

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації

для проведення практичних занять, організації самостійної роботи

з навчальної дисципліни «Основи вищої математики»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

освітньо-професійної програми «Середня освіта (Інформатика. Англійська мова)»

спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)

Одеса 2023

УДК 510

*Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського», протокол №13 від 29 червня 2023 року*

\

Рецензенти:

1. Волкова Марія Георгіївна, кандидат ф-м. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку.
2. Урум Галина Дмитрівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Університету Ушинського

Болдарєва О. М. Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Основи вищої математики» : метод. рек. Одеса : Ун-т Уш., 2023. 36 с.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Основи курсів вищої математики в закладах вищої освіти» містять орієнтований перелік завдань для практичних занять, завдання для самостійної роботи, питання для самоперевірки, рекомендовану літературу, вимоги до знань і вмінь здобувачів, набутих у процесі вивчення дисципліни. Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, отриманих під час навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ПЛАНИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ.....	6
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри	6
Змістовий модуль 2. Елементи аналітичної геометрії.....	15
Змістовий модуль 3. Елементи теорії функцій однієї змінної.....	28
РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ.....	34

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна, як правило, базується на вищому рівні абстракції, ніж елементарна математика, та менш просто виводиться із властивостей навколишнього світу.

Мета навчальної дисципліни «Основи вищої математики» полягає у засвоєнні основ математичного апарату, який є необхідним для розв'язання теоретичних і практичних задач науки, техніки та освіти тощо під час подальшої професійної діяльності вчителя інформатики, англійської мови.

Реалізація мети забезпечує досягнення результатів навчання за програмою дисципліни завдяки відповідному навчальному змісту.

Основні навчальні **завдання** дисципліни «Основи курсів вищої математики у закладах вищої освіти»:

- формування поняття про основні математичні об'єкти, уявлення про зв'язки вищої математики з іншими прикладними дисциплінами;
- формування у студентів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи вищої математики, її роль у пізнанні дійсності;
- інтелектуальний розвиток студентів, передусім розвиток логічного та абстрактного мислення, пам'яті, уваги, інтуїції.

Передумови для вивчення дисципліни: для вивчення навчальної дисципліни «Основи вищої математики» здобувачі освіти мають володіти навчальним матеріалом, визначеним Навчальною програмою з математики закладів загальної середньої освіти.

Очікувані результати навчання з дисципліни:

знати:

- поняття матриці, види матриць, операції над матрицями та їх застосування до розв'язування систем лінійних рівнянь;
- поняття визначника n -порядку, $n \in N$ та його властивостей;
- поняття комплексного числа, його алгебраїчну і тригонометричну форми запису комплексного числа, модуль і аргумент;
- поняття про систему лінійних рівнянь та способи їх розв'язання;

- класифікації систем лінійних рівнянь залежно від можливої кількості розв'язків.

- поняття про вектор, лінійні операції над векторами,
- поняття та основні властивості скалярного, векторного та мішаного добутків векторів;

- способи задання прямої на площині та у просторі;
- способи задання площини у просторі;
- взаємне розташування прямих та площин у просторі;
- означення кривої другого порядку,
- класифікацію кривих другого порядку;
- означення еліпса, гіперболи та параболи, їх канонічні рівняння та основні властивості;

- поняття границі числових функцій;
- таблицю похідних;
- правило Лопіталя;
- поняття про первісну і невизначений інтеграл, їх властивості;
- застосування похідної і інтеграла;

уміти:

- визначати нові матриці за допомогою операції додавання, віднімання, множення матриць;

- знаходити розв'язок системи лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом послідовного виключення невідомих;

- обчислювати визначники другого, третього і n -порядку, $n \in \mathbb{N}$ раціональним способом;

- знаходити алгебраїчну, тригонометричну форму комплексного числа;
- виконувати операції над комплексними числами;
- знаходити модуль і аргумент комплексного числа;
- зображати комплексне число на комплексній площині.
- виконувати лінійні операції над векторами простору;

- застосовувати скалярний, векторний та мішаний добутки векторів до розв'язання геометричних задач;
- знаходити відстань між двома точками площини та простору;
- за різними вихідними даними складати рівняння прямої на площині та у просторі, рівняння площини у просторі;
- за алгебраїчними рівняннями двох прямих на площині визначати характер їх взаємного розташування, міру кута між ними;
- знаходити відстань від точки до прямої, від точки до площини;
- визначати характер взаємного розташування двох площин, прямої та площини, за різними вихідними даними;
- розв'язувати стандартні задачі на властивості еліпса, гіперболи та параболи;
- знаходити границі функцій;
- досліджувати функції на монотонність, екстремум та опуклість;
- будувати графік функції за допомогою диференціального числення;
- знаходити невизначені інтеграли;
- обчислювати визначені інтеграли за Ріманом;

Міждисциплінарні зв'язки: «Дискретна математика», «Інформатика», «Загальна фізика», «Програмування».

ПЛАНІ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Теми практичних занять

№ теми	Назва теми. Форма заняття	Кількість годин
1	Семінар «Алгебра матриць»	2
2	Вирішення практичних завдань «Визначники. Розв'язування систем лінійних рівнянь з невідомими »	2
3	Вирішення практичних завдань «Алгебраїчна форма запису комплексного числа, їх геометрична інтерпретація. Вектори. Дії над векторами »	2
4	Семінар «Види рівнянь прямої на площині. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Пряма у просторі. ».	2
5	Вирішення практичних завдань «Види рівнянь площини. Взаємне розташування прямої та площини у просторі»	1
6	Вирішення практичних завдань «Еліпс, гіпербола, парабола»	1
7	Вирішення практичних завдань «Границя функції в точці»	1

8	Майстер клас «Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій»	2
9	Вирішення практичних завдань «Методи інтегрування невизначеного інтегралу»	2
Разом		15

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. Елементи лінійної алгебри

Тема 1. Елементи теорії матриць

Матриці, види матриць. Операції над матрицями: додавання матриць, віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування матриці, множення матриць. Властивості цих операцій. Одинична матриця. Ранг матриці.

Практичне заняття №1 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти:

$$3A + 2B, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти добутки AB і BA , якщо вони існують:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 9 & 7 \\ 2 & 6 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти всі можливі добутки двох матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = (3 \ 1 \ 9 \ 7), B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 9 \\ 4 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Найдти матриці, що переставні до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Знайти усі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює нульовій матриці.

6. Для даних матриць знайти обернені матриці методом елементарних

перетворень $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1) Перевірити справедливості твердження $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Розв'язати матричні рівняння методом елементарних перетворень

$$X \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

3) Методом математичної індукції довести, що

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Наведіть приклади матриць A та B , таких що

а) добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$ не існують;

б) добуток $B \cdot A$ існує, $A \cdot B$ не існує;

в) добутки $A \cdot B$, $B \cdot A$ існують. Чи є наведені вами матриці переставними?

2. Чи комутативна операція множення матриць?

3. Яка необхідна умова повинна виконуватись для того, щоб дві матриці були переставними? Чи є ця умова достатньою?

4. Доведіть методом від супротивного, що матриця, протилежна до матриці A , єдина.

5. Запишіть комутативний та асоціативний закони операції додавання матриць. Чи поширюються вони на будь-яку кількість матриць?
6. Чи співпадають: а) розмірності транспонованих матриць; б) порядки транспонованих матриць?
7. Яка матриця називається оберненою матрицею до матриці A ? Яка матриця називається оберотною?
8. Що можна сказати про розмірність оберненої матриці для матриці A ?

Тема 2. Елементи теорії визначників

Визначники 2-го та 3-го порядків, обчислення за означенням. Формули Крамера. Визначники n -порядку, $n \in \mathbb{N}$. Мінори, алгебраїчні доповнення. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Способи обчислення визначників вищих порядків.

Практичне заняття № 2 (2 год)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Обчислити визначник другого порядку

$$1.1. \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$1.5. \begin{vmatrix} (\sin \alpha)^2 & (\cos \alpha)^2 \\ (\sin \beta)^2 & (\cos \beta)^2 \end{vmatrix}$$

$$1.2. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{vmatrix}$$

$$1.4. \begin{vmatrix} a + d & d \\ a - d & a \end{vmatrix}$$

2. Обчислити визначник третього порядку

$$1.1. \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

$$1.2. \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix},$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 - \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

4. Не обчислюючи визначник, доведіть, що

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Обчислити $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

6. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 8y = 5x - 3 \\ 7y + 11x = 3 - (2y - x) \end{cases} \quad \begin{cases} ax - y = 3 \\ x + ay = a - 2 \end{cases}$$

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -7 & 5 \\ 8 & 0 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 & -7 \\ -1 & 3 & -1 & -6 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

2. Користуючись властивостями визначників, довести, що визначник дорівнює 0.

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}$$

3. Не обчислюючи визначник, доведіть, що

а) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & b_1 & a_1 - b_1x \\ a_2 + b_2x & b_2 & a_2 - b_2x \\ a_3 + b_3x & b_3 & a_3 - b_3x \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

с) При всіх дійсних значеннях параметра a розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (a-5)x - 2ay = 1-a, \\ ax + (2a+8)y = 1. \end{cases}$$

7. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Як позначаються елементи визначника?
4. Сформулюйте і доведіть основні властивості визначників.
5. Що називається мінором елемента a_{ik} визначника n -го порядку?
6. Що називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ik} визначника n -го порядку?
7. Виведіть формулу розкладання визначника по елементах рядка (стовпця).
8. Як обчислити визначник n -го порядку?

Тема 3. Системи лінійних рівнянь і методи їх розв'язування.

Розширена матриця системи лінійних рівнянь (СЛР). Умова сумісності СЛР (теорема Кронекера-Капеллі). Сумісність однорідних СЛР. Метод послідовного виключення невідомих розв'язання СЛР (метод Гауса). Формули Крамера.

Практичне заняття № 3 (1 год.)

I. ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Довести методом Гауса, що система лінійних рівнянь несутісна

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2y + z - 3t = -1 \\ x + 3y - z - 4t = 3 \end{cases}$$

2. Довести методом Гауса, що система лінійних рівнянь сумісна і визначена.

Виписати розв'язок системи

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 4x + y + 4z = -1 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

3. Довести методом Гауса, що система лінійних рівнянь сумісна і невизначена.

Виписати загальний розв'язок системи та два частинних розв'язки.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

4. Розв'язати однорідні системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 3x - 4y + 2z = 8 \\ x - y + z = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}, \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ x + 4z = 11 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3y + 2z = 3 \\ 5x - y + 2z = 4 \\ 3x - 5y = -2 \\ 7x - 2y + 2z = 5 \end{cases}, \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$$

3. При всіх дійсних значеннях параметра a розв'язати системи лінійних рівнянь $\begin{cases} ax + y = 3a - 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Що називається системою m лінійних рівнянь з n невідомими?
2. Дайте означення розв'язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
3. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається :
а) сумісною;
б) несумісною;

в) визначеною;

г) невизначеною?

4. Чи існують несумісні однорідні системи лінійних рівнянь?
5. Чи може однорідна і неоднорідна система мати одну і ту ж матрицю?
6. Який розв'язок завжди має однорідна система лінійних рівнянь?
7. Що називається нульовим та ненульовим розв'язками системи однорідних рівнянь?
8. Чи існують:
 - а) несумісні невизначені системи лінійних рівнянь;
 - б) сумісні визначені системи лінійних рівнянь?
9. Які властивості мають розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь?
10. Чи мають такі ж властивості розв'язки сумісної неоднорідної системи лінійних рівнянь? Поясніть, чому.
11. Назвіть всі пункти алгоритму розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гауса та доведіть, що він приводить до розв'язання вихідної системи лінійних рівнянь.
12. Що таке вільні параметри? Як їх визначають при розв'язанні системи лінійних рівнянь?
13. Що таке загальний розв'язок системи лінійних рівнянь? Як з нього отримати конкретні числові розв'язки цієї системи?
14. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називається частинним? Як отримати частинний розв'язок?
15. Чи до всіх систем можна застосувати правило Крамера?
16. Чи потрібно розв'язувати однорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими, що визначник основної матриці системи відмінний від нуля? Чому?

Тема 4. Комплексні числа

Множина комплексних чисел як розширення множини дійсних чисел. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Його дійсна та уявна частини. Єдиність алгебраїчної форми. Властивості комплексно спряжених чисел. Зображення комплексних чисел. Комплексна площина. Модуль та аргумент комплексного числа. Властивості модуля. Тригонометрична форма комплексного числа. Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми та навпаки.

Практичне заняття № 4 (1 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Вказати на комплексній площині множину точок, яка відповідає комплексним числам z , що задовольняють умовам

a) $1 \leq |z| \leq 2$;

b) $|z - 1| = \frac{1}{3}$;

c) $|z - 3 + 2i| \leq 2$;

d) $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$

e) $\begin{cases} 1 \leq |z + 1| \leq 2, \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi. \end{cases}$

f) $|z| = |z + 2i|$

2. Знайти тригонометричну форму комплексного числа

$$\cos 80^\circ - i \sin 80^\circ, -\sin 70^\circ + i \cos 70^\circ \text{ 3) } z = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$$

I. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Розв'язувати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (1+i)x + (2+i)y = 3+6i \\ (3-2i)x + (1+3i)y = 4+8i \end{cases}$$

3. Обчисліть

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^{12}(1+i\sqrt{3})^6}{(-1+i)^{12}}.$$

4. Обчисліть та зобразіть на комплексній площині

$$\sqrt[4]{-1+i}$$

2. Обчислити

$$\left(\frac{-1+3i}{(1+2i)\sqrt{2}}\right)^{-57}$$

$$\left(-\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{10}$$

II. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Поняття комплексного числа z .
2. Що називається уявною одиницею або числом Ейлера?
3. Що називається дійсною частиною комплексного числа z ?
4. Що називається уявною частиною комплексного числа z ?
5. Що таке спряжене комплексне число?
6. Що таке протилежне число?
7. Що таке комплексний нуль?
8. Що таке суто уявне число?
9. Що називається модулем комплексного числа?
10. Що називається аргументом комплексного числа?
11. Що називається алгебраїчною формою комплексного числа?
12. Тригонометрична форма комплексного числа.
13. Основні властивості множення комплексних чисел
14. Ділення комплексних чисел.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. Елементи аналітичної геометрії

Тема 5. Векторна алгебра

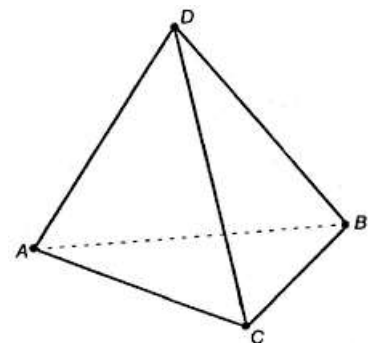
Поняття про вектор, основні означення. Лінійні операції над векторами та їхні основні властивості. Лінійна комбінація векторів. Колінеарні і компланарні вектори. Поняття про базис системи векторів і систему координат. Прямокутна

декартова системи координат на площині та у просторі. Розкладання вектора за даним базисом. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та їх властивості.

Практичне заняття № 5 (1 год.)

I. ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. За обраними векторами $\vec{a}, \vec{b}$ побудувати кожен з таких векторів як $3\vec{a}, 2\vec{b}, -\frac{1}{2}\vec{b}, \frac{1}{3}\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, -\vec{a} - \vec{b}$.
2. У паралелограмі $ABCD$ позначено $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразити через вектори $\vec{a}, \vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$, де M – точка перетину діагоналей паралелограма. Вкажіть пари рівних, колінеарних векторів, що побудовані на сторонах даного паралелограма.
3. У паралелограмі $ABCD$ позначено $\overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OD}=\vec{a}$. Виразити через вектори $\vec{a}, \vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DM}$, якщо O – точка перетину діагоналей паралелограма, M – середина сторони CB .
4. Три вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ є сторонами трикутника. За допомогою векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ виразити вектори, що співпадають з медіанами трикутника $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.
5. Вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ є сторонами трикутника. За допомогою векторів $\vec{a}, \vec{b}$ виразити вектори, що співпадають з медіанами трикутника $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.
6. У ромбі $ABCD$ його діагоналі позначено $\overrightarrow{AC}=\vec{a}, \overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Виразити через вектори $\vec{a}, \vec{b}$ вектори, що побудовані на сторонах ромба $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$. Вкажіть пари рівних, колінеарних векторів, що побудовані на сторонах даного ромба.
7. У тетраедрі $ABCD$ (див. малюнок) вказано ребра, що виходять з вершини A : $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Виразити через ці вектори інші ребра тетраедра, медіану $\overrightarrow{DM}$ грані BCD . Назвіть компланарні, некомпланарні трійки векторів.
8. Перевірити, чи утворюють базис тривимірного



простору такі вектори:

а) $\vec{a}(4, -2, 2), \vec{b}(-3, 3, -4), \vec{c}(2, -4, 3)$; б) $\vec{a}(2, 5, 7), \vec{b}(1, 1, 2), \vec{c}(1, 3, 4)$;

9. При якому значенні параметра α вектори $\vec{k}(2, \alpha, -2), \vec{m}(3, 0, 4), \vec{n}(-1, 2, 1)$; будуть компланарні?

10. Дано вектори $\vec{a}(4, 1, 4), \vec{b}(-2, -1, 1), \vec{c}(3, 1, 5), \vec{d}(-3, -2, 1)$. Доведіть, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис тривимірного простору та знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

11. Знайти $\vec{c} \cdot \vec{d}$, якщо $|\vec{c}| = 3, |\vec{d}| = \sqrt{2}$, а кут між векторами дорівнює 45° .

12. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$, та $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}, |\vec{b}| = 8, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

13. Знайти скалярний добуток векторів:

а) $\vec{a}(2, -5)$ та $\vec{b}(-1, 0)$;

б) $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, коли визначені точки $A(1, -1, 3), B(0, 1, -2), C(4, -4, 0)$.

14. Дано вершини чотирикутника $A(1, -1, 2), B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1), D(-5, -5, 3)$. Доведіть, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

15. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}$, та $\vec{d} = -2\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(5, 7), \vec{b}(1, 1)$.

16. Знайти скалярний добуток векторів $3\vec{c}$ і $2\vec{c} + \vec{d}$, якщо $\vec{c}(0, -3, 5)$ та $\vec{d}(-4, 1, 0)$.

17. Дано три вершини трикутника $A(-1, 0), B(3, 2), C(5, -4)$. Знайти величину кута при вершині В. Чи є трикутник АВС рівнобедреним?

18. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

19. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

20. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи їх довжини $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, обчислити $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|, |(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

21. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}(-1,2,-3)$, $\vec{b}(0,-4,1)$ та його довжину.

22. Дано вектори $\vec{a}(3,-1,-2)$, $\vec{b}(1,2,-1)$. Знайти векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$, $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

23. Дано вектори $\vec{A_1A_2} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{A_2A_3} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Знайти $\vec{A_1A_2} \times \vec{A_2A_3}$ та його модуль.

24. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{a}$, якщо $A(2,-1,1)$, $B(1,-1,5)$, $\vec{a}(-2,1,0)$.

25. Дано вектори $\vec{a}(1,-1,3)$, $\vec{b}(-2,2,1)$, $\vec{c}(3,-2,5)$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

26. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ якщо $\vec{a}(2,3,-1)$, $\vec{b}(1,-1,3)$, $\vec{c}(1,9,-11)$.

27. Чи компланарні вектори $\vec{a}(2,-1,2)$, $\vec{b}(1,2,-3)$, $\vec{c}(3,-4,7)$?

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Точки K , L є серединами сторін BC , CD паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ через вектори $\vec{AK}$, $\vec{AL}$

2. Довести, що сума векторів, які з'єднують центр правильного трикутника з вершинами, дорівнює нулю.

3. Дано вектори $\vec{a}(1,-2,3)$, $\vec{b}(4,7,2)$, $\vec{c}(6,4,2)$, $\vec{d}(14,18,6)$. Доведіть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис тривимірного простору та знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

4. Дано вершини чотирикутника $A(-4,2)$, $B(2,6)$, $C(5,4)$, $D(-1,0)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

5. Дано вершини чотирикутника $A(-3,-1)$, $B(-2,3)$, $C(3,3)$, $D(5,-1)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є трапецією. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції

6. У просторі задано трикутник координатами свої вершин $A_1(1,1,1)$, $A_2(3,0,0)$, $A_3(2,3,7)$. Знайти кут між сторонами A_1A_2 та A_1A_3 . Знайдіть зовнішній кут трикутника при вершині A_1 .

7. Знайти довжину векторів $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, та $\vec{d} = -5\vec{a}$, якщо $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(4, 0, 1)$.
8. При якому значенні λ скалярний добуток векторів $\vec{a}(2, \lambda)$ та $\vec{b}(2, -3)$ буде дорівнювати -2 ?
9. При якому значенні λ вектори $\vec{a}(3, \lambda, -2)$ та $\vec{b}(2 - \lambda, -1, 5)$ будуть ортогональні?
10. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, коли відомо, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$.
11. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.
12. Дано точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$. Знайти векторний добуток $\overline{AB} \times \overline{BC}$, $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$, $\overline{AB} \times \overline{BC}$, $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.
13. Дано вершини трикутника $A(0, 2, 0)$, $B(-2, 5, 0)$, $C(-2, 2, 6)$. Знайти його площу.
14. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ якщо $\vec{a}(3, -2, 1)$, $\vec{b}(2, 1, 2)$, $\vec{c}(3, -1, -2)$.
15. Знайдіть об'єм тетраедра, вершинами якого є точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$.
16. Дано вершини тетраедра $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, -8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Що називається вектором?
2. Що називається модулем вектору?
3. Який вектор називається нульовим вектором?
4. Що таке орт?
5. Які вектори називаються колінеарними?
6. Чи існують вектори, що колінеарні нульовому вектору?
7. Які вектори називаються компланарними?
8. Що називається сумою векторів?

9. Що називається різницею векторів?
10. Що називається добутком вектора на число?
11. Які властивості лінійних операцій над векторами?
12. Необхідна і достатня умова колінеарності двох векторів.
13. Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів.
14. Як визначити модуль вектора, що заданий своїми координатами?
15. Що називається базисом площини? Простору?
16. Що називається координатами вектору у заданому базисі?
17. Скільки базисів існує на площині? У просторі?
18. Чи співпадають координати одного й того ж вектора у різних базисах?
19. Що називається скалярним добутком векторів?
20. Як визначити скалярний добуток векторів, що задані своїми координатами?
21. Як визначити косинус кута між двома векторами?
22. Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів
23. Алгебраїчні властивості скалярного добутку
24. Дайте означення правої і лівої трійок векторів
25. Дайте означення векторного добутку.
26. Як визначити векторний добуток векторів, які задані своїми координатами?
27. Алгебраїчні та геометричні властивості векторного добутку

Тема 6. Рівняння прямої на площині і у просторі.

Загальне рівняння прямої на площині, його дослідження. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими, умови паралельності і ортогональності двох прямих на площині. Перетин прямих. Рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої «у відрізках».

Канонічні рівняння прямої у просторі. Канонічні рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Визначення взаємного розташування двох прямих у просторі.

Практичне заняття № 6 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Дано пряма $l: y = \frac{x}{2} + 8$. Визначити координати точок перетину прямої з координатними осями.
2. Пряма, задана рівнянням $l: 2x + y - 3 = 0$ Складіть рівняння перпендикулярної прямої m , що проходить через точку $M(2,3)$.
3. Пряма, задана рівнянням $l: x - y + 3 = 0$. Складіть рівняння паралельної прямої m , що проходить через точку $M(1, -1)$.
4. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-5,2)$ на пряму $4x - y + 3 = 0$. Визначити відстань від цієї точки до прямої.
5. Дано рівняння трьох сторін трикутника $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$. Обчислити координати його вершин.
6. Знайти точку перетину прямих AB , CD якщо вони перетинаються $A(6, -7), B(9, 14), C(-2, 5), D(3, 6)$.
7. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ та рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти координати вершин прямокутника.
8. Визначити кут φ між двома прямими:
 - 1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$;
 - 2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$;
 - 3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$;
 - 4) $3x + 2y - 1 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$.
9. Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить, через точку $M_0(2; 1)$ під кутом 45° до даної прямої.

10. Дано вершини чотирикутника $A(-9,0)$, $B(-3,6)$, $C(3,4)$ та $D(6,-3)$.

Знайти точку перетину його діагоналей AC та BD і обчислити кут між ними.

11. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ та одна з його вершин $A(2; -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

12. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої $\begin{cases} 3x + 5y + z - 4 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

13. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M(1; 2; 3)$ та $N(2; 1; 4)$.

14. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5; 3; 1)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = z + 1$

15. Знайти точку перетину прямих $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

16. Записати рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно прямій $\frac{x+7}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{-4}$.

17. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; 0; 3)$ перпендикулярно площині $2x - 3y + 4z - 1 = 0$

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Дано рівняння першого степеня $\frac{3x+2}{6} - \frac{2y-5}{3} = 4$. Знайти для відповідної прямої

- Загальне рівняння;
- Рівняння з кутовим коефіцієнтом;
- Рівняння у відрізках;
- Рівняння прямої, що проходить через дві точки;
- Рівняння прямої через точку та її напрямний вектор.

2. Дано рівняння сторін трикутника $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений. Розв'язати задачу за допомогою порівняння кутів трикутника.

3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ та точка перетину його діагоналей $M(3, -1)$. Записати рівняння двох інших суміжних сторін паралелограма.

4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M(-3; 2; 1)$ та $N(2; -1; 1)$.

5. Знайти координати точки перетину прямих $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{4}$, $\frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{2}$.

6. Записати канонічні рівняння прямої $\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Що називають прямою на площині?
2. Які види рівнянь на площині ви знаєте?
3. Чим є коефіцієнти біля невідомих у прямій, заданої загальним рівнянням?
4. Як записується канонічне рівняння прямої на площині?
5. Як обчислюються кут між прямими?
6. Як визначити взаємне розміщення прямих на площині, не будуючи їх графіки?
7. Як обчислити відстань від прямої до точки? Які види рівнянь прямої в просторі ви знаєте?
2. Запишіть канонічне та загальне рівняння прямої в просторі?
3. Як перейти від загального рівняння прямої в просторі до канонічного?
4. Яка умова паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі?
5. Як знайти кут між двома прямими в просторі?
6. Яка умова паралельності та перпендикулярності прямої та площини?
7. Як знайти кут між прямою та площиною?

Тема 7. Площина

Види рівнянь площини. Визначення взаємного розташування прямої та площини, двох площин у просторі відносно прямокутної декартової системи координат. Нормальний вектор площини. Загальне рівняння площини, його дослідження. Кут між двома площинами, умови паралельності і перпендикулярності. Знаходження відстані від точки до площини.

Практичне заняття № 7 (1 год.)

I. ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Побудувати площини та вказати нормалі до них

$$3x - 2y + 6z = 0,$$

$$2x + 3y - 6 = 0$$

$$z - 4 = 0,$$

$$2x - 3z = 0$$

Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 4; 5)$ перпендикулярно до вектора $\overline{MK}$, де $K(-2; 1; 3)$

2. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 2; -1)$ та вісь Ox .
3. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M(2; 3; -1)$ та $K(4; -3; 5)$ паралельно осі Oz .
4. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 2; -1)$ та відтинає на осях Ox та Oy відрізки -3 та 4 відповідно.
5. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(3; 1; 1)$ та $M_3(2; 1; 3)$.
6. Знайти кут між площинами $3x + 2y - 5z + 11 = 0$, $2x - 3y + z = 0$,
7. Чи будуть перпендикулярними площини $3x + 2y + 4z - 1 = 0$, $2x + 3y - z = 0$?
8. Чи будуть паралельними площини $4x + 6y - 2z + 5 = 0$, $2x + 3y - z = 0$?

9. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;-1;0)$ паралельно площині $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;3;1)$ перпендикулярно до площин $3x - y + 6 = 0$, $2x + y + 5z - 1 = 0$.
2. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярно площині $Ax + By + Cz + D = 0$.
3. Знайти відстань від точки $M(3;1;-2)$ до площини $5x + 4y + 2z - 3 = 0$.
4. Знайти відстань між паралельними площинами $2x + 3y + z - 1 = 0$. Та $2x + 3y + z + 4 = 0$.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Запишіть загальне рівняння площини в просторі.
2. Які Ви знаєте інші форми рівняння площини? Покажіть їх еквівалентність
3. Сформулюйте означення кута між двома площинами.
4. Наведіть умови ортогональності двох площин.
5. Наведіть умови паралельності двох площин.

Тема 8. Криві другого порядку

Криві другого порядку. Їх канонічні рівняння, графіки та основні характеристики.

Практичне заняття № 8 (1 год.)

I. ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Побудувати еліпс, що заданий рівнянням. Визначити малу, велику осі; малу і велику напівосі, фокуси. Побудувати його.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

$$9x^2 + 5y^2 = 45.$$

$$16x^2 + y^2 = 1.$$

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо про нього таке

- a) Напівосі його відповідно дорівнюють 4 і 2.
- b) Відстань між фокусами дорівнює 6 і велика напіввісь дорівнює 5.
- c) Один з його фокусів $F(-2,0)$ і мала напіввісь 2.

3. Визначити ексцентриситет еліпсів у п.3.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо про нього таке

a) Велика напіввісь дорівнює 10 і ексцентриситет 0,8.

b) Мала напіввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Побудувати гіперболу, що визначена рівнянням $5x^2 - 4y^2 = 20$ та знайти її фокуси, асимптоти.

6. Побудувати гіперболу $x^2 - y^2 = 1$ та знайти її фокуси, асимптоти.

7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, крім того

a) Її осі $2a = 10$, $2b = 8$;

b) Її напівосі 6 та 18.

c) Відстань між фокусами $2c = 10$ та її вісь $2b = 8$.

d) Рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ та відстань між фокусами $2c = 20$.

e) Рівняння асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ та відстань між вершинами дорівнює

48.

f) Точка $M_1(\frac{9}{2}, -1)$ належить гіперболі та рівняння асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$.

8. Побудуйте гіперболи $xy = 18$, $2xy - 9 = 0$, $2xy + 25 = 0$.

9. Побудувати параболу $y^2 = 4x$, $y^2 = -4x$, $x^2 = 4y$. Знайти фокус, директрису, фокальний параметр.

10. Визначити p та розташування відносно координатних осей таких парабол, $y^2 = -4x$, $x^2 = 5y$, $x^2 = -y$.

11. Визначити координати вершини парабол

$$y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2,$$

$$y = 4x^2 - 8x + 7,$$

$$y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7.$$

12. Знайти точку перетину еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ та параболи $y^2 = 24x$.

13. Побудуйте гіперболи $xy = 18$, $2xy - 9 = 0$, $2xy + 25 = 0$.

14. Знайти точки перетину прямої $2x - y = 10$ та гіперболи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Скласти рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь розташована на осі Ox , асимптоти мають рівняння $5x - 4y = 0$ и $5x + 4y = 0$, а відстань між вершинами дорівнює 16. Знайти координати фокусів та зробити схематичний рисунок.
2. Гіпербола, симетрична відносно осей координат, має ексцентриситет $e = \sqrt{2}$ та проходить через точку $A(1, \sqrt{3})$. Знайти відстані вершин цієї гіперболи від фокуса параболи $y^2 = 2x$. Зробити креслення.
3. Дано гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти співфокусний еліпс, що проходить через точку $A(5; 0)$. Зробити креслення.
4. Скласти рівняння параболи, якщо задано фокус $F(-7, 0)$ та рівняння директриси $x - 7 = 0$.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Чи є коло кривою другого порядку?
2. Що називають еліпсом? Ексцентриситетом еліпса? Директрисою еліпса? Фокусами еліпса.?
3. Канонічне рівняння еліпса.
4. Що називають гіперболою? Ексцентриситетом гіперболи? Директрисою гіперболи? Фокусами еліпса?
5. Канонічне рівняння гіперболи.
6. Що називають параболою? Директрисою параболи? Фокальним параметром?

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. Елементи теорії функцій однієї змінної

Тема 9. Функції. Границя функції

Числові множини. Границі числових множин. Границя функції у точці та на нескінченості. Властивості границь. Типи невизначеностей. Перша і друга чудові границі.

Практичне заняття № 9 (1 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Обчислити границю:

$$1.1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 7n - 2}{n^2 - 2n + 3}$$

$$1.2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n(n - 2)})$$

$$1.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x^2 - 4x}$$

$$1.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)^2}{(\operatorname{tg} 2x)^2}$$

2. Знайти границю функції за правилом Лопітала:

$$2.1 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x}{x^3 + 10x^2}$$

$$2.2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$$

$$2.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$2.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4}$$

$$2.5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1 + 2x)}$$

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти границю функції за правилом Лопітала:

$$1.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$1.2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$$

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Дайте визначення границі числової послідовності.
2. Дайте визначення границі функції в точці.

3. Основні теореми про границі.
4. Розкриття невизначеностей при обчисленні границь.
5. Сформулювати означення границі функції в точці.
6. Сформулювати правило Лопітала
7. Сформулюйте першу і другу чудові границі та наслідки з них.

Тема 10. Диференціальне числення функції однієї змінної

Поняття похідної функції. Таблиця похідних. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі до похідної. Застосування похідних до розкриття невизначеностей. Правило Лопітала.

Умови монотонності функції. Екстремуми функцій, необхідні і достатні умови існування екстремуму. Опуклість, увігнутість, точки перегину. Асимптоти графіку функцій. Загальна схема дослідження функцій і побудова графіків.

Практичне заняття № 10 (2 год.)

I. ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти похідну функції:

$$1.1 \quad y = \operatorname{tg} \sqrt[5]{x^4 - 3x^3 + 2x - 1}$$

$$1.2 \quad y = \frac{2x+3}{4x^2+7} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arccos \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$1.3 \quad y = \sin \frac{1}{\log_4 x}$$

$$1.4 \quad y = \ln \arccos \sqrt{x^2 - 5x + 3}$$

$$1.5 \quad y = x^3 \arcsin \frac{1}{x^2}$$

2. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

$$2.1 \quad \begin{cases} x = 3 \sin(2t) - \sin(3t) \\ y = 3 \cos(2t) + \cos(3t) \end{cases}$$

$$2.2 \quad \begin{cases} x = \arccos t^2 \\ y = t \sin \sqrt{t} \end{cases}$$

$$2.3 \quad \begin{cases} x = \ln(2 + t^3) \\ y = \operatorname{arctg} t - 2t \end{cases}$$

$$2.4 \quad \begin{cases} x = \frac{1 - \cos t}{t^2} \\ y = \ln(1 - 2t) \end{cases}$$

3. Знайти частинні похідні від функцій

$$3.1 \quad z = \left(\cos \frac{x}{y}\right)^2$$

$$3.2 \quad z = \frac{x^2 - \sqrt{y}}{x^2 + \sqrt{y}}$$

$$3.3 \quad z = \left(\ln\left(\frac{1}{x} - y\right)\right)^3$$

$$3.4 \quad z = 5^{\sqrt{y} - 2x}$$

$$3.5 \quad z = \sqrt{y^3 + 6x^2}$$

$$3.6 \quad z = \ln \frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$3.7 \quad z = \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}$$

4. Знайти повні диференціали функцій

$$4.1 \quad z = \arctg(xy)$$

$$4.2 \quad z = \ln\left(tg \frac{x}{y}\right)$$

$$4.3 \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4.4 \quad z = (\sin x)^2 + (\cos y)^2$$

$$4.5 \quad z = \arctg \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$4.6 \quad z = \ln \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$4.7 \quad z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

5. Знайти похідні складених функцій

$$5.1 \quad z = \sin(x^2 - y), \text{ де } x = e^{2t}, y = 2^t$$

$$5.2 \quad z = \sin(4y - 3xy), \text{ де } x = 4^{5+2t}, y = 1 - t^2$$

$$5.3 \quad z = \cos(4x + 5yx), \text{ де } x = 5^{1-2t}, y = t^2 + 3$$

$$5.4 \quad z = (x^3 + y^4)^2, \text{ де } x = 2^{t^2-4t}, y = 3^{t^3-5t}$$

$$5.5 \quad z = \frac{x}{\sqrt[3]{y}-2}, \text{ де } x = (1 - 2^t)^2, y = 3^{2t}$$

$$5.6 \quad z = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \text{ де } x = \ln \frac{1}{\sqrt{t}}, y = 2^{4-t}$$

$$5.7 \quad z = (x^2 + y^3)^2, \text{ де } x = 3^{t^3-3t}, y = 4^{t^2-5t}$$

6. Знайти похідні від неявно заданих функцій

$$6.1 \quad z^3 + 3x^2z = 2xy$$

$$6.2 \quad x^3y^2 - xy^5 + 5x + y = 0$$

$$6.3 \quad z^2 + 3x^3z = 2xy$$

$$6.4 \quad xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0$$

$$6.5 \quad x \cdot 3^{2y} - x \ln y + 7 = 0$$

7. Знайти екстремуми функцій $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x^2}$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$

8. Знайти точки перегину функції $f(x) = x^4$.

9. Знайти асимптоти функцій $f(x) = \frac{2x^2-1}{x}$, $f(x) = xe^x$, $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$

10. Знайти інтервали зростання і спадання функції $f(x) = xe^{-x}$

11. Визначити інтервали, на яких функція $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 3$ опукла догори, і інтервали, на яких функція опукла донизу.

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти похідну функції:

$$1.1. \quad y = \sqrt{\log_5 \frac{x}{x+4}}$$

$$1.2. \quad y = \frac{7x^2+8x}{\sqrt{2x+3}} + \cos \sqrt{5x-3}$$

2. Знайти похідні від неявно заданих функцій

$$2.1 \quad 1 + xy - \ln(xy + xy^2) = 0$$

$$2.2 \quad x \cos y + y \cos z - 1 = 0$$

3. Опуклою вверх або вниз є функції $f(x) = \ln x$, $f(x) = x \ln x$?

4. Чи існують асимптоти у графіка функції $f(x) = xe^{\frac{2}{x}} + 1$. Які саме?

5. Проведіть загальне дослідження функції $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ і побудуйте її графік.

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Визначення похідної від функції.

2. Похідна від складеної і оберненої функції, похідна від неявної функції.

3. Запишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.

4. Правило Лопітала розкриття невизначеностей.

5. Що таке диференціал функції?

6. Назвіть основні правила диференціювання.

7. Яка загальна схема дослідження графіка функції?

Тема 11. Інтегральне числення функції однієї змінної

Первісна та визначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Інтегрування способом заміни, частинами, безпосереднє інтегрування. Інтегрування дробово-раціональних функцій. Практичне застосування визначеного інтегралу.

Практичне заняття № 11 (2 год.)

I. ОBOB'ЯЗKOBІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 (4x - 3)^3 dx$$

$$\int_0^5 (x^2 - 3x) dx$$

$$\int_0^1 (e^x + 3^{2x}) dx$$

$$\int_1^9 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_1^3 (40x - 2)^2 dx$$

2. Знайти інтеграл раціональної функції

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-2)}$$

$$\int_1^2 \frac{(x+1)dx}{x^3 + 5x^2 + 6x}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x^2 - 2)(x^2 + 3)}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x+3)(x+2)}$$

3. Знайти інтеграл за методом інтегрування частинами

$$\int_0^1 (4 - 3x)e^{-2x} dx$$

$$\int_0^1 x^3 \cdot e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^1 x \cdot 2^x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$$

$$\int_1^e (x^2 + 1) \cdot \ln x dx$$

4. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

4.1 $y = \sqrt{x}, y = 3, x = 1, x = 4$

4.2 $y = x^2 + 2x, y = x + 2$

4.3 $y = 2^x, y = 8, x = 1, x = 2$

4.4 $y = 2x - x^2, x + y = 0$

4.5 $y = x^2 - 2x, y = x + 4$

II. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-1}^3 (2x + 3)^2 dx$$

$$\int_{-2}^0 (3x^2 + 1)^3 dx$$

2. Знайти інтеграл раціональної функції

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$

3. Знайти інтеграл за методом інтегрування частинами

$$\int_1^e x \cdot \ln x dx$$

$$\int_0^3 (x + 1) \cdot e^x dx$$

4. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

4.1 $y = x^2 + 1, y = \frac{25-5x}{3}$

4.2 $y = x, y = 2x, x = 3$

III. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.

1. Задачі, що призводять до поняття інтеграла.
2. Дайте визначення первісної функції.
3. Що таке невизначений інтеграл?
4. Запишіть таблицю відомих Вам інтегралів.
5. Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної.
6. Інтегрування частинами.
7. Як обчислити невизначений інтеграл раціональної функції?
8. Методи обчислення інтегралів від тригонометричних функцій.
9. Яку операцію називають інтегруванням?
10. Сформулюйте основну властивість первісної.
11. Сформулюйте правила знаходження первісних.
12. Що називають визначеним інтегралом f на відрізку $[a; b]$?
13. Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца.

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

Основна література

1. Волкова М. Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального завдання для студентів спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування з дисципліни «Вища та прикладна математика» : метод. рек. Одеса, 2021. 38 с.
2. Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. 2-ге вид. Київ : Алерта, 2017. 574 с.
3. Зайцев Є.П. Вища математика: інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди : навч. посіб. 2-ге вид. Київ : Алерта, 2018. 608 с.
4. Клепко В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : Центр навч. літ., 2019. 594 с.
5. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2018. Т. 1, Ч 1., 268 с.
6. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2018. Т. 1., Ч 2., 237 с.
7. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2019. Т. 2., Ч 1., 244 с.
8. Щоголев С. А., Кореновський А. О. Основи вищої математики : навч. посіб. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2019. Т. 2., Ч 2., 220 с.

Допоміжна

1. Вища математика. / О. Барабаш та ін. Київ : ДУТ, 2015. Ч. 1 : Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. 187 с.
2. Вища математика. / О. Барабаш та ін. Київ : ДУТ, 2019. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних. 232 с.
3. Дисковський О., Косиченко О., Рибальченко Л. Вища математика : навч. посіб. Дніпро : ДДУВС, 2019. 108 с.

4. Панченко Н., Резуненко М. Вища математика : навч. посіб. Харків : УкрДУЗТ, 2022. Ч. 1. 231 с.
5. Матриці та системи лінійних рівнянь / О. Савастру та ін. ; ред. О. В. Савастру. Одеса : Од. нац. ун-т ім. І. І. Мечник., 2019. 120 с.

Інформаційні ресурси

1. Електронний архів наукових публікацій Українського державного університету імені Михайла Драгоманова
URL : <https://lib.npu.edu.ua/>
2. Електронний архів Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди
URL : <https://dspace.hnpu.edu.ua/>
3. Одеська національна наукова бібліотека : офіційний сайт.
URL : <http://odnb.odessa.ua/>.
4. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт.
URL : <https://library.pdpu.edu.ua/>