МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації

для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Математичний аналіз»

Розділ: Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів.

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Одеса 2023

УДК 517

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
протокол № ______ від _____________ 2023 року

Рецензенти:

1. **Волкова Марія Георгіївна,** кандидат ф-м. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики державного університету інтелектуальних технологій і зв’язку.

2. **Ордановська Олександра Ігорівна,** доктор педагогічних наук, доцент кафедри інноваційних технологій та методики навчання природничих дисциплін.

Урум Г. Д., Олефір О. І., Болдарєва О. М.
Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» Розділ: Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів: методичні рекомендації. Одеса : Університет Ушинського, 2023. 63 с.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» Розділ: Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів містять загальний теоретичний матеріал, вирішенні приклади, вправи для самостійного розв’язання.

Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

Зміст

Вступ

Пояснювальна записка

Мета навчальної дисципліни «Математичний аналіз»: розвиток математичної компетентності здобувачів вищої освіти. Сформувати у здобувачів базові математичні знання для професійної діяльності, вміння аналітично мислити, уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та вирішення прикладних задач.

Сформувати мотивацію щодо використання набутих знань у професійній діяльності.

Передумови для вивчення дисципліни: Для вивчення другої частини навчальної дисципліни **«Математичний аналіз»** здобувачі мають володіли знаннями першою частиною курсу «Математичний аналіз», а також навчальним матеріалом, визначеним програмою з математики для закладів середньої освіти.

Очікувані програмні результати навчання

ПРН 6. Забезпечувати здобуття учнями освіти державною мовою.

ПРН 9. Застосовувати інноваційні технології навчання освітньої галузі, зокрема технології розвитку в учнів критичного мислення.

ПРН 23. Демонструвати під час фахової професійної діяльності знання та усвідомлення сутності наукового підґрунтя курсів математики закладів загальної середньої освіти.

ПРН 24. Володіти фізичними поняттями та математичними інструментарієм, що є підґрунтям інформатики та теоретичною базою інформаційних технологій.

Очікувані результати вивчення дисципліни

У наслідок вивчення навчальної дисципліни студенти мають **знати:**

- Означення числового ряду з невід'ємними членами, з довільними членами та його збіжність ;

- збіжність функціональних послідовностей та рядів;
- степеневі ряди, їх збіжність;
- ряди Фур'є;
- поняття функції багатьох змінних;
- диференційованість функцій багатьох змінних;
- поняття локального та умовного екстремумів функцій двох змінних;

уміти:

- розв'язувати основні типи задач
- застосовувати формули
- раціонально обирати математичний апарат для розв'язання практичних задач;
- користуватися довідковою літературою і відповідним програмним забезпеченням.

Унаслідок досягнення результатів навчання здобувачі вищої освіти в контексті змісту навчальної дисципліни мають опанувати такі **компетентності:**

Інтегральна компетентність: Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми в галузі середньої освіти, що передбачає застосування концептуальних наукових та практичних знань, критичного осмислення теорій, методів і понять педагогіки, математики та інформатики

Загальні компетентності (ЗК):

ЗК 1. Здатність вчитися та оволодівати сучасними знаннями.

ЗК 2. Здатність застосовувати набуті знання в практичних ситуаціях.

ЗК 5. Здатність до пошуку, оброблення, аналізу, критичного оцінювання інформації з різних джерел

ЗК 8. Здатність виявляти повагу та цінувати українську національну культуру, багатоманітність і мультикультурність у суспільстві.

ЗК 9. Здатність до прийняття ефективних рішень у професійній діяльності та відповідального ставлення до обов’язків.

Спеціальні компетентності спеціальності (СК):

СК 1. Знання і розуміння предметної області.

СК 2. Здатність розв’язувати типові задачі в предметній області.

СК 6. Здатність добирати й використовувати сучасні та ефективні методики й технології навчання, виховання й розвитку учнів, використовувати сучасні інновації у професійній діяльності.

СК 14. Знання визначати умови та ресурси професійного розвитку впродовж життя, навчатися впродовж життя.

Міждисциплінарні зв’язки: «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія», «Теорія ймовірностей і математична статистика», «Загальна фізика», «Інформатика».

1. Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів.

Означення 1. Відповідність, яка кожному натуральному числу n відносить функцію f_n, визначену на множині X, називається функціональною послідовністю, визначеною на множині X, і позначається $\left(f_n\right)$ або $f_1, f_2, ..., f_n, ...$

Означення 2. Пара функціональних послідовностей $\left(u_n\right)$ і $\left(s_n\right)$ де $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, визначених на множині X, називається функціональним рядом, визначеним на множині X, і позначається $u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ або $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Означення 3. Послідовність $\left(f_n\right)$ називається обмеженою на множині, якщо $\exists M > 0$ таке, що $\forall n$ і $\forall x \in X$ виконується нерівність $\left|f_n(x)\right| \le M$.

Якщо x_0 належить області визначення функціональної послідовності $\left(f_n\right)$ (функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$), то $\left(f_n(x_0)\right)$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)\right)$ є числовою послідовністю (числовим рядом) і можна ставити питання про її (його) збіжність.

Означення 4. Послідовність $\left(f_n\right)$ називається збіжною в точці $x_0 \in X$, якщо числова послідовність $\left(f_n(x_0)\right)$ збігається, і збіжною на множині X, якщо вона збігається в кожній точці множини X.

Означення 5. Якщо послідовність $\left(f_n\right)$ збігається на множині X, то відповідність, яка кожному $x \in X$ відносить число $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ називається граничною функцією цієї послідовності.

Якщо позначити граничну функцію через f, то записують $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ і кажуть, що послідовність (f_n) збігається до функції f на множині X.

Для функціональних рядів можна діяти двома шляхами або означити збіжність ряду в точці, а потім на множині, або відразу розглядати функціональну послідовність (s_n)часткових сум функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і вважати його збіжним на множині X, якщо такою є послідовність (s_n). Граничну функцію послідовності (s_n)

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

називають сумою цього ряду і записують $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при цьому кажуть, що функція s розвивається в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ називають залишком ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ після $n-$го члена. Ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ одночасно збігаються або розбігаються, і якщо $r_n(x) -$сума другого ряду, то можна записати рівність $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

Наведені означення можна перефразувати і в такий спосіб. Послідовність (f_n) називається збіжною до функції f на множині X, якщо для кожного $x_0 \in X$ послідовність $(f_n(x_0))$ збігається до $f(x_0)$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ залежний як від ε, так і від точки x_0, що $\forall n > n_0$ виконується нерівність $\left| f_n(x_0) - f(x_0) < \varepsilon \right|$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається збіжним до функції s на множині X, якщо для кожного $x_0 \in X$ послідовність $(s_n(x_0))$збігається до $s(x_0)$, тобто

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$, залежний як від ε, так і від точки x_0, що що $\forall n > n_0$ виконується нерівність $\left| s_n(x_0) - s(x_0) < \varepsilon \right|$.

Центральною задачею для функціональних послідовностей і рядів є задача розпізнання їхніх точок збіжності, або знаходження області збіжності, і якщо це можливо, знаходження граничної функції (суми ряду).

Приклад 1. Знайти область збіжності і граничну функцію для таких послідовностей:

а) $\left(x^{n-1}\right)$; б) $\left(\dfrac{\ln(1+e^{nx})}{\ln(1+e^{n})}\right)$

• а) Функціональна послідовність визначена на R. Якщо $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n-1} = 0$. Якщо $|x| > 1,$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n-1}$ не існує. При $x = -1$ послідовність $\left((-1)^{n-1}\right)$ розбігається, а при $x = 1$ця послідовність збігається. Отже, задана послідовність збігається на проміжку $(-1;1]$, причому

$$\lim_{n\to\infty} x^{n-1} = \begin{cases} 0, x \in (-1;1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

б) Послідовність визначена на R. Якщо $|x| < 0$, то послідовність $\left(\ln(1+e^{nx})\right)$ нескінченно мала, послідовність $\left(\ln(1+e^{n})\right)$ нескінченно велика. Звідси

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^{nx})}{\ln(1+e^{n})} = 0.$$

При $x = 0$ маємо послідовність $\left(\dfrac{\ln 2}{\ln(1+e^{n}}\right)$, границя якої очевидна. Якщо ж

$$x > 0, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^{nx})}{\ln(1+e^{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{xe^{nx}(1+e^{n})}{(1+e^{nx})e^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(1+\dfrac{1}{e^{n})}}{1+\dfrac{1}{e^{nx}}} = x$$

Отже, задана послідовність збігається на R, причому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^{nx})}{\ln(1+e^{n})} = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 0 \\ x, & \textit{якщо } x > 0 \end{cases}$$

Приклад 2. Знайти область збіжності і суми функціональних рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x)^{n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(1+3x)(1+5x)\ldots(1+(2n+1)x)}$

• а) Ряд визначений на R. Якщо $x\neq 0$, то

$$0<\frac{1}{1+x^2}<1$$

і

$$s(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$

При $x=0$ всі члени ряду дорівнюють нулю, і тому $s(0)=0$. Отже,

$$s(x)=\begin{cases}1+x^2, & \textit{якщо} \quad x\neq 0,\\ 0, & \textit{якщо} \quad x=0.\end{cases}$$

б) Ряд визначений на R. Нехай $x\neq 0$ довільне, але фіксоване число. Дослідимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x)^{n-1}$ на збіжність. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(2x)^n\right|}{\left|(2x)^{n-1}\right|}=|2x|$$

то за ознакою Даламбера ряд збігається, причому абсолютно, якщо $|2x|<1$, і розбігається $|2x|>1$. Якщо $|2x|=1$, тобто $x=-\frac{1}{2}$, маємо числові ряди відповідно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, які розбігаються. При збіжність ряду очевидна. Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, а його сума дорівнює $s(x)=\dfrac{1}{1-2x}$.

в) Ряд визначений на множині $X = R \setminus \left\{ -\frac{1}{2n+1}, n \in N \right\}$. При $x = 0$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$, який розбігається. При $x \in X$ і $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(1+(2n+1)x)} = 0.$$

Отже, ряд збігається на множині $X_0 = X \setminus \{0\}$.

Подамо послідовність його часткових сум у вигляді

$$s_1(x) = \frac{3}{1+3x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{1+3x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+3x)},$$

$$s_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+3x)} + \frac{1}{(1+3x)(1+5x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+3x)(1+5x)}$$

$$s_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+3x)(1+5x)...(1+(2n+1)x)}$$

Тоді $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{x}$.

Приклад 3. Знайти область збіжності і область абсолютної збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2x-3}{4} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$

• а) Заданий ряд збігається абсолютно, якщо $\frac{1}{|x|} < 1$, тобто якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, якщо $\frac{1}{|x|} \geq 1$, то ряд розбігається. Отже, область збіжності збігається з областю збіжності і є множиною $X = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. •

б) Оскільки для заданого ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|\ln x|=|\ln x|,$$

то за ознакою Даламбера ряд збігається, причому абсолютно, якщо $|\ln x|<1$, тобто якщо $e^{-1}<x<e$, і розбігається, якщо $|\ln x|>1$, тобто якщо $x\in(0;e^{-1})\cup(e;+\infty)$. При $x=e^{-1}$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається, але умовно. І нарешті, при $x=e$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$розбігається. Отже, областю збіжності даного ряду є проміжок$\left[e^{-1};e\right)$, а областю абсолютної збіжності – інтервал $\left(e^{-1};e\right)$.

в) Оскільки для даного ряду

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}\left|\frac{2x\_3}{4}\right|=\left|\frac{2x-3}{4}\right|,$$

то за ознакою Коші ряд збігається, причому абсолютно, якщо $\left|\frac{2x-3}{4}\right|<1$, тобто якщо $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$, і розбігається, якщо $\left|\frac{2x-3}{4}\right|>1$, тобто якщо $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. При $x=-\frac{1}{2}$ і $x=\frac{7}{2}$ числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ і$\sum_{n=1}^{\infty}n^2$ розбігаються. Отже, область збіжності збігається з областю абсолютної збіжності і є інтервалом $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$.

г) Оскільки $\forall x,\ \ x\neq 0$, границя $\lim_{n\to\infty}\cos nx$ не існує, а при $x=0$ не виконується необхідна умова, то ряд не має жодної точки збіжності. Його областю збіжності є порожня множина.

Важливою задачею в теорії функціональних послідовностей і рядів є встановлення тих умов, які гарантують збереження властивостей, властивих кожному члену послідовності (ряду), у граничній функції (сумі ряду).

Якщо, наприклад, послідовність (f_n) збігається до функції f на множині і обмежена на цій множині, то гранична функція f також обмежена на ній. Якщо послідовність (f_n) неперервних функцій на множині X збігається до на цій множині, то гранична функція не обов'язково має бути неперервною на множині X. (Для послідовності $\left(x^{n-1}\right)$ непевних на відрізку $[0;1]$функцій граничною на цій множині є функція

$$f(x)=\begin{cases}0,\ldots\textit{якщо}\quad x\in[0;1),\\ 1,\ldots\textit{якщо}\quad x=1,\end{cases}$$

тобто гранична функція в точці $x=1$розривна.)

У багатьох випадках гарантом збереження властивостей членів послідовності (ряду) у граничній функції (сумі ряду) виступає так звана рівномірна збіжність послідовності (ряду).

Означення 6. Функціональна послідовність (f_n) називається *рівномірно збіжною* до функції f на множині X, якщо $\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\quad\forall n>n_0$ і $\forall x\in X$ виконується нерівність $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$.

Для позначення рівномірної збіжності використовують запис

Приклад 4. Довести, що послідовність $\left(\dfrac{nx^2}{\sqrt{n^2+x^2}}\right)$

рівномірно збігається до функції $.f(x)=x^2$ на відрізку $[-1;1]$

Розв'язання. Оскільки $.\forall n.$і $\forall x\in[-1;1]$

$$\left|\frac{nx^2}{\sqrt{n^2+x^2}}-x^2\right|=x\left(1-\frac{n}{\sqrt{n^2+x^2}}\right)=\frac{x^4}{\sqrt{n^2+x^2}\left(\sqrt{n^2+x^2}+n\right)}\le\frac{x^4}{2n^2}\le\frac{1}{2n^2},$$

то, врахувавши, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}=0$$

$\forall\varepsilon.0$ візьмемо n0 таке, що .. $\frac{1}{2{n_0}^2}<\varepsilon$.і тоді $\forall n.>n_0$ і $\forall x\in[-1;1]$

виконується нерівність $\left|\frac{nx^2}{\sqrt{n^2+x^2}}-x^2\right|<\varepsilon$

А це й означає, що $\frac{nx^2}{\sqrt{n^2+x^2}}\underset{[-1;1]}{\Rightarrow}x^2$

З геометричної точки зору це означає, що $\forall n>n_0$ графіки функцій (рис. 32)

$$f_n(x)=\frac{nx^2}{\sqrt{n^2+x^2}},\quad x\in[-1;1],$$

розміщуються між графіками функцій

$$y=\varphi_1(x)=x^2-\varepsilon,$$

$$y=\varphi_2(x)=x^2+\varepsilon\,.$$

Очевидно, що коли функціональна послідовність (f_n) рівномірно збігається до функції f на множині X, то вона і просто збігається до цієї самої функції на цій самій множині.

Проте навпаки, як показує наступний приклад, це не завжди так.

Приклад 5. Довести, що послідовність $\left(\frac{\sqrt{n}+arctg\,nx}{\sqrt{n}x}\right)$ збігається до функції $f(x)=\frac{1}{x}$ на інтервалі (0; 1), але нерівномірно.

Розв язання. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+arctg\,nx}{\sqrt{n}x}=\frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{arctg\,nx}{\sqrt{n}})=\frac{1}{x}$

на інтервалі (0; 1). Той факт, що послідовність (f_n) збігається до f на X, але нерівномірно, запишеться так: $.\exists\varepsilon_0\ \exists n_0\wedge\forall n>n_0\ \exists x_n\in X$ таке, що виконується нерівність $\left| f_n(x_n) - f(x_n) \geq \varepsilon_0 \right|$. Тоді, взявши $\varepsilon_0 = 1, n_0 = 4$ і для кожного $n > n_0$ $x_n = \frac{1}{n}$, маємо

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| n\frac{\sqrt{n} + arctg1}{\sqrt{n}} - n \right| = \frac{\sqrt{n}\pi}{4} > 1.$$

А це означає, що задана послідовність хоч і збігається до функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на інтервалі (0; 1), але нерівномірно.

Приклад 6. Довести, що коли існують додатна нескінченно мала послідовність (a_n) і номер n_0 такі, що $\forall n \geq n_0$ і $\forall x \in X$ виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, то послідовність (f_n) збігається рівномірно до функції f на множині X.

Розв'язання. Оскільки за умовою послідовність (a_n) нескінченно мала і додатна, то $\forall \varepsilon > 0 \exists_{n1} : \forall n > n_1$ виконується нерівність $a_n < \varepsilon$. Якщо покласти $n' = \max(n_0, n_1)$, то $\forall n > n'$ і $\forall x \in X$ виконуються нерівності

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \text{ і } a_n < \varepsilon .$$

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0$ знайдемо n' таке, що $\forall n > n'$ і $\forall x \in X$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ,$$

тобто (f_n) при виконанні вказаних умов збігається рівномірно до функції f на множині X.

Приклад 7. Довести, що послідовність $\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right)$ збігається рівномірно на **R**.

Розв'язання. Очевидно, що на **R**

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x| .$$

Тоді $\forall n$

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|}<\frac{1}{\sqrt{n}}\quad .$$

Отже, достатні умови рівномірної збіжності (приклад 6) виконуються і задана послідовність збігається рівномірно до функції $f(x)=|x|$ на **R**.

Як в означення рівномірної збіжності послідовності, так і в достатніх умовах, сформульованих у прикладі 6, крім самої послідовності фігурує гранична функція, і якщо вона невідома, то для обґрунтування рівномірної збіжності не можна скористатись ні означенням, ні достатніми умовами. Разом з тим функціональна послідовності (f_n) за критерієм Коші буде збігатись в точці x_0 тоді і тільки тоді, колі $\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0$ таке, що $\forall n>n_0$ і $\forall p$ виконується нерівність $\left|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right|<\varepsilon$

За цим самим критерієм послідовність буде збігатись на множині X тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon>0, \forall x\in X \quad \exists n_0$, що залежить як від ε, так і від точки x, таке, що $\forall n>n_0$ і $\forall p$ виконується нерівність $\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$.

Тепер уже очевидно, як реконструювати останній критерій, щоб він забезпечував рівномірну збіжність. Для того щоб послідовність (f_n) рівномірно збігалась на X, необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0, \forall p, \forall x\in X$ виконувалась нерівність $\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$.

Оскільки питання збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1.1}$$

розв' язуються через збіжність функціональної послідовності (s_n), де

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \tag{1.2}$$

то зрозуміло, що ряд (1.1) слід вважати рівномірно збіжним на множині X, якщо такою є послідовність (1.2), тобто ряд (1.1) називається рівномірно збіжним до функції s на множині X, якщо $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n > n_0, \forall x \in X$ виконується нерівність $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$.

Для того щоб він рівномірно збігався на множині X, необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n > n_0, \forall p, \forall x \in X$ виконувалась нерівність $|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon$.

Якщо ж $\exists \varepsilon_0 > 0$, що $\forall k$ $\exists n > k, \forall p, \exists p$ і $\exists x' \in X$ такі, що $|u_{n+1}(x') + u_{n+2}(x') + ... + u_{n+p}(x')| \geq \varepsilon_0$, то ряд (1.1) не є рівномірно збіжним на множині X. Зокрема, він не є рівномірно збіжним, якщо $\exists \varepsilon_0$ і $\exists n_0$ такі, що

$\forall n > n_0 \, \exists x_n \in X$, для яких виконується нерівність $|u_n(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

На практиці при дослідженні функціонального ряду на рівномірну збіжність рідко користуються означенням (воно передбачає знання суми ряду) або ж критерієм Коші. Головним інструментом є достатні ознаки рівномірної збіжності. Наведемо ці ознаки.

1. **Ознака Вейєрштрасса.** *Якщо для функціонального ряду (1.1) можна вказати такий збіжний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, n = 1,2,...,$ *що* $\forall x \in X$ *і* $\forall n$

$$|u_n(x)| \leq a_n,$$

то ряд(1.1) рівномірно збігається на множині X.

2. **Ознака Діріхле.** *Якщо послідовність* (u_n) *монотонна на множині* X, *тобто* $\forall n$ *і* $\forall x \in X$ $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$ *або* $u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$, *і рівномірно*

збігається до функції $f(x) \equiv 0$ *на цій множині, а послідовність часткових сум ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n(x)$$

обмежена на множині X, *то ряд*

рівномірно збігається на множині .

3.Ознака Абеля. *Якщо послідовність* (u_n) *монотонна і обмежена на множині* X, *а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n(x)$$

рівномірно збігається націй множині, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\upsilon_n(x)$$

рівномірно збігається на множині X.

Приклад 8. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ рівномірно збігається на відрізку.

• Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}|x| = |x|,$$

то ряд збігається абсолютно на інтервалі $(-1;1)$. Крім того, при $x = -1$ і $x = 1$ ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

також збігається абсолютно. Отже, заданний ряд збігається абсолютно на відрізку $[-1;1]$. Позначимо через s його суму, тоді $\forall x \in [-1;1]$

$$|s(x)-s_n(x)| = \left|s(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x^k|}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

У силу того, що залишок збіжного ряду прямує до нуля при $n\to\infty$, послідовність (s_n)рівномірно збігається до функції s на відрізку $[-1;1]$.

Приклад 9. Довести, що для того щоб функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ рівномірно збігався до функції s на множині X, необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|s(x)-s_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|r_n(x)| = 0$. Скориставшись цим критерієм, довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$$

рівномірно збігається на будь-якому проміжку $(\delta;+\infty)$, де $\delta > 0$, і нерівномірно збігається на проміжку $(0;+\infty)$.

Розв'язання. *Необхідність.* Якщо заданий ряд рівномірно збігається на множині X, то послідовність його часткових сум рівномірно збігається до функції s на множині X, тобто $\forall\varepsilon > 0 \exists\, n_0$ таке, що $\forall n > n_0, \forall x \in X$ виконується нерівність

$$|s(x)-s_n(x)| < \varepsilon.$$

Проте

$$\sup_{x\in X}|s(x)-s_n(x)| < \varepsilon.$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|s(x)-s_n(x)| = 0.$$

Достатність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|s(x)-s_n(x)|=0$. Тоді $\forall\varepsilon>0\exists n_0$ таке, що

$$\sup_{x\in X}|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon.$$

Звідси випливає, що $\forall\, x\in X$

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon.$$

Отже, $\forall\varepsilon>0$ ми вказали таке n_0, що $\forall n>n_0$, $\forall x\in X$ виконується нерівність $|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$. А це й означає, що $s_n(x)\rightrightarrows s(x)$.

Стосовно ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ маємо

$$s_n(x)=\sum_{n=1}^{n}\frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right)=1-\frac{1}{nx+1},$$

і при $x>0$ $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{nx+1}\right)=1$

Тоді

$$\sup_{x\in(\delta;+\infty)}|s(x)-s_n(x)|=\sup_{x\in(\delta;+\infty)}\frac{1}{nx+1}=\frac{1}{n\delta+1},$$

а

$$\sup_{x\in(0;+\infty)}|s(x)-s_n(x)|=\sup_{x\in(0;+\infty)}\frac{1}{nx+1}=\lim_{x\to0+0}\frac{1}{nx+1}=1$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\delta;+\infty)}|s(x)-s_n(x)|=0$$

і ряд рівномірно збігається до функції $s(x)\equiv1$ на проміжку $(\delta;+\infty)$, а

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\delta;+\infty)}|s(x)-s_n(x)|=1$$

і заданий ряд збігається до функції $s(x)\equiv1$ на проміжку $(0;+\infty)$, але нерівномірно.

Приклад 10. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\,arctg\,nx}{\sqrt{n^5+nx+x^2}}$

рівномірно збігається на проміжку $(0;+\infty)$.

Розв'язання. Оскільки $\forall n$ і $\forall x \in [0;+\infty\ )$

$$\left\| \frac{n\, arctg\, nx}{\sqrt{n^5+nx+x^2}} \right\| \le \frac{n\pi}{2\sqrt{n^5}} = \frac{\pi}{2\sqrt{n^3}},$$

а числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ збігається, то за ознакою Вейєрштрасса заданий ряд збігається рівномірно на проміжку $[0;+\infty)$.

Приклад 11. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x \cos nx}{\sqrt{n=x}}$ збігається рівномірно на проміжку $[0;+\infty)$.

Розв'язання. Оскільки $\forall x \in [0;+\infty\ )$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sin x \cos kx\right| = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\cos\frac{n+1}{2}x\right|\left|\sin\frac{nx}{2}\right| \le 2,$$

то послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\sin x \cos nx$ обмежена на проміжку $[0;+\infty)$. Для функціональної послідовності $\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right)$ виконується нерівність $((\forall n \quad i \quad \forall x \in [0;+\infty)))$

$$\frac{1}{\sqrt{n+x}} > \frac{1}{\sqrt{n=1+x}}$$

і

$$\sup_{x\in[0;+\infty)}\frac{1}{\sqrt{n+x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

тобто вона монотонно спадна і рівномірно збігається до функції $f(x)\equiv 0$ на проміжку $[0;+\infty)$. За ознакою Діріхле заданий ряд рівномірно збігається на $[0;=\infty)$.

Приклад 12. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{n^5x^2+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{n^5x^2+1}. \qquad (1.3)$$

Очевидно, що $n-$й член цього ряду є неперервною на відрізку $[0;1]$ функцією, яка в точці $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^5}}$ досягає максимуму, причому максимальне значення дорівнює $\dfrac{1}{2\sqrt{n^3}}$. Отже, $\forall n$ і $\forall x\in[0;1]$

$$|u_n(x)|=\frac{nx}{n^5x^2+1}\le\frac{1}{2\sqrt{n^3}}$$

і за ознакою Вейєрштрасса ряд (1.3) рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$.

Розглянемо тепер послідовність

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right).$$

Очевидно, що $\forall n$ і $\forall x\in[0;1]$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,$$

тобто послідовність обмежена на відрізку $[0;1]$. Функція $\varphi(t)=\left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t$ зростає відносно t на проміжку $[1;+\infty)$ для кожного $x\in[0;1]$. Дійсно,

$$\varphi(t)=\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\frac{x}{t+x}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t\ge 0,$$

оскільки $\left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t>0$, а з того, що

$$\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\left(\frac{x}{t}-\frac{x^2}{2t^2}\right)\geq 0,$$

випливає, що

$$\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\frac{x}{t+x}\geq\frac{x}{t}-\frac{x^2}{2t^2}-\frac{x}{t+x}=\frac{tx^2(t-x)}{2t^2(t+x)}\geq 0.$$

Отже, послідовність

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$$

не тільки обмежена, а й монотонна при кожному $x\in[0;1]$.

на підставі ознаки Абеля робимо висновок, що заданий ряд рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$.

Приклад 13. Дослідити на збіжність і рівномірну збіжність ряд

на множинах $X_1=[\delta;2\pi-\delta]$, де $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, і $X=[0;2\pi]$.

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\text{то}\ \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\leq\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

тобто послідовність часткових сум обмежена на відрізку. Послідовність $\left(\frac{1}{n}\right)$ є спадною і нескінченно малою. Тоді за ознакою Діріхле рівномірної збіжності даний ряд рівномірно збігається на відрізку $[\delta;2\pi-\delta]$. $\forall x\in(0;2\pi)$ за ознакою Діріхле ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ збігається на інтервалі $(0;2\pi)$. Якщо $x=0$ або

$x=2\pi$, збігається ряду очевидна. Таким чином, ряд збігається на відрізку $[0;2\pi]$.

Разом з тим

$$\left|s_{2n}\left(\frac{1}{n}\right)-s_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|u_{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)+u_{n+2}\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+u_{2n}\left(\frac{1}{n}\right)\right|=$$

$$=\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}+\frac{\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+2}+\ldots+\frac{\sin 2}{2n}\geq\frac{\sin 1}{2}$$

тобто Критерій Коші не виконується, і заданий ряд на відрізку збігається нерівномірно.

Рівномірна збіжність функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ на множині X гарантує його збіжність на цій множині, але не гарантує абсолютної збіжності. так, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2} \tag{1.4}$$

рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[a;b]$. Дійсно, $n-$член послідовності часткових сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n} \tag{1.5}$$

можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{x^2}{k}+1\right)=\begin{cases}x^2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}, & \text{якщо } n=2l,\\ x^2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}-1, & \text{якщо } n=2l-1.\end{cases}$$

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається. то послідовність його часткових сум обмежена, тобто $\exists M>0,$ що $\forall n$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right|\leq M$$

Звідси маємо $\forall n$ і $\forall x \in [a;b]$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^2 + k}{k} \leq AM \right|,$$

де $A = \max(|a|,|b|)$, тобто послідовність часткових сум ряду (1.5) обмежена. Якщо ще врахувати, що послідовність $\left(\frac{1}{n}\right)$ є монотонно нескінченно малою, то за ознакою Діріхле ряд (1.4) рівномірно збігається на відрізку $[a;b]$.

Крім того, ряд (1.4) не збігається абсолютно ні при жодному значенні x.

Рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ на множині X гарантує рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на цій самій множині, в той час як протилежне не виконується.

Для прикладу візьмемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n} \tag{1.6}$$

Очевидно, що цей ряд збігається до функції

$$s(x) = -\frac{x^2}{x^2 + 2}$$

на множині R. Врахувавши, що $s_n(x0 - s(x) = -\frac{x^2}{x^2+2}\left(1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}\right) + \frac{x^2}{x^2+2} = \frac{(-1)^n x^2}{(x^2+2)(1+x^2)^n}$,

а функція

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{(x^2+2)(1+x^2)^n}$$

досягає максимуму в точках $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$, причому максимальне значення цієї функції дорівнює $\frac{1}{(2n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}|s_n(x)-s(x)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(1+\frac{1}{n})^n} = 0.$$

Отже, ряд (1.6) рівномірно збігається на **R**.

Крім того, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

збігається до функції $s(x)=1$ на множині **R**, причому

$$s(x)-s_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Разом з тим

$$\sup_{x\in R}|s_n(x)-s(x)| = \max_{x\in R}\frac{1}{(1+x^2)^n} = 1,$$

і останній ряд нерівномірно збігається до функції $s(x)=1$ на множині **R**.

Вправи для самостійного розв'язування.

1. *Знайти область збіжності і граничну функцію для таких функціональних послідовностей*:

а) $\left(\frac{1}{1+x^n}\right)$; б) $\left(x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+4}\right)$;

в) $\left(\sqrt[n]{1+x^{2n}}\right)$; г) $\left(n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-x\right)\right)$;

д) $\left(\dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}\right)$; е) $\left(\cos^{2n} x\right)$; є) $\left(x - arctg\, x^{2n}\right)$;

ж) $\left(\dfrac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}\right)$; з) $\left((1+x) th\, nx\right)$; и) $\left(n\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)$.

Відповіді: а) $R \setminus \{-1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & якщо \quad |x| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & якщо \quad x = 1, \\ 0, & якщо \quad |x| > 1; \end{cases}$

б) $[-1;1]$, $f(x) \equiv 0$; в) R, $f(x) = \begin{cases} 1, & якщо\, |x| \le 1, \\ x^2, & якщо\, |x| > 1; \end{cases}$

г) $(0; +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2} + x}$; д) R, $\operatorname{sgn} x$; е) R, $f(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ x \ne k\pi \\ 1, & якщо\ x = k\pi, \end{cases}$

де $k \in Z$; є) R, $f(x) = \begin{cases} x, & якщо \quad |x| < 1, \\ x - \dfrac{\pi}{4}, & якщо \quad |x| = 1, \\ x - \dfrac{\pi}{2}, & якщо \quad |x| > 1; \end{cases}$

ж) R, $f(x) = \begin{cases} x, & якщо \quad |\sin x| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, & якщо \quad |\sin x| = \dfrac{1}{2}, \\ 0, & якщо \quad |\sin x| > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

з) R, $f(x) = \begin{cases} -(1+x), & якщо \quad x < 0, \\ 0, & якщо \quad x = 0, \\ 1 + x, & якщо \quad x > 0; \end{cases}$

и) $[0;+\infty)$, $f(x)=\begin{cases}0, & якщо\ x=0,\\ \dfrac{1}{2}\ln x, & якщо\ x>0.\end{cases}$ (Скористатись тим, що для

$\forall x>0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1)=\ln x$).

2. *Знайти область збіжності і суму таких функціональних рядів:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-2)^{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2x-1)^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x)^{n-1}}{n!}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{n}}{n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{(1+2x)(1+3x)\ldots(1+nx)}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(1-x^{n})(1-x^{n+1})}$.

Відповіді: а) $(1;3)$, $s(x)=\dfrac{x-2}{3-x}$; б) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, $s(x)=\dfrac{1}{4x^2-4x}$;

в) $(0;+\infty)$, $s(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$; г) R, $s(x)=1$; д) R, $s(x)=1-e^{-x}$;

е) R, $s(x)=1-\cos 2x$; є) R, $s(x)=\begin{cases}1, & якщо\ x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & якщо\ x\neq 0;\end{cases}$

ж) $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$, $s(x)=\ln(1+2x)$; з) $R\setminus\left\{0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\ldots\right\}$, $s(x)=\dfrac{1}{x}$;

и) $R\setminus\{-1;1\}$, $s(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{(1-x)^2}, & якщо\ |x|<1,\\ \dfrac{x}{(1-x)^2}, & якщо\ |x|>1.\end{cases}$

3. *Знайти область збіжності функціональних рядів:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{2^n \sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{nx}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n tg \frac{x}{2^n}$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x} \right)^n$.

Відповіді: а) $\left(\frac{1}{e}; e \right)$; б) $\left[-1; \frac{1}{3} \right)$; в) R; г) $(-\infty; 0)$; д) R;

е) $(-2; 2)$; є) $(-1; 1)$; ж) $R \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$; з) $R \setminus \{1\}$; и) $(-\infty; 0)$.

4. *Знайти область збіжності і область абсолютної збіжності функціональних рядів:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{2n} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \ln^n (x^2 + 2x)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+x} \right)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{3}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n} + 2}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n + \sqrt{x}}$.

Відповіді:

а) $(0; +\infty)$, $[0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $\left(0; -1 + \sqrt{e}\right)$; г) $(-1; 2)$; д) $\{0\}$; е) $\{3k \,|\, k \in Z\}$; є) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; ж) $(-1; 1)$; з) $R, 0$; и) $[0; +\infty)$.

5. *Довести, що задана послідовність рівномірно збігається на вказаній множині:*

а) $\left(\sin\left(ne^{-nx}\right)\right)$, $[1;+\infty\ )$; б) $\left(tg\left(\dfrac{n-1}{n}x\right)\right)$, $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$;

в; $\left(\dfrac{nx^2}{n+2x}\right)$, $[1;2]$; г) $\left(\dfrac{nx}{n^2x^2+1}\right)$, $[1;+\infty\ )$;

д) $\left(\dfrac{\ln(nx)}{nx^2}\right)$, $[1;+\infty\ )$; е) $\left(e^{-nx}\ln n\right)$, $(0;+\infty)$;

є) $\left(\dfrac{arctg\,nx}{\sqrt{n+x}}\right)$, $[0;+\infty)$; ж) $\left(n\sin\dfrac{1}{nx}\right)$, $[1;+\infty\ )$;

з) $\left(\dfrac{\sin\left(n\sqrt{x}\right)}{\ln(n+1)}\right)$, $[0;+\infty\ )$; и) $\ln\left(1+\dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n+x}}\right)$, $[1;+\infty\ )$.

6. *Дослідити на збіжність і рівномірну збіжність задану послідовність на вказаній множині:*

а) $\left(\dfrac{x^3n^3+2xn^2+x}{x^{3n^3}+1}\right)$; $[1;+\infty\ )$;

б) $\left(\dfrac{n^2+nx+x^2}{n^2-nx+x^2}\right)$, $[1;+\infty\ )$;

в) $\left(\cos\dfrac{1}{nx}\right)$, $[\pi;+\infty\ )$; г) $\left(\cos\dfrac{1}{nx}\right)$, $(0;\pi)$;

д) $\left(\sin\dfrac{nx+1}{2n}\right)$, R ; е) $\left(\dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{x}{n}\right)$, $(0;1)$;

є) $(arcrg\,2nx-arctg\,nx)$, $[1;+\infty)$; ж) $\left(arctg\,\dfrac{n}{x}\right)$, $[1;+\infty)$;

з) $\left(\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\right)$, $(0;1)$; и) $\left(\dfrac{\ln n^2x}{n^2x}\right)$, $(0;1)$.

Відповіді:

а) Рівномірно збігається до функції $f(x)=x$; б) нерівномірно збігається до функції $f(x)=1$; в) рівномірно збігається до функції $f(x)=1$;

г) нерівномірно збігається до функції $f(x)=1$; д) рівномірно збігається до функції $f(x)=\sin\frac{x}{2}$; е) нерівномірно збігається до функції $f(x)=\frac{1}{x^3}$; є) рівномірно збігається до функції $f(x)=0$; ж) нерівномірно збігається до функції $f(x)=\frac{\pi}{2}$; з) рівномірно збігається до функції $f(x)=0$; и) нерівномірно збігається до функції $f(x)=0$.

7. *Довести рівномірну збіжність на даних проміжках таких функціональних рядів:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$, $[0;+\infty\ )$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{n^3x^4+1}}$, R;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx^2}}{x^2+n\sqrt[3]{n}}$, R; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n}{x}}{x+2^n}$, $(0;+\infty)$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(\cos nx+1)}{n^2x^2+n}$, $[1;+\infty\ )$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{\sqrt{n^3+x^2}}$, $\left[0;\frac{1}{2}\right]$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n\arcsin\frac{x^2}{n^2+x^2}}{2^{2n}+1}$, $[-3;0\ )$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n\, arctg\, nx}{3^{\frac{n^2-1}{n}}}$, $[0;4]$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{\sqrt{x}}{x+n}\right)^3$, $[0;+\infty\ )$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$, $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$.

8. *Дослідити на збіжність і рівномірну збіжність функціональні ряди на заданих проміжках*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^n$, $[0;1]$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$, $(0;+\infty)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2x^5+1}\right)^2, [0;+\infty\ )$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{x}{n}\right)^2, \quad R$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad [0;1]$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x^2}\sin nx, \quad R$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{nx}\sin^2\frac{nx}{n^3+x}, \quad (0;+\infty)$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\,tg\,x}, \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{nx^2}{n^3x^2+1}\right), \quad R$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}arctg\frac{x}{2^n}, \quad [-2;2]$.

Відповіді: а) Збігається рівномірно; б) збігається нерівномірно;

в) збігається рівномірно (дослідити на екстремум функцію $\varphi_n=\frac{x^2}{n^2x^5+1}$ на відрізку $[0;1]$); г) збігається нерівномірно; д) збігається рівномірно;

е) збігається нерівномірно ($e^{-n^2x^2}<\frac{1}{n^2x^2}$, ряд збігається на R. Нерівномірна збіжність випливає з того, що при $x_n=\frac{1}{n}, u_n(x)=e^{-1}\sin 1$); є)збігається рівномірно ($u_n(x)=\frac{1}{nx}\cdot\frac{nx}{\frac{1}{nx}}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{n^3+x}}{\frac{nx}{n^3+x}}\sin\frac{nx}{n^3+x}$ і врахувати, що $|u_n(x)|<\frac{1}{n^3}$);

ж) збігається нерівномірно (на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ сума ряду дорівнює $\frac{1}{e^{tg\,x}-1}$, тобто ряд збігається. Нерівномірна збіжність випливає з того, що при $x_n=arctg\frac{1}{n}, \quad u_n(x_n)=e^{-1}$); з) збігається рівномірно (скористатись тим, що

$\ln\left(1+\dfrac{nx^2}{n^3x^2+1}\right)<\dfrac{nx^2}{n^3x^2+1}$);   и) збігається рівномірно (при

$x\neq 0$ $\quad u_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{2^n n(n+1)}\cdot\dfrac{arctg\,\frac{x}{n}}{\frac{x}{2^n}}$.   Оскільки

$$\varphi'(y)=\left(\frac{arctg\,y}{y}\right)'=\frac{1}{y^2}\left(\frac{y}{1+y^2}-arctg\,y\right),$$

$\psi'(y)=\left(\dfrac{y}{1+y^2}-arctg\,y\right)'=-\dfrac{2y^2}{(1+y^2)^2}$ і $\psi'(0)=0,$ то для $y>0$ $\psi'(y)<0$ і $\varphi'(y)$ спадає, причому $\lim\limits_{y\to 0+0}\varphi'(y)=0$; для $y>0$ $\varphi'(y)<0$, функція φ парна і $\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y)=1$.

9. *Дослідити на збіжність і рівномірну збіжність ряди на заданих проміжках:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2x+1}$, $\quad (0;1\,]$, $\quad [1;+\infty\,)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2x}\right)$, $\quad (0;1)$, $\quad [1;2]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+n^3x}}$, $\quad (0;1)$, $\quad [1;+\infty\,)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2+x\sqrt{n^3}}\sin\sqrt[5]{\dfrac{x}{n}}$, $\quad \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, $\quad \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\,\dfrac{1}{n^2x}$, $\quad (0;1\,]$, $\quad (1;+\infty)$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n^2+\cos\dfrac{n}{x+1}}$, $\quad (0;1)$, $\quad (1;+\infty)$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+\sqrt{\dfrac{\ln x}{n}}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\quad (1;e)$, $\quad (e;+\infty)$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+x}{n}$, $(0;1)$ $(1;+\infty)$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2x^2+1}tg\sqrt{\frac{x}{n}}$, $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2};1\right]$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{x}{n}\right)^2$, $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$;

10. Довести, що коли функціональні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

рівномірно збігаються на множині X, то $\forall a,\beta\in R$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n(x)+\beta v_n(x))$$

рівномірно збігається на множині X.

11. Довести, що коли функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ рівномірно збігається на множині X, а функція f обмежена на цій множині, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f(x)u_n(x)$ рівномірно збігається на X.

2. Властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей і рядів.

Нехай маємо функціональну послідовність (f_n), яка рівномірно збігається до функції f на проміжку X, і нехай $\forall n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=c_n$, де x_0 - гранична точка для множини X.

Що можна сказати про послідовність (c_n), і як вона пов’язана з граничною функцією?

Оскільки послідовність (f_n), збігається рівномірно на проміжку X, то за критерієм Коші $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{2}$. $\exists n_0 \quad \forall n > n_0, \quad \forall p \quad i \quad \forall x \in X$ виконується нерівність $\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Якщо у цій нерівності перейти до границі при $x \to x_0$, то прийдемо до нерівності $\left| c_{n+p} - c_n \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, тобто для послідовності (c_n) виконується критерій Коші. Отже, вона збіжна і нехай.

Покажемо, що $c = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Оскільки $f_n(x) \to f(x)$, то $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{3}$, $\exists n_1$ таке, що $\forall n > n_1 \quad i \quad \forall x \in X$ виконується нерівність $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$, то для того самого $\frac{\varepsilon}{3}$ $\exists n_2$ таке, що $\forall n > n_2$ виконується нерівність $\left| c_n - c \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Візьмемо конкретне $n > \max(n_1; n_2)$, тоді одночасно виконуються нерівності $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ і $\left| c_n - c \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Крім того, існування границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$ забезпечує для того самого $\frac{\varepsilon}{3}$ існування $\delta > 0$ такого, що $\forall x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < \left| x - x_0 \right| < \delta$, виконується нерівність $\left| f_n(x) - c_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Отже, $\forall x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < \left| x - x_0 \right| < \delta$, виконується нерівність

$$\left| f(x) - c \right| = \left| f(x) - f_n(x) + f_n(x) - c_n + c_n - c \right| \le \left| f(x) - f_n(x) \right| + \left| f_n(x) - c_n \right| + \left| c_n - c \right| < \varepsilon$$

А це й означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Теорема 1. ***(про почленний перехід до границі у послідовностях).*** *Якщо функціональна послідовність* $\left(f_n\right)$ *рівномірно збігається на проміжку* X *і* $\forall n$ *існує границя*

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$$

де x_0 *- гранична точка множини* X *, то послідовність* c_n *збіжна і*

$$\lim_{n \leftarrow \infty_0} c_n = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Теорема 2. (про неперервність граничної функції). *Якщо функціональна послідовність неперервних на проміжку* X *функцій рівномірно збігається на ньому, то її гранична функція є непевною на цьому проміжку.*

Нехай функціональна послідовність $\left(f_n\right)$ неперервних функцій рівномірно збігається на ньому. Тоді, з одного боку, $\forall n$ існує інтеграл $\int_a^b f_n(x)dx$, з другого – в силу неперервності на відрізку $\left[a;b\right]$ граничної функції f існує інтеграл.

Постає питання, чи буде збігатись числова послідовність. Якщо це так, то чи буде число $\int_a^b f\ (x)dx$ її границею. З рівномірної збіжності послідовності $\left(f_n\right)$ до функції f на відрізку $\left[a;b\right]$ випливає, що $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{b-a}$, $\exists n_0$ таке, що $\forall n > n_0$ і $\forall x \in \left[a;b\right]$ виконується нерівність

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тоді $\forall n > n_0$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f_n(x) - f(x)\right|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon.$$

Отже,

.

Теорема 3. ***(про по членне інтегрування послідовності).*** *Якщо на відрізку* $[a;b]$ *функцій рівномірно збігається до функції* f *на ньому, то послідовність* $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ *збігається, причому*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(x)dx\,.$$

Теорема 4. ***(про по членне диференціювання послідовності).*** *Якщо функціональна послідовність* (f_n) *неперервно диференційованих на відрізку* $[a;b]$*функцій збігається хоча в одній точці цього відрізка. а послідовність* $(f_n^{'})$ *рівномірно збігається на, то і послідовність*(f_n) *рівномірно збігається на* $[a;b]$ *і*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

Приклад 1. Довести, що коли функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігається на проміжку X і $\forall n$ існує границя $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$, де x_0- гранична точка множини X, то числовий ряд збігається, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Розв'язання. Оскільки за умовою ряд рівномірно збігається на проміжку X , то рівномірно збіжною на цьому проміжку буде його послідовність часткових сум (s_n). Для кожного члена цієї послідовності існує границя

$$\lim_{x\to x_0} s_n(x) = \lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Тоді за теорема 1 послідовність $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ збігається і

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\leftarrow\infty} s_n(x),$$

тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Приклад 2. Знайти

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{x^n+1}.$$

Розв'язання. Оскільки на інтервалі $(0;1)$ послідовність $\left(\frac{x^n}{x^n+1}\right)$ спадає і обмежена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ збігається, то за ознакою Абеля ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$$

рівномірно збігається на інтервалі $(0;1)$.

Врахувавши, що $\forall n$

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n},$$

маємо

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Приклад 3. Знайти область визначення функції

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$$

і дослідити її на неперервність.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right| = |x|,$$

то за ознакою Коші ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (2.1)$$

збігається при $|x|<1$ і розбігається при $|x|>1$. При $|x|=1$не виконується необхідна умова збіжності. Отже, функція f визначена на інтервалі $(-1;1)$.

Нехай $0<r<1$. Тоді $\forall x\in[-r;r]$ і $\forall n$

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n \le \left(r+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Крім того, $\forall q$, яке задовольняє нерівність $r<q<1$, $\exists n_0$ таке, що $\forall n>n_0$ виконується нерівність $r+\frac{1}{n}<q$. Тоді для всіх таких n і $\forall x\in[-r;r]$

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n < q^n$$

і за ознакою Вейєрштрасса ряд (2.1) рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[-r;r]$,. Кожний член ряду (2.1) є неперервною функцією на відрізку $[-r;r]$, а отже, і сума ряду (2.1) є неперервна на інтервалі $(-1;1)$.

Приклад 4. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^3,$$

то за ознакою Даламбера ряд збігається при $|x|<1$ і розбігається при $|x|>1$. У точці $x=1$ він збігається, як ряд лейбніцевого типу, у точці $x=-1$ розбігається.

Таким чином, областю збіжності заданого ряду є проміжок $(-1;1]$. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}.$$

Цей ряд збігається на інтервалі $(-1;1)$ і його сума дорівнює $\dfrac{1}{1+x^2}$. На будь-якому відрізку $[-r;r]$ де $0<r<1$, він збігається рівномірно, причому кожний його член є неперервною на інтервалі $(-1;1)$ функцією. Про інтегрувавши цей ряд почленно у межах від 0 до x, де $x\in(-1;1)$, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=arctg\ x.$$

Отже, $\forall x\in(-1;1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=arctg\,x$$

Оскільки за ознакою Абеля ряд рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$, то його сума є неперервною функцією на цьому відрізку. Звідси випливає, що остання рівність має місце на проміжку $(-1;1]$, зокрема,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 5. Знайти область визначення і дослідити на неперервність та диференційованість функцію

$$\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

Розв'язання. Ряд збігається при $x>1$, тобто функція визначена на проміжку .

Нехай $\forall n$

$$\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^\alpha}$$

і за ознакою Вейєрштрасса ряд рівномірно збігається на відрізку $[\alpha;\beta]$. Отже, сума цього ряду неперервна на цьому відрізку, зокрема в точці. Оскільки x_0 довільна точка з проміжку $(1;+\infty)$, то задана функція неперервна на ньому. Члени заданого ряду неперервно диференційовані на проміжку функції, і ряд, одержаний по членним диференціюванням даного ряду, має вигляд

Нехай x_0 - довільна точка з проміжку $(1;+\infty)$ і відрізок $[\alpha;\beta]$такий, що $x_0 \in [\alpha;\beta] \subset (1;+\infty)$. На цьому відрізку

$$\frac{\ln n}{n^x} \le \frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}$, де $\alpha > 1$, збігається. Отже, ряд, складений з похідних членів заданого ряду, рівномірно збігається на відрізку. Звідси випливає, що функція на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому

$$\xi'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Зокрема, функція в точці $x_0 \in [\alpha;\beta]$. А оскільки x_0- довільна точка з проміжку $(1;+\infty)$, то функція ξ диференційована в кожній точці цього проміжку.

Вправи для самостійного роз'язання.

1. *Знайти:*

а) $\lim\limits_{x\to 0+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$**;** **б)** $\lim\limits_{x\to 0+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2 + xn!}$**;** **в)** $\lim\limits_{x\to 0+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)x} - 1}{(-1)^n x(2n-1)! + x^3}$

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$**.**

Відповіді: а) 1; б) e; в) $\cos 1$; г) $\frac{\pi^2}{6}$.

2.:*Знайти область визначення функції f і дослідити її на неперервність*:

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n^2}$; б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$;

в) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\,arctg\sqrt{\frac{x}{n}}$;

г) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$; д) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

Відповіді: а) існує і неперервна при $|x|\le\frac{1}{2}$; б) існує і неперервна при $x\ge 0$; в) існує і неперервна при $x>0$; г) існує і неперервна на R; д) існує на R, розривна в точці $x=0$ і неперервна в усіх інших точках.

3. *Знайти суми таких рядів*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Відповіді: а) $s(x)=-\ln(1-x),\ s=\ln 2$;

б) $$s(x)=\begin{cases}1+\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, & \textit{якщо}\quad x\in[-1;0)\cup(0;1),\\ 0, & \textit{якщо}\quad x=0,\\ 1, & \textit{якщо}\quad x=1, s_1=1,\ s_2=\ln 2-1\end{cases}$$

в) $$s(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x^2)\ln(1-x)}{2x^2}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4}, & \textit{якщо}\quad x\in[-1;0)\cup(0;1),\\ 0, & \textit{якщо}\quad x=0,\\ \dfrac{3}{4}, & \textit{якщо}\quad x=1,\quad s_1=\dfrac{3}{4},\quad s_2=\dfrac{1}{4};\end{cases}$$

$$
\text{г) } s(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{8}\ln\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x}{2}, & \text{якщо} \quad |x<1|, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо} \quad x=1, \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{якщо} \quad x=-1, \quad s=\dfrac{1}{2}. \end{cases}
$$

4. *Знайти область визначення функції f і дослідити її на неперервність та диференційованість:*

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{3^n}$; б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$;

в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1+x^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^3e^{-nx}$.

Відповіді:

а) $(-\infty;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; в) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; г) $[0;+\infty)$

5. *Знайти суми таких рядів:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+2)}{n+1}x^n$.

Відповіді: а) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$; б) $\dfrac{2}{(1-x)^3}$; в) $\dfrac{3-x}{(1-x)^3}$; г) $\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$.

3. Степеневі ряди і їхні властивості

Означення 1. *Функціональний ряд виду*

$$
\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{3.1}
$$

називається степеневим рядом.

Числа називаються його коефіцієнтами. У степеневому ряді послідовність членів є послідовністю степеневих функцій вигляду

$$u_n(x) = a_n x^n,$$

а послідовністю його часткових сум є послідовність многочленів вигляду

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Кожний член ряду і кожна його часткова сума є неперервними на R функціями.

Для кожного $x_0 \in R$ числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ або збігається(абсолютно або умовно), або розбігається, причому в точці $x_0 = 0$збігається будь-який степеневий ряд.

Нехай у точці $x_0 \neq 0$ ряд (3.1) збігається, тобто збігається числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$. Тоді $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, і послідовність $\left(a_n x_0^n\right)$ обмежена. А останнє означає, що $\exists M > 0$ таке, що для $n = 0, 1, 2...$, $\left|a_n x_0^n\right| \leq M$. Звідси випливає, що для $n-$го члена ряду (3.1)має місце оцінка

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Якщо $|x| < |x_0|$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ збігається. Отже, за ознакою порівняння для таких x абсолютно збігається ряд (3.1).

Таким чином, для степеневих рядів встановлено важливий факт, відомий під назвою *теореми Абеля.*

Якщо степеневий ряд (3.1) збігається в точці $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається $\forall x$, для яких $|x| < |x_0|$.

Якщо ряд (3.1) у точці $x_0 \neq 0$ розбігається, то припущення про те, що $\exists x$ таке, що $|x| > |x_0|$, і в цій точці цей ряд збігається, відразу приводить до протиріччя.

Отже, якщо ряд (3.1) розбігається в точці $x_0 \neq 0$, то він розбігається і $\forall x$ таких, для яких $|x| > |x_0|$.

Приклад 1. Знайти область збіжності таких рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

Розв'язання. а) $\forall x \in R \ \ (x \neq 0)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

і ряд збігається абсолютно на всій числовій прямій, тобто $X = R$.

б) Ряд збігається, якщо $|x| < 1$, тобто $X = (-1;1)$.

в) $\forall x > 0 \ \ \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = (n+1)x.$

Тоді яким би не було $x_0 \in (0;+\infty)$, $\exists n_0 \ \ \forall n > n_0 \ \ (n+1)x_0 > 1$, і за ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ розбігається. Проте тоді ряд в) розбігається і $\forall x$, для яких $|x| > x_0$.

А оскільки x_0 - довільне додатне число, то ряд в) розбігається $\forall x \neq 0$.

Таким чином, степеневий ряд може збігатись на всій числовій прямій, тільки в одній точці і, нарешті, може мати як точки збіжності, відмінні від 0, так і точки розбіжності.

Якщо степеневий ряд (3.1) розбігається в точці x_0, то множина всіх точок збіжності обмежена зверху. Дійсно, за теоремою Абеля $\forall x$, для якого $|x| > |x_0|$,, ряд розбігається. І якщо $x_1 > |x_0|$, то для кожної точки збіжності виконується нерівність $x < x_1$.

Нехай R - точна верхня грань множини точок збіжності. Покажемо, що ряд (3.1) збігається, причому абсолютно. Дійсно, яким би не було з інтервалу $(-R;R)$, за означенням точної верхньої грані $\exists x'$ таке, що $|x| < x' < R$, і точці ряд збігається. Тоді за теоремою Абеля в точці x ряд збігається, причому абсолютно.

Покажемо, що $\forall x \in (-R;\, R)$ ряд (3.1) розбігається. Дійсно, якщо x - довільна, але фіксована точка, яка не належить інтервалу $(-R;R)$, то $\exists x'$, для якого виконується нерівність $R < x' < |x|$. Тоді за означенням точної верхньої грані в точці x' ряд (3.1) розбігається, а отже, він розбігається і у вибраній точці x.

Отже, будь-який степеневий ряд або збігається на всій числовій прямій, або для нього існує таке число R, яке називають *радіусом збіжності,* що $\forall x \in (-R;\, R)$ ряд збігається, причому абсолютно, а поза цим інтервалом ряд розбігається (інтервал $(-R;R)$ називають *інтервалом збіжності)*, або він збігається тільки в одній точці $x = 0$.

У першому випадку областю збіжності є множина $(-\infty;+\infty)$, у другому – одна з множин $(-R;R)$, $[-R;R)$, $(-R;R]$, $[-R;R]$, у третьому – одноелементна множина $\{0\}$.

Якщо вважати, що у першому випадку. а у третьому - $R = 0$, то задача відшукання області збіжності степеневого ряду зводиться до задачі відшукання R і дослідження на збіжність рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n R^n\,, \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

якщо $0 < R < +\infty$.

Приклад 2. Довести, що коли існує границя

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (3.2)$$

Якщо ж послідовність $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ нескінченно велика, то $R = +\infty$. Скориставшись цим, знайти радіуси збіжності таких рядів:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n!}}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{n!}x^n$.

Розв'язання. Для степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n x^{n+1}}{a_{n+1}x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R > 0,$$

то за ознакою Даламбера ряд збігається при $\frac{|x|}{R} < 1$, і розбігається при $\frac{|x|}{R} > 1$, тобто ряд збігається для всіх, для яких , і розбігається для всіх x, для яких $|x| > R$. А це й означає, що R є радіусом збіжності такого степеневого ряду.

Якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0,$$

то послідовність $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ нескінченно велика, і яким би не було x відмінне від 0, $\exists n_0 \quad \forall n > n_0$

$$|x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1.$$

За ознакою Даламбера ряд розбігається $\forall x \neq 0$.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$ і $R = 4$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=+\infty$ і $R=+\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$ і $R=0$.

Приклад 3. Довести. що коли існує границя

то

$$R=\frac{1}{l}, \tag{3.3}$$

якщо $l>0$, і $R=+\infty$, якщо $l=0$.

Якщо ж послідовність $(\sqrt[n]{|a_n|})$ нескінченно велика, то $R=0$.

Знайти радіуси збіжності таких рядів:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{2n+1}{2n+3}\right]^{2n^2}x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^{n^2}x^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^2+1\right)^n x^n$.

Розв'язання. Для степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\leftarrow\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Якщо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l>0,$$

то за ознакою Коші ряд збігається, якщо $|x|l<1$, і розбігається, якщо $|x|l>1$, тобто ряд збігається для всіх, для яких $|x|<\dfrac{1}{l}$, і розбігається для всіх x, для яких $|x|>\dfrac{1}{l}$. А це й означає, що $\dfrac{1}{l}$ є радіусом збіжності такого степеневого ряду.

Якщо ж

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0,$$

то, яким би не було x, $\exists n_0 \quad \forall n>n_0$ виконується нерівність

$$|x|\sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

За ознакою Коші ряд збігається на R.

Для заданих рядів маємо:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)^{2n}} = \dfrac{e}{e^3} = e^{-2}, \quad R = e^{-2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}{\left(2+\dfrac{3}{2n}\right)^{n}} = 0, \qquad R = \infty$;

в) $\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{n^2+1}{n+1}$, а послідовність $\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)$ нескінченно велика і $R = 0$.

Може трапитись, що не існує ні $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. не $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Тоді можна скористатись результатом, який має місце для будь-якого степеневого ряду.

Розглянемо послідовність. Ця послідовність або обмежена і тоді існує

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sup_{k>n}\sqrt[k]{|a_k|},$$

або необмежена і тоді вважатимемо, що

.

Нехай верхня границя послідовності існує. Якщо вона дорівнює 0, то

,

і, як показано в прикладі 3, $R = \infty$.

Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 0$. Покажемо, що $\forall x$, для яких $|x| < \dfrac{1}{\rho}$, ряд (3.1) збігається, а $\forall x$, для яких $|x| > \dfrac{1}{\rho}$, цей ряд розбігається, тобто що $\dfrac{1}{\rho}$ є його радіусом збіжності.

Нехай x – довільне, але фіксоване число, відмінне від нуля, таке, що $|x| < \frac{1}{\rho}$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що

$$|x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon} \quad \left(\varepsilon < \frac{1 - |x|\rho}{|x|} \right).$$

Тоді оскільки ρ є найбільшою границею з усіх часткових границь послідовності $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, то для вибраного ε $\exists n_0$ таке. що $\forall n > n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon .$$

Звідси випливає, що $\forall n > n_0$

$$|x|\sqrt[n]{|a_n|} < |x|(\rho + \varepsilon)$$

або

$$\left|a_n x^n\right| < q^n ,$$

де $q = |x|(\rho + \varepsilon) < 1$.

За ознакою порівняння числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

збігається абсолютно. Отже, інтервал $\left(-\frac{1}{\rho}; \frac{1}{\rho} \right)$ є інтервалом збіжності ряду (3.1).

Нехай x – довільне, але фіксоване число таке, що $|x| > \frac{1}{\rho}$. Виберемо $\varepsilon > 0$ таке, що

$$|x| > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0 .$$

За означенням часткової границі для цього ε існує підпослідовність $\left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)$ така, що $\forall k$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon .$$

Звідси випливає, що $\forall k$

$$|x|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |x|(\rho - \varepsilon) > 1$$

або

$$\left|a_{n_k} x^{n_k}\right| > 1,$$

тобто для числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не виконується необхідна умова збіжності, і тому він розбігається. А оскільки $x -$довільне число, для якого $|x| > \frac{1}{\rho}$, то ряд (3.1) розбігається поза інтервалом $\left(-\frac{1}{\rho}; \frac{1}{\rho}\right)$.

Нехай

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty .$$

Тоді послідовність $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ має нескінченно велику підпослідовність $\left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)$. І яким би не було $x \neq 0$ $\exists k_0$ таке, що $\forall k > k_0$ виконується нерівність

$$|x|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$$

або

$$\left|a_{n_k} x^{n_k}\right| > 1.$$

Останнє означає, що для числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не виконується необхідна умова збіжності. Отже, ряд (3.1) розбігається $\forall x \neq 0$.

Таким чином, доведено ще раз, що кожний степеневий ряд має радіус збіжності і його можна знайти за формулою Адамара- Коші:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3.4}$$

де $R=+\infty$, якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, і $R=0$, якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$.

Формули (3.2) - (3.4) становлять основний інструментарій для визначення радіуса збіжності, а отже, і області збіжності ряду (3.1).

Приклад 4. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)\frac{x}{n+1}$$

Розв'язання. Очевидно, що не можна для цього ряду розглядати послідовність $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ (при $n=3k$ $\sin\frac{n\pi}{3}=0$). Не існує також границі $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Розглянемо послідовність

.

Оскільки

$$\left|\sin\frac{n\pi}{3}\right|=\begin{cases}0, & якщо \quad n=3k\\ \frac{\sqrt{3}}{2}, & якщо \quad n\neq 3k\end{cases}$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1,$$

то послідовність $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ має дві часткові границі $c_1=0,\ c_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, за теоремою Адамара – Коші $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Приклад 5. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+(-3)^n}{n+1}x^n.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{5^{n+1}+(-3)^{n+1}}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{5},$$

то $R=\frac{1}{5}$, і ряд збігається абсолютно на інтервалі $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Якщо $x=-\frac{1}{5}$, маємо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+(-3)^n}{n+1}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

який можна подати у вигляді суми двох рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)} \qquad \text{і} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Отже, цей числовий ряд збігається, причому умовно, бо модуль його $n-$го члена

$$\left|\frac{1}{n+1}\left((-1)^n\right)+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right|\geq\frac{2}{5(n+1)}.$$

Якщо $x=\frac{1}{5}$, маємо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right),$$

який можна подати у вигляді суми розбіжного і збіжного рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} \qquad \text{і} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Звідси випливає, що в точці $x=\frac{1}{5}$ заданий ряд розбігається.

Таким чином, областю збіжності заданого степеневого ряду є проміжок $\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Степеневим рядом називають ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,$$

який заміною $x-a=t$ зводиться до ряду виду (3.1). Радіус збіжності знаходиться за допомогою формул (3.2)-(3.4), і якщо $0<R<+\infty$, то інтервалом збіжності буде інтервал $(-R+a;a+R)$. При $R=+\infty$ ряд збігається на R, при $R=0$ ряд збігається тільки в точці $x=a$.

Приклад 6. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{\sqrt{n}}\ln\frac{3n-2}{3n+2}.$$

Розв'язання. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{\ln(1+\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta},$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{3n-2}{3n+2}:\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\frac{3n+1}{3n+5}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\ln\left(1-\frac{4}{3n+2}\right):\ln\left(1-\frac{4}{3n+5}\right)\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n+2}=1.$$

Отже, $R=1$, і ряд збігається абсолютно на інтервалі $(-4;-2)$. При $x=-4$ і $x=-2$ маємо відповідно ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\frac{3n-2}{3n+2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{3n-2}{3n+2}.$$

Очевидно, що ряд

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{3n-2}{3n+2}$$

є рядом, складеним з абсолютних величин як першого, так і другого ряду. Врахувавши, що

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{3n-2}{3n+2}\right)\sim\left(\frac{2}{\sqrt{n}(3n+2)}\right)$$

і що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{n}(3n+2)}$$

збігається, дістаємо, що заданий степеневий ряд абсолютно збігається в точках $x=-4$ і $x=-2$. Отже, його областю збіжності є відрізок $[-4;-2]$.

Приклад 7. Довести, що коли ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

мають радіуси збіжності R_1 і R_2 відповідно, причому $R_1 \neq R_2$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$$

має радіус збіжності $R = \min(R_1, R_2)$.

Розв'язання. Припустимо для означеності, що $R_1 < R_2$. Тоді $\forall x$, для яких $|x| < R_1$, обидва ряди збігаються, а отже, для таких x збігається сума цих двох рядів. Якщо ж $R_1 < x < R_2$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ збігається. Тоді з припущення, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ збігається, випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Звідси, а також із теореми Абеля маємо, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ розбігається $\forall x$, для яких $|x| > R_1$. А це означає, що R_1 є радіусом збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$.

Приклад 8. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} - \frac{\left(3 + (-1)^n\right)^n}{n} + \frac{\left(2 + (-1)^n\right)^n}{n^2} \right) x^n .$$

Розв'язання. Подамо заданий ряд як суму трьох степеневих рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} x^n, \qquad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3 + (-1)^n\right)^n}{n} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{n^2} x^n$$

і знайдемо радіуси збіжності для кожного з них. Маємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}=1,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|-\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt[n]{n}}=4,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[n]{n^2}}=3$$

.

Таким чином, радіуси збіжності дорівнюють відповідно $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$. А на підставі прикладу 7 маємо, що радіус збіжності заданого ряду дорівнює

$$R=\min\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}.$$

При $x=-\frac{1}{4}$ і $x=\frac{1}{4}$ перший і третій ряди збігаються.

Для другого ряду маємо:

при $x=-\frac{1}{4}$

$$s_{2n}=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(3+(-1)^k)^k}{k(-4)^k}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}-\frac{1}{2n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

при $x=\frac{1}{4}$

$$s_{2n}=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(3-(-1)^k)^k}{n\cdot 4^k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

тобто послідовність (s_{2n}) в обох випадках є необмеженою. Таким чином, областю збіжності заданого ряду є інтервал $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Приклад 9. Довести, що коли степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ має радіус збіжності $R>0,$ а функція f є його сумою на інтервалі збіжності, то:

а) функція f має на інтервалі $(-R;R)$ похідні будь-якого порядку, і $f^{(k)}$ є сумою степеневого ряду, одержаного $k-$кратним по членним диференціюванням даного;

б) $\forall x \in (-R;R)$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} .$$

Розв'язання. Нехай $x \in (-R;R)$. Тоді $\exists\, r$ таке, що $x \in [-r;r] \subset (-R;R)$, і на відрізку $[-r;r]$ заданий ряд збігається рівномірно. Тому можливість по членного диференціювання й інтегрування безпосередньо випливає з того, що ці операції не змінюють радіуса збіжності і відповідних теорем про диференційованість й інтегрованість суми функціонального ряду.

Приклад 10. Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = 1,$

то $R=1$. При $x=-1$, $x=1$ ряд розбігається. Отже, областю збіжності цього ряду є інтервал $(-1;1)$.

Про диференціюємо його почленно. Дістанемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$, областю збіжності якого є той самий інтервал.

Нехай $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Тоді $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}$.

Врахувавши, що $f(0)=0$, маємо

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Вправи для самостійного розв'язування

1. *Знайти радіус збіжності степеневого ряду:*

а) $x+\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{x^3}{300}+\dfrac{x^4}{4000}+\ldots;$

б) $1+3x+18x^2+81x^3+324x^4+\ldots;$

в) $(x-2)+\dfrac{2!(x-2)^2}{2^2}+\dfrac{3!(x-2)^3}{3^3}+\ldots;$

г) $x+4x^2+27x^3+256x^4+3125x^5+\ldots;$

д) $x+\dfrac{\sqrt{2}}{2!}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3!}x^3+\dfrac{2}{4!}x^4+\ldots;$

е) $(x-4)-\dfrac{(x-4)^2}{3}+\dfrac{(x-4)^3}{5}+\dfrac{(x-4)^4}{7}+\ldots;$

є) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\log_2 3}{3}x^3+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{\log_2 5}{5}x^5+\ldots;$

ж) $2x+\left(\dfrac{9}{4}x\right)^2+\left(\dfrac{64}{27}x\right)^3+\left(\dfrac{625}{256}x\right)^4+\ldots;$

з) $1-\dfrac{(x+1)}{1!}+\dfrac{(x+1)^2}{2!}-\dfrac{(x+1)^3}{3!}+\ldots;$

и) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{64}x^3+\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{25}{1024}x^5+\ldots;$

Відповіді.

а) 10; б) $\dfrac{1}{3}$; в) e; г) 0; д) $+\infty$; е) 1; є) 1; ж) e^{-1}; з) $+\infty$; и) 4.

2. *Знайти область збіжності ряду:*

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n;$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} x^n;$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n^2};$

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2x+1)^n}{3n-2};$

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^{4n}$; е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}x^{5n}$;

є) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+arctg\frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2}(x+2)^n$; ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\ln\cos\frac{1}{3^n}\right)x^n$;

з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^3}(x-1)^n$; и) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{nx}{e}\right)^n$.

Відповіді. а) $\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$; б) $(-1;1)$; в) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; г) $[-1;0)$;

д) $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$; е) $\left[-\sqrt[5]{3};\sqrt[5]{3}\right]$; є) $\left(-\frac{1}{e}-2;-2+\frac{1}{e}\right)$; ж) $(-9;9)$;

з) $\left(1-e^2;1+e^2\right)$; и) $(-1;1)$

3. *Знайти радіус й інтеграл збіжності степеневого ряду, дослідити ряд на абсолютну і умовну збіжність на кінцях інтервалу збіжності:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}+1}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}(x+2)^n$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(n^2+2)(x-2)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n}{2^{n-1}n^n}(x+1)^n$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}(x-1)^n$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n(x-1)^n$.

Відповіді: а) 1, $(-1;1)$, при $x=-1$, $x=1$ збігається абсолютно; б) 1, $(0;2)$, при $x=0$ збігається умовно, при $x=2$ розбігається; в) 1, $(-3;-1)$, при $x=-3$, $x=-1$ розбігається; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}};2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, при $x=2-\frac{1}{\sqrt{2}}, x=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$ розбігається; д) 2, $(0;4)$, при $x=0, x=4$ збігається умовно; е) 2, $(-1;3)$, при $x=-1, x=3$ розбігається; є) 1, $(-1;1)$, при $x=-1$, $x=1$ розбігається; ж) 1, $(-2;0)$, при $x=-2, x=0$ розбігається;

з) 1, $(0;2)$, при $x=0, x=2$ збігається абсолютно; и) 1, $(0;2)$, при $x=0$ розбігається, при $x=2$ збігається умовно.

4. *Знайти область збіжності функціонального ряду:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\, tg^n x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcrg^n \frac{1}{x}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^n}{3^n}x^n(1-x)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin^n x$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^n x}{3^n(n+1)}$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{2^n}\cdot\frac{1}{(x-1)^n}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}e^{-nx}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right)^n$;

и) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^3\cdot 3^n}\left(2^{4x^2-1}-5\right)^n$.

Відповіді: а) $\bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$; б) $(-\infty;ctg1)\cup(ctg1;+\infty)$; в) $(0;+\infty)$;

г) $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$; д) $\bigcup\limits_{n\in Z}\left(-\frac{\pi}{6}+2n\pi;\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)$; е) $\left(e^{-3};e^3\right]$; є) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$;

ж) $(1;+\infty)$; з) $[0;1,6]\cup[2,5;+\infty]$; и) $\left[-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$.

5. *Знайти радіус збіжності і суму степеневого ряду:*

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3nx^{3n-1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x-1)}{n(n+3)}$.

Відповіді: а) $+\infty, ch\,x$. (Скористатись двома рядами з відомими сумами $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=e^{-x}$); б) $+\infty, sh\,x$; в) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4x+1}$; г) 1; $\frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$;

д) 2, $\frac{1}{2}arctg\,x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$; е) 1, $(x+1)\ln(x+1)-x$; є)2, $\frac{1}{2}\ln(1-x)$;

ж) 1, $arctg\,(x-4)$; з) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\ln\frac{4x^2+6x+3}{4x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{4x+3}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$; (Про інтегрувати ряд $\sum_{n=0}^{\infty}t^{3n}$).

и) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\ln 3x+\frac{1}{3(3x-1)^3}\left(\frac{(3x-1)^3}{3}-\frac{(3x-1)^2}{2}+3x-1-\ln 3x\right).$

4. Критерії оцінювання підсумкового контролю (екзамен)

Для навчальної дисципліни «Математичний аналіз» за навчальним планом передбачає підсумковий контроль у формі усного екзамену. На екзамен відводиться 20 балів. Здобувач вищої освіти може складати екзамен, якщо кількість отриманих впродовж вивчення дисципліни балів не менше як 40. Накопичені здобувачем бали під час вивчення навчальної дисципліни не аналюються, а сумуються. Оцінка за екзамен не може бути меншою за кількість накопичених ним балів.

Бали	Критерії
0 балів	Здобувач не відповідає на запитання.
1-5 балів	Здобувач розпізнає деякі об'єкти вивчення та визначає їх на побутовому рівні, може описувати деякі об'єкти вивчення; має фрагментарні уявлення з предмета вивчення; використовує елементарні прийоми виконання практичного завдання.
6-10 балів	Здобувач знає окремі факти, що стосуються навчального матеріалу; виявляє здатність елементарно висловлювати думку; виконує частину практичного завдання.
11-15 балів	Здобувач надає відповіді на запитання в цілому правильні, але здобувач припускається помилок у визначеннях. Здобувач робить власні висновки, наводить приклади практичного використання; виконує практичне завдання з незначними огріхами.
16-20 балів	Здобувач надає відповіді на запитання повні, обґрунтовані, логічно побудовані, з прикладами практичного використання; відповідаючи, здобувач розмірковує, робить власні висновки виконує правильно практичне завдання.

5. Рекомендовані джерела інформації

Основна література

1. Радченко О. М. Математичний аналіз. Київ : ТВіМС, 2000. Т. 2 : Ряди та інтеграли з параметром. Функції декількох змінних. 152 с.
2. Радченко О. М. Математичний аналіз : Навч. посіб. Київ : ТВіМС, 2003. Т. 1. 248 с.
3. Свердан П. Л. Вища математика : мат. аналіз і теорія ймовірностей : підруч. Київ : Знання, 2008. 450 с.
4. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ : Вища шк., 2005. Ч. 1. 447 с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ : Вища шк., 2005. Ч. 2. 510 с.
6. Фіхтенгольц Г. М. Основи математичного аналізу. Лань, 2022. 444 с. http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wpontent/uploads/2018/03/fihtengolc.kurs_dif_int_isch.1.pdf

Допоміжна література

1. Покровский К. Д. Вибрані задачі з математичного аналізу для студентів фізичного факультету. Київ : ВПЦ "Київ. ун-т", 2007. 40 с.
2. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Житомир: ЖДТУ, 2004. Книга 1: Лінійна алгебра та аналітична геометрія. 554 с.
3. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Житомир: ЖДТУ, 2012. Книга 2: Лінійна алгебра та аналітична геометрія. 576 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

1. Бібліотека університету Ушинського URL: https://pdpu.edu.ua/sferi-diyalnosti/naukova/universytetska-biblioteka
2. Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського URL: http://www.nbuv.gov.ua/
3. Сайт Міністерства освіти і науки України: www.mon.gov.ua