МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації

для проведення практичних занять, організації самостійної роботи
з навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння»

Розділ: Диференціальні рівняння першого порядку

Частина І. Диференціальні рівняння першого порядку,

розв'язані стосовно похідної.

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)**

Одеса 2023

УДК 517

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
протокол № _______ від ______________ 2023 року

1. **Волкова М. Г.** - кандидат ф-м. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку.

2. **Болдарєва О. М.** - кандидат ф-м. наук, доцент кафедри вищої математики і статистики.

Урум Г. Д. , Олефір О. І.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни *«Диференціальні рівняння»,* Розділ: Диференціальні рівняння першого порядку. *Частина І* Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної: Одеса : Університет Ушинського, 2023. 42 с.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни *«Диференціальні рівняння»,* Розділ: Диференціальні рівняння першого порядку. *Частина І* Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної містять загальний теоретичний матеріал, вирішенні приклади, вправи для самостійного розв'язання.

Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**)** з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

© Університет Ушинського, 2023

© Урум Г. Д., Олефір О. І.

.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Звичайні диференціальні рівняння.

Змістовий модуль 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної

Поняття звичайного диференціального рівняння. Порядок рівняння. Частковий та загальний розв'язки. Задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної, які інтегруються в квадратурах. Рівняння з відокремлюваними змінними і ті, що зводяться до них. Однорідні рівняння і ті, що зводяться до них. Узагальнені однорідні рівняння. Лінійні рівняння першого порядку. Структура загального розв'язку. Метод варіації сталої. Метод Бернуллі. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник. Методи знаходження інтегруючого множника.

Зміст

1. Основні поняття..5

2. Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними..7

3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що до них зводяться 13

4. Лінійні рівняння першого порядку...20

5. Рівняння бернуллі...28

6. Рівняння у повних диференціалах 31

7. Література 41

1. Основні поняття

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівність, що містить незалежну змінну x, невідому функцію y та її похідні $y', y'', \dots y^{(n)}$:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

Означення. Порядок старшої похідної, що входить до складу рівняння (1), називається порядком цього рівняння.

Означення. Диференціальним рівнянням 1-го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається вираз вигляду $F(x, y, y') = 0$ або

$$y' = f(x, y), \qquad (1.2)$$

якщо він розв'язаний відносно похідної $y' = \frac{dy}{dx}$.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.2) називається функція $y = \varphi(x, \mathrm{C})$, яка при будь-якому значенні сталої C є розв'язком цього рівняння.

Означення. Частинним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку називається будь -яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, отримана із загального розв'язку при певному значенні довільної сталої $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0$.

Означення. Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння

$n -$ го на площині (x, y) називається *інтегральною кривою.*

Означення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням рівняння. *Завдання інтегрування диференціального рівняння полягає у знаходженні всіх розв'язків цього рівняння та вивченні їх властивостей.*

Задача Коші. Серед усіх розв'язків диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.2}$$

знайти рішення

$$y = y(x) \tag{1.3}$$

що задовольняє умовам:

$$y = y_0 \ \text{ при } \ x = x_0 \tag{1.4}$$

де задані числа, тобто шукається такі розв'язки (1.3), якому функція приймає задане значення y_0, якщо незалежну змінну x замінити заданим значенням x_0 так що $y(x_0) = y_0$.

Геометрично це означає, що шукається інтегральна крива, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$.

Умови (1.4) називаються початковими умовами розв'язку (1.3).

Задача знаходження частинного розв'язку, яке задавольняє початковим умовам (1.4), називається *задачей Коши.*

Означення. Точки, у яких порушуються умови задачи Коші, називаються *особливими точками.*

Через такі точки або взагалі не проходить жодна інтегральна крива, або проходить кілька інтегральних кривих.

Означення. Розв'язок, у кожній точці якого порушуєтьсяя єдність розв'язку задачі Коші, називаються *особливими.*

Особливий розв'язок не може бути отриманий із загального розвєязку при жодному значенні довільної сталої С. Особливі розв'язки можуть з'явитися серед розв'язків, загублених в результаті перетворень даного рівняння в процесі його інтегрування.

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що називається *розв'язком* диференціальним рівнянням?
3. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням 1-го порядку?
4. Що називається *загальним розв'язком та загальним інтегралом* диференціальним рівнянням?
5. Що називається *частинним розв'язком та частинним інтегралом* диференціальним рівнянням?
6. Що називається *початковою умовою* для диференціального рівняння 1-го порядку Яким є геометричний зміст початкової умов для диференціального рівняння 1-го порядку?
7. Сформулюйте *теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші* диференціального рівняння 1-го порядку? дати геометричну інтерпретацію цієї теореми?
8. Які розв'язки називаються *особливими?*

2. Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

1. *Рівняння з відокремленими змінними*

Якщо диференціальне рівняння має вигляд:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \tag{2.1}$$

де коефіцієнт при dx залежить тільки від x, а коефіцієнт при dy тільки від y, то кажуть, що у ньому змінні відокремлені. Загальним інтегралом такого рівняння буде

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C \tag{2.2}$$

або

$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy = C \qquad (2.3)$$

особливих розв'язків немає.

Якщо $X(x_0)$ і $Y(y_0)$ не дорівнюють нулю одночасно, то розв'язок з початковими умовами x_0, y_0 можна знайти звичайним способом за загальним інтегралом (2.2) або, ще простіше, за загальним інтегралом (2.3), поклавши в ньому $C = 0$:

$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy = 0 \qquad (2.4)$$

Якщо ж $X(x_0) = Y(y_0) = 0$, то розв'язок з початковими даними x_0, y_0 може не існувати або це розв'язок може бути не єдиним.

2. Рівнянням з відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \qquad (2.5)$$

називається рівнянням з *відокремлюваними змінними*. Помножуючи обидві частини рівняння (2.5) на $\frac{1}{m_1(x)n(y)}$, отримуємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0 \qquad (m_1(x) = 0, n(y) = 0?) \qquad (2.6)$$

Загальним інтегралом цього рівняння, а отже і рівняння (5), буде

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C \qquad (2.7)$$

або

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(y)}{n(y)} = C \qquad (2.8)$$

де $m_1(x_0) \neq 0,\ n(y_0) \neq 0$

Розглянемо рівняння $m_1(x_0) = 0,\ n(y_0) = 0$ зазначені у формулі (2.6) у дужках.

Якщо вони мають дійсні розв'язки виду $x = a,\ y = b,$ то

$x = a\ (y \neq b),\ \ y = b\ (x \neq a)$ будуть розв'язками рівняння (2.5).

Ці розв'язки є особливими.

Розв'язок з початковими даними $x_0,\ \ y_0$ за умови, що $m_1(x_0) \neq 0,$ $n(y_0) \neq 0$, а $m_1(x_0)$ і $n_1(y_0)$ не рівні одночасно нулю, дається формулою

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(x)}{m_1(x)} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(y)}{n(y)} dy = 0 \qquad (2.9)$$

Якщо $m(x_0) = n_1(y_0) = 0$, то не гарантується ні існування, ні єдиність розв'язку.

Якщо початкова точка $(x_0; y_0)$ лежить на одному з зазначених вище розв'язків виду $x = a\ (y \neq b),\ \ y = b\ (x \neq a)$, причому це розв'язкі є частиним, інших розв'язків, що проходять через точку $(x_0; y_0)$, нє існує.

Якщо ж це розв'язок особливе, воно стосується точці $(x_0; y_0)$ деякої інтегральної кривої, що міститься у загальному інтегралі за відповідного значення С.

Якщо $x_0 = a,\ \ y_0 = b,$ то поле в початковій точці (a, b) не визначене.

До цієї точки примикають розв'язкі $x = a\ (y \neq b),\ \ y = b\ (x \neq a).$

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xdx + (y + 1)dy = 0$$

і виділити інтегральну криву, що проходить через точку $(0; 0)$.

Розв'язання. Згідно з формулою (2), загальний інтеграл рівняння буде

$$\int xdx + \int (y+1)dy = 0 \qquad \text{або} \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = C$$

вважаючи в ньому $x = 0, y = 0$, знаходимо, що $C = 0$. Шуканої інтегральної кривої буде

$$x^2 + y^2 + 2y = 0$$

Цю ж інтегральну криву ми можемо отримати і знаходячи загального інтеграла, а користуючись формулою (4). Маємо:

$$\int_{x_0}^{x} xdx + \int_{y_0}^{y} (y+1)dy = 0, \quad x^2 + y^2 + 2y = 0$$

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$xdx + ydy = 0$$

у точці $x = 0, y = 0$ поле не визначене.

Розв'язання. Загальним інтегралом рівняння буде

$$x^2 + y^2 = C^2$$

На початок координат не примикає жодна інтегральна крива.

Приклад 3. Нехай дано рівняння

$$xdy + ydx = 0$$

на початку координат поле не визначене.

Розв'язання. Розділяючи змінні та інтегруючи, отримуємо:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad (y = 0,\ \ x = 0?), \quad ln|y| + ln|x| = ln|C|$$

$$x = 0\ \ (y \neq 0), y = 0\ (x \neq 0).$$

$$|xy| = |C|, \qquad xy = \pm C, \quad xy = C_1 \qquad (C_1 = \pm C).$$

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(y - xy)dx + (x + xy)dy = 0$$

Розв'язання. Винесемо спільні множники в обох дужках:

$$y(1 - x)dx + x(1 + y)dy = 0$$

Отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділимо його почленно на $xy \neq 0$ і отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{1 - x}{x}dx + \frac{1 + y}{y}dy = 0$$

Виконаємо інтегрування:

$$\int \frac{1 - x}{x}dx + \int \frac{1 + y}{y}dy = C,$$

$$ln|x| - x + ln|y| + y = C$$

$$ln|xy| + lne^{y-x} = ln|C|$$

Оскільки стала інтегрування – довільна, то для спрощення виразу при наступних перетвореннях її можна записати у вигляді $ln|C|$. Тоді:

$$|xy|e^{y-x} = |C|$$

Звідси знаходимо загальний інтеграл рівняння:

$xye^{y-x} = \pm C \quad xye^{y-x} = C_1 \qquad (C_1 = \pm C)$

При розв'язанні рівняння було припущено, $x \neq 0, y \neq 0$. Проте функції $x = 0$ та $y = 0$ також є розв'язками вихідного рівняння, що легко перевірити безпосередньою підстановкою. З іншого боку їх можна отримати із загального інтеграла при $C = 0$. Отже, $x = 0$ і $y = 0 -$ частинні розв'язки рівняння.

Завдання для самостійной роботи

1.Знайти загальний розв'язок:

1. $\ln cosydx + xtgxdy = 0.$
2. $(x + 2x^3)dx + (y + 2y^3)dy = 0.$
3. $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0.$
4. $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$
5. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})dy = 0.$

2. Знайти частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову:

1. $\frac{yy\prime}{x} + e^x = 0; \quad y(1) = 0.$
2. $ydx - (4 + x^2)lny = 0; \quad y(2) = 1.$
3. $3e^x tgydx + (1 + e^x)sec^2 ydy = 0; \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$
4. $(1 + e^x)y^2 dy = e^x dx; \quad y(0) = 0.$
5. $y' = 2^{x-y}; \quad y(-3) = -5.$

Контрольні запитання

1. Дати означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними і сформулювати метод його інтегрування.
2. Які існують форми запису диференціального рівняння з відокремлюваними змінними і як вони між собою пов'язані?
3. Як можуть з'явитися особливі розв'язки для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?

3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що до них зводяться

Означення. Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією n виміру, якщо при будь -якому t виконується тотожність:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \tag{3.1}$$

Наприклад, функція $f(x,y)=x^2-y^2+2xy$ є однорідною функцією 2-го виміру, оскільки

$$f(tx,ty)=(tx)^2-(ty)^2+2tx\cdot ty=t^2(x^2-y^2+2xy)=t^2 f(x,y)$$

Покладаючи в (4.1) $t=\frac{1}{x}$, отримаємо

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^n}f(x,y), \text{тоді } f(x,y)=x^n f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Однорідну функцією n-го виміру можна подати у вигляді

$$f(x,y)=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.2}$$

Означення. Рівняння

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{3.3}$$

в якому $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - *однорідні функції однакового виміру, називається однорідним рівнянням.*

Це рівняння завжди може бути приведено до вигляду:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.4}$$

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, за допомогою підстановки $\frac{y}{x}=z$, де $z=z(x)$ −нова шукана функція.

Тоді

$$y = zx \qquad y' = z'x + z \tag{3.5}$$

Підставляючи y та y' в рівняння (3.3), отримаємо

$$z'x + z = \varphi(z) \quad \text{або} \quad x\frac{dy}{dx} = \varphi(z) - z,$$

звідки

$$\frac{du}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}, \qquad \varphi(z) \neq z$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок відносно функції z:

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Підставляючи після інтегрування замість z відношення $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний розв'язок даного однорідного рівняння.

Зауваження. При розв'язанні однорідних рівнянь не обов'язково зводити їх до вигляду (3.4). Можна зразу робити підстановку $y = zx$.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

Розв'язання. $M(x,y) = x^2 + 2xy$, $N(x,y) = xy$. Це однорідне рівняння другого порядку. Введемо підстановку $y = zx$, звідси $dy = xdz + zdx$. Тоді рівняння має вигляд

$$(x^2 + 2x^2z)dx + zx(xdz + zdx) = 0$$

Або. $(x^2 + 2x^2z + z^2x^2)dx + zx^3dz = 0$

$$\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{(z+1)^2} = 0, \qquad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{zdz}{(z+1)^2} = C$$

$$ln|x| + ln|z+1| + \frac{1}{z+1} = C$$

Відповідь: $ln|x` + y| + \frac{x}{x+y} = C$

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$$

і виділити інтегральну криву, яка проходить через точки:

а) $(2; 2)$; б) $(1; -1)$; в) $(0; 0)$.

Розв'язання. Зробимо заміну $y = zx,$ тоді $dy = xdz + zdx$, так що

$(x^2 + 2zx^2 - z^2x^2)dx + (z^2x^2 + 2x^2z - x^2)(xdz + zdx) = 0$

Скоротимо на x^2 і зберемо члени при dx і dz:

$$(z^3 + z^2 + z + 1)dx + (z^2 + 2z - 1)xdz = 0$$

Розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{dx}{x} + \frac{z^2 + 2z - 1}{(z^2 + 1)(z + 1)}dz = 0 \qquad (z + 1 = 0?)$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$ln|x| - ln|z + 1| + \ln(z^2 + 1) = ln|C_1|$$

або $\frac{x(z^2+1)}{z+1} = C \qquad (C = C_1)$

замінивши тут z на $\frac{y}{x}$ потримаємо загальний інтеграл рівняння у вигляді

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = C$$

Це є сімейство кіл:

$$x^2 + y^2 = C(x + y). \qquad (*)$$

з яких потрібно виключити початок координат та напівпрямі

$$x + y = 0 \qquad (^\wedge)$$

Записавши сімейство (*) у вигляді

$$\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{2} \qquad (**)$$

Центри всіх кіл (**) лежать на прямій і що на початку координат всі вони стосуються прямої..

а) Вважаючи в (*) $x = 2,\ y = 2$ знаходимо $C = 2$ так що шуканим розв'язком буде

$$x^2 + y^2 = 2(x + y)$$

або

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

Розв'язок (*) не проходять через точку $(2; 2)$

б) Жодна з кіл (**) не проходить через точку $(1; -1)$. Причому напівпряма $y = -x$ проходить через цю точку та дає розв'язок.

в) До початку координат примикають усі інтегральні криві. На відміну від випадків «а» та «б» тут розв'язання задачі Коші не єдине.

Диференціальні рівняння які зводяться до однорідних

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right) \qquad (3.6)$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ −сталі.

Якщо в рівнянні (4.6) $c_1 = c_2 = 0$, то отримаємо однорідне рівняння вигляду (4.3)

1. Якщо визначник

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.7)$$

то це рівняння за допомогою підстановки

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta \end{cases} \tag{3.8}$$

де ξ и η - нові змінні, а α и β - деякі постійні числа, які знаходяться з системи

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

наводиться до однорідного рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right) \tag{3.10}$$

2. Якщо визначник

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \tag{3.11}$$

то рівняння (3.6) набуває вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right) = f_1(ax + by) \tag{3.12}$$

вважаючи,

$$z = ax + by \tag{3.13}$$

прийдемо до рівнянняз відокремлюваними зміннами.

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$$

Розв'язання. Рівняння можна переписати так

$$y' = -\frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$$

і

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Знаходимо точку перетину прямих $2x + y + 1 = 0$ і $x + 2y - 1 = 0$; маємо $x = \alpha = -1$; $y = \beta = 1$.

Проводимо у рівнянні заміну змінних, вважаючи

$$x = \xi + \alpha = \xi - 1, \ \ y = \eta + \beta = \eta + 1; dx = d\xi, dy = d\eta$$

Рівняння перетворюється на вигляд

$$(2\xi + \eta)d\xi + (\xi + 2\eta)d\eta = 0$$

В отриманому однорідному рівнянні покладемо $\eta = \xi t$, звідки

$d\eta = \xi dt + td\xi$ прийдемо до рівняння з відокремлюваними змінами

$$2(t^2 + t + 1)\xi d\xi + (\xi + 2t)dt = 0$$

Загальний інтеграл якого є $\xi\sqrt{t^2 + t + 1} = C$ після заміни t маємо:

$$\xi^2 + \xi\eta + \eta^2 = C^2$$

Повертаючись до змінних x і y $(\xi = x + 1, \eta = y - 1)$ після перетворень знаходимо загальний інтеграл рівняння

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = C_1, \quad C_1 = C^2 - 1.$$

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл рівняння.

$$(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

Розв'язання. Рівняння належить до другого типу, оскільки $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ Покладемо тому $y + x = t$, $dy = dt - dx$. Дане рівняння набуває вигляду:

$$(t + 2)dx + (2t - 1)(dt - dx) = 0,$$

або

$$(3-t)dx+(2t-1)dt=0.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо:

Розділяючи змінні та інтегруючи, маємо

$$\int \frac{2t-1}{3-t}dt+\int dx=C, \qquad -2t-5ln|t-3|+x=-C.$$

Повертаючись до старих змінних ($t=x+y$), отримаємо відповідь:

$$x+2y+5ln|x+y-3|=C$$

Завдання для самостійной роботи

Знайти загальний розв'язок:

1. $xy' \sin\left(\frac{y}{x}\right)+x=ysin\left(\frac{y}{x}\right)$
2. $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$
3. $xy'ln\left(\frac{y}{x}\right)=x+yln\left(\frac{y}{x}\right)$
4. $xyy'=y^2+2x^2$
5. $xy'-y=xtg\left(\frac{y}{x}\right); y(1)=\frac{\pi}{2}$
6. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$
7. $\left(1+\sqrt{\frac{y^2}{x}-1}\right)dx-2ydy=0$
8. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0.$
9. $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$
10. $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0.$

Контрольні запитання

1. Дати означення однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.

2. Вказати метод знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.

3. Диференціальне рівняння записане у вигляді:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0:$$

а) за якої умови це рівняння буде однорідним?
б) у якому випадку воно є рівнянням з відокремлюваними змінними?

4. Які диференціальні рівняння зводяться до однорідних? Вказати метод їхнього розв'язування.

4. Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.1}$$

називаються *лінійними* тому, що функція y і її похідна y' входять в них в першому ступені.

Функції p(x) і q(x) визначені і неперервні у проміжку (a, b).

Якщо права частина (1) – функція $q(x) = 0$ при всіх значеннях з (a, b), то рівняння привіт вигляд

$$y' + p(x)y = 0 \tag{4.2}$$

і називається у разі лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Лінійне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними

$\frac{dy}{y} = -P(x)dx;$ $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx;$ $lny = -\int P(x)dx + lnC;$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{4.3}$$

С-довільна постійна

Загальне розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (5.1) можна отримати методом Бернуллі або методом варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Метод Лагранжа полягає в тому, що загальне розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (5.1) можна знайти виходячи із загального розв'язка відповідного однорідного рівняння, в якому сталу вважають функцією.

$$\mathrm{y}(x) = \mathrm{C}(x)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{P(x)dx}} \tag{4.4}$$

$\mathrm{C}(x)$- деяка, що підлягає визначенню, функція, що диференціюється від х.

Для знаходження $\mathrm{C}(x)$ потрібно підставити в рівняння (4.1), що призводить до рівняння

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{P(x)dx}} = Q(x),$$

$$\mathrm{C}(x) = \int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int \mathrm{P(x)dx}} + C,$$

де C $-$ довільна стала.

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у вираз (4.4) дістаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (5.1) має вигляд

$$\mathrm{y} = \left(\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int \mathrm{P(x)dx}} + C\right)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{P(x)dx}}.$$

Зауваження. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{\text{зо}}$ відповідного однорідного рівнння (4.2) і частинного розв'язку $y_{\text{чн}}$ даного неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}$$

Метод Ейлера

Загальне розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти також з допомогою так званого інтегруючого множника (*метод Ейлера*).

Помножуємо обидві частини рівняння (5.1) на функцію $\mu = e^{\int P(x)dx}$

$$y' \cdot e^{\int P(x)dx} + P(x)y \cdot e^{\int P(x)dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

або

$$\left[y \cdot e^{\int P(x)dx}\right]' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

Отже,

$$y \cdot e^{\int P(x)dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C$$

Метод Бернуллі

Метод Бернуллі полягає в тому, що розв'язок рівняння (4.1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

де u та v - дві невідомі функції, одна з яких довільна, але не рівна нулю.

Підставляючи вирази y та y' в рівняння (4.1), отримаємо:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$u[v' + P(x)v] + uv = Q(x)$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, підберемо її так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0.$$

Знаходимо загальний розв'язок:

$$v = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

В силу довільності вибору функції v, виберемо з цього загального розв'язку який- небудь частинний розв'язок, поклавши, наприклад, $С_1 = 1$.

тоді

$$vu' = Q(x) \quad u' = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$u = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$y = uv = e^{\int P(x)dx}[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}]$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' - yctgx = \frac{1}{sinx}$$

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (5.1), тобто воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y', при цьому $P(x) = ctgx, \quad Q(x) = \frac{1}{sinx}$.

Для його роз'язання застосуємо метод Бернуллі, тобто загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

Звідси

$$y' = u'v + uv'$$

Підставляємо y та y' в рівняння

$$u'v + uv' - uvctgx = \frac{1}{sinx}$$

$$u'v + u(v' - vctgx) = \frac{1}{\sin x}$$

Для визначення невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ розіб'ємо отримане рівняння на два рівняння:

$$\begin{cases} v' - vctgx = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{sinx}. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = vctgx \Rightarrow \int \frac{dv}{dx} = \int ctgxdx \quad \Rightarrow ln|v| = ln|sinx| + ln|C_1|$$

Звідки

$$v = Csinx, \quad \text{де } C = \pm C_1$$

Оскільки в даному рівнянні досить знайти який – небудь частинний розв'язок, то, для спрощення подальшого розв'язання, покладемо $C = 1$.

(Надалі, при розв'язанні першого рівняння системи, постійну інтегрування записувати не будемо, зразу шукаючи його найпростіший частинний розв'язок, який, як правило, можна отримати при $C = 1$ або $C = 0$).

Тоді $\quad v = sinx$

Підставляємо функцію $v(x) = sinx$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} sinx = \frac{1}{sinx} \qquad \Rightarrow u(x) = -ctgx + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = u(x) \cdot v(x) = (-ctgx + C)sinx = -cosx + Csinx.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$y' + y \cdot cosx = sinx \cdot cosx$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 0$.

Розв'язання. Для розв'язання застосуємо метод Бернуллі, тобто загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

Порівнюючи задане рівняння з (4.1) отримаємо, що

$P(x) = cosx$; $\quad -\int P(x)dx = -sinx$. Тому множник $\mathrm{e}^{-\int \mathrm{P(x)dx}} = e^{-sinx}$,

а підстановка запишеться так

$$y = v(x) \cdot e^{-sinx}$$

Підставляючи це значення задане рівняння, отримаємо:

$$y' = v' \cdot e^{-sinx} - v \cdot e^{-sinx} cosx$$

$$cosx \cdot y = cosx \cdot v \cdot e^{-sinx}$$

$$\sin xcosx = v' \, e^{-sinx}$$

Вийшло рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dv}{dx} \cdot e^{-sinx} = sinx \; cosx$$

Помножуючи його обидві частини на $\mathrm{e}^{\mathrm{sinx}}$, отримаємо

$$dv = e^{sinx} \cdot sinx \; cosxdx,$$

а

$v = \int e^{sinx} \cdot sinx \; cosxdx = e^{sinx} \cdot sinx - \int e^{sinx} \; cosxdx = e^{sinx} \cdot sinx -$
$-e^{sinx} + C.$

Підставляючи це значення v, знайдемо

$$\mathrm{y} = (\mathrm{e}^{\mathrm{sinx}} \cdot \mathrm{sinx} - \mathrm{e}^{\mathrm{sinx}} + \mathrm{C})\mathrm{e}^{-\mathrm{sinx}}$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок.

Підставляємо у загальний розв'язок початкові умови $x = o; y = 0$;

$0 = C - 1; \quad C = 1$. Частинний розв'язок запишеться так:

$$y = e^{-sinx} + \sin x - 1$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'cos^2x + y = tgx$, що задовольняє початкову мову (задача Коші) $y(0) = 0$

Розв'язання. Застосуємо метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню.

Інтегруємо відповідне однорідне рівняння

$$y'cos^2x + y = 0$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{cos^2x} = 0, \qquad lny + tgx = lnC, \quad y = Ce^{-tgx}$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $y = C(x)e^{-tgx}$

$C(x)$- невідома функція. Підставляючи в у задане рівняння $y = C(x)e^{-tgx}$

и $y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\frac{1}{cos^2x}$,

прийдемо до рівняння

$$cos^2xC'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\frac{1}{cos^2x}cos^2x + C(x)e^{-tgx} = tgx$$

або $C'(x)cos^2xe^{-tgx} = tgx$

звідки $C(x) = \int \frac{e^{tgx}tgx}{cos^2x}dx = e^{tgx}(tgx - 1) + C$

Таким чином, отримуємо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}$$

$$y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

Використовуючи початкову умову $y(0) = 0$ отримуємо $0 = -1 + C$, звідки $C = 1$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція $y = tgx - 1 + e^{-tgx}$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний розв'язок:

1. $xy' - y = x^2cosx$
2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
3. $y' - \frac{y}{xlnx} = xlnx;\quad y(e) = \frac{e^2}{2}$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} = 0$
5. $y'cosx - ysinx = cos^2x$
6. $\frac{dy}{dx}cos^2x + y = tgx$
7. $(y^2 + 1)\frac{dx}{dy} + 2xy = 2y^2$
8. $y' - \frac{1}{x+2}y = x^2 + 4x + 5;\quad y(-1) = -1{,}5$
9. $ydx - (x + y^2siny)dy = 0$
10. $tdx + (x - tsint)dt = 0$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку?
2. Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку?
3. Яке рівняння називається лінійним однорідним, що відповідає даному неоднорідному диференціальним рівнянням 1-го порядку?
4. Описати метод Бернуллі розв'язання лінійних диференціальним рівнянням 1-го порядку.
5. У чому полягає суть методу варіації довільної сталої (метод Лагранжа) розв'язання лінійних диференціальним рівнянням 1-го порядку?
6. Якою є структура загального розв'язку лінійного диференціального рівняння 1-го порядку?

5. Рівняння Бернуллі

Означення. Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)\, y^n \tag{5.1}$$

Де $n \in \mathbb{R}, n \neq 0, n \neq 1$, а $p(x)$ і $q(x)$ – визначені і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $n = 0$, то рівняння (5.1) є лінійним неоднорідним рівнянням, якщо $n = 1$, то рівняння (5.1) є лінійним однорідним рівнянням. Для інших дійсних значень показника n рівняння Бернуллі можна звести до лінійного диференціального рівняння, за допомогою введення нової функції $z = z(x)$.

Після множення його обох частин на y^{-n} та підстановки $y^{1-n} = z$. де z - нова шукана функція, воно наводиться до лінійного.

План розв'язання. Перетворення рівняння Бернуллі в лінійне проводитися в такій послідовності:

1) помножимо обидві частини рівняння на y^{-n}

2) введемо підстановку $y^{1-n} = z$. Обидві частини цієї рівності продиференцуємо: $(1-n)y^{-n}y' = z'$; $y^{-n}y' = \frac{z\prime}{1-z}$

3) отримане рівняння проінтегруємо як лінійне за допомогою підстановки

$y = uv = e^{\int P(x)dx}v(x)$ у якій замість у треба писати z;

4) повернемося до шуканої функції, замінюючи z на y^{1-n} .

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$.

Розв'язання. Це – рівняння Бернуллі. Проінтегруємо його методом варіації довільної постійної. Для цього інтегруємо спочатку відповідне лінійне однорідне рівняння

$y' + \frac{y}{x} = 0$, рішення якого $y = \frac{C}{x}$.

Шукаємо вирішення вихідного рівняння Бернуллі. Припустимо

$$y = \frac{C(x)}{x}, \qquad y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

Підставляючи у та у' у вихідне рівняння дає:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{\mathrm{C}(x)}{x^2} = x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4$$

$$\frac{C'(x)}{x} = \left[\frac{C(x)}{x}\right]^4$$

Інтегруємо отримане рівняння:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4} = \frac{dx}{x}. \qquad -\frac{1}{3[C(x)]^3} = lnx - lnC. \qquad C(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3ln\left(\frac{C}{x}\right)}}$$

Таким чином, загальне рішення вихідного рівняння

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt[3]{3ln\left(\frac{C}{x}\right)}}.$$

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}arctgx.$

Розв'язання. Це також рівняння Бернуллі. Проінтегруємо його методом Бернуллі, навіщо покладемо Підставляючи вихідне рівняння $y = uv$,

$y' = u'v + uv'$, згрупуємо члени, що містять у першому ступені:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = 4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}arctgx$$

Приймемо за v якесь приватне рішення рівняння

$$v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0$$

Розділяючи у ньому змінні, знаходимо

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2}; \qquad lnv = \ln\left(1+x^2\right) \quad v = 1 + x^2$$

Для пошуку маємо рівняння

$$u'v = 4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}arctgx,$$

або (оскільки $v = 1 + x^2$)

$$u' = \frac{4\sqrt{u}arctgx}{1+x^2}$$

Розділяємо змінні та інтегруємо $\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2arctgx}{1+x^2}dx \quad \sqrt{u} = arctg^2x + C$

Таким чином, $u = (arctg^2x + C)^2 \quad y = uv = (1 + x^2)(arctg^2x + C)^2$ є загальне рішення вихідного рівняння.

Завдання для самостійної роботи

Знайти розв'язок рівняння:

1. $y' + \frac{1}{x}y = 2\frac{lnx}{x}y^2$
2. $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$
3. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$
4. $xy' - y^2 lnx + y = 0$
5. $(x^2 - 4)y' - 4y = -(x+2)y^2$
6. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$
7. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)sinx; \quad y(0) = 1$
8. $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{cos^2 x}$
9. $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$
10. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}; \quad y(0) = \frac{9}{4}.$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі?
2. Описати метод розв'язання рівняння Бернуллі?
3. Чим відрізняється рівняння Бернуллі від лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку?
4. Чи можна розв'язувати рівняння Бернуллі безпосередньо методом Бернуллі, не зводячи його до лінійного рівняння?

6. Рівняння у повних диференціалах

Якщо рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (6.1)$$

Володіє тим властивістю тим властивістю, що його ліва частина є повним диференціалом деякої функції двох змінних, тобто

$$N(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y)$$

це таке рівняння називається рівнянням у повних диференціалах.

Рівняння у повних диференціалах завжди у вигляді $\mathrm{dU(x,y)} = 0$, а тому його інтеграл є

$$\mathrm{U(x,y)} = C.$$

Приклад 1 . Дано рівняння

$$x^2dx + ydy = 0$$

його можна записати так:

$$d\big(\mathrm{U(x,y)}\big) = 0$$

Ліва частина даного рівняння має повний диференціал функції

$$U(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}$$

тому загальний інтеграл рівняння є

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C$$

Існує умова, яка дає можливість у кожному випадку встановити, чи буде дане рівняння рівнянням у повних диференціалах чи ні.

Якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом певної функції, то

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy$$

тобто

$$M(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}, \qquad \mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}$$

Припустимо, що $M(\mathrm{x},\mathrm{y})$ має безперервну приватну похідну по y, а $\mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ – по x; тоді

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Звідси випливає, що $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Таким чином, якщо рівняння є рівнянням у повних диференціалах, то

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (*)$$

Отримали необхідну умову того, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах .

Доведемо, що ця умова є також достатньою. Нехай виконується умова (*). Знайдемо функцію повний диференціал якої дорівнює лівій частині рівняння.

так як

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

то всі функції $U(x,y)$ такі, що задовольняють цьому співвідношенню, задаються формулою

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + C$$

де C є функція від y:

$$C = C(y).$$

Покажемо, що $C(y)$ завжди можна вибрати так, щоб

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Справді, нехай

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int M(x,y)dx + C(y)\right] = N(x,y)$$

тоді

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx$$

$C(y)$ можна знайти тоді, коли права частина останнього вираження залежить лише від у, тобто, коли

$$\frac{\partial}{\partial x}[N(x,y)] - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx] = 0$$

Звідси випливає, що (*) виконується, якщо виконано умову, що потрібно довести.

Доказ достатності умови дає практичний прийом для вирішення рівнянь у повних диференціалах.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(y^2 - x)y' - y + x^2 = 0.$$

Розв'язання. $\frac{\partial M}{\partial y} = -1,$ $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$

Це дане рівняння є рівняння в повних диференціалах.

Знаходимо

$$U(x,y) = \int(-y + x^2)dx + C(y)$$

$$U(x,y) = -xy + \frac{x^3}{3} + C(y).$$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + C'(y) = y^2 - x, \quad C'(y) = y^2 \qquad C(y) = \frac{y^3}{3} + C_1$

$$-xy + x\hat{}3/3 + y\hat{}3/3 = C.$$

Загальний інтеграл цього рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(x^2 - 1)y' + 2xy - cosx = 0$.

Розв'язання. Це є рівняння в повних диференціалах, виконується:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

Знаходимо

$$U(x,y) = \int (x^2 - 1)dy + C(x),$$

$$U(x,y) = x^2y - y + C(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[x^2y - y + C(x)] = 2xy - cosx,$$

$$2xy + C'(x) = 2xy - cosx,$$

$$C'(x) = -cosx, \qquad C(y) = -sinx + C_1$$

Відповідь: $x^2y - y - sinx = C$

Методом інтегруючого множника

Часто рівняння, для яких умова (*) не виконується, шляхом множення на спеціально обрану функцію може бути перетворено на рівняння у повних диференціалах.

Ця у такий спосіб підібрана функція називається інтегруючим множником. А зведення рівняння до рівняння у повних диференціалах називається методом інтегруючого множника.

Інтегруючий множник можна знайти для рівнянь виду (6.1), якщо його коефіцієнти задовольняють умовам

$$M(x,y)=\varphi_1(x)f_1(y)$$

$$M(x,y)=\varphi_2(x)f_2(y)$$

$$\varphi_1(x)f_1(y)dx+\varphi_2(x)f_2(y)dy=0 \qquad \textit{(6.2)}$$

шляхом множення обох частин його на множник

$$\varphi_2(x)\neq 0 \qquad f_1(y)\neq 0$$

отримаємо рівняння

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx+\frac{f_2(y)}{f_1(y)}dy=0 \qquad (6.3)$$

яке є рівнянням у повних диференціалах.

Таким чином, $\frac{1}{\varphi_2(x)f_1(y)}$ буде інтегруючим множником рівняння.

Загальний інтеграл такого рівняння дається формулою.

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx+\int\frac{f_2(y)}{f_1(y)}dy=C$$

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$ye^{-cosx}dx+\frac{lny}{sinx}dy=0$$

Розв'язання. Помножуємо обидві частини рівняння на $\mu(x,y)=\frac{sinx}{y}$

$$ye^{-cosx}sinxdx+\frac{lny}{y}dy=0$$

Звідси інтегрування отримуємо загальний інтеграл

$$e^{-cosx} + \frac{1}{2} ln^2 y = C.$$

Нехай дано рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Якщо умова $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ не виконується, то треба знайти інтегрирующий множник.

Якщо у даного рівняння існує інтегрируючий множник, якій залежіть тільки від x, то він знаходиться за формулою

$$\mu = e^{\int \varphi(x)}, \text{де } \varphi(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

Якщо у даного рівняння існує інтегрируючий множник, якій залежіть тільки від y, то він знаходиться за формулою

$$\mu = e^{\int \varphi(x)}, \text{де } \varphi(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(xy - x^2)dy + (y^2 - 3xy - 2x^2)dx = 0$$

Розв'язання. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 3x$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x$ $\quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

Знаходимо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - 3x - y + 2x}{x(y - x)} = \frac{1}{x} = \varphi(x)$$

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}}, \quad \mu = x.$$

Помножуючи розв'язуване рівняння на x

$$x(xy-x^2)dy + x(y^2-3xy-2x^2)dx = 0$$

Отримуємо рівняння у повних диференціалах. Вирішуємо його:

$U(x,y) = \int (x^2y - x^3)dy + \varphi(x)$, $\quad U(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} - x^3y + \varphi(x)$,

$$xy^2 - 3x^2y + \varphi'(x) = xy^2 - 3x^2y - 2x^3$$

$$\varphi'(x) = -2x^3, \qquad \varphi(x) = -\frac{x^4}{2}$$

$$\frac{x^2y^2}{2} - x^3y - \frac{x^4}{2} = C$$

- шуканий загальний інтеграл

Приклад 5. Розв’яжіть рівняння $\quad (2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$

Розв’язання. $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$

Знаходимо

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{4xy - 1 - 1}{2xy^2 - y} = -\frac{2(2xy-1)}{y(2xy-1)} = -\frac{2}{y} = \varphi(y)$$

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{y}dy} \qquad \mu = \frac{1}{y^2}$$

Помножуємо розв'язуване рівняння на

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

Останнє рівняння – рівняння у повних диференціалах. Вирішуємо його

$$U(x,y)=\int\left(2x-\frac{1}{y}\right)dx+\varphi(y),\qquad U(x,y)=x^2-\frac{x}{y}+\varphi(y)$$

$$\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y},\quad \varphi'(y)=1+\frac{1}{y}\qquad\qquad \varphi(y)=y+lny+C_1$$

Відповідь: $x^2-\frac{x}{y}+y+lny=C.$

Завдання для самостійної роботи

1. $(x+siny)dx+(xcosy+siny)dy=0$
2. $(y+e^x siny)dx+(x+e^x cosy)dy=0$
3. $(xy+siny)dx+(0{,}5x^2+xcosy)dy=0$
4. $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0;\ \ y(0)=0$
5. $\left(2xye^{x^2}+lny\right)dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}\right)dy=0;\quad y(0)=1$
6. $(x^2+siny)dx+(1+xcosy)dy=0$
7. $ye^x dx+(y+e^x)dy=0$
8. $(3x^2y+sinx)dx+(x^3-cosy)dy=0$
9. $(tgy-ycosec^2x)dx+(ctgx+xsec^2y)dy=0$
10. $(arcsinx+2xy)dx+(x^2+1+arctgy)dy=0$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається рівнянням в повних диференціалах?
2. ка умова повинна виконуватися, для того щоб рівняння було в повних диференціалах?
3. За якою формулою знаходять інтегруючий множник при умові, що він залежить тільки від x?
4. За якою формулою знаходять інтегруючий множник при умові, що він залежить тільки від y

Розподіл балів, які отримують студенти за результатами поточного і підсумкового контролю

<table>
<tr><td colspan="3">Змістовий модуль 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку, розв’язані стосовно похідної</td></tr>
<tr><td>Теми</td><td>Бали</td><td>Разом</td></tr>
<tr><td>Загальні поняття та означення</td><td>0-4</td><td rowspan="6">35</td></tr>
<tr><td>Рівняння з відокремлюваними змінними…</td><td>0-5</td></tr>
<tr><td>Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що до них зводяться</td><td>0-5</td></tr>
<tr><td>Лінійні диференціальні рівняння першого порядку</td><td>0-10</td></tr>
<tr><td>Рівняння Бернуллі</td><td>0-6</td></tr>
<tr><td>Рівняння у повних диференціалах</td><td>0-5</td></tr>
</table>

7. ЛІТЕРАТУРА

1. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2012. – 356 с.
2. Каленюк П. І. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Видавництво: Львівська політехніка, 2016. - 236 с.
3. Каленюк П. І. Диференціальні рівняння. Видавництво: Львівська політехніка, 2014. - 380 стр.
4. Лиходєєва Г., Пастирєва К. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно. Видавництво: Центр навчальної літератури, 2018. - 380 с.
5. Збірник задач підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння" / О. В. Капустян [та ін.]; за ред. М. О. Перестюка. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2011. – 79 с.

Допоміжна

1. Самойленко А. М., Кривошия С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах. К.: Либідь, 2003. – 504 с.
2. Диференціальні рівняння. Задачі підвищеної складності / під ред. М. О. Перестюка. – К.: ТВіМС, 2005. – 24 с.
3. Перестюк М. О., Свищук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: ТВіМС, 2004. – 224 с.
4. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.
5. Парасюк І. О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 88 с.
6. Диференціальні рівняння. Задачі підвищеної складності / під ред. М. О. Перестюка. – К.: ТВіМС, 2005. – 24 с

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського : офіційний сайтURL : http://www.nbuv.gov.ua/
2. Одеська національна наукова бібліотека : офіційний сайт. URL : http://odnb.odessa.ua/.
3. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт. URL : https://library.pdpu.edu.ua/