

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації

для проведення практичних занять, організації самостійної роботи

з навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

освітньо-професійної програми «Середня освіта (Фізика. Математика)»

спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика)

Одеса 2023

УДК 511

*Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського», протокол №13 від 29 червня 2023 року*

\

Рецензенти:

1. Волкова Марія Георгіївна, кандидат ф-м. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку.
2. Олефір Олена Іванівна, кандидат фізик-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики і статистики Університету Ушинського

Болдарєва О. М. Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел» : метод. рек. Одеса : Ун-т Уш., 2023. 23 с.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел» містять орієнтований перелік завдань з теорій подільності порівнянь для практичних занять, завдання для самостійної роботи, питання для самоперевірки, рекомендовану літературу, вимоги до знань і вмінь здобувачів, набутих у процесі вивчення дисципліни. Рекомендовано для здобувачів за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, отриманих під час навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ПЛАНИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ.....	6
Змістовий модуль 1. Теорія подільності.....	6
Змістовий модуль 2. Елементи теорії порівнянь.....	15
РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ.....	22

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Алгебра і теорія чисел» для спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика) має своїм змістом елементарну теорію чисел – досліджує цілі числа без використання методів інших розділів математики.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел» є формування у студентів системи математичних знань, навичок та умінь з теорії чисел, теорії порівнянь і теорії многочленів від однієї змінної та застосування отриманих знань під час подальшої професійної діяльності вчителя математики. Матеріал, що відповідає теорії многочленів буде викладений у наступній частині методичних рекомендацій.

Реалізація мети забезпечує досягнення результатів навчання за програмою дисципліни завдяки відповідному навчальному змісту.

Основні навчальні **завдання** дисципліни «Алгебра і теорія чисел»:

- формування поняття про основні математичні об'єкти, уявлення про зв'язки теорії чисел з іншими прикладними дисциплінами;
- формування у студентів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи алгебри і теорії чисел, її роль у пізнанні дійсності;
- інтелектуальний розвиток студентів, передусім розвиток логічного та абстрактного мислення, пам'яті, уваги, інтуїції.

Передумови для вивчення дисципліни: для вивчення навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел» здобувачі освіти мають опанувати знання з дисципліни «Лінійна алгебра і аналітична геометрія»

Очікувані результати навчання з дисципліни:

знати:

- поняття відношення подільності на множині натуральних чисел та його властивості;
- ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 25, 100 та методи їх доведення;
- теорему про ділення з остачею в кільці цілих чисел;
- поняття простого і складеного числа, їх властивості;

- основну теорему арифметики та наслідки з неї;
- поняття найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного чисел, методи їх знаходження;
- поняття скінченного ланцюгового дробу, метод побудови підхідних дробів до даного дробу;
- поняття відношення порівнянності цілих чисел за модулем, його властивості;
- будову кільця класів лишків за модулем;
- теорему Ейлера, теорему Ферма;
- поняття індексу за простим модулем, їх властивості;

уміти:

- застосовувати ознаки подільності чисел для розв'язання задач та прикладів;
- ділити ціле число з остачею, за відомими значенням визначати невідомі компоненти операції ділення цілих чисел;
- визначати чи є дане число простим або складеним;
- записувати число в канонічній формі;
- визначати найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел;
- обчислювати значення теоретико-числових функцій для конкретних натуральних чисел;
- розкладати раціональні числа в скінченні ланцюгові дроби;
- будувати таблицю підхідних дробів та обчислювати похибку наближення даного числа заданим підхідним дробом;
- користуватись властивостями порівнянь при розв'язанні прикладів та задач;
- виписувати повну та зведену систему лишків за даним модулем;
- використовувати теорему Ейлера для розв'язання задач та прикладів;
- визначати кількість розв'язків та розв'язувати порівняння 1-го степеня з однією невідомою;
- розв'язувати двочленні порівняння;

ПЛАНІ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Теми практичних занять

№ теми	Назва теми Форма заняття	Кількість годин
1	<i>Семінар «Відношення подільності натуральних чисел. Ознаки подільності»</i>	2
2	<i>Майстер клас «Прості та складені числа. Тести на простоту»</i>	2
3	<i>Вирішення практичних завдань «Знаходження НСД та НСК чисел»</i>	2
4	<i>Семінар «Числові функції»</i>	2
5	<i>Вирішення практичних завдань «Розклад раціонального числа в скінченний ланцюговий дріб. Побудова таблиці підхідних дробів. Наближення числа підхідними дробами»</i>	2
6	<i>Семінар «Відношення порівнянності цілих чисел за модулем, властивості порівнянь»</i>	2
7	<i>Вирішення практичних завдань «Розв'язування порівнянь 1-го степеня різними методами»</i>	2
Разом		14

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ТЕОРІЯ ПОДІЛЬНОСТІ

Тема 1. Відношення подільності на множині натуральних чисел

Відношення подільності на множині натуральних чисел, властивості.

Ознаки подільності. Теорема про ділення з остачею.

Практичне заняття №1 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Встановити, чи ділиться на 10 число $8 \cdot 23^{23} - 71 \cdot 32^{32}$.
2. Довести, що
 - a) $(15^{11} - 1) : 7$;
 - b) $(13^5 + 1) : 7$;
 - c) $(2^{4n} - 6) : 10$;
 - d) $(2^{3n+3} - 7n + 41) : 49 \quad \forall n \in N$

- e) $[(n + 25)(n + 3) - (n + 6)(n + 4) - 6] : 9$,
- f) $[(9n + 2)^2 - (3n - 2)^2] : 24$,
- g) $(3^{3n+3} - 26n - 27) : 169$.
3. Довести, що різниця будь-якого тризначного числа і тризначного числа, яке записане тими ж цифрами, але в зворотному порядку, ділиться на 9.
 4. Довести, що якщо до будь-якого тризначного числа дописати справа те саме число, то отримане число ділиться на 7, 11, 13.
 5. Довести, що якщо у тризначному числі дві останні цифри однакові, а сума його цифр ділиться на 7, то й саме число ділиться на 7.
 6. Скільки п'ятицифрових чисел виду $57***$, які діляться на 90? Випишіть їх.
 7. Замість $*$ поставити цифри у числі $193*5*$ так, щоб число ділилося
 - a) На 12;
 - b) На 45;
 - c) На 33.
 8. Знайти частку q і остачу від ділення r числа a на b , якщо
 - a) $a = 131, b = -31$;
 - b) $a = -58, b = 35$;
 - c) $a = 18, b = 25$;
 - d) $a = -37, b = 8$.
 9. Знайти дільник b , частку q , якщо $a = 128, b = 9$.
 10. Знайти дільник b , остачу від ділення r якщо $a = 57, q = 4$.
 11. Знайти останню цифру числа $3^{3^3}, 8^{4n+1} - 1, 214^{542} - 23^{110} \cdot 32^{117}$.
 12. Знайти остачу при діленні числа 11^{10} на $100, 5^{100} + 13^{10}$ на $11, 23^n$ на 7.
 13. Довести що сума кубів трьох послідовних цілих чисел ділиться на 9.
 14. Число a при діленні на 9 дає остачу 3. Визначити, яку остачу дають числа $5a + 18, a^2 + 3a$ при діленні на 9.
 15. Число a при діленні на 6 дає остачу 3. Яку остачу при діленні на 6 дає число $a^2 + 24, 3 - 5a$?

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти частку q і остачу від ділення r числа a на b , якщо
 - е) $a = 163, b = -31$;
 - ф) $a = -58, b = 32$;
 - г) $a = 18, b = 101$;
 - h) $a = -45, b = 8$.
2. Довести, що
 - а) $(4^{2n-1} + 3^{n+1}) : 3$
 - б) $(2^{2^{2^k}} + 5) : 7$
3. Цифри a та b трицифрового числа $m = \overline{aba}$ такі, що $(a + b) : 7$. Доведіть, що $m : 7$.
4. Число a при діленні на 7 дає остачу 2. Визначити, яку остачу дають числа $5a - 18, a^2 + 4a$ при діленні на 7.
5. Знайти останню цифру числа 4^{43} .
6. При діленні цілого числа a на ціле число b отримали остачу r . Яку остачу отримають при діленні цілого числа $-a$ на ціле число b ?
7. Знайти загальний вид усіх тих цілих чисел, що діляться на 2, на 5, при діленні на -6 дають остачу 1.
8. При діленні цілого числа a на 12 отримали остачу 9. Яку остачу отримають при діленні цілого числа a на 6?
9. При діленні цілого числа a на 19 отримали остачу 5. Яку остачу отримають при діленні цілого числа $12a$ на 19?
10. Довести, що добуток двох послідовних натуральних чисел ділиться на 2.
11. Довести, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.
12. Довести, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Відношення подільності на множині натуральних чисел, властивості.
2. Ознаки подільності (з доведенням).
3. Теорема про ділення з остачею і її застосування до розв'язку задач.
4. Як знаки чисел a і b впливають на знак частки q від ділення a на b ?

5. Дати визначення неповної частки, остачі.
6. Сформулювати основні властивості подільності чисел.
7. Сформулювати теорему про ділення з остачею.

Тема 2. Прості та складені числа

Прості та складені числа, їх властивості. Теорема Евкліда. Детерміновані тести на простоту. Основна теорема арифметики. Загальна ознака подільності.

Практичне заняття №2 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

- 1) Які з наступних натуральних чисел є простими або складеними: 101, 1111, 2121, 4327, 5432?
- 2) Методом пробних поділів визначити, простим або складеним є числа 25323, 5177.
- 3) Методом Ферма визначити простим чи складеним є числа 1769.
- 4) Простим чи складеним є числа

a) $n = 7^{147} - 7^{49}$,

d) $n = 4 \cdot 10^{400} + 1$

b) $n = 5^{32} + 5^{64}$,

e) $a = n^8 + n^4 + 1, n > 1, n \in \mathbb{N}$.

c) $n = 4^9 + 6^{10} + 3^{20}$

- 5) При яких $a = 4n^2 + 5n + 21$ число є складеним?
- 6) Числа a та b такі, що $56a = 65b$. Доведіть, що число $a + b$ є складеним
6. Знайти канонічний розклад числа n , якщо

a) $n = 5^6 + 5^3 - 2$;

b) $n = 1769$

c) $n = 3551$

d) $n = 2001$,

e) $n = 303^2 + 404^2$.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Які з наступних натуральних чисел є простими або складеними: 101, 1111, 2121, 4327, 5432?
2. Знайти всі прості числа, які містяться між числами: а) 75 і 100; б) 150 і 175; в) 2550 і 2572.
3. Відомо, що при діленні з остачею простого числа на 30 отримали $p = 30q + r$. Чи може бути число r складеним?

4. Довести, що число $n = 2^{10} + 5^{12}$ є складеним.

5. Доведіть, що число a є складеним:

$$a = 2^{50} - 1$$

$$a = 10^{333} + 8$$

$$a = 42^{47} + 47^{42};$$

$$a = 10^{240} - 4$$

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Означення простого і складеного числа.
2. Простим чи складеним числом є одиниця?
3. Про що говорить теорема Евкліда? Скільки складених чисел серед натуральних?
4. Які детерміновані тести на простоту Ви знаєте.
5. Наведіть алгоритм методу пробних ділень.
6. Наведіть алгоритм методу Ферма.
7. Що таке решето Ератосфена?

Тема 3. НСД та НСК чисел

НСД чисел, властивості, методи знаходження, алгоритм Евкліда. НСК чисел, властивості, методи знаходження.

Практичне заняття №3 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти НСД і НСК чисел за алгоритмом Евкліда

А) 3763, 3337;

Б) 351, 3445, 299.

Г) 1023, 1518, 14883

В) 231, 546

2. Знайти $a \in N, b \in N$, якщо

а.
$$\begin{cases} a + b = 243, \\ (a, b) = 9. \end{cases}$$

б.
$$\begin{cases} [a, b] = 56, \\ (a, b) = 7. \end{cases}$$

3. Знайти НСД і НСК чисел через розклад на прості множники

а) 288, 297

б) 504, 720.

с) 288, 297, 504, 720.

4. Перевірити, чи є взаємно простими такі числа: а) 341 і 256; б) n і $2n + 1$;
в) $n - 1$ і $2n + 1$.
5. Знайти довжину найкоротшої арифметичної прогресії, членами якої будуть числа 15, 69, 105 і 189.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Перевірити виконання рівностей для будь-яких натуральних чисел a та b :
 - 1) $(a, b) = (a - b, b) =$
 - 2) $(a, b)[a, b] = ab$;
 - 3) $((a, b), [a, b]) = (ab)$ $(a + b, a - b)$;
2. Знайти лінійне зображення НСД таких чисел: 822 і 1734; 903 і 731.
3. Знайти НСД чисел $2^6 - 1$ і $2^{15} - 1$
4. Довести, що для довільних натуральних чисел a, b, c справедлива рівність

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(a, c)}$$

IV. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Сформулюйте означення НСД і НСК двох натуральних чисел
2. Які способи обчислення НСД і НСК двох натуральних чисел ви знаєте?
3. Чи вірно, що коли p – просте, $a \in N$ виконується $(a, p) = 1$ або $(a, p) = p$?
4. Які властивості НСД двох натуральних чисел Ви знаєте? Доведіть.

Тема 4. Числові функції.

Число натуральних дільників $\tau(n)$, $n \in N$, сума натуральних дільників $\sigma(n)$, $n \in N$, функція Ейлера $\varphi(n)$, $n \in N$, ціла частина $[x]$, $x \in R$, дробова частина $\{x\}$, $x \in R$. Їх властивості, графіки і застосування до розв'язку задач.

Практичне заняття №4 (2 год.)

I. ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Обчислити $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, якщо $n = 375$, $n = 680$.
2. Відомо, що $\tau(n) = 6$, $\sigma(n) = 28$ та n має тільки два простих дільники.
Знайти число n .
3. $\varphi(n) = 600$, $n = 3^\alpha 5^\beta$, $\alpha, \beta \in N$, $n = ?$

4. Скільки існує правильних нескоротних дробів зі знаменником 150?
5. Відомо, що $\tau(n) = 12$, $\sigma(n) = 465$. Число $n \in N$ має лише два прості дільники. Знайти n .
6. Відомо, що $n = 7^k$, $k \in N, n \in N$. $\varphi(n) = 294$. Знайти n .
7. Знайти

1) $\left[1 + \log_{\frac{1}{7}} 23\right]$	5) $\left[1 + \cos \frac{97}{33} \pi\right]$
2) $\left[\frac{1+\sqrt{52}}{2}\right]$	6) $\left\{-12 \frac{6}{11}\right\}$
3) $\left[\sqrt[4]{580} + 1\right]$	7) $\left\{\frac{141}{53}\right\}$
4) $\left[3 - \sin \frac{51}{23} \pi\right]$	8) $\left\{\cos \frac{5\pi}{4}\right\}$
8. Розв'яжіть рівняння $x^2 - [x] - 2 = 0$.
9. Скільки є натуральних чисел, які:
 - б) менші від числа 1000 і не діляться ні на 5, ні на 7?
 - в) не більші від 12317 і взаємно прості з 1575?
 - г) не більші від 1000 і не взаємно прості з 363?

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

- 1) Знайти число дільників $\tau(n)$, суму дільників $\sigma(n)$, якщо n дорівнює 263, 2576.
- 2) Нехай n – натуральне число. Знайти $\tau(n^3)$, якщо $\tau(n^2) = 15$ та n має тільки два простих дільники.
- 3) Відомо, що $\tau(n) = 6$, $\sigma(n) = 42$ та n має тільки два простих дільники. Знайти число n .
- 4) Знайти функцію Ейлера для чисел 625, 1200
- 5) Скільки є натуральних чисел, які менші за число 81 і взаємно прості з 6?
- 6) Натуральне число ділиться на 2 і 9 і має 14 дільників. Знайти це число.
- 7) Скількома нулями закінчується число, яке дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до 2002 включно?
- 8) Знайти: а) $[2 - \log_5 200]$; б) $[1 + \sqrt[4]{200}]$. в) $\{2,6\}$; г) $\{-23,7\}$; д) $\{-\frac{27}{8}\}$

- 9) Доведіть $[x + m] = [x] + m$, якщо $m \in \mathbb{Z}$.
- 10) Розв'яжіть рівняння $[2x] = x^3 - 3, [x] = \frac{\sqrt{2}}{x}$.
- 11) Знайти канонічний розклад чисел: $15!, 30!, \frac{20!}{10!10!}$
- 12) Два натуральних числа m і n називаються дружніми, якщо $\sigma(n) = n + m = \sigma(m)$ %. Довести, що дружніми є такі пари чисел: а) 220 і 284; б) 1184 і 1210.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

- 1) Дайте означення числової функції. Які числові функції Ви знаєте?
- 2) Дайте визначення функцій $y = \{x\}, y = [x]$.
- 3) Графіки функцій $y = \{x\}, y = [x]$. Властивості вказаних функцій.
- 4) Який період функції $y = \{x\}$?
- 5) Яка функція визначає кількість взаємнопростих чисел до заданого натурального числа, що не перевищують його?
- 6) Властивості функції Ейлера.
- 7) Обчислення кількості дільників заданого натурального числа
- 8) Обчислення суми усіх натуральних дільників заданого натурального числа
- 9) Як обчислюються значення функцій $\tau(n), \sigma(n), \varphi(n)$, для простих чисел?

Тема 5. Скінчені ланцюгові дроби.

Скінчені ланцюгові дроби. Підхідні дроби та їх властивості. Застосування ланцюгових дробів до розв'язання прикладних задач.

Практичне заняття №5 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайдіть значення ланцюгового дроби $\alpha = [1; 2, 3, 4, 5]$
2. Знайдіть значення ланцюгового дроби $\alpha = [1; 2, 3, 1, 1, 5]$
3. Нехай для деякого ланцюгового дроби $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$ маємо $\frac{p_k}{q_k}$: —

$2, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{5}$. Знайдіть $\frac{P_4}{Q_4}$.

4. Чи може дана послідовність чисел бути чисельниками послідовних підхідних дробів деякого ланцюгового дробу $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$

а) 2, 3, 11, 47, 105; б) 2, -3, 11, 47, 105; в) -2, 3, 11, 47, 105; г) -2, -3, 11, 47, 105?

5. Чи може дана послідовність чисел бути знаменниками послідовних підхідних дробів деякого ланцюгового дробу $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$ а) 1, 1, 4, 17, 38; в) 1, 1, 4, 4, 38; б) 1, -1, 4, 17, 38; г) -2, 1, 4, 17, 38?

6. Розкласти у ланцюговий дріб раціональне число $\alpha = \frac{173}{281}$, $\alpha = \frac{312}{175}$.
 $\alpha = -\frac{602}{367}$.

7. Знайти підхідні дроби ланцюгового дробу $[2; 3, 1, 1, 5]$.

8. Розкласти у ланцюговий дріб раціональне число α , і замінити його підхідним дробом $\frac{P_k}{Q_k}$, знайти похибку заміни, якщо $\alpha = -\frac{83}{217}, k = 6$

9. Скоротити дроби $-\frac{667}{580}, \frac{204}{697}$.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Розкласти у ланцюгові дроби, обчислити підхідні дроби

$$\frac{3}{19} \qquad \frac{108}{57} \qquad -\frac{199}{170}$$

2. Розкласти у ланцюговий дріб раціональне число α , і замінити його підхідним дробом $\frac{P_k}{Q_k}$, знайти похибку заміни, якщо $\alpha = -5\frac{28}{57}, k = 4$.

3. Порівняйте ланцюгові та підхідні дроби для раціональних чисел

$$\frac{343}{226} \text{ і } \frac{226}{343}, -\frac{83}{217} \text{ і } -\frac{217}{83}$$

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. . Що називається скінченим ланцюговим дробом?
2. Довести, що ланцюговий дріб для раціонального числа завжди має скінченну довжину. Чи правильно це для ірраціональних чисел? Обґрунтуйте свою думку.
3. Доведіть рекурентні формули для обчислення чисельників і знаменників підхідних дробів.
4. Що таке підхідний дріб? Якщо взяти два сусідніх підхідних дробу, то де буде розміщене вихідне число?
5. Сформулюйте самостійно схему обчислення підхідних дробів для довільного нескорочуваного раціонального дробу.
6. Які властивості мають підхідні дробу?
7. Доведіть, що кожен підхідний дріб непарного порядку більше за кожен підхідний дріб парного порядку.
8. Доведіть, що чисельник і знаменник підхідного дробу є взаємно-простими числами.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОРІВНЯНЬ

Тема 6. Кільце класів лишків за модулем.

Відношення порівнянності цілих чисел за модулем, основні властивості. Кільце класів лишків за модулем. Повна система лишків (ПСЛ) та зведена система лишків (ЗСЛ). Теорема Ейлера, теорема Ферма.

Практичне заняття №6 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Які з чисел a , b , c порівнянні з числом $d = 15$ за модулем $m = 27$, якщо $a = 217$, $b = 150$, $c = -363$?
2. Записати у вигляді порівнянь умови:
 - 1) при діленні на 5 число a дає остачу 3;
 - 2) числа 19 і 9 дають неоднакові остачі при діленні на 7;
 - 3) $n = 8k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) n – непарне.

3. Як записати наступні твердження за допомогою конгруенцій? Знайти множину значень x аких, що:

- а) вираз $x + 5$ кратний 5;
- б) вираз $2x + 3$ ділиться з остачею 2 на число 11;
- в) вираз $4x - 1$ ділиться з остачею 3 на число 13;
- г) вираз $2x - 1$ ділиться з остачею 1 на число 2.

4. Чи вірно, що

$$26^{26} \equiv 14^{14} \pmod{10} \quad 8^{107} \equiv 7 \pmod{14} \quad \tau(175) \equiv 175 \pmod{27}$$

5. Знайти остачу від ділення чисел

$$25^{80} + 40^{80} \text{ на } 11, \quad 223^{2123} \text{ на } 52.$$

6. Знайти дві останні цифри числа 243^{402} , 3^{219} ,

7. Довести, що при будь-якому натуральному n виконується

$$(48^{3n+1} + 16^{3n+1} + 1) : 13 \quad (5^n + 2 \cdot 3^n - 3) : 8$$

8. Користуючись теоремою Ейлера, знайти дві останні цифри числа 243^{402} .

9. Замінити найменшим невід'ємним і найменшим за абсолютною величиною лишками такі числа:

- а) 28 за модулем 5; г) -337 за модулем 56;
 - б) 231 за модулем 14; д) -4021 за модулем 91;
10. Чи утворює повну систему лишків (надалі ПСЛ) множина чисел:
- а) $-21, 9, 4, 3, -8$ за модулем 6;
 - б) $25, -20, 16, 54, -21, 26, 37, -17$ за модулем 8;
 - в) $921, 92, -18, 28, -109, 40, -22, -2, 15$ за модулем 9;

11. Чи утворює зведену систему лишків (надалі ЗСЛ) множина чисел:

- а) $1, -1, 5$ за модулем 4;
- б) $-7, 17$ за модулем 6;
- в) $25, -9, -6, 72, 52, -15$ за модулем 7;

12. Чи можна застосувати теорему Ейлера до числа:

- а) 4 за модулем 8; г) 51 за модулем 14;

б) 4 за модулем 11; д) 237 за модулем 111;

в) 24 за модулем 27; е) 1093 за модулем 2237?

13. Чи можна застосувати теорему Ферма до чисел:

а) 21 за модулем 53; г) 54 за модулем 17;

б) 5 за модулем 91; д) 331 за модулем 158;

в) 68 за модулем 17; е) 18 за модулем 2083?

14. Знайти повну систему найменших невід'ємних лишків за модулем: а) 8; б) 9; в) 14; г) 15.

15. Знайти повну систему найменших за абсолютною величиною лишків за модулем: а) 7; б) 10; в) 11; г) 19.

16. Знайти повну систему найменших натуральних лишків за модулем: а) 6; б) 12; в) 17; г) 18.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I. Знайти остачу від ділення числа

1. $123^{203} + 24$ на 13

2. $2^{15} - 117$ на 25

3. $2^{100} + 5^{200}$ на 29

4. Довести, що при будь-якому натуральному n виконується

5. $(5^{2n+1} + 9 \cdot 2^{n+1}) : 23$

6. Замінити найменшим невід'ємним i найменшим за абсолютною величиною лишками такі числа:

б) 231 за модулем 14; д) -4021 за модулем 91;

в) 356 за модулем 27; е) -1239 за модулем 118.

7. Чи утворює повну систему лишків (надалі ПСЛ) множина чисел:

г) $-13, 16, 15, 29, -35, 21, 73$ за модулем 7;

д) $-1, -23, 58, 0, 65, 74, -17, 91, 82, -74$ за модулем 10;

е) $-17, -13, 38, 14, 22, 49, 11, 61$ за модулем 15?

8. Чи утворює зведену систему лишків (надалі ЗСЛ) множина чисел:

г) $1, 2, 3, 4, 120, 121, 123, -1, -2, -3$ за модулем 11;

д) $-10, 17, 84, -132$ за модулем 12;

е) $-17, -13, 38, 14, 22, 49, 11, 61$ за модулем 15?

9. Знайти зведену систему найменших невід'ємних лишків за модулем: а) 8; б) 9; в) 10; г) 11.

10. Знайти зведену систему найменших за абсолютною величиною лишків за модулем: а) 12; б) 13; в) 14; г) 15.

11. Знайти зведену систему найменших натуральних лишків за модулем: а) 16; б) 17; в) 18; г) 19.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Сформулюйте умову порівняності двох числа a і b .

2. Згадайте основні властивості конгруенцій.

3. У чому полягають необхідна і достатня умови для того, щоб два числа a і b належали до одного класу за модулем m .

4. Дайте визначення лишку за певним модулем, найменшої додатної системи лишків, абсолютно найменшої системи лишків, зведеної системи лишків за певним модулем.

5. Із скількох елементів складається абсолютно найменша система лишків за модулем 13? Назвіть ці елементи.

6. Чи складає система лишків $(6, 18, 39, 92, 155)$ повну систему лишків за модулем 5?

7. Із скількох елементів складається зведена система найменших додатних лишків за модулем 24? Назвіть ці елементи.

8. Сформулюйте малу теорему Ферма. Доведіть її.

9. Сформулюйте теорему Ейлера.

Тема 7. Порівняння 1-го степеня з однією змінною.

Порівняння 1-го степеня з однією змінною. Теорема про кількість розв'язків порівняння 1-го степеня. Основні методи розв'язування порівнянь 1-го степеня. Діофантові рівняння 1-го степеня з двома невідомими. Порівняння

вищих степенів з однією невідомою. Виведення ознак подільності чисел методом Паскаля. Перевірка арифметичних дій.

Практичне заняття №7 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Які з наступних перетворень порівнянь з одним невідомим є рівносильними:

а) перенесення доданку з однієї частини порівнянь в іншу без зміни знаку;

б) множення обох частин порівнянь на ціле число, взаємно просте з модулем;

в) скорочення обох частин порівнянь на їх спільний дільник;

г) віднімання від будь-якої частини порівнянь числа, кратного модулю?

2. Скільки розв'язків має порівняння

$$14x \equiv 5 \pmod{61}$$

$$15x \equiv 48 \pmod{81}$$

$$18x \equiv 47 \pmod{81}$$

$$21x \equiv 49 \pmod{91}$$

3. Способом спроб розв'язати порівняння

$$2x \equiv 4 \pmod{8}$$

$$7x \equiv 2 \pmod{6}$$

$$9x \equiv 2 \pmod{6}$$

$$5x \equiv -4 \pmod{7}$$

4. Розв'язати порівняння штучним способом

$$52x \equiv 3 \pmod{15}$$

$$75x \equiv 123 \pmod{44}$$

$$15x \equiv 25 \pmod{17}$$

$$5x \equiv 8^{125} - 6^{29} \pmod{7}$$

5. Розв'язати порівняння методом ланцюгових дробів

$$256x \equiv 179 \pmod{337}$$

$$7x \equiv 2 \pmod{6}$$

$$200x \equiv 35 \pmod{153};$$

$$178x \equiv 36 \pmod{100}$$

6. Розв'язати порівняння

$$35x \equiv 17 \pmod{185}$$

$$59x \equiv 112 \pmod{36}$$

7. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$2x + 3y = 4$$

$$3x + 4y = 13$$

$$43x - 13y = 5$$

$$5x + 4y = 3$$

8. Розв'язати системи порівнянь

$$1) \begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{7} \\ 14x \equiv 35 \pmod{19} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \equiv 48 \pmod{85} \\ x \equiv 34 \pmod{51} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 8x \equiv 1 \pmod{13} \\ 23x \equiv 5 \pmod{29} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x \equiv 84 \pmod{203} \\ x \equiv 24 \pmod{119} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 913x \equiv 132 \pmod{17} \\ 138x \equiv 245 \pmod{19} \\ 457x \equiv 623 \pmod{13} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 913x \equiv 132 \pmod{23} \\ 138x \equiv 245 \pmod{11} \\ 457x \equiv 623 \pmod{17} \end{cases}$$

9. Виведіть самостійно ознаку подільності на 4, 5, 8 методом Паскаля.

10. Перевірити правильність виконання арифметичних дій над цілими числами:

$$1) 208\,973 + 163\,786 = 372\,759$$

$$2) 387\,912 - 203\,756 = 185\,146$$

$$3) 2\,543 \cdot 783 = 1\,984\,122$$

$$4) 6\,729\,042\,129 : 39\,189 = 171\,707$$

11. За «правилом дев'ятки» перевірити правильність виконання дій: $\sqrt{73818} = 271^2 + 377$

12. Знайти кількість цифр до періоду і довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу $\frac{71}{665}$.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Перевірити правильність розв'язку.

$$45\,735 - 4028 = 41\,707.$$

2. Знайти остачу від ділення:

$$1) 1532^{50} - 14 \text{ на } 9;$$

$$4) 123^{203} + 24 \text{ на } 13.$$

$$2) 27^{117} + 31 \text{ на } 24;$$

$$5) 13^{37} \cdot 12^{41} \text{ на } 35.$$

$$3) 5^{30} - 12 \text{ на } 7;$$

13. Скільки точок з цілими координатами лежить на заданих прямих між точками з абсцисами x_1 і x_2

$$101x - 39y = 89, x_1 = 0, x_2 = 100$$

$$7x + 29y = 584, x_1 = -20, x_2 = 160$$

$$8x - 13y = -6, x_1 = -100, x_2 = 150$$

$$47x - 111y = 19, x_1 = 20, x_2 = 160$$

3. Знайти довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу зі знаменником 19.

4. Знайти кількість цифр до періоду і довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу $\frac{13}{140}$.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Чи може порівняння першого степеня за модулем 8 мати 5 розв'язків?

2. Скласти порівняння першого степеня за модулем 30 так, щоб вона:

а) мала єдиний розв'язок;

в) мала 2, 5 або 6 розв'язків;

б) не мала розв'язків;

г) мала 3, 15 або 16 розв'язків.

3. Дати визначення алгебраїчної конгруенції з одним невідомим, степеня конгруенції, розв'язку конгруенції.

4. Дати визначення конгруенції першого степеня з одним невідомим. Яка структура є розв'язком конгруенції?

5. За яких умов конгруенція $ax \equiv b \pmod{m}$ має єдиний розв'язок, декілька розв'язків, не має розв'язків?

6. Які конгруенції називаються еквівалентними?

7. Які ви знаєте методи розв'язання конгруенцій першого степеня з одним невідомим?

8. Яку алгебраїчну структуру створює повна система лишків за простим модулем? Чиїм ім'ям названа ця структура?

9. Дайте визначення розв'язку системи конгруенцій першого порядку з одним невідомим.

10. Сформулюйте загальну ознаку подільності чисел у термінах порівняння. Доведіть її методом Паскаля

11. Чи можна перетворити дані звичайні дроби у скінченні десяткові дроби $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{64}$?

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

Основна література

1. Болдарєва О. М., Яковлєва О. М. Методичні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни «Алгебра і теорія чисел» : курс лекцій. Одеса, 2021. 54 с.
2. Гарвацький : навч. посіб. / Г. В.С та ін. ; ред. Р. І.О. Вінниця : ВДПУ, 2003. 140 с. URL: <http://amnm.vspu.edu.ua/wp-content/uploads/2016/02/Rokitskiy-Zbirnik-zadach-z-teoriyi-chisel.pdf> (дата звернення: 08.04.2023).
3. Оглобліна О. І., Сушко Т. С., Шрамко Ю. Елементи теорії чисел. Суми : Сум. держ. ун-т, 2015. 186 с. URL: https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/42788/1/teoriya_chisel%20.pdf;jsessionid=06C98A385AACCB74632D5EC8E9FD5E70 (дата звернення: 23.04.2023).
4. Романів О. Лекції з теорії чисел : електрон. посіб. Львів : ЛНУ ім. Ів. Франка, 2021. URL: <http://www.mmf.lnu.edu.ua/algstu/302>.
5. Романів О. Практичні заняття з теорії чисел : електрон. посіб. Львів : ЛНУ ім. Ів. Франка, 2021. URL: <http://www.mmf.lnu.edu.ua/algstu/302>.
6. Чупордя В. А., Турбай Н. А. Посібник до вивчення курсу «Алгебра і теорія чисел». Конгруенції. Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2012. 16 с.
7. Шапочка І. Курс лекцій з алгебри : навч. посіб. Ужгород : УжНУ "Говерла", 2021. 221 с.
8. Яковлєва О., Перець О. Практикум з теорії чисел: навчальний посібник. Одеса : Півд.-укр. нац. пед. ун-т, 2015. 84 с.

Допоміжна

1. Бородін О. І. Теорія чисел. К.: Вища школа, 1970. 275 с
2. Драганюк С. В. Методичні рекомендації до організації самостійної роботи студентів з навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел», спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика). Одеса. 2021. 28 с.
3. Завало С., Костарчук В., Хацет В. Алгебра і теорія чисел : підруч. для фіз.-мат. фак. пед. ін-тів. Ч.2. <https://library.pdpu.edu.ua>

4. Завало С. Алгебра і теорія чисел : практикум : навч. посіб. для студ. фізико.-матем. ф-тів пед. ін-тів. Ч.2. <https://library.pdpu.edu.ua>

Інформаційні ресурси

1. Електронний архів наукових публікацій Українського державного університету імені Михайла Драгоманова

URL : <https://lib.npu.edu.ua/>

2. Електронний архів Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди

URL : <https://dspace.hnpu.edu.ua/>

3. Цифровий репозиторій Дніпроперовського національного університету імені Олеся Гончара

URL : <http://repository.dnu.dp.ua>

4. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт.

URL : <https://library.pdpu.edu.ua/>

5. Навчальні курси Львівського національного університету імені Івана Франка

URL : <http://www.mmf.lnu.edu.ua/algstu/302>