додаткового кута  $\beta$  і підставивши відповідні межі, отримаємо

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos\beta d(-\beta) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} (\sin\beta_1 + \sin\beta_2). \quad (12)$$

### 5.2.2. Магнітне поле в центрі прямокутної рамки з струмом

Прямокутну рамку зі струмом можна представити у вигляді чотирьох кінцевих провідників (рис. 10) і застосувати для обчислення індукції поля в центрі рамки формулу (12).

Магнітне поле в точці  $M$  складається з чотирьох складових, кожна з яких створюється однією стороною. Точка  $M$  розташована від кожної сторони  $a$  на відстані  $a / 2$ . Тому внесок кожної сторони в магнітну індукцію можна визначити з формули (12), поклавши в ній  $R = b / 2$ , і

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

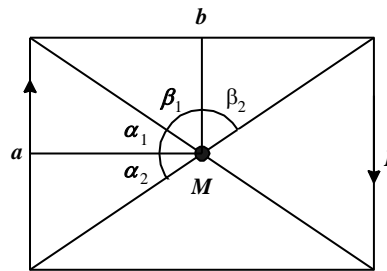


Рис. 10. Магнітне поле в центрі прямокутної рамки зі струмом

Аналогічно внесок, обумовлений кожної з двох інших сторін довжиною  $b$  кожна, дорівнює

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \cdot \frac{Ib}{a\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (13)$$

Сумарна індукція в точці  $M$  дорівнює

$$B = B_1 + B_2 = \frac{2\mu_0 \mu}{\pi} \cdot \frac{I\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}. \quad (14)$$

### 5.2.3. Магнітне поле кругового струму

Визначити значення магнітної індукції  $B$  в центрі кругового струму (рис. 11) можна, застосовуючи закон Біо-Савара-Лапласа.

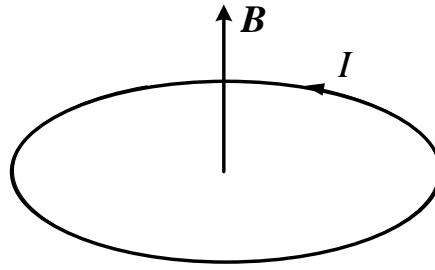


Рис. 11. Магнітної індукції  $\mathbf{B}$  в центрі кругового струму

Якщо на витку зі струмом обрати елемент  $dl$ , то, застосувавши формулу (7) і інтегруючи по всій довжині витка з урахуванням того, що  $\sin\alpha = 1$  для кожного елемента, отримаємо

$$B = \int_0^{2\pi R} \mu_0 \frac{Idl \sin\alpha}{4\pi R^2} = \mu_0 \frac{I}{2R}. \quad (15)$$

Результуючий вектор  $\mathbf{B}$  направлений уздовж осі струму, а його напрямок пов'язаний з напрямком струму *правилом правого гвинта*.

### 5.3. Магнітний потік. Теорема Гаусса для магнітного поля

У загальному випадку елементарний магнітний потік визначається у вигляді скалярного добутку *вектора магнітної індукції* на *вектор елемента поверхні*:

$$d\Phi_B = (\mathbf{B}d\mathbf{S}) = B_n dS, \quad (16)$$

де  $B_n$ - проекція вектора  $\mathbf{B}$  на напрям нормалі до поверхні.

Для довільної поверхні  $S$ , яка знаходиться в неоднорідному полі, повний потік вектора магнітної індукції дорівнює

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = \int_S B_n dS. \quad (17)$$

Вектор  $\mathbf{B}$  визначається кількістю силових ліній поля, що проходять через одиничну площадку, перпендикулярну силовим лініям. Розмірність потоку вектора магнітної індукції в системі СІ: 1 Вебер = 1 Вб.

Силкові лінії магнітного поля *замкнені*, не мають ні початку, ні кінця, або йдуть в нескінченність. Це відбувається тому, що магнітне поле має, на відміну від потенціального електричного поля, *вихровий* характер. Математично структура магнітного поля, тобто його характер, відображається *теоремою Гаусса: потік вектора магнітної індукції через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю*, тобто

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (18)$$

Цей вираз є справедливим не тільки для магнітного поля стаціонарних струмів, а й для будь-якого змінного магнітного (або електромагнітного) поля. Тому в теорії електромагнітного поля теорему Гаусса називають ще *третьім рівнянням Максвелла в інтегральній формі*.

#### 5.4. Циркуляція вектора магнітної індукції. Магнітне поле соленоїда

Розглядаючи контур у вигляді кола, що охоплює нескінченний прямолінійний провідник зі струмом (рис. 12), обчислимо циркуляцію вектора  $\mathbf{B}$  за цим контуром (вважаємо  $\mu = 1$ ):

$$\oint_l B_l dl. \quad (19)$$

Фізичний сенс циркуляції полягає в тому, що оскільки магнітна індукція  $\mathbf{B}$  - силова характеристика магнітного поля, то циркуляція  $\mathbf{B}$  визначатиме *роботу сил магнітного поля* за замкненим контуром.

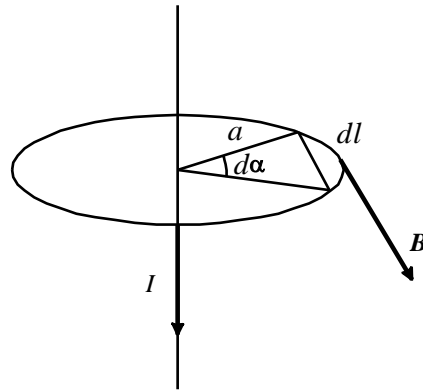


Рис. 12. До визначення циркуляції вектора магнітної індукції

Враховуючи, що

$$B_l = B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{a}; \quad dl = a \cdot d\alpha, \quad (20)$$

отримаємо

$$\oint_l B_l dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{a} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I, \quad (21)$$

Тобто *циркуляція вектора індукції за замкненим контуром дорівнює добутку  $\mu_0$  на струм, що охоплюється цим контуром.*

Отриманий вираз є справедливим для контурів будь-якої форми.

Те, що циркуляція вектора магнітної індукції за замкненим контуром відмінна від нуля, виражає *вихровий* характер магнітного поля.

Якщо контур охоплює кілька провідників зі струмами, то циркуляція вектора індукції сумарного магнітного поля  $\mathbf{B}$  дорівнює сумі цих струмів:

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I_{\text{пов}}, \quad (22)$$

де повний струм

$$I_{\text{пов}} = \sum_i I_i \quad (23)$$

Домовимося про напрямок обходу контурів і знаку струмів: позитивними будемо вважати струми, напрямок яких пов'язаний з напрямком обходу контуру правилом правого гвинта; струми протилежного напрямку вважаємо негативними. Якщо обхід контуру відбувається не один, а  $n$  раз, то вираз (21) набуде вигляду

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 n I \quad (24)$$

Цю формулу можна застосувати для обчислення магнітної індукції поля всередині нескінченного *соленоїда*. Соленоїд являє собою систему кругових витків із загальною прямою віссю. Силкові лінії поля всередині соленоїда паралельні його осі, а поле соленоїда однорідне. Для обчислення циркуляції візьмемо прямокутний контур 1-2-3-4 (рис. 13).

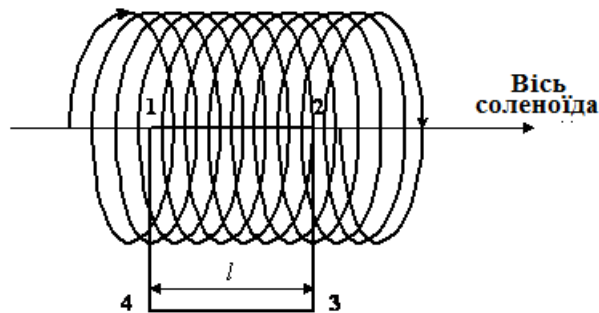


Рис. 13. До визначення магнітного поля всередині нескінченного соленоїда

Циркуляцію вектора  $\mathbf{B}$  у цьому контурі можна представити у вигляді

$$\oint_l B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl, \quad (25)$$

Причому

$$\int_4^1 B_l dl + \int_2^3 B_l dl = 0,$$

оскільки на цих ділянках  $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ .



Соленоїд нескінченно довгий. Силкові лінії, які проходять всередині нього, починаються в нескінченності і йдуть в нескінченність. Тому магнітне поле зовні соленоїда відсутнє. Звідси

$$\oint_3^3 B_l dl = 0.$$

Тоді циркуляція вектора  $\mathbf{B}$  по замкнутому контуру запишеться у вигляді

$$\oint_l B_l dl = \int_1^2 B_l dl = Bl, \quad (26)$$

де  $B$  - величина магнітної індукції поля в точках розташування відрізка 1 - 2, а  $l$  - довжина цього відрізка.

Сумарний струм, що охоплюється контуром,  $I_{повн} = nIl$ , де  $n$  - число витків на одиницю довжини соленоїда,  $I$  - сила струму в соленоїді. Тоді, згідно з (25):

$$\oint_l B_l = Bl = \mu_0 nIl$$

звідки виходить остаточно

$$B = \mu_0 nI. \quad (27)$$

Поле нескінченного соленоїда однорідне, зосереджено цілком всередині соленоїда, а силкові лінії вектора  $\mathbf{B}$  паралельні осі соленоїда.

### Задача 1

По двох нескінченно довгих паралельних проводах течуть в одному напрямку струми силою 15 і 10 А. Відстань між проводами 10 см. Визначити магнітну індукцію в точці А (рис. 14), віддаленої від першого проводу на відстань  $r_1 = 10$  см і від другого проводу на відстань  $r_2 = 15$  см.

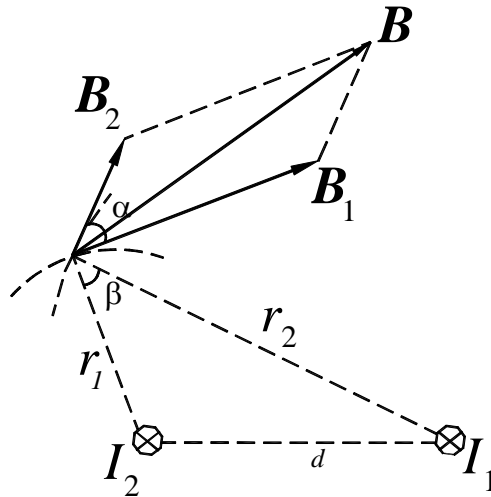


Рис. 14

Дано:

$$I_1 = 15 \text{ А}; I_2 = 10 \text{ А}$$

$$\mu = 1$$

$$d = 10 \text{ см}$$

$$r_1 = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}; r_2 = 15 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$B$  - ?

Розв'язання.

Згідно з принципом суперпозиції магнітних полів магнітна індукція  $B$  в точці  $A$  дорівнює сумі векторів магнітних індукцій полів  $B_1$  і  $B_2$ , створених кожним струмом окремо:

$$B = B_1 + B_2$$

$$\text{де } B_1 = \mu \mu_0 I_1 / (2\pi r_1) \text{ і } B_2 = \mu \mu_0 I_2 / (2\pi r_2).$$

На малюнку провідники зі струмами  $I_1$  і  $I_2$  перпендикулярні площині креслення (струми спрямовані від спостерігача). Вектори  $B_1$  і  $B_2$  зображені на малюнку так, що їх напрямок пов'язаний з направленням відповідних струмів правилом правого гвинта. Вектори  $B_1$  і  $B_2$  в точці  $A$  спрямовані по дотичній до силових ліній.

Модуль вектора  $B$  на підставі теореми косинусів дорівнює

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (28)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $B_1$  і  $B_2$ . З малюнка видно, що кути  $\alpha$  і  $\beta$  рівні, як кути з відповідно перпендикулярними сторонами. З трикутника зі сторонами  $r_1$ ,  $r_2$  і  $d$  за теоремою косинусів знаходимо:

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2},$$

обчислимо окремо:

$$\cos \alpha = \cos \beta = \frac{10^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 10 \cdot 15} \approx 0,75.$$

Підставляючи вирази для  $B_1$  і  $B_2$  у формулу (142) і виносячи  $\mu_0/(2\pi)$  за знак кореня, отримуємо

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} + \frac{2I_1I_2}{r_1r_2} \cos \alpha}. \quad (29)$$

Зробимо обчислення:

$$B = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{15^2}{(10^{-1})^2} + \frac{10^2}{(1,5 \cdot 10^{-1})^2} + \frac{2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 0,75}{10^{-1} \cdot 1,5 \cdot 10^{-1}}} = 4,1 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

## Задача 2

По провіднику, зігнутому у вигляді прямокутника зі сторонами 8 см і 12 см, тече струм силою 5 А. Визначити магнітну індукцію в точці перетину діагоналей прямокутника.

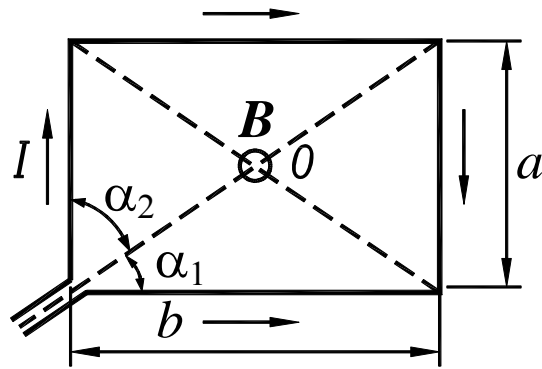


Рис. 15

Дано:

$$a = 8 \text{ см}; b = 12 \text{ см};$$

$$I = 5 \text{ А};$$

\_\_\_\_\_

$B = ?$

Розв'язання:

Згідно з принципом суперпозиції магнітних полів

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4, \quad (30)$$

де  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$  – магнітні індукційні поля, створені струмами, що протікають по кожній стороні прямокутника (рис. 15).

У точці O перетину діагоналей всі вектори індукції  $\mathbf{B}_i$  спрямовані перпендикулярно площині прямокутника. Крім того, з міркувань симетрії випливає, що  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_3$  і  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_4$ . Тому векторну рівність (30) замінимо скалярною:

$$B = 2B_1 + 2B_2, \quad (31)$$

де  $B_1$  і  $B_2$  – індукції магнітних полів, створюваних відповідно струмами, що протікають по провідниках зі сторонами довжиною  $b$  і  $a$ .

Використовуючи формулу для магнітної індукції поля, створюваного відрізком прямого провідника зі струмом,

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos\alpha, \quad (32)$$

отримаємо

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a/2} \cos\alpha_1, \quad B_2 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b/2} \cos\alpha_2. \quad (33)$$

З малюнка видно, що

$$\cos\alpha_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{і} \quad \cos\alpha_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (34)$$

Підставивши формули (33) і (34) в рівність (31), після алгебраїчних перетворень отримаємо

$$B = \frac{2\mu\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) = \frac{2\mu\mu_0 I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab}. \quad (35)$$

Проведемо обчислення:

$$B = \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \sqrt{(8 \cdot 10^{-2})^2 + (1,2 \cdot 10^{-1})^2}}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-1}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 60 \text{ мкТл.}$$

### Задача 3

Виток радіусом 3 см, по якому тече струм силою 5 А, вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією 20 мТл. Визначити роботу, що здійснюються зовнішніми силами при повороті витка на кут  $90^\circ$  навколо осі, що збігається з діаметром витка. Вважати, що при повороті витка сила струму в ньому підтримується постійною.

Дано:

$$R = 3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$I = 5 \text{ А} = \text{const}$$

$$B = 20 \text{ мТл} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$A = ?$

Розв'язання

На виток зі струмом, поміщений в магнітне поле, діє момент обертання  $\dot{I} = p_m B \sin \alpha$ , де  $p_m = IS = I\pi R^2$  – магнітний момент витка;  $\alpha$  – кут між векторами  $p_m$  і  $B$ . У початковому положенні згідно з умовою задачі виток вільно встановився в магнітному полі, отже,  $p_m$  і  $B$  співпадають за напрямленням, тобто  $\alpha = 0$  і  $M = 0$ . Щоб повернути виток на деякий кут  $\alpha$ , зовнішні сили повинні зробити роботу проти моменту сил Ампера, так як він прагне повернути виток у вихідне положення. Так як момент сил змінний і залежить від кута повороту  $\alpha$ , то

$$dA = M d\alpha \text{ або } dA = p_m B \sin \alpha d\alpha = I\pi R^2 B \sin \alpha d\alpha. \quad (36)$$

Взявши інтеграл від цього виразу, знайдемо роботу, що здійснюються при повороті витка на кінцевий кут:

$$A = I\pi R^2 B \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = I\pi \cdot R^2 B (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (37)$$

Так як  $\alpha_1 = 0$  і  $\alpha_2 = \pi/2$ , то

$$A = I\pi R^2 B. \quad (38)$$

Зробимо обчислення:

$$A = 5 \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2,83 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Задачу можна вирішити і іншим способом. Робота зовнішніх сил по переміщенню контура зі струмом в магнітному полі дорівнює

$$A = I(\Phi_1 - \Phi_2), \quad (39)$$

де  $\Phi_1$  – магнітний потік, що пронизує контур до переміщення,  $\Phi_2$  – те ж саме після переміщення.

З урахуванням того, що в однорідному магнітному полі  $\Phi = BS \cos \alpha$ , отримаємо  $\Phi_1 = BS \cos 0 = BS$  і  $\Phi_2 = BS \cos 90^\circ = 0$ . Отже,  $A = IBS = IB\pi R^2$ , що збігається з (38).

#### Питання для самоперевірки

1. Що таке магнітне поле (МП)?
2. Назвіть джерела МП.
3. Які сили діють між рухомими зарядами?
4. У скільки разів магнітна сила менше електричної сили для двох рухомих точкових електричних зарядів?
5. Які сили і чому діють між проводами зі струмом?
6. Дайте визначення лінії індукції МП. Навіщо їх малюють?
7. Запишіть закон Біо-Савара-Лапласа. У чому він схожий на закон Кулона?
8. Сформулюйте принцип суперпозиції для МП.
9. Дайте визначення циркуляції вектора В.
10. Сформулюйте і запишіть формулу теореми про циркуляцію вектора В.
11. Сформулюйте і запишіть формулу для індукції МП прямого проводу з струмом.

12. Який вигляд мають лінії індукції МП прямого проводу з струмом?
13. Сформулюйте і запишіть формулу для індукції МП на осі кругового витка (контуру) зі струмом.
14. Що таке магнітний момент витка зі струмом?
15. Яку форму має лінія індукції, що проходить через центр витка зі струмом?
16. Що таке соленоїд і для чого він використовується?
17. Чому дорівнює магнітне поле в центрі соленоїда?

## 6. ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ СИЛИ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Досліди по відхиленню рамки зі струмом у магнітному полі показують, що на всякий провідник з струмом, поміщений в магнітне поле, діє механічна сила (*сила Ампера*). Ця сила прикладена до кожного елемента контуру  $dl$ :

$$dF_A = IdlB \sin \alpha, \quad (40)$$

де  $\alpha$  - кут між напрямком вектора  $\mathbf{B}$  і напрямком елемента струму  $d\mathbf{l} = Idl$ . Поняття про елемент струму було введено раніше, при розгляді закону Біо-Савара-Лапласа.

Із виразу (40) випливає, що величина сили Ампера ( $dF_A$ ) пропорційна силі струму, індукції магнітного поля і довжині ділянки провідника  $dl$ , крім того, величина  $dF_A$  залежить від напрямку вектора  $\mathbf{B}$ .

Вираз (40) у векторній формі має вигляд

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (41)$$

Сила Ампера завжди спрямована перпендикулярно площині, що містить вектори  $Idl$  і  $\mathbf{B}$ , а її напрямок як результат векторного добутку визначається *правилом правого гвинта*: якщо дивитися вздовж вектора  $dF_A$ , то поворот від



$I dl$  до  $\mathbf{B}$  по найкоротшому шляху повинен відбуватися за годинниковою стрілкою.

З іншого боку, для визначення напрямку сили Ампера можна також застосувати мнемонічне *правило лівої руки*: потрібно помістити долоню так, щоб силові лінії магнітної індукції  $\mathbf{B}$  входили в неї, витягнуті пальці показували напрям струму, тоді відігнутий великий палець вкаже напрям сили Ампера. Якщо перемножимо вектори задані через проекції, тобто

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{l} &= i dl_x + j dl_y + k dl_z, \\ \mathbf{B} &= i dB_x + j dB_y + k dB_z, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

то вектор  $d\mathbf{F}_A$  можна записати у вигляді визначника

$$d\mathbf{F}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dl_x & dl_y & dl_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (43)$$

розкриваючи який за елементами першого рядка, отримаємо вирази для вектора сили Ампера.

За допомогою формули (41), знайдемо вираз для сили взаємодії двох нескінченно довгих, прямих, паралельних один одному провідників, по яких течуть струми  $I_1$  і  $I_2$  (рис. 16). Відстань між проводами дорівнює  $a$ .

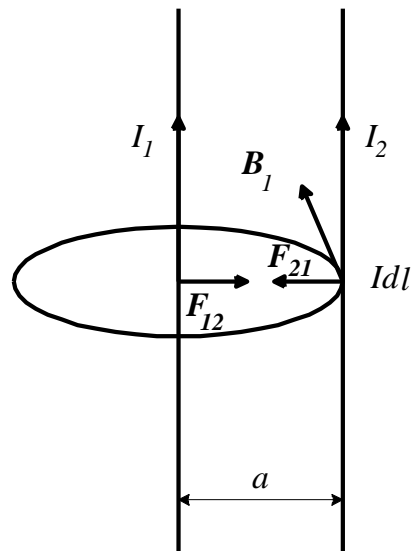


Рис. 16. Два паралельних прямолінійних провідника зі струмом

Визначимо силу Ампера  $dF_{21}$ , що діє з боку магнітного поля першого струму  $I_1$  на елемент  $l_2 dl$  другого струму.

Величина магнітної індукції цього поля  $B_1$  в точці розташування елемента другого провідника зі струмом дорівнює

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 dl}{a}. \quad (44)$$

Тоді з урахуванням (44) отримаємо

$$dF_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{a} dl. \quad (45)$$

Міркуючи так само, можна показати, що сила Ампера, що діє з боку магнітного поля, створюваного другим провідником зі струмом, на елемент першого провідника  $l_1 dl$ , дорівнює

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{a} dl,$$

Тобто  $dF_{12} = dF_{21}$ .

На рис. 16 показано напрямки сил Ампера. У разі, якщо струми спрямовані в одну і ту ж сторону, то це - сили тяжіння, а в разі струмів різного спрямування - сили відштовхування.

Сила Ампера, що діє на одиницю довжини провідника, дорівнює

$$f = \frac{dF_A}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{a}. \quad (46)$$

Отже, сила взаємодії двох паралельних прямих провідників зі струмами прямо пропорційна добутку величин струмів і обернено пропорційна відстані між ними.

### 6.1. Рамка зі струмом в магнітному полі

Розглянемо дію магнітного поля на рамку зі струмом. Вважаємо магнітне поле однорідним з індукцією  $\mathbf{B}$ , а рамку з струмом  $I$  - прямокутною.

Припустимо, що вектор зовнішньої нормалі  $\mathbf{n}$  до рамки перпендикулярний силовим лініям вектора  $\mathbf{B}$  (рис. 17).

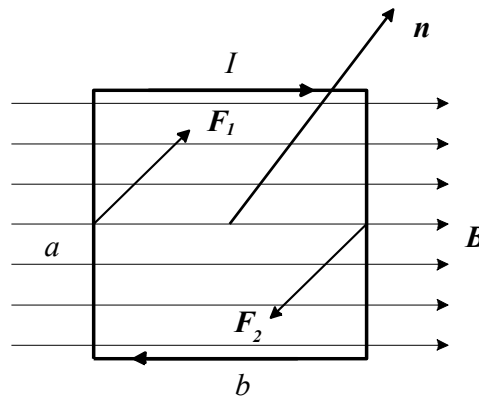


Рис. 17. Рамка зі струмом у магнітному полі.

На рамку зі струмом діє пара сил Ампера, що створює момент обертання

$$M = F_A b = I B a b = I B S = P_m B, \quad (47)$$

де  $P_m = BS$  - магнітний момент рамки;  $S = ab$  - площа рамки.

У кожному разі, якщо нормаль до рамки становить кут  $\alpha$  з напрямком магнітної індукції зовнішнього поля  $\mathbf{B}$ , момент обертання можна записати у вигляді

$$M = P_m B \sin \alpha, \quad (48)$$

або у векторній формі

$$\mathbf{M} = [\mathbf{P}_m, \mathbf{B}]. \quad (49)$$

Стійким є такий стан рамки, коли вектор нормалі паралельний вектору  $\mathbf{B}$  (рис. 18).

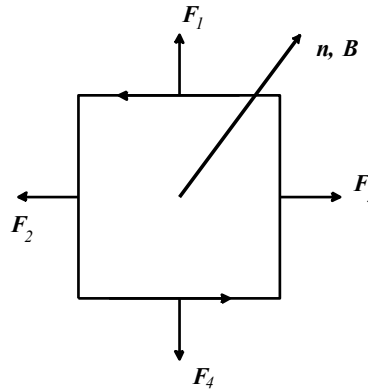


Рис. 18. Стійкий стан рамки зі струмом

Як видно з рисунку, сили Ампера тільки прагнуть розтягнути рамку, а момент обертання  $M = 0$ . Таким чином, зовнішнє магнітне поле надає на рамку орієнтовну дію, прагнучі повернути її так, щоб площа рамки встановилася *перпендикулярно* силовим лініям магнітного поля, при цьому вектор магнітного моменту  $P_m = ISn$  встановлюється уздовж силових ліній.

Подібні міркування справедливі і в тому випадку, коли магнітне поле діє на плоскі контури довільної форми, зокрема на круговий виток, який можна розглядати у вигляді моделі молекулярних струмів в речовині. Орієнтовною дією магнітного поля на молекулярні струми можна пояснити, наприклад, різке збільшення магнітного поля в соленоїді при внесенні всередину його стержня з феромагнетика, що створює сильне додаткове поле.

## 6.2. Сила Лоренца

Дослід показує, що на заряд, що рухається в магнітному полі, діє сила. Ця сила називається *силою Лоренца* ( $F_L$ ). Ця сила дорівнює

$$F_L = qvB\sin\alpha \quad (50)$$

або у векторному вигляді

$$\vec{F}_L = [\vec{v}, \vec{B}] \quad (51)$$

де  $\alpha$  - кут між напрямком швидкості руху  $\vec{v}$  і вектором індукції  $\vec{B}$ . Направлена ця сила перпендикулярно площині, в якій лежать вектори  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$ . У випадку, якщо рухомий заряд - позитивний, то напрямок сили Лоренца визначається *правилом лівої руки*: якщо складені разом пальці направити в сторону руху заряду, при цьому силові лінії  $\vec{B}$  повинні входити в долоню, то сила Лоренца буде спрямована убік відставленого великого пальця. Можна, звичайно, користуватися також правилом буравчика.

Нарешті, для обчислення сили Лоренца можна скористатися визначником, подібним (43), якщо вектори  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$  в (51) задані за допомогою проєкцій на осі. Взаємна орієнтація трьох векторів –  $\vec{F}_L$ ,  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$ , що входять в (51), показана на рис. 19 для різних за знаком зарядів.

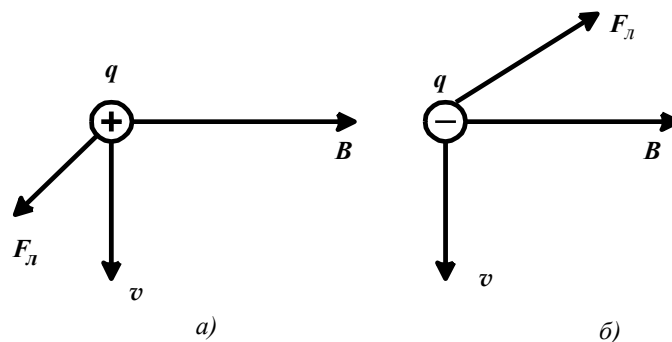


Рис. 19. Взаємна орієнтація трьох векторів –  $\vec{F}_L$ ,  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$

Як видно з (51), сила Лоренца максимальна при русі заряду в напрямку, перпендикулярному силовим лініям (при цьому  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  і  $F_L^{\max} = qvB$ ), і дорівнює нулю, якщо заряд рухається уздовж силових ліній поля (при цьому  $\alpha = 0$ ).

При цьому дотична складова прискорення дорівнює нулю:  $a_\tau = 0$ , а нормальна складова прискорення за другим законом Ньютона дорівнює

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{m} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (52)$$

Таким чином, сила Лоренца дорівнює доцентровій силі

$$F_{\ddot{o}} = \frac{m\upsilon^2}{r},$$

де  $r$  – радіус кривизни траєкторії в даній точці. Прирівнявши вираз для сили Лоренца доцентровій силі, отримаємо вираз для радіуса кривизни

$$\text{траєкторії } r = \frac{m\upsilon}{qB\sin\alpha} \text{ у всіх точках.}$$

Дія магнітного поля на рухомий заряд знаходить велике практичне застосування, зокрема, в роботі електронно-променевої трубки, де використовується явище відхилення заряджених частинок електричним і магнітним полями, а також в роботі мас-спектрографів, що дозволяють визначити питомий заряд частинок ( $q / m$ ) і прискорювачів заряджених частинок (циклотронів).

### 6.3.Ефект Холла

Важливе технічне застосування отримав *ефект Холла* в провідниках і напівпровідниках. Цей ефект полягає в тому, що якщо провідник зі струмом помістити в магнітне поле, вектор індукції якого  $\mathbf{B}$  направлений перпендикулярно напрямку струму, (рис.20), то між гранями провідника, паралельними площині, в якій лежать вектори струму і магнітної індукції, виникає різниця потенціалів  $U_x$ . Величина її визначається виразом

$$U_x = R_x b j B, \quad (53)$$

де  $b$  – ширина пластинки,  $j$  – густина струму,  $B$  – індукція магнітного поля,  $R_x$  – *постійна Холла*, яка залежить від властивостей матеріалу.

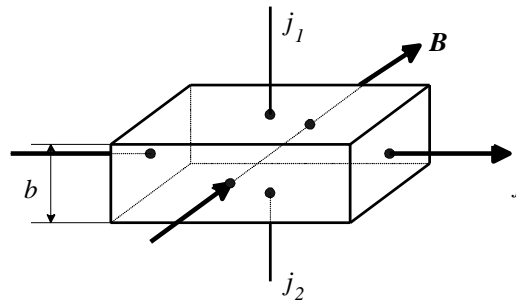


Рис. 20. До визначення ефекту Холла

Ефект Холла досить просто пояснюється на основі електронної теорії і сили Лоренца. У магнітному полі на вільні електрони в металі діє сила Лоренца, спрямована уздовж боку  $b$  пластинки. Ця сила за абсолютним значенням дорівнює

$$F_L = evB. \quad (54)$$

Під дією сили Лоренца відбувається поділ зарядів: у верхній межі, в напрямку якої рухаються електрони, виявиться надлишок негативних зарядів, а у нижній-відповідно надлишок позитивних зарядів. Тому виникає додаткове поперечне електричне поле, напруженість якого дорівнює  $E$ . Коли ця напруженість досягне такої величини, що її дія на заряд буде врівноважувати силу Лоренца, встановиться стаціонарний розподіл зарядів в поперечному напрямку:

$$Ee = evB, \quad (55)$$

звідки

$$E = vB. \quad (56)$$

Для того, щоб знайти напругу, що виникає між верхньою та нижньою гранями,  $U = U_x$ , помножимо величину  $E$  на відстань між гранями ( $b$ ).

З огляду на те, що густина струму  $j$ , концентрація вільних електронів  $n$  і заряд електрона  $e$  пов'язані між собою співвідношенням

$$j = env,$$

отримаємо

$$U = U_x = bE = \frac{1}{ne}bjB = R_xbjB, \quad (57)$$

де постійна Холла дорівнює

$$R_x = \frac{1}{ne}. \quad (58)$$

Таким чином, вимірявши постійну Холла, можна знайти концентрацію носіїв струму (електронів).

Явище Холла спостерігається також в напівпровідниках. У напівпровідниках *n*-типу носіями є негативно заряджені електрони, а в напівпровідниках *p*-типу - позитивно заряджені дірки.

Напівпровідникові датчики Холла використовуються для вимірювання величини індукції магнітного поля, а також в різних пристроях автоматики.

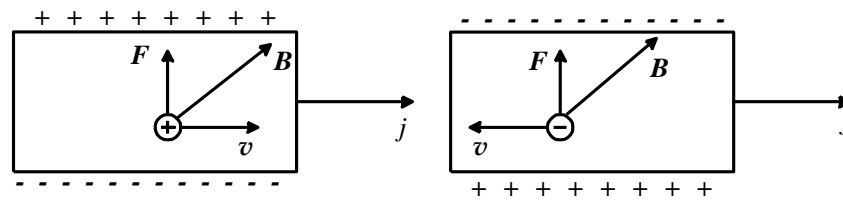


Рис. 21. Ефект Холла для зразків з позитивними і негативними носіями струму

Рис. 21 ілюструє ефект Холла для зразків з позитивними і негативними носіями струму. Напрямок сили Лоренца змінюється на протилежне як при зміні напрямку руху заряду, так і при зміні його знаку. При однаковому ж напрямку струму сила Лоренца  $F_L$ , діюча як на позитивні, так і на негативні заряди, має однаковий напрямок. Тому в разі позитивних носіїв потенціал верхньої межі вище, ніж нижній, а в разі негативних носіїв - нижче. Визначивши знак різниці потенціалів, можна встановити тип носіїв струму.

Задача5



Електрон, пройшовши прискорювану різниця потенціалів 200 В, потрапив в однорідне магнітне поле з індукцією 5 мТл. Вектор швидкості спрямований під кутом  $60^\circ$  градусів до ліній магнітної індукції (рис. 22). Визначити радіус і крок гвинтової лінії, по якій буде рухатися електрон в магнітному полі.

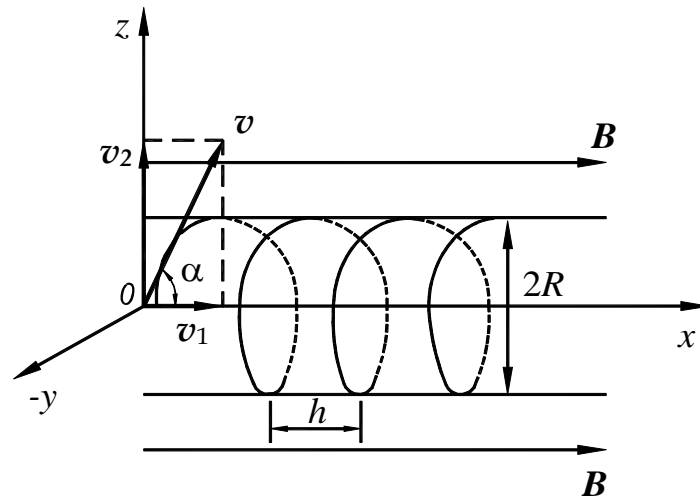


Рис. 22. Траєкторія електрону, що влітає у магнітне поле під деяким кутом

Дано:

$$U = 200 \text{ В}$$

$$B = 5 \text{ мТл} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

---


$$R = ? \quad h = ?$$

Розв'язання.

На електрон, що рухається в магнітному полі, діє сила Лоренца

$$\mathbf{F} = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}] \text{ або } F = e \cdot v B \cdot \sin \alpha. (59)$$

Кінетичну енергію  $W = mv^2/2$  електрон набуває за рахунок роботи  $A$  сил електричного поля ( $A = eU$ ), тому  $mv^2/2 = eU$ . Звідси

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (60)$$

Розкладемо вектор швидкості  $\mathbf{v}$  на дві складові:  $v_1$  і  $v_2$ . Проекція  $v_1$  направлена уздовж ліній індукції;  $v_2$  – перпендикулярно їм. Тоді

$$\mathbf{F} = -e[(v_1 + v_2)\mathbf{B}] = -e[v_2\mathbf{B}] \text{ або } F = ev_2B, \quad (61)$$

оскільки  $[v_1\mathbf{B}] = 0$ .

Складова швидкості  $v_1$  не змінюється ні за модулем, ні за спрямуванням. Складова швидкості  $v_2$  змінюється у напрямку, так як сила  $\mathbf{F}$ , розташована в площині, перпендикулярній лініям індукції, повідомляє електрону нормальне прискорення  $a_n = v_2^2/R$ . Отже, електрон бере участь в двох рухах: рівномірному уздовж осі  $OX$  зі швидкістю  $v_1 = v\cos\alpha$  і рівномірному по колу в площині  $ZOY$  зі швидкістю  $v_2 = v\sin\alpha$ , тобто буде рухатися по гвинтовій лінії.

Так як сила Лоренца  $\mathbf{F}$  повідомляє електрону нормальне прискорення  $a_n$ , то за другим законом Ньютона маємо

$$F = ma_n \text{ або } ev_2B = \frac{mv_2^2}{R}.$$

Звідси радіус гвинтової лінії

$$R = \frac{mv_2}{eB} = \frac{mv\sin\alpha}{eB}. \quad (62)$$

Враховуючи формулу (60), отримуємо

$$R = \frac{m \sin \alpha}{eB} \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{\sin \alpha}{m} \sqrt{\frac{2mU}{e}}. \quad (63)$$

Крок гвинтової лінії (зміщення вздовж осі  $OX$  за час  $T$  одного обороту)

$$h = v_1 T = v \cos \alpha T,$$

де  $T = 2\pi R/v_2$  – період обертання електрона. Враховуючи формулу (62), отримуємо

$$T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Отже, крок гвинтової лінії дорівнює

$$h = \frac{v \cos \alpha 2\pi m}{eB}. \quad (64)$$

Підставивши у вираз (64) формулу для швидкості (60), отримаємо

$$h = \frac{2\pi \cos \alpha}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Зробимо обчислення:

$$R = \frac{0,5}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 200}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 4,77 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$h = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,865}{5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 200}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

## Питання для самоперевірки

1. Як визначається напрямок дії сили Лоренца?
2. Чому сила Лоренца не здійснює роботу?
3. Як буде рухатися заряджена частинка в магнітному полі, якщо кут  $\alpha$  між векторами  $\mathbf{B}$  і  $\mathbf{v}$  менше  $\pi/2$ ?
4. Іони двох ізотопів з масами  $m_1$  і  $m_2$ , що мають однаковий заряд і пройшли в електричному полі однакову прискорену різницю потенціалів, влітають в магнітне поле перпендикулярно силовим лініям магнітного поля. Знайдіть відношення радіусів кіл, якими рухатимуться іони в магнітному полі.
5. Визначте, у скільки разів зміниться радіус кола, по якій заряджена частинка рухається в однорідному магнітному полі, якщо її кінетичну енергію збільшити в  $n$  раз?
6. Визначте питомий заряд іона, який здійснює один оберт за 628 нс в однорідному магнітному полі з індукцією 50 мТл.
7. Два електрона рухаються в одному і тому ж магнітному полі по орбітах з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ). Порівняйте їх кутові швидкості.
8. В однорідному магнітному полі рухаються по колах протон і  $\alpha$ - частинка, маючи рівні кінетичні енергії. Яка з цих частинок буде мати орбітальний магнітний момент і період обертання більше і у скільки разів?
9. Заряджена частинка влетіла в однорідне магнітне поле під кутом  $\alpha < \pi/2$  між векторами  $\mathbf{B}$  і  $\mathbf{v}$ . Визначте, відмінні чи від нуля тангенціальна і нормальна складові прискорення частинки?
10. Заряджена частинка летить прямолінійно і рівномірно в однорідному полі, представленому суперпозицією взаємно-перпендикулярних електричного (з напруженістю  $\mathbf{E}$ ) і магнітного (з індукцією  $\mathbf{B}$ ) полів. Знайдіть швидкість руху частинки.
11. Заряджена частинка обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$  по колу радіуса  $R$ . Паралельно магнітному полю порушується

електричне поле напруженістю  $E$ . Визначте, скільки часу має діяти електричне поле, щоб кінетична енергія частинки зросла в два рази?

## МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

Речовину, здатну впливати на магнітне поле, називається *магнетиком*. Магнетик, що знаходиться в магнітному полі, намагнічується. У цьому стані він створює додаткову індукцію поля  $B'$ , яка складається з індукцією  $B_0$  зовнішнього магнітного поля. В результаті індукція магнітного поля в цій речовині зростає в порівнянні з індукцією поля в вакуумі:

$$B = B_0 + B'. \quad (65)$$

Необхідно зауважити, що під  $B'$  розуміється усереднене макроскопічне поле, так як справжнє мікроскопічне поле в магнетикі вельми сильно змінюється від точки до точки.

Магнітні властивості речовини визначаються круговими молекулярними струмами в цій речовині. Кожен такий струм подібний круговому макроскопічному струму в витку і характеризується власним магнітним моментом. У звичайному стані магнетика кругові молекулярні струми орієнтовані хаотично, а під впливом зовнішнього магнітного поля орієнтуються певним чином, що і призводить до намагнічування.

Намагнічування магнетика характеризується вектором намагнічування  $J$ , чисельно значення якого дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму магнетика.

$$J = \frac{\sum P_m}{\Delta V}. \quad (66)$$

Вектор напруженості магнітного поля  $H$  пов'язаний в вакуумі з вектором магнітної індукції  $B_0$  наступним чином:

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (67)$$

У речовині за рахунок її намагнічування вектор магнітної індукції  $\mathbf{B}$  відрізняється від вектора магнітної індукції у вакуумі  $\mathbf{B}_0$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (68)$$

Дослід показує, що вектор намагнічування  $\mathbf{J}$  пропорційний напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}. \quad (69)$$

Безрозмірний коефіцієнт пропорційності  $\chi$  називається *магнітною сприйнятливістю* речовини і для різних речовин має різні значення. Магнітна сприйнятливість речовини чисельно дорівнює модулю вектора намагнічування при одиничному магнітному полі. З урахуванням цього виразу отримуємо

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}. \quad (70)$$

З іншого боку, в системі СІ  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ , де  $\mu$  - відносна магнітна проникність середовища. Тому

$$\mu = 1 + \chi. \quad (71)$$

На відміну від діелектричної сприйнятливості, яка завжди більше одиниці і завжди позитивна, магнітна сприйнятливість  $\chi$  може бути як позитивною, так і негативною. Тому  $\mu$  може бути як більше одиниці, так і менше одиниці.

Залежно від величини і знаку магнітної сприйнятливості всі речовини (магнетики) поділяються на три групи:

1. **Діамагнетики.** У них магнітна сприйнятливість негативна ( $\chi < 0$ ) і мала за абсолютною величиною. До таких речовин, наприклад, відносяться: вісмут (Bi), фосфор (P), срібло (Ag), золото (Au), мідь (Cu), сірка (S), вода і багато інших органічних сполучень.
2. **Парамагнетики.** Для них також характерне, що магнітна сприйнятливість невелика і позитивна ( $\chi > 0$ ). До парамагнетиків відносяться лужні і лужноземельні метали, більшість газів, і в тому числі кисень, а також деякі інші речовини.
3. **Феромагнетики.** У феромагнетиків  $\chi$  також позитивна, але має більшу величину. До феромагнетиків відносяться метали групи заліза (Fe, Co, Ni) і деякі сплави.

У діамагнетиків вектор намагнічування  $\mathbf{J}$  спрямований у протилежний бік по відношенню до напрямку вектора  $\mathbf{H}$ . Тому магнітна сприйнятливість  $\chi$  є негативною величиною.

Магнітні властивості різних магнетиків пояснюються з позицій квантової механіки.

### 7.1. Феромагнетики

Феромагнетики, головним представником яких є залізо (Fe), відносяться до сильно магнітних матеріалів, причому зазвичай феромагнетики є твердими кристалічними речовинами. Цим вони різко відрізняються від парамагнетиків.

У парамагнетиків орієнтація магнітних моментів окремих атомів вздовж напрямку зовнішнього магнітного поля ускладнена протидією безладного теплового руху, так як середня енергія теплового руху  $kT$  набагато більше енергії  $W_{\text{ном}} = -(\mathbf{p}_m \mathbf{B})$ , якою володіє в магнітному полі з індукцією  $\mathbf{B}$  магнітний момент  $\mathbf{p}_m$  електрона, що рухається в атомі по орбіті.

Якби в парамагнетика існувала якась взаємодія між атомами і іонами, яка перешкождала б дезорієнтованому впливу теплового руху, то магнітні моменти атомів могли б орієнтуватися уздовж поля, і парамагнетик мав би не меншу намагніченість, ніж феромагнетик.

Феромагнетик відрізняється від парамагнетика тим, що в його кристалічній решітці між атомами існує далеко не остання взаємодія за рахунок обмінних сил, що виникають між сусідніми атомами (іонами) внаслідок обміну електронами. Така взаємодія між атомами (іонами) дозволяє магнітним спіновим моментам електронів орієнтуватися в одному напрямку.

У кристалічній решітці феромагнетика атоми сильно взаємодіють один з одним. Відповідальними за цю взаємодію є в основному електрони зовнішніх недобудованих оболонок; коли такі оболонки сусідніх атомів перекриваються, то атоми як би обмінюються електронами.

Найпростішим прикладом обмінного зв'язку за рахунок електронів є молекула водню (рис. 23).

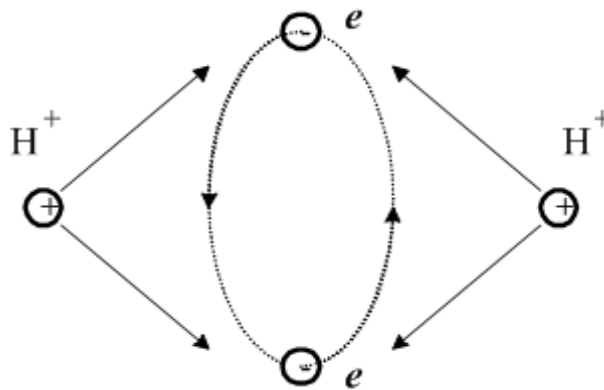


Рис. 23. Обмінний зв'язок молекули водню

Кожен атом водню складається з ядра, заряд якого дорівнює заряду одного протона  $H^+$  і одного електрона  $e$ , який обертається навколо ядра по певній орбіті. Але коли атоми об'єднуються в молекулу  $H_2$ , то електронні орбіти перекриваються і електрони як би починають рухатися по одній загальній орбіті, а сили тяжіння до них протонів виявляються більше сил



електростатичного відштовхування протонів. В результаті молекула водню є стійкою. При цьому можна вважати, що електрони, що належали раніше окремим атомам, як би будуть мінятися місцями в атомах, внаслідок чого і виникає обмінна взаємодія.

Наведений приклад є спрощеним. Реально між атомами заліза, що мають багато електронів в зовнішніх оболонках, існує більш складна обмінна взаємодія. Однак феромагнітні властивості заліза визначають 6 електронів в передостанньому не цілком заповненому шарі (всього для заповнення потрібно 10 електронів) електронної оболонки, якщо останнім шаром вважати той, в якому два електрона. Аналогічно влаштовані електронні оболонки і інших феромагнетиків - кобальту Co і нікелю Ni.

Енергія обмінної взаємодії атомів і в цілому кристала феромагнетика буде мінімальною, якщо спини електронів сусідніх атомів орієнтовані паралельно і їх магнітні моменти складаються. В результаті в феромагнетиках і утворюються області спонтанного (самовільного) намагнічування, звані *доменами*.

В межах домену всі магнітні спинові моменти електронів орієнтовані паралельно один одному, і тому в межах даного домену має місце магнітне насичення. Однак в різних доменах орієнтація спинових моментів розрізняється. Поява великих за розміром доменів збільшує магнітну енергію домену і кристала в цілому або енергію власного магнітного поля, пропорційну  $H^2$ . Тому розміри доменів обмежені і мають величину порядку  $10^{-2}$  мм.

Енергія взаємодії доменів буде найменшою, коли вони розташовані так, що утворюють замкнуті магнітні ланцюги (рис. 24, а). Тут показані чотири сусідні домени, магнітні моменти яких відзначені стрілками, що утворюють замкнену систему. Для наочності можна вважати, що сусідні домени діють один на одного так само, як тонкі магніти або стрілки.

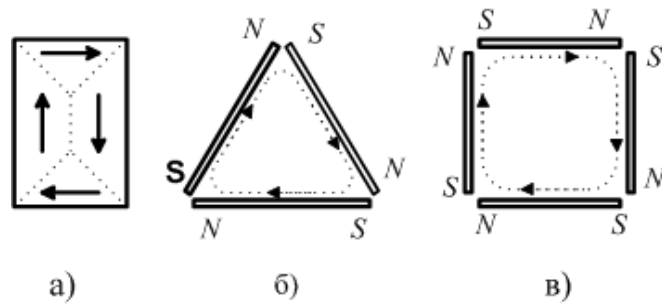


Рис.24. Замкнуті магнітні ланцюги доменів

Очевидно,

що система з трьох магнітів буде найбільш стійкою і її енергія магнітної взаємодії буде найменшою, коли ці магніти утворюють замкнений трикутник (рис. 24, б). Аналогічно цю систему з чотирьох магнітів матиме найменшу енергію взаємодії, якщо ці магніти розташовуються по сторонах квадрата (рис. 24, в). У доменних структурах кристалів поблизу їх поверхні розташовуються так звані замикаючі домени, які роблять магнітний ланцюг замкненим.

Між доменами з різною спрямованістю магнітних моментів існує граничний шар, для утворення якого буде витрачена певна енергія, так як в загальному випадку обмінні сили сприяють паралельній орієнтації всюди. Процес дроблення доменів, вигідний з точки зору зменшення магнітної енергії, буде відбуватися до тих пір, поки енергія, що йде на утворення нових граничних шарів, не стане рівною виграшу в енергії за рахунок дроблення доменів. Це рівноважний стан в кристалі кубічної форми якраз і відповідає тому, що протягом 1 мм буде  $10^2$  доменів і не більше. Звідси і визначаються розміри домену - порядку  $10^{-2}$  мм.

Виникнення в кристалі феромагнетика доменної структури є природним наслідком існування в такому кристалі різних видів взаємодії, кожне з яких має свою енергію. До таких видів енергії відносяться: енергія обмінної взаємодії, енергія анізотропії і магнітна енергія (енергія магнітного поля). Кожен з цих видів енергії взаємодії вносить свій внесок в величину, визначальну загальну енергію феромагнітного поля.

Про енергію обмінної взаємодії і магнітної енергії вище вже згадувалося. Що ж стосується енергії анізотропії, то це поняття потребує уточнення. Встановлено, що в кристалах феромагнетика існують такі кристалографічні напрямки або осі, звані осями легкого намагнічування, уздовж яких легко намагнітити кристал. Існують також напрямки, уздовж яких важко намагнітити кристал. Такі напрямки називаються осями важкого намагнічування.

На досліді було встановлено, що для кожного феромагнетика існує своя температура  $T_K$ , звана температурою точки Кюрі, вище якої феромагнетик втрачає свої особливі властивості і переходить в звичайний парамагнетик. При цьому магнітна сприйнятливості феромагнетика при температурах вище точки Кюрі (при  $T > T_K$ ) визначається простим виразом

$$\chi = \frac{C}{T - T_K}, \quad (72)$$

який називається законом Кюрі-Вейсса. Постійна  $C$  називається постійною Кюрі. Закон Кюрі-Вейсса добре описує спостережувані зміни з температурою магнітної сприйнятливості феромагнетика, що перебуває в парамагнітній фазі, тобто при  $T > T_K$ . Наприклад, для заліза температура точки Кюрі дорівнює  $T_K \approx 1043 \text{ K} = 770^\circ \text{ C}$ , а для нікелю  $T_K = 631 \text{ K} = 358^\circ \text{ C}$ . Залізо при температурі вище  $770^\circ \text{ C}$  повністю втрачає свої феромагнітні властивості, однак при зменшенні температури нижче  $770^\circ \text{ C}$  спочаткові властивості заліза як феромагнетика відновлюються. Однак постійний магніт, нагрітий до температури  $T > T_K$ , а потім охолоджений, втрачає свої особливі властивості, перетворюючись в звичайний феромагнетик. Такий відпалений магніт потрібно заново намагнічувати.

Розглянемо процес намагнічування феромагнетика. Для цього зразок феромагнетика слід помістити в довгий соленоїд і поступово збільшувати силу струму в обмотці соленоїда.

Типова крива намагнічування (залежність чисельного значення вектора намагнічування  $\mathbf{J}$  від напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$ ) показана на рис. 25.

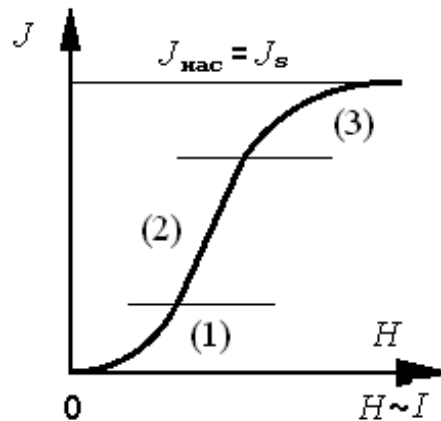


Рис. 25. Залежність вектора намагнічування  $\mathbf{J}$  від напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$

З графіка видно, що з ростом сили струму  $I$  напруженість магнітного поля  $\mathbf{H}$  зростає і намагнічування  $\mathbf{J}$  збільшується. Разом з ним збільшується і магнітна індукція  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J})$ .

Спочатку намагніченість зростає повільно (область (1)), потім швидше (область (2)). Тут намагніченість  $\mathbf{J}$  зростає зі зростанням напруженості поля  $\mathbf{H}$  практично за лінійним законом. В області (3) зростання намагніченості сповільнюється і настає насичення ( $\mathbf{J}_{\text{нас}} = \mathbf{J}_s$ ), при якому намагніченість  $\mathbf{J}$  вже не збільшується зі зростанням  $\mathbf{H}$ .

З точки зору доменної структури ферромагнетиків всі три області кривої залежності чисельного значення вектора намагнічування  $\mathbf{J}$  від напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$  можна витлумачити таким чином. В області (1) з ростом напруженості поля  $\mathbf{H}$  відбувається зміщення кордонів доменів, так що домени з вигідним розташуванням магнітних осей (спрямованих уздовж вектора  $\mathbf{H}$ ) будуть рости за рахунок всіх інших доменів. При цьому в області (1) процес такого переміщення кордонів доменів буде ще і оборотним процесом, тобто при знятті поля все встане на свої місця - всі доменні кордони повернуться назад.

В області (2) відбувається вже незворотній процес зміщення кордонів доменів і поворот їх магнітних моментів уздовж напруженості поля. Отже, в цій області процес намагнічування по полю йде інтенсивно. В області (3) закінчуються повороти магнітних моментів доменів по полю і в намагнічених настає насичення, при якому магнітні моменти всіх доменів орієнтуються уздовж напруженості поля  $H$ .

В процесі намагнічування зміщення кордонів доменів і їх повороти супроводжуються переміщенням місць пружних напружень решітки. В результаті виникають додаткові коливання решітки в діапазоні теплових коливань і відбувається нагрівання кристала феромагнетика. Нагріванням супроводжується також будь-яке перемагнічування феромагнітного матеріалу.

Крива намагнічування феромагнетика зазвичай зображується у вигляді залежності  $B$  від  $H$  у вигляді петлі гістерезису (мал. 26). Ділянка кривої 0-1 відповідає первинній кривій намагнічування (див. рис. 25). Якщо після точки 1 зменшувати напруженість магнітного поля  $H$ , то зміна  $B$  залежно від зміни  $H$  йде вже не по кривій 1-0, а по кривій 1-2. У точці 2, відповідної зняття поля ( $H = 0$ ), залишається залишкове намагнічування, відповідне індукції  $B_{\text{ост}}$ . Для того, щоб знищити це залишкове намагнічування, необхідно прикласти поле ( $-H_c$ ) в напрямку, протилежному первісному. Величина  $H_c$  називається *коерцитивною, або затримуючою, силою*. Очевидно, що чим більше коерцитивна сила у феромагнетика, тим більше він підходить для виготовлення постійних магнітів.

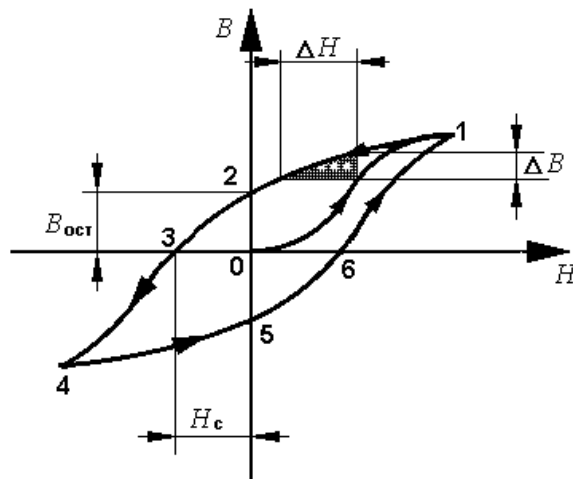


Рис. 26. Петля гістерезису

З викладеного випливає, що магнітна індукція  $B$  відстає від напруженості поля  $H$ , так як при  $H = 0$  є ще залишкова індукція  $B_{\text{ост}}$ . Таке відставання або запізнювання в зміні  $B$  від  $H$  називається *гістерезисом*.

При впливі на феромагнетик змінного магнітного поля напруженістю  $H$  магнітна індукція  $B$  змінюється відповідно до замкнутої кривої (петлі гістерезису). Після точки 1 подальший хід кривої відповідає замкнутій петлі 1-2-3-4-5-6-1.

При слабких полях з напруженістю  $H$  порядку декількох тисяч Ампер / метр вектор намагнічування досягає насичення  $J_s$ , яке настільки велике, що у формулі магнітної індукції  $B = \mu_0(H + J)$  величиною  $H$  цілком можна знехтувати в порівнянні з  $J_s$ , тобто при насиченні (в системі СІ)

$$B_s = \mu_0(H + J_s) \approx \mu_0 J_s. \quad (73)$$

Значення індукції насичення для заліза досягає  $B_s \sim 1 \dots 1,5$  Тл. Це дуже велике значення, близьке до граничного. При подальшому зростанні напруженості магнітного поля  $H$  вектор намагнічування перестає збільшуватися, оскільки вже досяг свого граничного значення. Тому

подальше зростання магнітної індукції  $B$  може відбуватися лише за рахунок зростання  $H$ .

Якщо напруженість поля  $H$  буде дуже велика (понад 1000 А / м), то у формулі (73) перший член буде вже значно перевищувати другий ( $H \gg J$ ) і вектором намагнічування  $J$  можна знехтувати в порівнянні з вектором  $H$ . Тоді

$$B \approx \mu_0 H. \quad (74)$$

Магнітна проникність феромагнетика є функцією вектора напруженості магнітного поля  $H$ , і її залежність від цієї величини описується кривою рис. 27, тобто при насиченні прагне до одиниці.

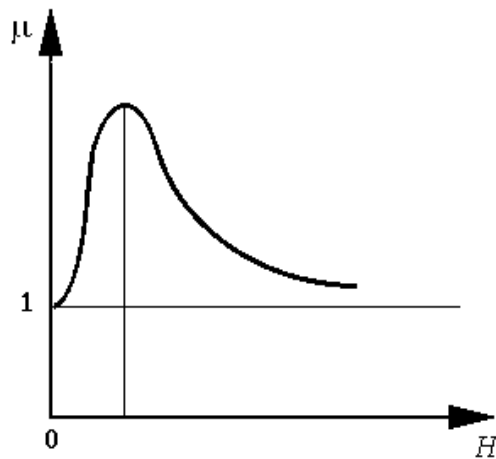


Рис. 27. Залежність магнітної проникності феромагнетика від напруженості магнітного поля

При слабких полях можна, навпаки, знехтувати величиною  $J$  в порівнянні з  $H$ . Результат буде тим же самим:  $\mu$  також прагне до одиниці. У проміжному стані частіше розглядається так звана *диференціальна*, або *динамічна*, магнітна проникність

$$\mu_D = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{dB}{dH}, \quad (75)$$

яка дорівнює відношенню малого збільшення індукції  $\Delta B$ , викликаного збільшенням напруженості  $\Delta H$ , до величини цього приросту  $\Delta H$ .

У диференціальній формі  $\mu_D$  визначається для даної точки кривої  $B=B(H)$ , і геометрично вона дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої  $B = B(H)$ , який ця дотична складає з віссю  $H$ .

Якщо рухатися по петлі гістерезису  $B=B(H)$ , то  $\mu_D = \operatorname{tg} \alpha$  буде змінюватися повільніше, ніж відношення  $\frac{B}{H} = \mu$ . Тому в електротехнічних розрахунках  $\mu_D$  іноді вважають постійною величиною і нею характеризують феромагнітний матеріал. Однак для більш точних розрахунків в довідниках наводиться 2 - 3 значення цієї величини: для слабких полів, для середніх і для дуже сильних полів.

#### Питання для самоперевірки

1. Що таке магнетики?
2. Чим відрізняються діамагнетики від парамагнетиків?
3. Що таке феромагнетики?
4. Що таке обмінний зв'язок і як визначається енергія обмінної взаємодії?
5. Сформулюйте закон Кюрі-Вейсса.
6. Що таке точка Кюрі?
7. Що таке магнітна сприйнятливність? У чому полягає її фізичний зміст?
8. Як пов'язана магнітна сприйнятливність з відносною магнітною проникністю?
9. Що таке домени?
10. Що таке коерцитивна сила?
11. Що таке залишкова намагніченість. Що таке гістерезис?
12. Чому відносна магнітна проникність залежить від величини напруженості магнітного поля?



## 8. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

## 8.1. Електромагнітна індукція

Дослід показує, що електричні струми створюють навколо себе магнітне поле. Але існує і зворотне явище: магнітне поле викликає появу електричних струмів. Це явище було відкрито в 1831 році англійським вченим Майклом Фарадеєм і отримало назву електромагнітної індукції.

У замкнутому провідному контурі в результаті зміни магнітного потоку через площу, обмежену цим контуром виникає електрорушійна сила індукції ( $\mathcal{E}_{ind}$ ) і індукційний струм. Кількісно ЕРС індукції дорівнює швидкості зміни магнітного потоку в часі, тобто

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (76)$$

де магнітний потік

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B dS \cos\alpha. \quad (77)$$

Знак «мінус» у виразі (76) визначається *правилом Ленца*, сенс якого розглянуто нижче. Слід зазначити, що ЕРС індукції може виникати не тільки в замкнутому контурі, а й в одиночному провіднику в тому випадку, якщо цей провідник перетинає лінії магнітної індукції ( $\mathbf{B}$ ).

Важливо, що величина  $\mathcal{E}_{ind}$  не залежить від способу зміни магнітного потоку, а визначається тільки швидкістю його зміни.

Природа ЕРС індукції пояснюється на основі електронних уявлень. Розглянемо провідний контур, одна сторона якого ( $l$ ) рухлива, а весь контур знаходиться в однорідному магнітному полі, силові лінії якого перпендикулярні площині малюнка (рис. 28). Якщо провідник  $l$  переміщується вправо зі швидкістю  $v$ , то за час  $dt$  він переміститься на відстань

$dx = vdt$ . При цьому магнітний потік, зчеплений з контуром, зміниться на величину

$$d\Phi = BdS = Blvdt, \quad (78)$$

де  $dS = lvdt$  - площа, що перетинається провідником  $l$  при його русі.

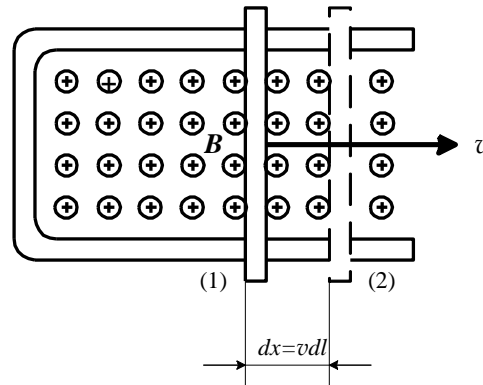


Рис. 28. Провідний електричний контур у магнітному полі

З такою ж швидкістю вбудуть переміщатися і електрони всередині провідника, причому вектори  $\mathbf{v}$  і  $\mathbf{B}$  спрямовані перпендикулярно один одному. На електрон буде діяти сила Лоренца (рис. 29), спрямована вздовж провідника:

$$F_l = evB. \quad (79)$$

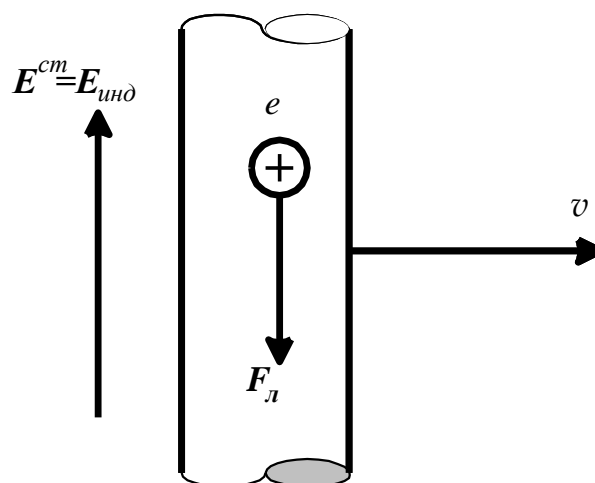


Рис. 29. До визначення сили Лоренца

Дія цієї сили на електрон еквівалентна дії на нього сторонньої сили  $F^{cm} = ev\mathbf{B} = e\mathbf{E}^{cm}$  за рахунок електричного поля з напруженістю  $\mathbf{E}^{cm} = v\mathbf{B}$ . Це реально існуюче електричне поле, яке можна назвати стороннім, оскільки було викликано в даному випадку чисто механічним рухом провідника в магнітному полі. Силі лінії стороннього поля замкнуті, поле має вихровий характер. Робота, що здійснюється індукційним електричним полем з напруженістю  $\mathbf{E}^{cm}$  по переміщенню одиничного заряду уздовж замкнутого контуру, не дорівнює нулю.

ЕРС індукції дорівнює

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_l \mathbf{E}^{cm} dl = vBl = B \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (80)$$

і збігається з законом електромагнітної індукції.

## 8.2. Правило Ленца

Знак «мінус» в законі електромагнітної індукції встановлюється *правилом Ленца*:

1) для відокремленого провідника: ЕРС індукції, що виникає в одиночному провіднику, завжди має такий напрямок, щоб перешкоджати причині, яка її викликає. У розглянутому вище прикладі рух рухомої частини контуру вправо під дією сили Ампера призводить до зменшення магнітного потоку, зчепленого з контуром. Індукційний струм направлений протилежно току в ланцюгу, а сила Ампера за рахунок індукційного струму прагне виштовхнути провідник, збільшуючи магнітний потік, що пронизує контур.

2) для замкнутого контуру: *виникаючий в замкнутому контурі індукційний струм має такий напрям і таку величину, щоб створюваний ним власний магнітний потік компенсував зміну зовнішнього магнітного потоку, зчепленого з контуром.*

Якщо спочатку потік, зчеплений з контуром, дорівнював  $\Phi$ , а потім збільшився до  $(\Phi + \Delta\Phi)$ , то за правилом Ленца індукційний струм в контурі створює потік  $(\Delta\Phi)$ , що компенсує зміну зовнішнього магнітного потоку.

Розглянемо тепер довільний контур, розташований в магнітному полі з індукцією  $\mathbf{B}$ , яка є функцією координат і часу:  $B = B(x, y, z, t)$ .

Вираз для ЕРС індукції запишеться у вигляді

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d}{dt} \int_s B dS \cos \alpha, \quad (81)$$

де  $\alpha$  – кут між вектором  $\mathbf{B}$  і нормаллю  $\mathbf{n}$  до контуру.

Якщо контур *не деформується*, тобто  $dS$  не змінюється з плином часу, то диференціюючи цей вираз (81), можна отримати

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} dS \cos \alpha - \int_s (\mathbf{v}, \text{grad} \mathbf{B}) dS \cos \alpha - \int_s B dS \frac{d}{dt} (\cos \alpha). \quad (82)$$

Наявність трьох доданків в цьому виразі показує, що ЕРС індукції може виникати в недеформуючому контурі в трьох випадках.

1. Контур не рухається поступально і не обертається:

$$v = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} (\cos \alpha) = 0.$$

Тоді

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \int_s \frac{\partial}{\partial t} dS \cos \alpha = - \int_s \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (83)$$

Як було показано раніше,  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  можна розглядати як циркуляцію вектора напруженості стороннього електричного поля по замкнутому контуру, тобто

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_l \mathbf{E}^{cm} dl. \quad (84)$$

Прирівнявши праві частини виразів (197) і (198), отримаємо

$$\oint_l \vec{E}_{\text{ст}} dl = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS \quad (85)$$

Цей вираз являє собою *друге рівняння Максвелла в інтегральній формі* і показує, що змінне в часі магнітне поле породжує змінне вихрове електричне поле, тобто закон електромагнітної індукції встановлює взаємозв'язок змінних магнітного і електричного полів, існування *єдиного електромагнітного поля*. У цьому важливий фізичний зміст цього закону.

2. Контур рухається поступально в неоднорідному магнітному полі:

$$v \neq 0 \quad \text{і} \quad \text{grad } \mathbf{B} \neq 0.$$

В цьому випадку перша і третя складові у формулі (82) перетворюються в нуль і

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \int_s (\mathbf{v}, \text{grad } \mathbf{B}) dS \cos \alpha. \quad (86)$$

3. Поле однорідне ( $\mathbf{B} = \text{const}$ ), а контур обертається.

Припустимо, що контур обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega = \frac{\alpha}{t}$  однорідному магнітному полі з індукцією  $\mathbf{B}$ .

Тоді

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \int_s B dS \cos \alpha = -B \frac{d}{dt} (\cos \omega t) \int_s dS = \mathcal{E}_{\text{max}} \sin \omega t, \quad (87)$$

де

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = BS\omega. \quad (88)$$

Звідси випливає, що при рівномірному обертанні контуру в постійному магнітному полі в ньому виникає змінна синусоїдальна ЕРС і змінний струм. Це найпоширеніший спосіб отримання змінного струму.

### 8.3. Явище самоіндукції. Індуктивність

Окремим випадком явища електромагнітної індукції є випадок, коли магнітний потік створюється струмом, поточним в самому контурі. Якщо цей струм змінюється, то в контурі змінюється його власне магнітне поле ( $\mathbf{B}$ ), а отже, і власний магнітний потік. Це призводить до появи в такому контурі ЕРС *самоіндукції* і додаткових індукційних струмів, званих екстраструмами самоіндукції.

Таким чином, *явище самоіндукції - це виникнення ЕРС індукції в контурі при зміні пов'язаного з ним власного магнітного потоку.*

Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа магнітна індукція пропорційна току, який викликав магнітне поле. Звідси випливає, що струм  $I$  в контурі і створюваний ним магнітний потік  $\Phi$  пропорційні один одному:

$$\Phi = LI. \quad (89)$$

Коефіцієнт пропорційності ( $L$ ) між струмом і магнітним потоком називається *індуктивністю контуру*. Підставимо цей вираз у вираз для закону електромагнітної індукції:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}. \quad (90)$$

За відсутності феромагнетиків  $L$  не залежить від струму, тому

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}. \quad (91)$$

Звідси випливає, що індуктивність  $L$  чисельно дорівнює ЕРС самоіндукції, якщо сила струму в контурі змінюється на одиницю за одиницю часу (якщо  $dI/dt = 1$ ).

В системі СІ індуктивність вимірюється в Генрі.

Прикладом явища самоіндукції є екстраструми замикання і розмикання. Згідно з правилом Ленца індукційні струми, що виникають в контурі, спрямовані так, щоб перешкоджати зміні струму, поточного в ланцюзі. Це призводить до того, що встановлення струму при замиканні ланцюга і спадання струму при розмиканні відбувається не миттєво, а поступово (рис. 30, а, б).

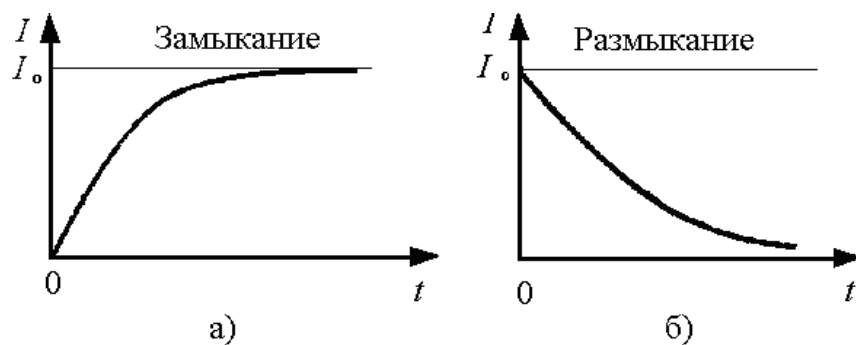


Рис. 30. Встановлення струму при замиканні і розмиканні ланцюга

Індуктивність визначається геометричною формою контуру і середовищем, в якій розташований цей контур.

Як приклад обчислимо індуктивність соленоїда, вважаючи його досить довгим ( $l \gg d$ , де  $l$  - довжина соленоїда,  $d$  - діаметр його витків). В цьому випадку магнітну індукцію  $B$  можна вважати рівною величині магнітної індукції всередині нескінченного соленоїда, тобто

$$B = \mu_0 n I. \quad (92)$$

Кожен виток соленоїда пронизує потік  $\Phi = BS$ , а потокозчеплення

$$\Psi = N\Phi = nl BS = \mu\mu_0 n^2 l SI, \quad (93)$$

де  $n = N/l$  - число витків на одиницю довжини соленоїда.

З іншого боку, згідно з (89),  $\Psi = LI$ . Прирівнюючи праві частини виразів (89) і (93), визначимо індуктивність котушки з сердечником з феромагнетика (відносна магнітна проникність якого дорівнює  $\mu$ ):

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (94)$$

де  $V = Sl$  - об'єм соленоїда.

Виявляється, що індуктивність соленоїда прямо пропорційна квадрату числа витків, площею поперечного перерізу соленоїда і відносною магнітної проникності сердечника і обернено пропорційна довжині котушки.

#### 8.4. Взаємна індукція

ЕРС, що виникає в контурі, завдяки зміні пронизливого його магнітного потоку, створеного іншим контуром, називається ЕРС *взаємної індукції*.

Розглянемо два контури, розташовані поблизу один одного (рис. 31).

Струм  $I_1$ , поточний в першому контурі, створює зчеплений з другим контуром повний магнітний потік, пропорційний  $I_1$ , тобто

$$\Psi_2 = L_{21} I_1, \quad (95)$$

Силкові лінії поля  $\mathbf{B}_1$ , що створює цей потік, показані на рис. 31 суцільними лініями. При зміні струму  $I_1$  в контурі 2 індукується ЕРС:

$$\mathcal{E}_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (96)$$



Аналогічно при протіканні в контурі 2 струму  $I_2$  виникає потік  $\Phi_1$ , зчеплений з 1 контуром:

$$\Psi_1 = L_{12} I_2. \quad (97)$$

Зміна струму  $I_2$  призводить до індукування в контурі 1 ЕРС:

$$\mathcal{E}_1 = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (98)$$

Контури 1 і 2 називаються *пов'язаними контурами*, а явище виникнення ЕРС в одному з контурів при зміні сили струму в іншому називається *взаємною індукцією*.

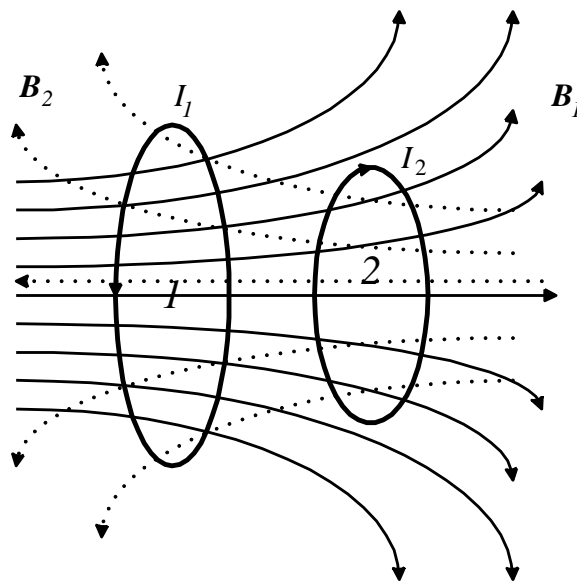


Рис. 31. До визначення явища взаємної індукції

Коефіцієнти  $L_{12}$  і  $L_{21}$  - *взаємні індуктивності контурів*. За відсутності феромагнетиків  $L_{12} = L_{21}$ . Величина  $L_{12}$  залежить від форми, розмірів і взаємного розташування контурів, а також від відносної магнітної проникності середовища, що оточує контури. Вимірюється  $L_{12}$  в тих же одиницях, що і індуктивність, тобто в Генрі.

Визначимо взаємну індуктивність двох котушок, намотаних на загальний тороїдальний сердечник (рис. 32). З обома обмотками зчеплений однаковий магнітний потік. Якщо перша обмотка має  $N_1$  витків і по ній тече струм сили  $I_1$ , то відповідно до теореми про циркуляцію

$$Hl = N_1 I_1, \quad (99)$$

де  $l$  - довжина сердечника. Магнітний потік через поперечний переріз сердечника

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 HS. \quad (100)$$

Тоді повний потік, зчеплений з іншою обмоткою, ( $\Psi_2$ ) з урахуванням (99) і (100) запишеться у вигляді

$$\Psi_2 = N_2 \Phi = N_2 \mu\mu_0 HS = \frac{S}{l} \mu\mu_0 N_1 N_2 I_1. \quad (101)$$

З зіставлення вираження (101) з формулою (95) отримуємо

$$L_{21} = \frac{S}{l} \mu\mu_0 N_1 N_2. \quad (102)$$

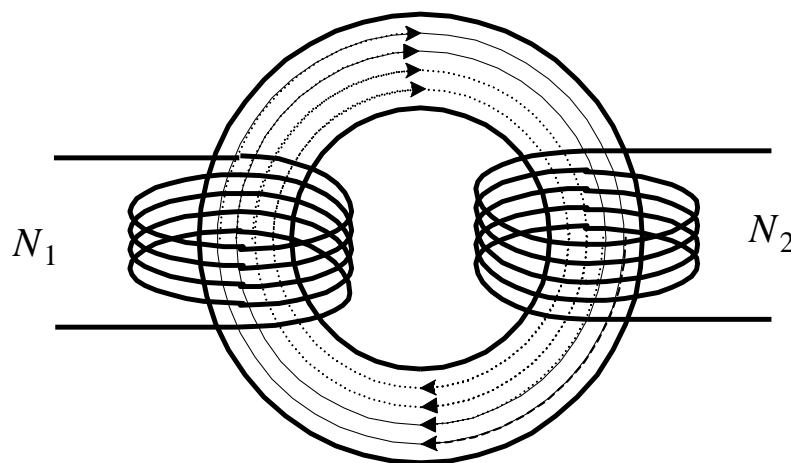


Рис. 32. До визначення взаємної індуктивності двох котушок, намотаних на загальний тороїдальний сердечник

Аналогічні міркування дозволяють обчислити коефіцієнт взаємної індукції:

$$L_{12} = \frac{S}{l} \mu \mu_0 N_1 N_2, \quad (103)$$

співпадаючої з  $L_{21}$ .

Слід зауважити, що в даному випадку не можна стверджувати, що  $L_{12} = L_{21}$ . Дійсно, множник  $\mu$  що входить у вираз для коефіцієнтів  $L_{12}$  і  $L_{21}$ , залежить від напруженості магнітного поля в сердечнику. Якщо  $N_1 \neq N_2$ , то при пропусканні одного і того ж струму один раз по першій, а іншим разом по другій обмотці, в сердечнику створюються поля різної напруженості  $H$ . Відповідно значення  $\mu$  в обох випадках будуть різними, тому при  $I_1 = I_2$  чисельні значення  $L_{12}$  і  $L_{21}$  не збігаються.

### 8.5. Енергія магнітного поля

Розглянемо довільний контур, індуктивність якого дорівнює  $L$ . За відсутності струму в навколишньому просторі магнітного поля немає, і магнітний потік  $\Phi$ , зчеплений з контуром, дорівнює нулю. При протіканні через контур струму  $I$  контур буде пронизувати магнітний потік

$$\Phi = LI. \quad (104)$$

Зміна струму на величину  $dI$  призводить до зміни магнітного потоку на величину

$$d\Phi = L dI. \quad (105)$$

Однак для зміни магнітного потоку джерело струму повинно здійснити роботу

$$dA = Id\Phi, \quad (106)$$

яка йде на збільшення запасу енергії контуру зі струмом

$$dW = dA = Id\Phi = LIdI. \quad (107)$$

За відсутності струму ( $I = 0$ ) ця енергія дорівнює нулю, але при збільшенні струму до деякого значення  $I$  енергія контуру зі струмом буде дорівнювати

$$W = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}. \quad (108)$$

Це енергія магнітного поля контуру зі струмом. Можна пов'язати вираження цієї енергії через параметри магнітного поля, тобто через вектор індукції магнітного поля  $\mathbf{B}$  (або через напруженість  $\mathbf{H}$ ). Розглянемо однорідне магнітне поле всередині соленоїда, індуктивність якого дорівнює

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}, \quad (109)$$

де  $N$  - число витків соленоїда.

Напруженість магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда

$$H = nI = \frac{N}{l} I, \quad (110)$$

звідки слідує, що

$$I = \frac{Hl}{N}. \quad (111)$$

Підставляючи значення  $L$  (109) і струму  $I$  (111) в формулу (108), отримаємо

$$W = W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 S l H^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 V, \quad (112)$$

де  $V=Sl$ - об'єм соленоїда.

Об'ємна густина енергії магнітного поля визначається так:

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2. \quad (113)$$

Оскільки  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ , то вираз (113) можна переписати через індукцію магнітного поля ( $\mathbf{B}$ ):

$$w_M = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu \mu_0}. \quad (114)$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля прямо пропорційна квадрату напруженості (або індукції) магнітного поля в даній точці.

#### Задачаб

Соленоїд з сердечником із не магнітного матеріалу містить 1200 витків дроту, які щільно прилягають одна до одної. При силі струму 4 А магнітний потік дорівнює 4 мкВб. Визначити індуктивність соленоїда і енергію його магнітного поля.

Дано:

$$N = 1200$$

$$I = 4 \text{ А}$$

$$\Phi = 4 \text{ мкВб} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$$

---


$$L - ? \quad W - ?$$

Розв'язання. Індуктивність  $L$  пов'язана з потокозчепленням  $\Psi$  і силою струму  $I$  співвідношенням

$$\Psi = LI. \quad (115)$$

У свою чергу, потокозчеплення можна знайти через потік  $\Phi$  і число витків  $N$  (коли витки щільно прилягають один до одного):

$$\Psi = N\Phi. \quad (116)$$

З формул (115) і (116) знаходимо індуктивність соленоїда:

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (117)$$

Енергія магнітного поля соленоїда

$$W = \frac{1}{2}LI^2. \quad (118)$$

Виразивши  $L$  згідно (117), отримаємо

$$W = \frac{1}{2}N\Phi I. \quad (119)$$

Підставимо в формули значення фізичних величин і зробимо обчислення:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 14,4 \text{ мДж}.$$

### Питання для самоперевірки

- 1.Що називається елементарним магнітним потоком?
- 2.Що називається магнітним потоком?
- 3.За яких умов магнітний потік дорівнює нулю?

4. За яких умов магнітний потік дорівнює добутку індукції магнітного поля на площу контуру?
5. Сформулюйте визначення явища електромагнітної індукції.
6. Сформулюйте закон електромагнітної індукції.
7. Дайте визначення циркуляції магнітного поля.
8. Запишіть закон ЕМІ для вихрового електричного поля.
9. Яке поле є вихровим?
10. Чим відрізняється електричне поле, створене точковим зарядом, від електричного поля, що з'являється при ЕМІ?
11. Сформулюйте закон ЕМІ для замкнутого провідного контуру.
12. За яких умов виникає ЕРС самоіндукції?
13. Сформулюйте означення явища самоіндукції.
14. Сформулюйте словами закон самоіндукції.
15. Назвіть способи створення змінного магнітного потоку.

## 9. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

Максвелл збудував теорію електричних і магнітних явищ, яка називається теорією електромагнітного поля. В основі цієї теорії лежить основна ідея Максвелла: існування єдності електричних та магнітних полів і цю єдність він назвав електромагнітним полем.



Узагальнивши основні закони, відкриті в галузі електричних та магнітних явищ: закон Кулона, закон Біо-Савара-Лапласа, закон електромагнітної індукції Фарадея та на основі гіпотези про існування струму зміщення і єдності електричних і магнітних полів, Максвелл описав

електромагнітну теорію в математичній формі у вигляді 4-х рівнянь, які увібрали в себе все, що було відомо про електричні та магнітні явища.

Закон електромагнітної індукції Фарадея, який був розглянутий вище, записувався в наступному вигляді:

$$e^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (120)$$

де магнітний потік

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B dS \cos\alpha. \quad (121)$$

Магнітний потік  $\Phi$  пронизує не тільки площу контуру, а й *будь-яку поверхню, що спирається* на цей контур, тобто обмежену цим контуром.

Вектор  $d\mathbf{S}$  за абсолютним значенням дорівнює площі нескінченно малого ділянки цієї поверхні, тобто її *елемента*, спрямований нормально до цієї поверхні, а векторна величина  $\mathbf{B}$  - вектор магнітної індукції, є функцією координат точки простору і часу. Кут  $\alpha$  являє собою кут між векторами  $d\mathbf{S}$  і  $\mathbf{B}$ . Для фіксованої точки поверхні  $S$  магнітна індукція залежить тільки від часу, і тому в (120) повну похідну можна прирівняти частковою похідною за часом:

$$e^{ind} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (122)$$

Тоді можна записати:

$$e^{ind} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS \cos\alpha \quad (123)$$

або

$$e^{ind} = -\int_S \left(\frac{\partial B_n}{\partial t}\right)_n dS. \quad (124)$$

Із загальних міркувань ЕРС індукції можна визначити через циркуляцію вектора напруженості  $\vec{E}^{ind}$  стороннього індукваного електричного поля по замкнутому контуру  $l$ , що обмежує поверхню  $S$ :

$$e^{ind} = \oint_l \vec{E}^{ind} dl = \oint_l E^{ind} dl \cos\alpha \quad (125)$$



Звідси

$$\oint_l E_l^{\text{інд}} dl = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \quad (126)$$

Звідси випливає, що якщо існує змінне в часі магнітне поле ( $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$ ), то воно породжує електричне поле, циркуляція якого не дорівнює нулю. Це електричне поле має індукційне походження, тобто буде вихровим, на відміну від потенційного електростатичного (рис. 33).

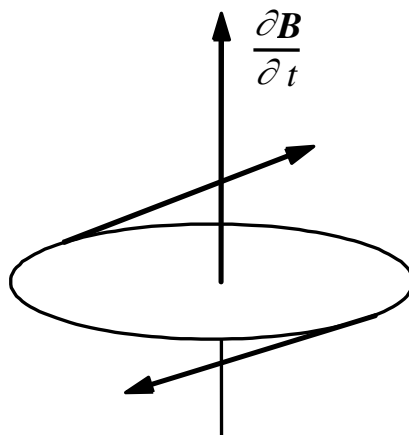


Рис. 33. Вихрове електричне поле

Силкові лінії вихрового поля будуть замкнутими. Крім того,  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  можна вважати джерелом вихрового електричного поля  $\vec{E}^{\text{інд}}$ . Тому на малюнку зображений вектор  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  як джерело вихрового електричного поля. Напрямок вектора  $\vec{E}^{\text{інд}}$ , який ми далі будемо позначати  $\mathbf{E}$ , не відповідає правилу правого гвинта, а буде прямо протилежним цьому напрямку, оскільки враховується знак мінус в законі електромагнітної індукції.

Рівняння (126) являє собою *друге рівняння Максвелла*. Фізичний його зміст полягає в наступному: будь-яка поява і зміна в часі *магнітного поля* викликає появу і зміну зчепленого з ним *електричного поля*. Ідея Максвелла

полягала в тому, що має бути і зворотній висновок - всяка поява і зміна в часі *електричного поля* викликає появу і зміну зчепленого з ним *магнітного поля*.

Розглянемо змінне електричне поле, яке утворюється в просторі між двома пластинами плоского конденсатора, до яких прикладена змінна різниця потенціалів (рис. 33).

Попровіднику тече струм, густина якого дорівнює  $j_{np}$  (струм провідності). Усередині конденсатора струм провідності відсутній, оскільки відсутні заряди. Виберемо замкнуту поверхню  $S$ , що містить у собі одну з обкладок. Заряди, що переміщуються по провіднику, накопичуються на обкладинці, що знаходиться всередині поверхні. Згідно з теоремою Гаусса сумарний заряд, що знаходиться всередині цієї поверхні, дорівнює потоку вектора електричної індукції через цю поверхню:

$$q = \oint_S \mathbf{D} dS. \quad (127)$$

Густина зарядів на поверхні обкладки конденсатора змінна, і відповідно індукція електричного поля всередині конденсатора - теж змінна.

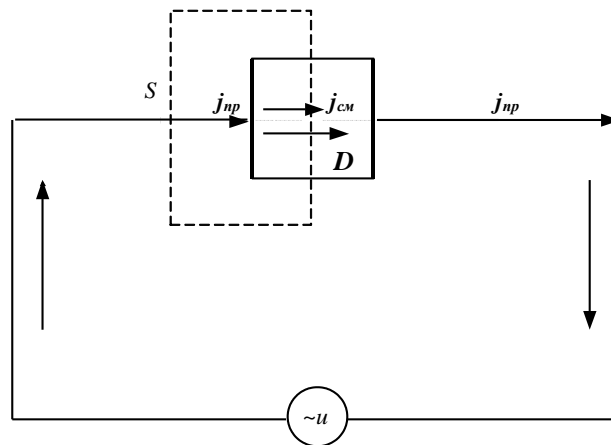


Рис. 33. До визначення струму зміщення

Таким чином, усередині конденсатора з'являється постійне електричне поле з індукцією  $D$ , причому абсолютне значення цієї індукції чисельно дорівнює густині зарядів на поверхні обкладки конденсатора.

Рівняння безперервності в цьому випадку запишеться так:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \oint_S \mathbf{j} dS, \quad (128)$$

де  $\mathbf{j}$ - вектор густини струму провідності. Підставляючи (127) в (128), отримаємо

$$-\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{D} dS = \oint_S \mathbf{j} dS. \quad (129)$$

Оскільки у виразі (129) інтеграли беруться за однією і тією ж поверхнею, то їх можна об'єднати:

$$\oint_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dS = 0, \quad (130)$$

звідки випливає, що лінії струму

$$\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_{\text{полн}},$$

який ми назвемо *повним струмом*, виявляються замкнутими.

Величина  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  має розмірність густини струму і була названа Максвеллом *густиною струму зміщення*. Вектор електричної індукції  $\mathbf{D}$  всередині конденсатора чисельно (тобто по модулю) дорівнює густині зарядів на поверхні конденсатора  $\sigma$ :

$$|\mathbf{D}| = \sigma.$$

Тому

$$\frac{\partial |\mathbf{D}|}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = |\mathbf{j}|.$$

За гіпотезою Максвелла до пластин конденсатора існує струм провідності  $j$ , а між пластинами він переходить в рівний йому струм зміщення:

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (131)$$

який визначається швидкістю зміни індукції електричного поля з часом. Тому лінії струму (повного струму) виявляються замкнутими.

Струм зміщення відповідно до гіпотези Максвелла створює магнітне поле. Ця гіпотеза підтвердилася на численних дослідах. Струм зміщення, дійсно, створює змінне вихрове магнітне поле, його силові лінії замкнуті (рис. 34), причому напрямок магнітного поля, створеного струмом зміщення, як видно на рис. 35, відповідає правилу правого гвинта (штопора).

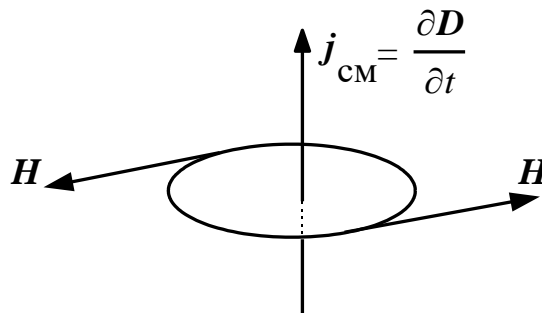


Рис. 34. Магнітне поле створене струмом зміщення

У загальному випадку струм зміщення також може складатися з двох частин, одна з яких обумовлена наявністю провідності середовища всередині конденсатора. Однак в діелектриках ця частина дуже незначна і нею можна знехтувати.

Таким чином, змінне в часі електричне поле (струм зміщення  $\frac{\partial D}{\partial t} \neq 0$ ) створює змінне вихрове магнітне поле ( $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$ ), яке, в свою чергу, створює змінне вихрове електричне поле.

З рис. 35 видно, що силові лінії магнітного поля, створюваного струмом зміщення  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , будуть замкнутими. Те ж саме можна сказати і щодо електричного поля, індукованого змінним магнітним полем  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ .

Отже, змінні в часі електричне та магнітне поля не можуть існувати окремо один від одного і виявляються нерозривно пов'язаними - *утворюють єдине електромагнітне поле*.

Саме поділ поля на дві частини - чисто електричне та чисто магнітне є відносним. Справді, за принципом відносності всі фізичні закони, в тому числі і електромагнітні, є *інваріантними* (тобто мають однаковий вигляд, описуються однаковими рівняннями) у всіх інерційних системах відліку. Тому якщо електричні заряди нерухомі відносно даної системи відліку, то в ній вони створюють тільки електричне поле. В іншій же системі відліку, щодо якої ці заряди рухливі, вони створюють і електричне, і магнітне поля, оскільки, як ми знаємо, магнітне поле *створюється рухомими зарядами*. Так само постійний струм в нерухомому дроті створює постійне магнітне поле. Однак в іншій інерціальній системі, в якій провідник рухається, магнітне поле буде змінюватися, і воно викличе вихрове електричне поле.

### 9.1. Система рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формі

Перше рівняння Максвелла є *узагальненням закону повного струму*, який стверджує, що *циркуляція вектора напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$  за довільним замкнутим контуром, який охоплює кілька провідників зі струмами, дорівнює алгебраїчній (тобто з урахуванням знаків) сумі цих струмів*:

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n I_i,$$

де  $n$  - число провідників.

Можна узагальнити цей вираз на випадок, коли магнітне поле створюється не окремими дискретними провідниками зі струмами, а мікроскопічними струмами, розподіленими в просторі з густиною  $j$ . Ці струми течуть через довільну поверхню  $S$ , обмежену контуром  $l$ , по якому береться циркуляція. Кажуть, що поверхня  $S$  *спирається* на цей контур.

Тоді отримаємо

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (132)$$

Струм зміщення також створює магнітне поле, як і струм провідності. Тому замість  $\mathbf{j}$  можна підставити вираз для густини повного струму.

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (133)$$

Цей вираз і є *першим рівнянням Максвелла* в інтегральному вигляді для змінного поля. Циркуляція вектора  $\mathbf{H}$  в загальному випадку не дорівнює нулю. Це означає, що магнітне поле з напруженістю  $\mathbf{H}$  є вихровим і можна визначити фізичний зміст першого рівняння Максвелла.

Перше рівняння Максвелла показує, що змінне в часі електричне поле ( $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$ ) викликає змінне в часі вихрове магнітне поле, циркуляція якого і визначається виразом (133). У свою чергу поява змінного магнітного поля відразу ж впливає на вихідне змінне електричне поле згідно з другим рівнянням Максвелла (126). Таким чином, обидва поля - змінні електричне і магнітне - своїм існуванням і зміною зобов'язані один одному. Вони існують тільки спільно, і існувати окремо не можуть. Незалежно один від одного можуть існувати тільки статичні електричне та магнітне поля. Змінні ж електричне та магнітне поля утворюють єдине електромагнітне поле, яке описується двома рівняннями Максвелла. Тому і рівняння Максвелла не можуть розглядатися окремо один від одного, а тільки спільно, утворюючи *систему рівнянь Максвелла*.

Ця система рівнянь записується в такий спосіб:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \quad (\text{I}) \quad (134)$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (\text{II}) \quad (135)$$

У правій частині першого рівняння Максвелла присутні як струм провідності  $\vec{j}$ , так і струм зміщення  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . В металах зазвичай  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{j}$ , і перше рівняння Максвелла перетворюється в уже знайомий нам закон повного струму:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} = I. \quad (136)$$

Для діелектриків же струм провідності дуже малий порівняно зі струмом зміщення  $\vec{j} \ll \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , і перше рівняння Максвелла набуває вигляду

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (\text{II}) \quad (137)$$

Пару рівнянь Максвелла слід доповнити ще двома. Третє рівняння Максвелла являє собою теорему Гаусса для магнітного поля:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0, \quad (\text{III}) \quad (138)$$

а четверте - теорему Гаусса для електричного поля:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q. \quad (\text{IV}) \quad (139)$$

Таким чином, система рівнянь Максвелла для непровідного середовища має наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_l (\vec{E} d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} \vec{n}) dS \\ \oint_l (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S \left( (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \vec{n} \right) dS \\ \oint_S (\vec{D} \vec{n}) dS = \int_V \rho dV \\ \oint_S (\vec{B} \vec{n}) dS = 0 \end{array} \right. \quad (140)$$

де  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ .

Слід мати на увазі, що ці співвідношення справедливі для так званого *ізотропного* середовища, тобто такого середовища, властивості якого однакові у всіх напрямках. У загальному випадку *анізотропного* середовища, тобто такого, властивості якого залежать від напрямку, рівняння (140) ускладнюються. Цей загальний випадок тут не розглядається.

Разом з системою рівнянь Максвелла зазвичай записується вираз для енергії електромагнітного поля:

$$W_{\text{ем}} = \int_V \left( \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{2} \right) dV, \quad (141)$$

так як об'ємна густина енергії електричного і магнітного полів визначається формулою

$$w_{\text{ем}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H}. \quad (142)$$

Вектори напруженості електричного поля  $\mathbf{E}$  і індукції магнітного поля  $\mathbf{B}$  взаємно-перпендикулярні один одному. Вектори індукції електричного поля



$\vec{D}$  (який спрямований в ту ж сторону, що і вектор  $\vec{E}$ ), і напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  (спрямований так само, як і вектор  $\vec{B}$ ) також *взаємно-перпендикулярні*. Напрямок магнітного поля, створеного струмом зміщення, відповідає *правилу правого гвинта*.

Вирази (140) являють собою рівняння Максвелла в інтегральній формі. Інтегральна форма більш *наочна*, оскільки перше і друге рівняння Максвелла є узагальненнями закону повного струму (перше рівняння) і закону електромагнітної індукції (друге рівняння). Однак для розрахунків електромагнітного поля і дослідження електромагнітних хвиль інтегральна форма запису рівнянь Максвелла мало придатна. Подальше узагальнення призводить до необхідності опису поля в заданій точці простору. Цього можна досягти, *стягуючи контур в точку*, нескінченно зменшуючи його розміри. При цьому ми переходимо до так званої *диференціальної форми* запису рівнянь Максвелла.

Рівняння Максвелла в диференціальній формі:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Проаналізуємо ці рівняння.

1. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея). Зв'язує електричні і магнітні поля: навколо кожної точки простору, де змінюється магнітне поле, виникає вихрове електричне поле, або зміна магнітного поля породжує вихрове електричне поле.
2. Магнітне поле створюється як струмом провідності, так і струмом зміщення, тобто змінним електричним полем.

3. Теорема Остроградського – Гаусса: джерелом електростатичного поля є заряди. Силві лінії електростатичного поля починаються на позитивних зарядах, закінчуються на негативних зарядах.

4. Вказує на те, що магнітне поле завжди соленоїдальне. Це означає, що в нього нема джерел, подібних джерелам електростатичного поля, тобто в природі не існує магнітних зарядів.

## 9.2. Класифікація задач електродинаміки

Система рівнянь Максвелла охоплює всі задачі електродинаміки, які можуть бути класифіковані таким чином:

1. Статичні (тобто незалежні від  $t$ ) поля. Рівняння для цих полів отримують, якщо  $\frac{d}{dt}$  символічно спрямувати до нуля. Тоді система рівнянь розпадається на дві пари рівнянь, і ці пари не зв'язані одна з одною. А саме:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right\} \quad \text{і} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right\}$$

Перша пара визначає електростатику, друга – магнітостатику.

2. Квазістаціонарні поля. Це такі поля, де  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow 0$  (тобто електричні поля, що повільно змінюються). Тоді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

Цими рівняннями визначається все коло задач, які відносяться до електротехніки. Основним тут є закон електромагнітної індукції.

3. Змінні поля (3-й клас задач). Для їх описання потрібна вся система рівнянь. Коло задач, що входять у цю групу – це вся оптика (як хвильова так і геометрична), радіотехніка і класична теорія випромінювання.

З часом у фізиці виникли задачі, рішення яких за допомогою системи Максвелла виявились неможливими. Це насамперед задачі про взаємодію світла з речовиною, наприклад, задача про фотоефект. У ХХ столітті була побудована так звана квантова електродинаміка. Але необхідність її використання в деяких задачах зовсім не відмінило електродинаміку Максвелла, яка використовується навіть у деяких питаннях лазерної фізики.

Рівняння Максвелла в диференціальній формі припускають, що всі величини в просторі і часі змінюються безперервно. Щоб досягти математичної еквівалентності обох форм рівнянь Максвелла, *диференціальну форму доповнюють граничними умовами*, яким має задовольняти електромагнітне поле на межі поділу двох середовищ. Інтегральна форма рівнянь містить ці умови

$$D_{n1} = D_{n2}, E_{\tau1} = E_{\tau2}, B_{n1} = B_{n2}, H_{\tau1} = H_{\tau2}.$$

Перше і останнє рівняння відповідають випадкам, коли на кордоні розділу немає ні вільних зарядів, ні струмів провідності.

#### Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте закон електромагнітної індукції Фарадея.
2. Що таке вихрове електричне поле і чим воно відрізняється від потенційного?
3. Чи є індукційне електричне поле вихровим або потенційним?
4. Що таке струм зміщення і чим він відрізняється від струму провідності?
5. Сформулюйте теорему про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля.
6. Сформулюйте теорему Гаусса для електричного поля.
7. Як формулюється теорема Гаусса для магнітного поля?

8. У чому полягає фізичний зміст першого рівняння Максвелла?
9. У чому полягає фізичний зміст другого рівняння Максвелла?
10. Запишіть вираз для густини енергії електромагнітного поля.

#### Задачі для самостійного розв'язування з магнетизму

1. Індукція магнітного поля в вакуумі дорівнює  $1,2 \text{ мкТл}$ . Визначити напруженість магнітного поля.
2. По двом плоским контурам однакової площі в  $1 \text{ см}^2$ , один з яких має вигляд кола, а другий - квадрата, протікає струм  $1 \text{ А}$ . Які магнітні моменти контурів?
3. Контур, по якому тече струм в  $2 \text{ А}$ , що має  $100$  однакових витків площею по  $0,5 \text{ м}^2$ , поміщений в магнітне поле з індукцією  $2 \text{ Тл}$ . Визначити найбільший і найменший обертаючі моменти.
4. Для яких з магнетиків - діамагнетиків, парамагнетиків або феромагнетиків відносна магнітна проникність менше одиниці?
5. Визначити циркуляцію вектора напруженості магнітного поля по контуру, що охоплює кабель живлення телевізора потужністю  $100 \text{ Вт}$ .
6. Визначити напруженість магнітного поля всередині соленоїда довжиною  $0,1 \text{ м}$ , якщо соленоїд має  $100$  ампер-витків.
7. Який заряд протече по контуру з опором  $2 \text{ Ома}$ , якщо магнітний потік зміниться з  $4 \text{ Вб}$  до  $2 \text{ Вб}$ ?
8. Яка ЕРС індукції виникне в контурі площею  $1 \text{ м}^2$ , вміщеному ортогонально силовим лініям магнітного поля з індукцією  $1 \text{ Тл}$ , якщо за час  $0,5 \text{ с}$  магнітний потік зменшиться вдвічі?
9. У контурі з індуктивністю  $1 \text{ Гн}$  струм змінюється зі швидкістю  $2 \text{ А / с}$ . Визначити ЕРС самоіндукції.
10. Визначити роботу, яку потрібно зробити, щоб повернути контур зі струмом, що знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $1 \text{ Тл}$ , на  $180^\circ$ .

## 10. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ЗМІННИЙ СТРУМ

Теорія змінних струмів може бути побудована на основі закону електромагнітної індукції, розглянутого вище. Дослідження ж ланцюгів змінного струму і розгляд їх роботи в режимі резонансу безпосередньо підводить до коливального контуру, до електричних коливань, що відбувається в електричних системах другого порядку. З елементарного курсу фізики відомо, що під змінним струмом розуміється такий струм, який змінюється з часом і за величиною і за напрямком. Надалі ми будемо розглядати синусоїдальний змінний струм і всі поняття, які стосуються цього питання.

Найбільш поширеним є наступний спосіб отримання змінного синусоїдального струму.

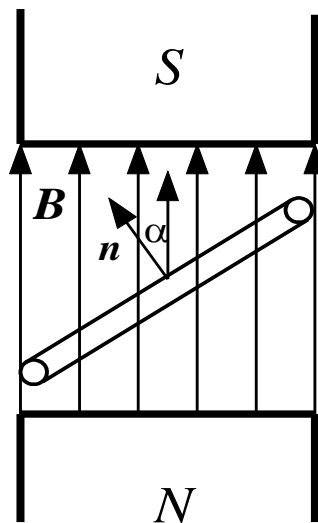


Рис. 1. Рамка в однорідному магнітному полі

Нехай є рамка в однорідному магнітному полі (рис. 1) з індукцією  $B$ , яка обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\omega$ . Відповідно до закону електромагнітної індукції в рамці наводиться електрорушійна сила індукції  $e_i$ , яка визначається виразом:

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S B dS \cos\alpha = -\int_S B dS \frac{d}{dt}(\cos\alpha), \quad (1)$$

де  $B$ - магнітна індукція,  $S$  - площа рамки,  $\alpha$  -поточний кут між нормаллю до рамки і вектором  $B$ .

Якщо рамка обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ , то отримаємо:

$$e_i = -\int_S B dS \frac{d}{dt}(\cos\omega t) = \omega B \sin\omega t \int_S dS,$$

тобто

$$e_i = \omega B S \sin\omega t = e_m \sin\omega t, \quad (2)$$

де  $e_m = \omega B S$  - амплітуда індукованої ЕРС.

Очевидно, що змінна синусоїдальна ЕРС викликає появу на затискачах рамки змінної синусоїдальної напруги

$$u = U_m \sin\omega t, \quad (3)$$

а в замкнутому ланцюзі з'явиться змінний синусоїдальний струм

$$i = I_m \sin\omega t. \quad (4)$$

Наведені вище висловлювання визначають в загальному випадку миттєві значення (тобто значення в даний момент часу) змінних ЕРС, напруги та струму. Ми бачимо, що ці величини виражаються гармонійними коливальними функціями. Тут також можна використовувати уявлення про гармонійну коливальну функцію, як про проекцію обертового вектора.

## 10.1 Ланцюг змінного струму з активним (омічним) опором

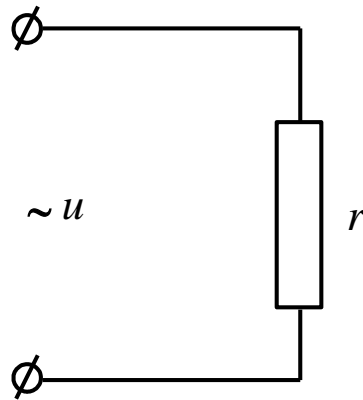


Рис. 2. Ланцюг змінного струму з активним опором

Припустимо, що до джерела змінної напруги  $u$  підключено активний (тобто омичний) опір  $r$  (рис. 2).

Очевидно, що для миттєвих значень струму  $i$  та напруги, які в даний момент часу вважаються постійними, буде справедливий закон Ома

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t,$$

тобто

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (5)$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{r} \quad (6)$$

є амплітуда струму в цьому ланцюзі. Векторна діаграма для струму  $i$  та напруги показана на рис. 3 а, б.

Згідно цій діаграмі змінний струм в ланцюзі з активним опором збігається по фазі з доданою напругою. Миттєва потужність в такому колі дорівнює

$$p = iu = I_m U_m \sin^2 \omega t \quad \text{або} \quad p = P_m \sin^2 \omega t, \quad (7)$$

де величина

$$P_m = I_m U_m \quad (8)$$

є амплітудним значенням потужності.

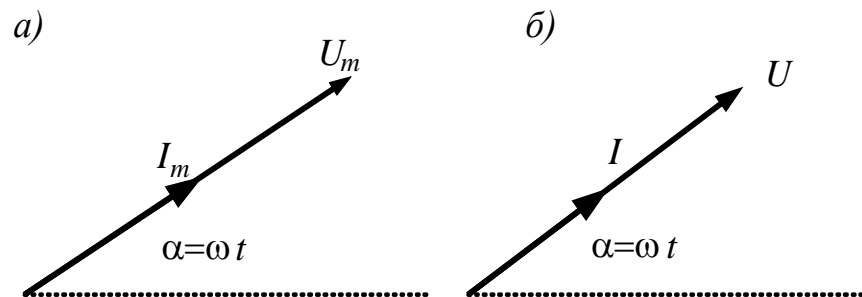


Рис. 3. Векторна діаграма для струму і напруги

Середня за період  $T$  потужність на підставі (7) буде дорівнює

$$\bar{p} = P_m \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} P_m = \frac{1}{2} I_m U_m, \quad (9)$$

так як  $\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}$ .

Чинним або ефективним значенням змінного струму називається значення такого постійного струму, який на тому ж опорі і за той же час виділяє таку ж кількість тепла, що і цей змінний струм. Тому

$$I_{\text{эфф}}^2 r T = \bar{p} T \text{ або } I_{\text{эфф}}^2 r T = \frac{1}{2} I_m^2 r T,$$

Звідки випливає

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Аналогічно цьому діюче значення напруги буде

$$U_{\text{эфф}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$



Діючі значення змінного струму і напруги в  $\sqrt{2}$  разів менше їх амплітудних значень. Середня потужність в ланцюзі з активним опором дорівнює

$$\bar{p} = \frac{1}{2} I_m U_m = I_{\text{эфф}} U_{\text{эфф}}. \quad (12)$$

Зазвичай діючі значення струму і напруги пишуть без індексів, просто великими друкованими літерами. Тому будемо вважати відповідно

$$I_{\text{эфф}} \rightarrow I ; \quad U_{\text{эфф}} \rightarrow U .$$

Необхідно зауважити, що зазвичай, говорячи про значення напруги або струму, мають на увазі їх діючі значення. Наприклад, коли ми говоримо: "напруга в мережі дорівнює 220 вольт", це означає, що діюче значення напруги в мережі дорівнює 220 вольт. На векторних діаграмах також зазвичай задаються діючі значення. Наприклад, для ланцюга з активним опором така діаграма має вигляд, показаний на рис. 3, б.

Перехід на векторних діаграмах від амплітудних значень до діючих просто відповідає вкороченням векторів в  $\sqrt{2}$  разів.

## 10.2. Ланцюг змінного струму з індуктивним опором

Припустимо, що до джерела змінного струму підключена *ідеальна* індуктивність, тобто котушка, що володіє деякою індуктивністю, але активний опір якої дорівнює нулю (Рис. 4).

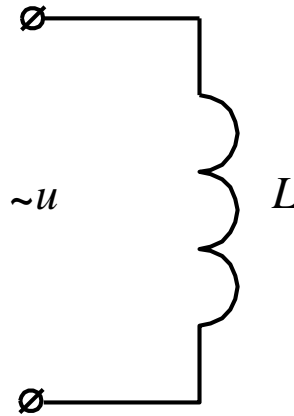


Рис. 4. Ланцюг змінного струму з котушкою індуктивності

Очевидно, що при наявності в ланцюзі однієї котушки індуктивності напруга джерела витрачається лише на подолання ЕРС самоіндукції в котушці, тобто

$$u = u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}. \quad (13)$$

Будемо вважати заданим змінний синусоїдальний струм

$$i = I_{mL} \sin \omega t. \quad (14)$$

Підставляючи (14) в (13), отримаємо

$$u_L = \omega L I_{mL} \cos \omega t \quad (15)$$

або

$$u_L = U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (16)$$

де

$$U_{mL} = \omega L I_{mL} \quad (17)$$

являє собою амплітуду напруги на котушці.

Порівнюючи (14) і (16), можна помітити, що напруга на котушці індуктивності завжди випереджає струм в цій котушці на  $\pi/2$  радіан. Можна сказати і навпаки - струм в котушці відстає по фазі від напруги на котушці на  $\pi/2$  радіан.

З (17) випливає, що амплітуда струму в котушці пов'язана з амплітудою напруги рівністю

$$I_{mL} = \frac{U_{mL}}{\omega L} = \frac{U_{mL}}{x_L} \quad (18)$$

або, переходячи до діючих значень, отримаємо

$$I_L = \frac{U_L}{\omega L} = \frac{U_L}{x_L}. \quad (19)$$

Вирази (18) і (19) являють собою запис закону Ома для кола змінного струму з індуктивністю. При цьому величина

$$x_L = \omega L \quad (20)$$

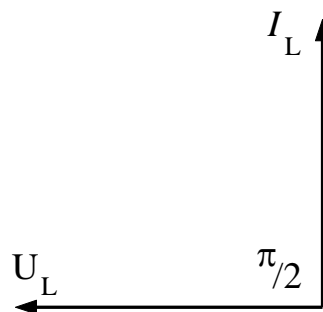


Рис. 5. Векторна діаграма для ланцюга з індуктивним опором

за змістом і розмірністю є опором котушки індуктивності і називається, тому, *індуктивним опором*.

На відміну від розглянутого вище *активного* опору цей опір - *реактивний*. Таким чином, (20) є *реактивно індуктивним* опором. Він, як ми бачимо, прямо пропорційний частоті змінного струму і величиною індуктивності  $L$  котушки.

Фізичний зміст індуктивного опору полягає в тому, що джерело повинно подолати ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці.

Векторна діаграма для такого ланцюга з урахуванням (14) і (15) показана на рис. 5

Легко показати, що середня потужність в ланцюзі, що містить індуктивність, дорівнює нулю. Справді, миттєва потужність дорівнює

$$p_L = i u_L = I_{mL} U_{mL} \sin \omega t \cos \omega t, \quad (21)$$

а середня потужність

$$\overline{p_L} = I_L U_L \overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0, \quad (22)$$

оскільки середнє за період значення добутку синуса на косинус може бути виражено через синус подвійного кута, а середнє значення синуса завжди дорівнює нулю.

Вираз (21) можна ще переписати так

$$p_L = p_{mL} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} p_{mL} \sin 2\omega t, \quad (23)$$

де

$$p_{mL} = I_{mL} U_{mL} \quad (24)$$

є амплітудою миттєвої потужності.

Ми бачимо, що потужність, що виділяється в котушці індуктивності, виражається гармонійною коливальною функцією, тобто потужність коливається. Частота цих коливань дорівнює подвійній частоті коливань струму і напруги, тобто період коливань потужності вдвічі менше періоду коливань струму і напруги. Графіки змін в часі потужності, напруги та струму представлені на рис. 6.

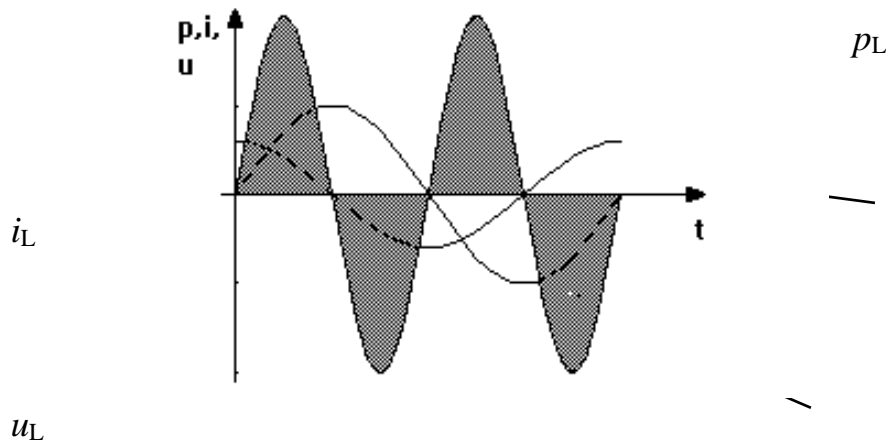


Рис. 6. Залежність потужності, напруги та струму від часу в колі з котушкою індуктивності

Тому за першу половину періоду, тобто за першу чверть періоду коливань струму енергія (потужність) позитивна, тобто енергія надходить в котушку і запасується в ній у вигляді енергії магнітного поля. У наступну чверть періоду енергія (потужність) негативна, тобто енергія повертається з котушки в джерело.

Далі процес повторюється. Отже, коливальний процес являє собою колювання енергії між джерелом і котушкою.

Слід також зазначити, що оскільки крива миттєвої потужності симетрична щодо осі часу, то середня потужність, що виділяється в індуктивному ланцюзі, дорівнює нулю. Це означає, що енергія, яка надходить з джерела в індуктивність, повертається потім назад з індуктивності в джерело, оскільки активних втрат немає.

### 10.3. Ланцюг змінного струму з активним опором і індуктивністю

Розглянемо випадок *реальної* котушки індуктивності. Реальна котушка намотана дротом, що має активний опір. У цьому випадку напруга джерела змінного струму (рис. 7) частково падає на котушці індуктивності, а частково – на активному опорі

$$u = u_a + u_L = ir + i x_L \quad (25)$$

$$u = u_a + u_L = ir + i x_L$$

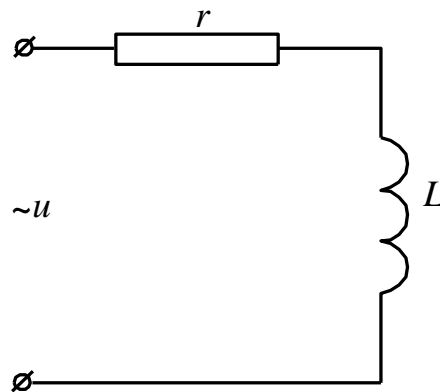


Рис.7. Ланцюг з котушкою індуктивності і активним опором

Векторна діаграма цього випадку показана на рис. 8.

З цієї діаграми видно, що напруга на активному опорі завжди збігається по фазі з струмом, а напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на  $\pi/2$  радіан.

Результуюча напруга в такому колі (тобто в ланцюзі, що містить  $r$  і  $L$ )

випереджає по фазі струм на кут  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  радіан.

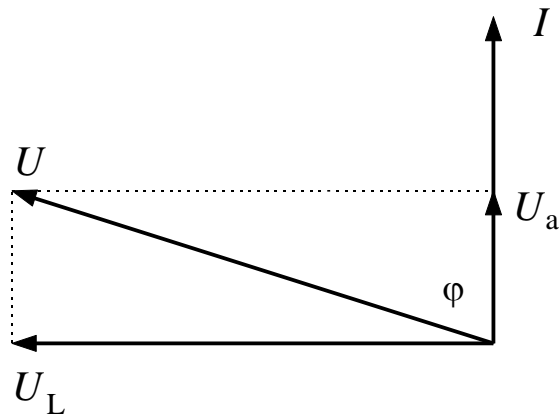


Рис. 8. Векторна діаграма для ланцюга з котушкою індуктивності і активним опором

В результаті миттєве значення напруги відповідно до (16) можна записати у вигляді

$$u = U_{mL} \sin(\omega t + \varphi), \quad (26)$$

а миттєва потужність буде дорівнювати

$$p = I_{mL} U_{mL} \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi). \quad (27)$$

Оскільки напруги  $U_L$  і  $U_a$  являють собою вектори, то модуль вектора  $U$ , що є їхньою сумою, дорівнює

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2} = I \sqrt{r^2 + x_L^2} \quad (28)$$

або

$$I = \frac{U}{Z_{r,L}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_L^2}}, \quad (29)$$

де

$$Z_{r,L} = \sqrt{r^2 + x_L^2} \quad (30)$$

є повний опір ланцюга, що містить опір  $r$  і індуктивність  $L$ .

Графіком (27) буде крива, вже несиметрична щодо осі часу (рис. 9), причому ділянки, де потужність позитивна, будуть більше за площею тих ділянок, де потужність негативна.

Слід зазначити, що кривим, зображеним на рис. 9 відповідає цілком певне значення фазового кута  $\varphi$ , а саме:  $\varphi = \pi/4$  радіан.

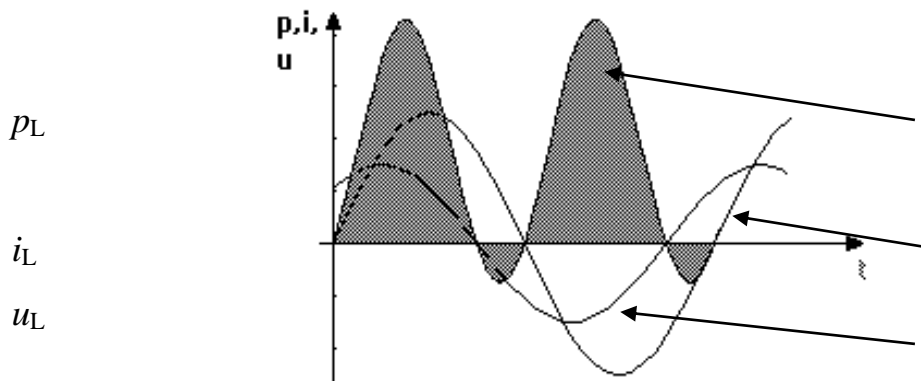


Рис. 9. Графік залежності потужності, напруги та струму від часу в ланцюзі з котушкою індуктивності і активним опором

При зменшенні фазового кута  $\varphi$  крива потужності зміщується вгору. При цьому втрати збільшуються. Відповідні криві для  $\varphi = \pi/8$  радіан представлені на рис. 10.

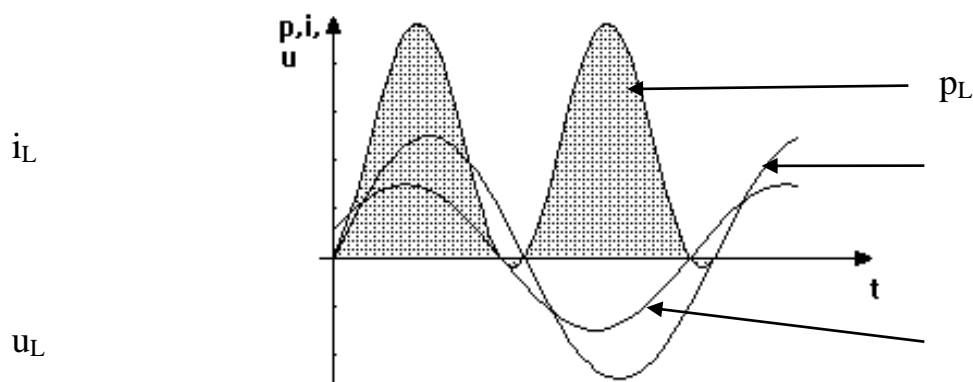


Рис. 10. Залежність потужності, напруги та струму від часу при зменшенні фазового кута

З графіків рис. 9, 10 видно, що в такому колі (тобто в ланцюзі, що містить активний опір  $r$  і індуктивність  $L$ ) також відбуваються коливання енергії між джерелом і котушкою, проте джерело струму поставляє в ланцюг



більше енергії, ніж приймає її з ланцюга назад. Частина енергії безповоротно втрачається у вигляді тепла на активному опорі ланцюга. Ця частина тим більше, чим менше кут  $\varphi$ .

Очевидно, що в ланцюзі з втратами середня потужність вже не буде рівною нулю. Справді, повна миттєва потужність дорівнює сумі потужностей, що виділяються на активному опорі і індуктивності

$$p = P_a + P_L,$$

а середня потужність відповідно буде

$$\overline{p} = \overline{P_a} + \overline{P_L} = \overline{P_a}, \text{ оскільки } \overline{P_L} = 0.$$

Але з урахуванням (30) і рис. 7

$$\overline{P_a} = IU_a = IU \cos\varphi. \quad (31)$$

Отже, середня потужність в ланцюзі з втратами дорівнює добутку діючих значень струму і напруги на косинус кута зсуву по фазі між струмом і напругою.

#### 10.4. Ємнісний опір

Нехай до джерела змінної напруги (рис. 11) підключені послідовно активний опір  $r$  і ємність  $C$ .

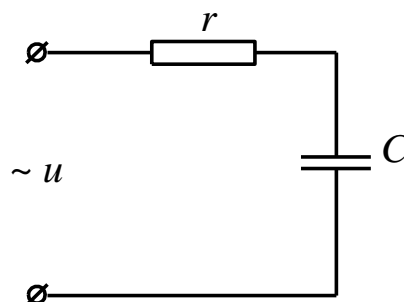


Рис. 11. Ланцюг з конденсатором і активним опором

Спочатку, як і вище, розглянемо ідеальний випадок, коли активний опір дорівнює нулю ( $r = 0$ ).

### 10.5. Ланцюг змінного струму з конденсатором

Вважаємо, що заданою є напруга джерела, яка падає, в даному випадку, цілком на ємності

$$u = u_C = U_{mC} \sin \omega t, \quad (32)$$

де  $U_{mC}$  - амплітуда напруги на ємності.

Виходячи із загального визначення сили струму, можна записати вираз для струму в ланцюзі (тобто струму, поточного через ємність)

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} = C\omega U_{mC} \cos \omega t,$$

або, виражаючи косинус через синус додаткового кута

$$i = C\omega U_{mC} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Позначивши амплітуду струму  $I_{mC} = \omega C U_{mC}$ , отримаємо

$$i = I_{mC} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (33)$$

Переходячи в (33) до діючих значень, отримаємо

$$I_C = \omega C U_C$$

або

$$I_C = \frac{U_C}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_C}{x_C}. \quad (34)$$

Очевидно, що вираз (34) являє собою закон Ома для ланцюга, що містить ємність, а величина

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \quad (35)$$

є реактивним ємнісним опором конденсатора. Цей опір обернено пропорційний частоті змінного струму і величині ємності.

Векторна діаграма для ланцюга, що містить ємність, має вигляд, показаний на рис. 12. З (32) і (33) випливає, що струм, що проходить через ємність, завжди випереджає напругу на цій ємності на кут, рівний  $\pi/2$  радіан.

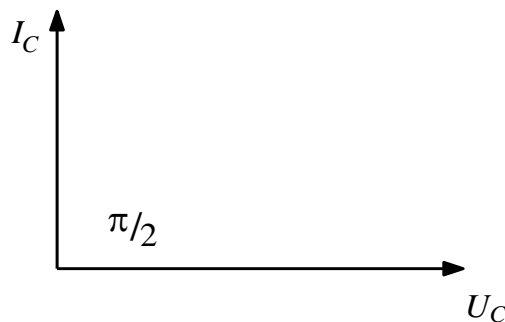


Рис. 12. Векторна діаграма ланцюга з конденсатором

За аналогією з тим докладним аналізом, який був проведений для ланцюга з індуктивністю, легко показати, що середня потужність в ланцюзі з однією ємністю дорівнює нулю. Тут також енергія коливається без втрат між джерелом струму і конденсатором, запасаючись в конденсаторі у вигляді енергії його електричного поля. Легко також показати, що для ланцюга з

однією ємністю на графіку залежності миттєвої потужності від часу крива цієї потужності буде також симетричною відносно осі часу.

### 10.6. Ланцюг змінного струму з активним опором і ємністю

Якщо в ланцюзі з конденсатором активний опір  $r \neq 0$ , то прикладена напруга падає і на конденсаторі і на активному опорі, тобто

$$u = u_a + u_C,$$

а векторна діаграма має вигляд, представлений на рис. 13.

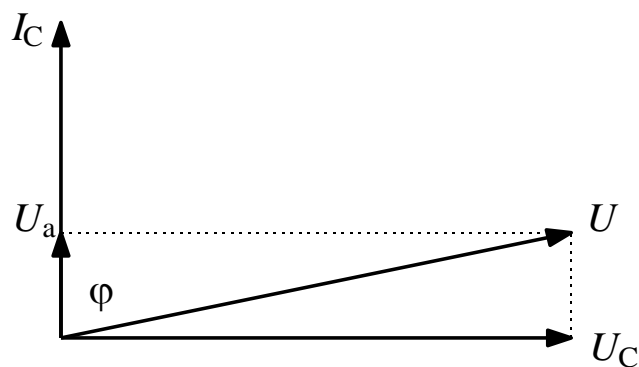


Рис. 13. Векторна діаграма для ланцюга змінного струму з активним опором і ємністю

З діаграми видно, що для ланцюга, що містить  $r$  і  $C$ , результуюча напруга відстає від струму по фазі на кут, рівний  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  радіан.

Згідно цій діаграмі діюче значення результуючої напруги записується як

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_C^2} = I \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

або

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_C^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{Z_{r,C}}, \quad (38)$$

де  $Z_{r,C} = \sqrt{r^2 + x_C^2}$  є повний опір ланцюга, що містить активний опір  $r$  і ємність  $C$ .

Легко показати побудовою, що крива миттєвої потужності в даному випадку подібна кривій, показаної на рис. 9 або рис. 10 для ланцюга з  $r$  і  $L$ . Тут також має місце колювання енергії між джерелом і ланцюгом. Так само частина енергії джерела безповоротно втрачається у вигляді тепла на активному опорі  $r$ .

Середня потужність також визначається формулою

$$\overline{p}_a = IU_a = IU \cos \varphi. \quad (39)$$

## 10.7. Коливальний контур

Розглянемо тепер загальний випадок, коли ланцюг містить всі три елементи - активний опір  $r$ , індуктивність  $L$  і ємність  $C$ . У такому колі, як ми побачимо, також відбуваються електричні колювання і тому ланцюг називається *коливальним контуром*. Залежно від з'єднання елементів контур може бути *послідовним* або *паралельним*.

### 10.7.1. Послідовний контур

Послідовним контуром називається ланцюг, в якому всі елементи з'єднані послідовно (рис. 14).

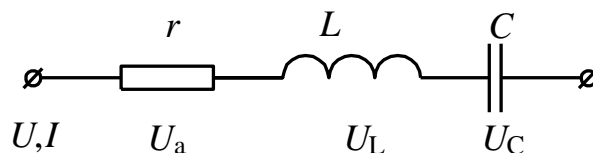


Рис. 14. Послідовний контур

В такому колі струм у всіх елементах буде однаковий, а діюче значення результуючої напруги як вектора буде дорівнювати геометричній сумі напруг, що падають на опори  $r$ , індуктивності  $L$  і ємності  $C$

$$U = U_a + U_L + U_C. \quad (38)$$

Векторна діаграма для такого послідовного ланцюга має вигляд, показаний на рис. 15, причому для визначеності тут прийнято, що  $x_L > x_C$ .

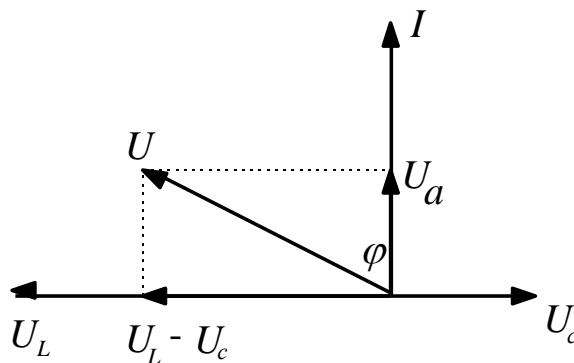


Рис. 15. Векторна діаграма послідовного ланцюга

З векторної діаграми випливає, що

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} \quad (39)$$

або

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (40)$$

де

$$Z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (41)$$

є повний опір послідовного контуру. Воно містить активну (частотно-незалежну) частину  $r$  і реактивну, частотно-залежну частину

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (42)$$

Неважко помітити, що при  $\omega \rightarrow 0$  індуктивний опір прагне до нуля, а ємнісний - до нескінченності, і повний опір також нескінченно зростає. При  $\omega \rightarrow \infty$  навпаки, індуктивний опір нескінченно зростає, а ємнісний - прагне до нуля, а повний опір нескінченно зростає.

При  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  реактивний опір дорівнює нулю, а повне стає чисто активним. Цей випадок називається *резонансом*. На резонансі через послідовний контур тече максимальний струм, який визначається законом Ома

$$I = \frac{U}{r}.$$

З умови рівності нулю реактивного опору визначається *резонансна частота* послідовного контуру

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (43)$$

а період коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{1/C}}. \quad (44)$$

З діаграми рис. 15 видно, що результуюча напруга  $U$  зрушена по фазі щодо струму  $I$  на кут  $\varphi$ .

При індуктивному характері реактивного опору, тобто коли  $x_L > x_C$ , напруга  $U$  випереджає струм  $I$ .

Якщо ж реактивний опір переважно ємнісний, тобто  $x_C > x_L$ , то напруга відстає від струму. Якщо взяти ідеальний випадок, коли  $r = 0$ , то діаграма потужностей має вигляд, показаний на рис. 16.

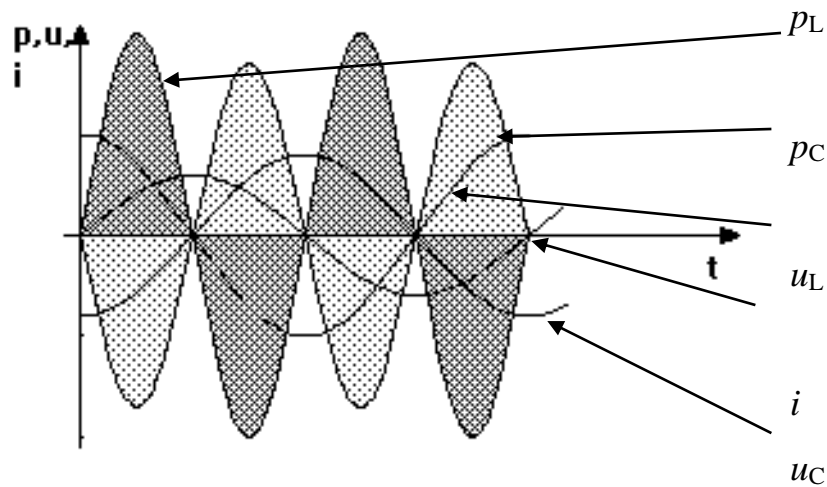


Рис. 16. Діаграма потужностей в послідовному контурі без активного опору

З діаграми видно, що в одну і ту ж частину періоду потужність в котушці позитивна, а в конденсаторі - негативна. Це говорить про те, що енергія коливається між котушкою і конденсатором. Однак  $P_L > P_C$ , і тому частина енергії, що дорівнює  $(P_L - P_C)$ , коливається між джерелом і контуром.

На резонансі  $U_L = U_C$ , і в кожен даний момент знаходяться в протифазі (тобто  $U_L = -U_C$ ). Тому резонанс в послідовному контурі називається *резонансом напруг*.

### 10.7.2. Паралельний контур

Паралельним контуром називається ланцюг, в якому котушка і конденсатор з'єднані паралельно (рис. 17).



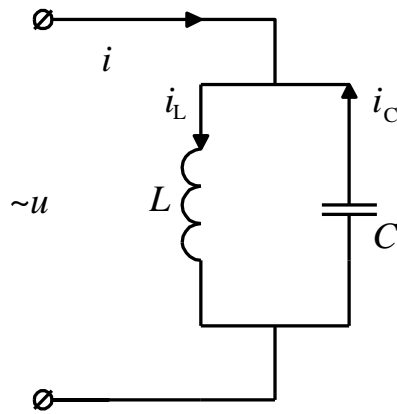


Рис. 17. Паралельний контур

Струм, поточний через такий контур, розділяється на два: струм через індуктивність -  $i_L$  і струм через ємність:  $i_C$ . Відповідно до першого правила Кірхгофа загальний струм дорівнює їх сумі (у векторному вигляді)

$$i = i_L + i_C. \quad (45)$$

Слід зауважити, що правила Кірхгофа, які ми розглядали для постійних струмів, застосовні також і до змінних струмів але в векторному, або в так званому символічному вигляді. Векторна діаграма матиме наступний вигляд (рис. 18):

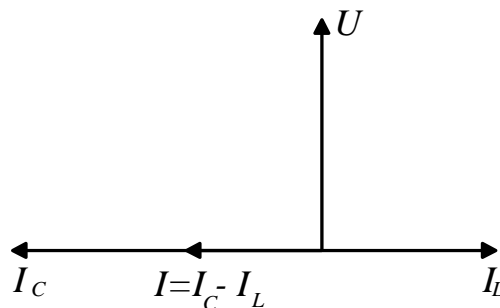


Рис. 18. Векторна діаграма паралельного контуру

Величини векторів струмів на діаграмі відповідають індуктивному характеру опору контуру, тобто  $x_L > x_C$ . Тому  $I_C > I_L$ , а сумарний струм випереджає напругу (пор. з попереднім випадком послідовного контуру, коли при індуктивному характері реактивного опору струм, навпаки, відставав від напруги). При ємнісному характері опору сумарний струм буде відставати від напруги (рис. 19),

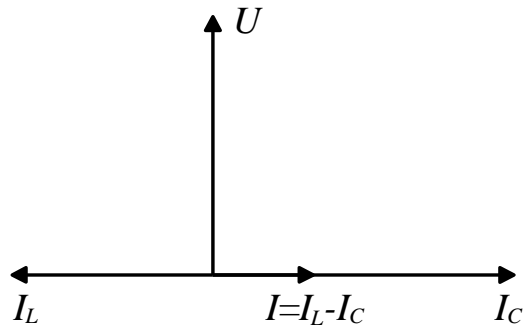


Рис. 19. Ємнісний характер опору

а за однакової кількості реактивних опорів ( $x_L = x_C$ ) струми в гілках контуру також стають рівними один одному і сумарний струм дорівнює нулю.

Рівність один одному реактивних опорів означає

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (46)$$

де  $\omega_0$  - частота змінного струму, при якій настає ця рівність.

Ми знову маємо явище *резонансу*, але на цей раз це - *резонанс струмів*. Резонансна частота визначається з (46)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (47)$$

тобто збігається з умовою резонансу послідовного контуру (43). Цей вираз називається *формулою Томсона*. Період власних коливань в паралельному контурі також дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Власні коливання контуру відбуваються на частоті резонансу в *ідеальному* контурі, тобто при відсутності в ньому активного опору. Однак будь-який реальний коливальний контур має цілком певний активний опір, на якому буде губитися енергія. Коливання в контурі при цьому стають затухаючими.

Коливальний контур при цьому набуває вигляду, зображений на рис. 20, а векторна діаграма поки на рис. 21.

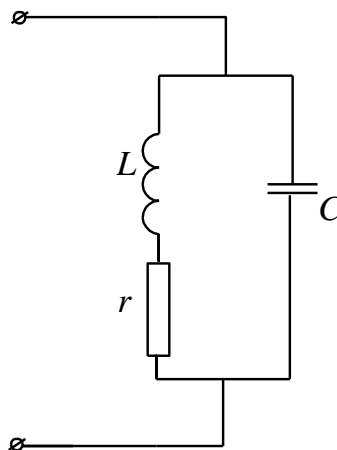


Рис. 20. Реальний коливальний контур

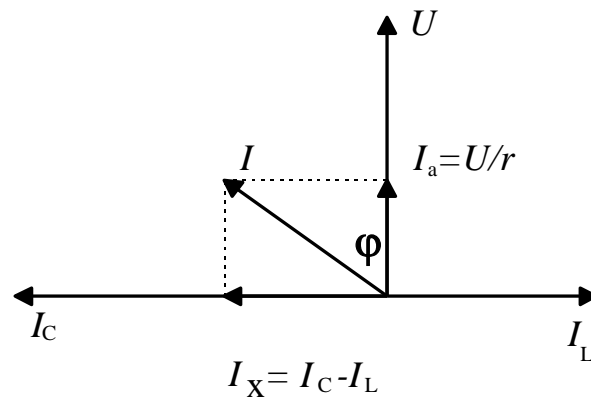


Рис. 21. Векторна діаграма реального коливального контуру

### 10.8. Умови виникнення в контурі незгасаючих коливань

Для того щоб коливання в контурі були незгасаючими, потрібен зовнішній генератор, який заповнював б втрати енергії в контурі. До зовнішнього генератору необхідно, очевидно, пред'явити певні вимоги. Справді, згадаймо, як реалізуються незгасаючі коливання в найпростішій механічній коливальній системі - в маятнику.

Ми бачили, що для отримання незгасаючих коливань маятника його потрібно підштовхувати, причому підштовхувати треба з тієї ж частотою, з якою він коливається.

Однак цього мало. Підштовхувати маятник треба в такт з його коливаннями, або, як кажуть, в фазі. Дійсно, якщо, наприклад, маятник рухається до положення рівноваги і його підштовхнути в ту ж сторону, то це буде підтримувати коливання маятника. Якщо ж маятник підштовхнути в напрямку, протилежному напрямку руху, то він сповільнить свій рух і може навіть зупинитися.

Отже, в даному прикладі з маятником необхідно підштовхувати його з потрібною частотою і в фазі. Тому до зовнішнього генератору необхідно пред'явити дві основні вимоги: збіги частот і фаз. Ці вимоги можна записати у вигляді

$$\omega_{\text{ген}} = \omega_{\text{соб}} = \omega_0$$

$$\varphi_{\text{ген}} = \varphi_{\text{соб}}.$$

На практиці дотримання збігу фаз для зовнішнього генератора і коливального контуру зводиться до того, що зовнішній генератор повинен послати в контур більший струм в той момент, коли конденсатор заряджається, щоб зарядити його до початкової напруги.

Найпростішим зовнішнім генератором, що задовольняє цим вимогам, є генератор на транзисторі або на ламповому тріоді.

#### Питання для самоперевірки

1. Запишіть рівняння залежності  $q(t)$  для ідеального коливального контуру.
2. Отримайте рівняння залежності  $I(t)$ .
3. Який вигляд має графік коливань: заряду на обкладках конденсатора? Сили струму в контурі?
4. Чому електромагнітні коливання в реальному коливальному контурі є затухаючими?
5. Запишіть формулу для визначення періоду вільних електромагнітних коливань у реальному коливальному контурі.
6. Дайте визначення вимушених електромагнітних коливань.
7. Який струм називається змінним?
8. Чому в рамці, яка обертається в магнітному полі, виникає змінна ЕРС?
9. Як залежить максимальне значення змінної ЕРС від кутової швидкості обертання рамки?
10. Як залежить максимальне значення змінної ЕРС від площі рамки, кількості витків у рамці, опору рамки?

## ДОДАТОК

## 1. Основні фізичні константи

Елементарний заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Швидкість світла у вакуумі	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ м/с
Стала Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Джс
Електрична стала	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Магнетон Бора	$\mu_B$	$0,927 \cdot 10^{-23}$ А м <sup>2</sup>

## 2. Діелектрична проникність

Речовина	$\epsilon$
Віск	7,8
Вода	81
Гас	2
Олива	2,2
Парафін	2,0
Слюда	6
Скло	6
Фарфор	6
Ебоніт	2,6

## 3. Питомий опір металів (при 0°C)

Метал	$\rho$ , Ом
Алюміній	$2,53 \cdot 10^{-8}$
Графіт	$3,9 \cdot 10^{-8}$
Залізо	$8,7 \cdot 10^{-8}$
Мідь	$1,7 \cdot 10^{-8}$
Ніхром	$1,1 \cdot 10^{-6}$
Ртуть	$9,4 \cdot 10^{-7}$
Свинець	$2,2 \cdot 10^{-7}$
Срібло	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Сталь	$1,0 \cdot 10^{-7}$

#### 4. Маса спокою деяких частинок

Частинка	$m_0$	
	Кг	а.о.м.
Електрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355
$\alpha$ -частинка	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149

#### 5. Маса атомів легких ізотопів

Ізотоп	Символ	Маса, а.о.м.	Ізотоп	Символ	Маса, а.о.м.	
Нейтрон	$n^1$	1,00867	Бериллий	${}^7_4\text{Be}$	7,01693	
				${}^9_4\text{Be}$	9,01219	
Водень	${}^1_1\text{H}$	1,00783	Бор	${}^{10}_5\text{B}$	10,01294	
	${}^2_1\text{H}$	2,01410		${}^{11}_5\text{B}$	11,00930	
	${}^3_1\text{H}$	3,01605				
Гелій	${}^3_2\text{He}$	3,01603	Углерод	${}^{12}_6\text{C}$	12,00000	
	${}^4_2\text{He}$	4,00260		${}^{13}_6\text{C}$	13,00335	
				${}^{14}_6\text{C}$	14,00324	
Літій	${}^6_3\text{Li}$	6,01513	Азот	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307	
	${}^7_3\text{Li}$	7,01601		Кислород	${}^{16}_8\text{O}$	15,99491
					${}^{17}_8\text{O}$	16,99913

#### 6. Множники і приставки для утворення десяткових кратних і дольних одиниць та їх найменування

Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення	Множник
Екса	Е	$10^{18}$	деци	д	$10^{-1}$
Пета	П	$10^{15}$	санти	с	$10^{-2}$
Тера	Т	$10^{12}$	мілі	м	$10^{-3}$
Гіга	Г	$10^9$	мікро	мк	$10^{-6}$
Мега	М	$10^6$	нано	н	$10^{-9}$
Кіло	к	$10^3$	піко	п	$10^{-12}$
Гекто	г	$10^2$	фемто	ф	$10^{-15}$
Дека	да	$10^1$	атто	а	$10^{-18}$

## 7. Грецька абетка

Позначення букв	Назва букв	Позначення букв	Назва букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	ксі
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омікрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пі
Ε, ε	епсілон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сіґма
Η, η,	ета	Τ, τ	тау
Θ, θ	тета	Υ, υ	іпсілон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фі
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хі
Λ, λ	лямбда	Ψ, ψ	псі
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Скіцько І.Ф., Скіцько О.І Фізика: підручник: Київ: НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського, 2017. 513 с. URL:  
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/19035?mode=full>
2. Кармазін В. В., Семенець В. В. Курс загальної фізики: навчальний посібник для вищих навчальних закладів. Київ.: Кондор, 2016. 786 с
3. Фізика: навчальний посібник з розв'язування задач з курсу загальної фізики / Вербицький Б. І., Король А. М., Котікова С. М., Медвідь Н. В. К.: ІНКОС, 2016. 376 с. URL:  
<http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/23788/1/posibnyk1.pdf>
4. Галушак М.О., Федоров О.Є. Курс фізики. Електромагнетизм: підручник. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2016. 405 с.
5. Герасимов О.І., Андріанова І.С., Фізика в задачах: підручник. Одеський державний екологічний університет. Одеса: ТЭС, 2017. 564с. URL:  
[https://www.researchgate.net/profile/Iryna-Andrianova/publication/341057029\\_Fizika\\_v\\_zadacah/links/5eab4af0299bf18b958a72f6/Fizika-v-zadacah.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Iryna-Andrianova/publication/341057029_Fizika_v_zadacah/links/5eab4af0299bf18b958a72f6/Fizika-v-zadacah.pdf)
6. Фізика. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень: Підручник для загальноосвіт.навч.закл./В. Г. Бар'яхтар, Ф. Я. Божинова, М. М. Кірюхін, О. О. Кірюхіна. – Х.: Видавництво «Ранок», 2011. \_ 320 с.
7. Клубіс Я. Д., Шкатуляк Н. М. Основи електродинаміки. – Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» від 24 грудня 2020 р., пр. № 7. Одеса: Університет Ушинського, 2020. 208 с.
8. Клубіс Я. Д. , Шкатуляк Н. М. Збірник задач з електродинаміки. Навчальний посібник. 2-е вид.: доп., перероб. Одеса: Фенікс, 2014. 284 с
9. Чолпан П. П. Загальна фізика. Київ: Вища школа, 2003. 567с.

10. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики: навчальний посібник. – Т. 2.: Електрика і магнетизм. Київ: Техніка, 2001. 452с.

11. Загальний курс фізики: Збірник задач / Гаркуша, І.Т. та ін. / за ред. І.П. Гаркуші. Київ: Техніка, 2003. 560с.

12. Загальна фізика. Збірник задач / Горбачук І.Т. та ін; за. ред. І.Т. Горбачука. Київ: Наукова думка, 1989. 87 с. .

### Інформаційні ресурси

1. Бібліотека Університету Ушинського. URL: <http://library.pdpu.edu.ua/>
2. Сайт Міністерства освіти і науки України: [www.mon.gov.ua](http://www.mon.gov.ua)
3. Освітньо-інформаційні ресурси. URL:  
[http://nh.at.ua/dir/osvitnyo\\_informaciyni\\_resursy/19](http://nh.at.ua/dir/osvitnyo_informaciyni_resursy/19)
4. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти.  
URL:<https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti>
5. Історія і наука. – URL: <http://science-kharkov.ucoz.com/>
6. Потрал Phet.Colorado. URL: <https://phet.colorado.edu>
7. Дистанційна програма«Moodle».