УДК 517.925

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКЕ МІСТИТЬ ДОБУТОК РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ ВІД НЕВІДОМОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНОЇ

О. О. Чепок

Держ. заклад "Південноукраїн. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Ушинського"
вул. Старопортофранківська, 26, Одеса, 65026, Україна
e-mail:olachepok@ukr.net

We obtain the necessary and sufficient conditions for the existence of regularly varying solutions of the second-order differential equations the right-hand sides of which contain the product of a regularly varying nonlinearity of an unknown function and a rapidly varying nonlinearity of the derivative of an unknown function as arguments tend to zero or infinity. Asymptotic representations of these solutions and their first-order derivatives are also found.

Отримано необхідні й достатні умови існування правильно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток правильно змінної нелінійності від невідомої функції та швидко змінної нелінійності від похідної невідомої функції при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності. Також одержано асимптотичні зображення таких розв'язків і їхніх похідних першого порядку.

1. Постановка задачі. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_1(y)\varphi_0(y'), \tag{1.1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, функція $p\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ є неперервною функцією, функція $\varphi_1 : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ є правильно змінною [1, с. 17] порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_0, а функція $\varphi_0 : \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_1} і така, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_1 \\ y \in \Delta_{Y_1}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi_0'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_1}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_1 \\ y \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{\left(\varphi_0'(y)\right)^2} = 1 \tag{1.2}$$

При цьому $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i[$, або $]Y_i, y_i^0]$, $i \in \{0, 1\}$. При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$.

Означення 1.1. *Розв'язок y рівняння (1.1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо*

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad i = 0, 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Метою цієї роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівнянні (1.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків і їхніх похідних першого порядку для $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.

Згідно з апріорними асимптотичними властивостями такі розв'язки є правильно змінними функціями порядку $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}$, а їхні похідні першого порядку є правильно змінними функціями порядку $\dfrac{1}{\lambda_0 - 1}$ при $t \uparrow \omega$ [2].

2. Основні результати. Введемо такі необхідні далі позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1},$$

$$\Phi_0(z) = \int\limits_{A_\omega}^{z} \frac{ds}{|s|^{\sigma_1}\varphi_0(s)}, \quad \Phi_1(z) = \int\limits_{A_\omega}^{z} \Phi_0(s)\, ds,$$

$$A_\omega = \begin{cases} y_1^0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_1^0}^{Y_1} \frac{ds}{|s|^{\sigma_1}\varphi_0(s)} = \pm\infty, \\ Y_1, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_1^0}^{Y_1} \frac{ds}{|s|^{\sigma_1}\varphi_0(s)} = \text{const}, \end{cases}$$

$$Z_0 = \lim_{\substack{z \to Y_1 \\ z \in \Delta_{Y_1}}} \Phi_0(z), \quad Z_1 = \lim_{\substack{z \to Y_1 \\ z \in \Delta_{Y_1}}} \Phi_1(z),$$

$$F(t) = \frac{\pi_\omega(t) I_1'(t)}{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}.$$

У випадку, коли $y_1^0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} = Y_1$, позначимо

$$I(t) = \alpha_0 y_0^0 \left|\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\right|^{\sigma_1} \int\limits_{B_\omega^0}^{t} |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_1} p(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} y_0^0\right) d\tau,$$

$$B_\omega^0 = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_1} p(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} y_0^0\right) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_1} p(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} y_0^0\right) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int\limits_{B_\omega^1}^{t} \frac{I(\tau)\Phi_0^{-1}(I(\tau))}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(\tau)}\, d\tau, \quad B_\omega^1 = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega \frac{I(\tau)\Phi_0^{-1}(I(\tau))}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(\tau)} d\tau = \pm\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega \frac{I(\tau)\Phi_0^{-1}(I(\tau))}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(\tau)} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

де $b \in [a; \omega[$ обирається так, щоб $y_1^0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} \in \Delta_{Y_1}$ при $t \in [b; \omega]$.

Зауваження 2.1. З умов (1.2) на функцію φ_0 випливає, що $Z_0, Z_1 \in \{0, +\infty\}$ і

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{\Phi_0''(z)\Phi_0(z)}{(\Phi_0'(z))^2} = 1, \qquad \lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{\Phi_1''(z)\Phi_1(z)}{(\Phi_1'(z))^2} = 1. \tag{2.1}$$

Зауваження 2.2. Справедливі такі твердження:

1) $\Phi_0(z) = (\sigma_1 - 1)\,\dfrac{\varphi_0^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}}(z)}{\varphi_0'(z)}\,[1 + o(1)]$ при $z \to Y_1$ $(y \in \Delta_{Y_1})$. Звідси маємо

$$\operatorname{sign}\big(\varphi_0'(z)\Phi_0(z)\big) = \operatorname{sign}(\sigma_1 - 1) \quad \text{при} \quad z \in \Delta_{Y_1}.$$

2) $\Phi_1(z) = \dfrac{\Phi_0^2(z)}{y\Phi_0'(z)}\,[1 + o(1)]$ при $z \to Y_1$ $z \in \Delta_{Y_1}$. Звідси маємо

$$\operatorname{sign}(\Phi_1(z)) = y_0^0 \quad \text{при} \quad z \in \Delta_{Y_1}.$$

3) Функції Φ_0^{-1} і Φ_1^{-1} існують і є повільно змінними як обернені до швидко змінних при прямуванні аргументів до Y_1 функцій.

4) Функція $\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}\right)$ є правильно змінною порядку 1 при прямуванні аргументу до Y_1. Дійсно, завдяки (2.1) має місце співвідношення

$$\lim_{z\to Z_1} \frac{\left(\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(z)\right)\right)' z}{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(z)\right)} = \lim_{z\to Z_1} \frac{\Phi_1''\left(\Phi_1^{-1}(z)\right) z}{\left(\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(z)\right)\right)^2} =$$

$$= \lim_{y\to Y_1} \frac{\Phi_1''\left(\Phi_1^{-1}(\Phi_1(y))\right)\Phi_1(y)}{\left(\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(\Phi_1(y))\right)\right)^2} = \lim_{y\to Y_1} \frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{(\Phi_1'(y))^2} = 1.$$

5) Функція $\Phi_1^{-1}(z)\,\dfrac{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(z)\right)}{z}$ є повільно змінною при $z \to Z_1$.

Означення 2.1. *Нехай $Y \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L\colon \Delta_Y \to]0; +\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y$, $y \in \Delta_Y$ [2, с. 2–3], якщо*

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 2.2. *Повільно змінна при $y \to Y$, $y \in \Delta_Y$, функція $\theta\colon \Delta_Y \to]0; +\infty[$ задовольняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, [2]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \to Y$, $y \in \Delta_Y$, функції $L\colon \Delta_Y \to]0; +\infty[$ має місце співвідношення*

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad y \to Y, \quad y \in \Delta_Y.$$

Умову S задовольняють функції вигляду $\ln|y|$, $|\ln|y||^\mu$, $\mu \in R$, $\ln\ln|y|$ та багато інших.

3. Основні результати. Доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай $\sigma_1 \in R\backslash\{1\}$, функція θ_1 задовольняє умову S. Тоді для існування у рівнянні (1.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків, де $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, необхідно, а якщо виконується умова*

$$(2\lambda_0 - 1 + \sigma_1)(\lambda_0 - 1) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]b, \omega[\tag{3.1}$$

та існує скінченна або нескінченна границя

$$\frac{\sqrt{\left|\dfrac{\pi_\omega(t) I_1'(t)}{I_1(t)}\right|}}{\ln|I_1(t)|}, \tag{3.2}$$

то й достатньо виконання умов

$$\pi_\omega(t) y_1^0 y_0^0 \lambda_0(\lambda_0 - 1) > 0, \quad y_1^0 \alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a; \omega[, \tag{3.3}$$

$$y_0^0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} = Y_0, \quad y_1^0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} = Y_1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} I_1(t) = Z_1, \tag{3.4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_1''(t) I_1(t)}{(I_1'(t))^2} = 1, \tag{3.5}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I'(t) I_1(t)}{I_1'(t) I(t)} = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\Phi_0(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I(t)} = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} F(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{3.6}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ мають місце асимптотичні зображення

$$y'(t) = \Phi_1^{-1}(I_1(t))[1 + o(1)], \quad y(t) = \frac{(\lambda_0 - 1)\Phi_1^{-1}(I_1(t))\pi_\omega(t)}{\lambda_0}[1 + o(1)]. \tag{3.7}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ є таким $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком рівняння (1.1), для якого $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Тоді згідно з властивостями таких розв'язків, встановлених В. М. Євтуховим (див., наприклад, [2]), маємо

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)], \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.8}$$

звідки одержуємо (3.3).

З (3.8) також випливає, що функція $y(t)$ є правильно змінною функцією порядку $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}$ при $t \uparrow \omega$, а тому [3] її можна подати у вигляді

$$y(t) = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} L_1(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.9}$$

де $L_1 : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ — повільно змінна при $t \uparrow \omega$ функція. Звідси з урахуванням властивостей правильно змінних функцій [3] отримаємо першу з умов (3.4). Аналогічно отримаємо справедливість виконання другої з умов (3.4).

З (1.1) та (3.8) при $t \uparrow \omega$ випливає

$$\frac{y''}{\varphi_0(y')} = \alpha_0 p(t) \theta_1(y(t)) |y(t)|^{\sigma_1} p(t)[1 + o(1)],$$

а з урахуванням (3.9) маємо

$$\frac{y''}{\varphi_0(y')} = \alpha_0 p(t)\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} L_1(t)\right)|y(t)|^{\sigma_1}[1+o(1)]. \tag{3.10}$$

Оскільки функція L_1 у (3.9) є повільно змінною при прямуванні аргументу до Y_1, то згідно з умовою S, яку задовольняє функція θ_1, з (3.10) при $t \uparrow \omega$ маємо

$$\frac{y''}{\varphi_0(y')} = \alpha_0 p(t)\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)|y(t)|^{\sigma_1}[1+o(1)]. \tag{3.11}$$

З урахуванням першої з умов (3.8) при $t \uparrow \omega$ маємо

$$\frac{y''}{\varphi_0(y')|y'(t)|^{\sigma_1}} = \alpha_0 p(t)\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)\left|\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0}\right|^{\sigma_1}[1+o(1)]. \tag{3.12}$$

Проінтегруємо це співвідношення від t_0 до t та при $t \uparrow \omega$ отримаємо

$$\int\limits_{y'(t_0)}^{y'(t)} \frac{dz}{\varphi_0(z)|z|^{\sigma_1}} = \alpha_0\left|\frac{(\lambda_0-1)}{\lambda_0}\right|^{\sigma_1}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_1}[1+o(1)]\,d\tau.$$

З останньої рівності з урахуванням того, що $y' \to Y_1,\ Y_1 \in \Delta_{Y_1}$, та вибору A_ω випливає

$$\Phi_0(y'(t)) = I(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.13}$$

З властивостей функції Φ_0 одержуємо

$$y'(t) = \Phi_0^{-1}(I(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси та з (3.8) маємо

$$y''(t) = \frac{\Phi_0^{-1}(I(t))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.14}$$

Далі, з (3.13) та (3.14) отримуємо

$$y''\Phi_0(y') = \frac{I(t)\Phi_0^{-1}(I(t))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.15}$$

Звідси, аналогічно з тим, як одержали (3.13), маємо

$$\Phi_1(y'(t)) = I_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.16}$$

З властивостей функції Φ_1 здобуваємо

$$y'(t) = \Phi_1^{-1}(I_1(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.17}$$

Таким чином, мають місце перше з зображень (3.7) та третя з умов (3.4). З урахуванням (3.8) та (3.17) отримаємо друге із зображень (3.7).

З (3.12) та (3.13) одержуємо

$$\frac{y''(t)\Phi_0'(y'(t))}{\Phi_0(y'(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.18}$$

З (3.8) та (3.18) —

$$\frac{y''(t)\pi_\omega(t)}{y'(t)}\,\frac{y'(t)\Phi_0'(y'(t))}{\Phi_0(y'(t))} = \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Оскільки функція Φ_0 задовольняє зауваження 2.1, 2.2, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \pm\infty.$$

Аналогічно, з (3.15) та (3.16) маємо

$$\frac{y''(t)\Phi_1'(y'(t))}{\Phi_1(y'(t))} = \frac{I_1'(t)}{I_1(t)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.19}$$

звідки

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)} = \pm\infty,$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_1''(t)I_1(t)}{(I_1'(t))^2} = 1,$$

тобто має місце умова (3.5).

З (3.18) та (3.19) отримуємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I'(t)I_1(t)}{I_1'(t)I(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_0'(y'(t))\Phi_1(y'(t))}{\Phi_0(y'(t))\Phi_1'(y'(t))} = \lim_{z\to Y_1}\frac{\Phi_1''(z)\Phi_1(z)}{(\Phi_1'(z))^2} = 1,$$

тобто справедливою є перша з умов (3.6) теореми.

Оскільки функція $\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}\right)$ є правильно змінною порядку 1 при прямуванні аргументу до Y_1 (див. зауваження 2.2) та (3.13), то виконується друга з умов (3.6) теореми.

З (3.8) та (3.19) здобуваємо

$$\frac{y''(t)\pi_\omega(t)}{y'(t)}\,\frac{y'(t)\Phi_1'(y'(t))}{\Phi_1(y'(t))} = \frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

З останнього та (3.17), а також з того, що функція $\Phi_1^{-1}(z)\,\dfrac{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(z)\right)}{z}$ є повільно змінною при $z\to Z_1$ (див. зауваження 2.2), випливає третя з умов (3.6) теореми.

Достатність. Нехай виконуються умови (3.1) – (3.6) теореми.

До рівняння (1.1) застосуємо перетворення

$$\begin{cases} \Phi_1(y'(t)) = I_1(t)[1+v_1(x)], \\ \dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\,\dfrac{1}{\pi_\omega(t)}\,[1+v_2(x)], \end{cases} \tag{3.20}$$

де

$$x = \beta \ln |I_1(t)|, \qquad \beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \lim\limits_{t \uparrow \omega} I_1(t) = \infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad \lim\limits_{t \uparrow \omega} I_1(t) = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо

$$y'(t) = \Phi_1^{-1}(I_1(t(x))[1 + v_1(x)]),$$
$$y(t) = \frac{(\lambda_0 - 1)\Phi_1^{-1}(I_1(t(x))[1 + v_1(x)])\pi_\omega(t)}{\lambda_0[1 + v_2(x)]}.$$

Зведемо систему (3.20) до системи

$$\begin{cases} 1 + v_1 = \dfrac{\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))}{I_1(t(x)}, \\ 1 + v_2 = \dfrac{(\lambda_0 - 1)y'(t(x))\pi_\omega(t)}{\lambda_0 y(t(x))}, \end{cases} \tag{3.21}$$

звідки

$$v_1' = \beta[1 + v_1] \left[\frac{\Phi_1'(y'(t)I_1(t)y''(t)}{\Phi_1'(y'(t)I_1'(t)} - 1 \right]. \tag{3.22}$$

З (1.1) маємо

$$\frac{\Phi_1'(y'(t))I_1(t)y''(t)}{\Phi_1'(y'(t))I_1'(t)} =$$
$$= \frac{\Phi_1'(y'(t))I_1(t)}{\Phi_1'(y'(t))I_1'(t)}\, \alpha_0 p(t)\varphi_1(y)\varphi_0(y') =$$
$$= \frac{\Phi_1'(y'(t))I_1(t)}{\Phi_1'(y'(t))I_1'(t)}\, \alpha_0 p(t)\theta_1(y)|y(t)|^{\sigma_1}\varphi_0(y') =$$
$$= \frac{\alpha_0 p(t)\Phi_1'(y'(t))I_1(t)}{\Phi_1'(y'(t))I_1'(t)}\, \theta_1 \left(\frac{(\lambda_0 - 1)\Phi_1^{-1}(I_1(t(x))[1 + v_1(x)])\pi_\omega(t)}{\lambda_0[1 + v_2(x)]} \right) \times$$
$$\times \left| \frac{(\lambda_0 - 1)}{\lambda_0}\pi_\omega(t) \right|^{\sigma_1} |y'(t)|^{\sigma_1}[1 + v_2]^{-\sigma_1}\varphi_0(y') =$$
$$= \frac{(\Phi_1'(Y(t, v_1)))^2}{\Phi_1''(Y(t, v_1))\Phi_1(Y(t, v_1))}\, \frac{I'(t)I_1(t)}{I_1'(t)I(t)}\, Q(t)\, N(t, v_1, v_2)\, M_1(t, v_1)[1 + v_2]^{-\sigma_1}[1 + v_1]^{-1} =$$
$$= W(t, v_1, v_2)[1 + v_2]^{-\sigma_1}[1 + v_1]^{-1},$$

де

$$W(t, v_1, v_2) = M_1(t(x), v_1)M(t(x), v_1, v_2)N(t, v_1, v_2)\, Q(t)\, \frac{I'(t)I_1(t)}{I_1'(t)I(t)},$$

$$N(t,v_1,v_2)=\frac{\theta_1\left(\dfrac{(\lambda_0-1)Y(t,v_1)\pi_\omega(t)}{\lambda_0[1+v_2]}\right)}{\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\operatorname{sign}y_0^0\right)},\quad Y(t,v_1)=\Phi_1^{-1}(I_1(t)[1+v_1]),$$

$$N_1(t,v_1)=\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)}{Y(t,v_1)\Phi_1'(Y(t,v_1))},\quad Q(t)=\frac{\Phi_0\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)}{I(t)},$$

$$M_1(t,v_1)=\frac{\Phi_0\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)[1+v_1]}{\Phi_0(Y(t,v_1))},\quad M(t,v_1,v_2)=\frac{(\Phi_1'(Y(t,v_1)))^2}{\Phi_1''(Y(t,v_1))\Phi_1(Y(t,v_1))}.$$

Отже, (3.22) набуває вигляду

$$v_1'=\beta\left[W(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_1}-[1+v_1]\right].$$

Також маємо

$$v_2'=\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\,\frac{\beta I_1(t)}{I_1'(t)}\left[\frac{y''(t)\pi_\omega(t)}{y(t)}+\frac{y'(t)\pi_\omega(t)}{y(t)}-\frac{(y'(t))^2\pi_\omega(t)}{y^2(t)}\right]=$$
$$=\beta G(t)[1+v_2]\left[\frac{y''(t)\pi_\omega(t)}{y'(t)}+1-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+v_2]\right],$$

де

$$G(t)=\frac{I_1(t)}{\pi_\omega(t)I_1'(t)}.$$

Зауважимо, що

$$\frac{y''(t)\pi_\omega(t)}{y'(t)}=\left[\frac{y''(t)\Phi_1'(Y(t,v_1))I_1(t)}{\Phi_1(Y(t,v_1))I_1'(t)}\right]\frac{\Phi_1(Y(t,v_1))}{y'(t)\Phi_1'(Y(t,v_1))}\,\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)}=$$
$$=W(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_1}[1+v_1]^{-1}\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}\times$$
$$\times\frac{\Phi_1(Y(t,v_1))\Phi_1^{-1}(I_1(t))\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)}{Y(t,v_1)\Phi_1'(Y(t,v_1))\Phi_1(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}=$$
$$=W(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_1}[1+v_1]^{-1}F(t)V(t,v_1,v_2),$$

де

$$V(t,v_1,v_2)=\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\dfrac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I_1(t)}}{\Phi_1^{-1}(Y(t,v_1))\,\dfrac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(Y(t,v_1)))}{Y(t,v_1)}}.$$

Отже, система (3.21) перетворюється в таку:

$$\begin{cases} v_1'=\beta\,[W(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_1}-[1+v_1]],\\ v_2'=\beta G(t)[1+v_2]\Bigg[W(t,v_1,v_2)V(t,v_1,v_2)F(t)[1+v_1]^{-1}[1+v_2]^{-\sigma_1}+\\ \qquad +1-\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+v_2]\Bigg], \end{cases}\tag{3.23}$$

Розглянемо цю систему диференціальних рівнянь на множині

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \quad \text{де} \quad x_0 = \beta \ln |\pi_\omega(t_0)|,$$
$$D = \left\{ (v_1, v_2) : |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = 1, 2 \right\}.$$

З урахуванням властивостей функції Φ_1 (див. зауваження 2.2) мають місце співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} N_1(t, v_1) = 1 \quad \text{рівномірно по} \quad v_1, v_2 : (v_1, v_2) \in D, \tag{3.24}$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} M_1(t, v_1) = 1 \quad \text{рівномірно по} \quad v_1, v_2 : (v_1, v_2) \in D,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} M(t, v_1, v_2) = 1 \quad \text{рівномірно по} \quad v_1, v_2 : (v_1, v_2) \in D,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} V(t, v_1, v_2) = 1 \quad \text{рівномірно по} \quad v_1, v_2 : (v_1, v_2) \in D.$$

З умов (3.6) отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I'(t) I_1(t)}{I_1'(t) I(t)} = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} F(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} Q(t) = 1.$$

З умови (3.5) випливає

$$\lim_{t\uparrow\omega} G(t) = 0. \tag{3.25}$$

Доведемо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} N(t, v_1, v_2) = 1 \quad \text{рівномірно при} \quad |v_1| < \frac{1}{2},\ \ |v_2| < \frac{1}{2}. \tag{3.26}$$

Зауважимо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\dfrac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))}{|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}} \right)' \pi_\omega(t)}{\dfrac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))}{|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}}} = \lim_{t\uparrow\omega} F(t) M(t, v_1) - \frac{1}{(\lambda_0 - 1)} = 0.$$

Тому функція

$$\left(\frac{\Phi_1^{-1}(I_1(t))}{|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}} \right)$$

є нормалізованою повільно змінною при $t \uparrow \omega$. Звідси з урахуванням того, що функція Φ_1^{-1} є повільно змінною при прямуванні аргументу до Z_1 і того, що функція θ_1 задовольняє умову S, випливає (3.26).

Перепишемо систему (3.23) у вигляді

$$\begin{cases} v_1' = \beta \left[A_{11}(t) v_1 + A_{12}(t) v_2 + R_1(x, v_1, v_2) + R_2(x, v_1, v_2) \right], \\ v_2' = \beta G(t) \left[A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + R_3(t, v_1, v_2) + R_4(t, v_1, v_2) \right], \end{cases} \tag{3.27}$$

де

$$A_{11} = 1, \quad A_{12}(t) = -\sigma_1,$$
$$R_1(t, v_1, v_2) = (W(t, v_1, v_2) - 1)(1 - \sigma_1 v_2),$$
$$R_2(t, v_1, v_2) = W(t, v_1, v_2)\left([1 + v_2]^{-\sigma_1} - 1 + \sigma_1 v_2\right),$$
$$A_{21} = -1, \quad A_{22} = \frac{-\lambda_0 + \sigma_1}{\lambda_0 - 1},$$
$$R_3(t, v_1, v_2) = \left(V(t, v_1, v_2)W(t, v_1, v_2)F(t) - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right)(1 - v_1 + (1 - \sigma_1)v_2),$$
$$R_4(t, v_1, v_2) = -\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\, v_2^2 + \frac{1}{\lambda_0 - 1}\,(1 + v_1)^{-1}\left([1 + v_2]^{1-\sigma_1} - 1 - v_2(1 - \sigma_1)\right) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_0 - 1}\,\left[(1 + v_1)^{-1} - 1 + v_1\right][1 + v_2]^{1-\sigma_1} +$$
$$+ \left(V(t, v_1, v_2)W(t, v_1, v_2)F(t) - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right) \times$$
$$\times \left([1 + v_1]^{-1}[1 + v_2]^{1-\sigma_1} - 1 + v_1 - (1 - \sigma_1)v_2\right).$$

Завдяки (3.24), (3.25) при $k \in \{2, 4\}$ маємо

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{R_k(t, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad t \in [t_0, \omega[,$$

і при $k \in \{1, 3\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_k(t, v_1, v_2) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad v_1, v_2 : (v_1, v_2) \in D.$$

Оскільки виконується умова (3.2) теореми, то існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{G'(t)\pi_\omega(t)}{\sqrt{|G(t)|}}.$$

Доведемо тепер, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{G'(t)\pi_\omega(t)}{\sqrt{|G(t)|}} = 0.$$

Згідно з умовою (3.2) теореми існує скінченна та нескінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{G'(t)\pi_\omega(t)}{\sqrt{|G(t)|}}.$$

Припустимо супротивне: нехай

$$\frac{G'(t)\pi_\omega(t)}{\sqrt{|G(t)|}} = q_1(t) \qquad \text{і} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) \neq 0. \tag{3.28}$$

Тоді

$$\frac{G'(t)}{\sqrt{|G(t)|}} = \frac{q_1(t)}{\pi_\omega(t)}.$$

Проінтегруємо цю рівність від t_0 до t. Маємо

$$2\sqrt{|G(t)|} - 2\sqrt{|G(t_0)|} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q_1(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\, d\tau. \tag{3.29}$$

З (3.25) та (3.29) випливає, що інтеграл $\int_{t_0}^{t} \frac{q_1(\tau)}{\pi_\omega(\tau)} d\tau$ повинен бути збіжним, а це можливо лише за умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = 0,$$

що суперечить (3.28).

Зауважимо, що характеристичне рівняння матриці системи (3.27)

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sigma_1 \\ \dfrac{-1}{\lambda_0 - 1} & \dfrac{-\lambda_0 - \sigma_1}{\lambda_0 - 1} \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\mu^2 + \frac{2\lambda_0 - 1 + \sigma_1}{\lambda_0 - 1}\,\mu - \frac{\sigma_1}{\lambda_0 - 1} = 0. \tag{3.30}$$

Це рівняння згідно з умовою (3.1) не має коренів із нульовою дійсною частиною. Розглянемо $\int_{x_0}^{\infty} G(t(x))dx$. З урахуванням зображення $G(t(x)) = \dfrac{I(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}$ одержуємо

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} G(t(x))dx = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{I_1(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I_1'(t(x))}\, dx = \int\limits_{t(x_0)}^{\omega} \frac{I_1(t)}{\pi_\omega(t)I_1'(t)}\, \frac{I_1'(t)}{I_1(t)}\, dt = \ln|\pi_\omega(t)|_{d_1}^{\omega} \to \infty$$

при $t \to \omega$.

І тому що в околі нуля виконується

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G(t(x))|}dx \geq \operatorname{sign}\left(G(t(x))\right) \int\limits_{x_0}^{\infty} G(t(x))dx,$$

отримуємо

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G(t(x))|}dx = +\infty.$$

Отже, для системи диференціальних рівнянь (3.27) виконано всі умови теореми 2.6 з [4]. Відповідно до цієї теореми, з урахуванням умови (3.1) система (3.27) має принаймні один розв'язок $\{\omega_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x_1 \geq x_0$, який прямує до нуля при $x \to +\infty$. Цьому розв'язку завдяки (3.20) відповідають розв'язки y рівняння (1.1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (3.7).

Згідно з виглядом цих зображень та (3.1) очевидно, що отриманий розв'язок є $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком.

Теорему доведено.

Висновки. У цій роботі для класів диференціальних рівнянь другого порядку вигляду (1.1), які містять у правій частині добуток правильно змінної нелінійності від невідомої функції та швидко змінної нелінійності від похідної невідомої функції при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності, отримано необхідні й достатні умови існування правильно змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Також одержано асимптотичні зображення таких розв'язків та їхніх похідних першого порядку. Зауважимо, що при накладанні додаткових умов на коефіцієнти характеристичного рівняння (3.30) таких $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (1.1) існує одно- або двопарамерична сім'я.

Подібні результати здобуто при розгляді рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток швидко змінної нелінійності від невідомої функції та правильно змінної нелінійності від похідної невідомої функції при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності [5].

Для рівняння (1.1) подібні результати є новими.

Література

1. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
2. В. М. Евтухов, *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук, Киев (1998).
3. V. Maric, *Regular variation and differential equations*, Lecture Notes in Math., **1726** (2000).
4. В. М. Евтухов, А. М. Самойленко, *Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **62**, № 1, 52 – 80 (2010).
5. O. O. Chepok, *Asymptotic representations of a class of regularly varying solutions of differential equations of the second order with rapidly and regularly varying nonlinearities*, Mem. Differ. Equ. Math. Phys., **74**, 79 – 92 (2018).

Одержано 27.04.22