

Міністерство освіти і науки України  
Державний заклад «Південноукраїнський національний  
педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»  
Фізико-математичний факультет

Калюжний-Вербовецький Дмитро Семенович  
Пивоварчик Вячеслав Миколайович

## Вибрані глави теорії графів

Частина 1

Тексти лекцій

Одеса 2022

На початку ми нагадаємо читачеві деякі поняття та результати, з якими він знайомий з курсу «Дискретна математика», який вивчався в бакалавраті.

## 1. Вступ

Творцем теорії графів вважають Леонарда Ейлера. Для розв'язування серйозних математичних задач Л. Ейлер використовував наочні рисунки. Одна з таких задач поклала початок зовсім новій галузі досліджень, що виросла згодом у самостійний розділ математики – теорію графів, особливість якої полягає у геометричному підході до вивчення об'єктів.

Спочатку теорію графів застосовували переважно до математичних розваг і головоломок. Однак уже в XIX столітті графи почали використовувати для побудови схем електричних ланцюгів і молекулярних схем. Саме відтоді граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині і ліній, що сполучають деякі з точок, стала зручною і наочною формою зображення різноманітних об'єктів, процесів та явищ. Наприклад, у вигляді графа можуть бути зображені електричні, транспортні, інформаційні і комп'ютерні мережі; карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів; моделі кристалів; структури молекул хімічних речовин; моделі ігор; лабіринти; плани виконання певних робіт (розклади); генеалогічні дерева, тощо.

Отже, теорія графів сьогодні – це розділ дискретної математики, особливістю якого є геометричний підхід до вивчення об'єктів. Основне поняття теорії – граф.

## 2. Основні поняття

**Означення 1.** Граф складається зі скінченної множини  $V$  вершин і набору  $E$  пар вершин. Елементи набору  $E$  називають ребрами. Вершини зображаються точками, а ребра - лініями (не обов'язково прямими), що

з'єднують пари точок. Якщо ребро  $e$  з'єднує вершини  $x$  і  $y$ , то  $x$  і  $y$  називають суміжними, а ребро, яке їх з'єднує - інцидентним з  $x$  і  $y$ . Ребро, що зв'язує вершину з нею самою, називають петлею.

Зауважимо, що ми називаємо  $E$  набором пар, а не множиною пар, щоб допустити кратні ребра, тобто ребра, що з'єднують ті ж вершини.

**Означення 2.** Якщо два або більше ребер з'єднують одні і ті ж дві вершини, то вони називаються кратними ребрами. Граф, який не містить петель і кратних ребер називається простим. Кількість ребер, інцидентних вершині  $v$  називається степенем або валентністю вершини  $v$  і позначається  $d(v)$ . Друга назва - валентність - пов'язана з тим, що графи з'явилися при зображенні молекул у хімії, де степінь вершини співпадає з валентністю іона. Вершина степеня 1 називається висячою, а степеня 0 - ізольованою. Якщо граф містить петлю, то петля вносить доданок 2 у степінь відповідної вершини.

Наступний результат (теорему 1) іноді називають лемою про рукостискання: кількість потиснутих рук учасниками вечірки дорівнює подвоєній кількості рукостискань.

**Теорема 1.** Сума степенів вершин графу дорівнює подвоєній кількості ребер.

Звідси відразу отримуємо наслідок 1.

**Наслідок 1.** Сума степенів вершин графу – парне число.

**Приклад 1.** Повний граф  $K_n$  - це простий граф з  $n$  вершинами, в якому кожна пара вершин пов'язана ребром. Оскільки в повному графі кожна вершина має степінь  $n-1$ , число  $q$  ребер задовольняє умову  $2q = n(n-1)$ , що і очікувалося, оскільки  $q$  - число способів вибору двох з  $n$  вершин, тобто

$$C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Графи  $K_n$  ( $n \leq 4$ ) показані на рис. 1. Позначення прийнято на честь польського математика К. Куратовського (1896-1980), якому належить важлива теорема (критерій планарності – дивись далі).

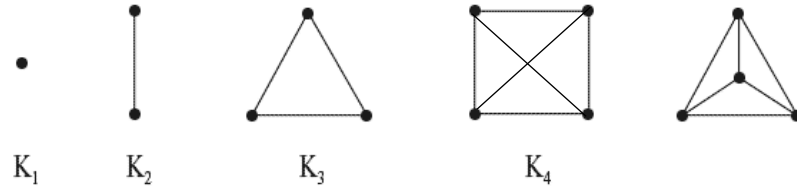


Рис. 1

Відзначимо, що граф  $K_4$  містить в собі граф  $K_3$ . Ідея про граф, що містить в собі інший граф, лежить у наступному означенні. Зауважимо також, що на рис. 1 граф  $K_4$  має два різних зображення – ми торкнемось цього пізніше, коли будемо обговорювати планарні графи.

**Означення 3.** Граф  $H$  називається підграфом графу  $G$ , якщо множина вершин  $H$  є підмножиною множини вершин  $G$ , а набір ребер  $H$  є піднабором набору ребер  $G$ .

Таким чином, наприклад,  $K_m$  є підграфом графу  $K_n$ , якщо і тільки якщо  $m \leq n$ . Нарешті, в цьому розділі ми введемо кілька позначень. Через  $p$  і  $q$  позначимо число вершин і ребер, відповідно, а під  $(p, q)$  будемо мати на увазі граф з  $p$  вершинами і  $q$  ребрами. Так, наприклад,  $K_4 \in (4,6)$  - графом.

### 3. Маршрути на графах

Багато важливих застосувань теорії графів пов'язані з рухом уздовж графу в сенсі переходу від однієї вершини до іншої вздовж ребер, інцидентних з цими вершинами. Введемо відповідні означення.

**Означення 4.** Маршрутом на графі визначається послідовність ребер виду

$$v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n.$$

Цей маршрут в простому графі може бути більш компактно описаний так:

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n.$$

Відзначимо, що маршрут має напрямок:  $v_0$  називається початковою, а  $v_n$  - кінцевою вершиною. Число  $n$  ребер називається довжиною маршруту. Маршрут, всі ребра якого різні, називається ланцюгом. Ланцюг, у якому всі вершини різні, крім, можливо,  $v_0 = v_n$ , називається простим. Ланцюг (простий ланцюг) з  $v_0 = v_n$  називається циклом (простим циклом).

Природньо ототожнювати цикли  $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$  та  $y \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow y$ . Таким чином, у багатьох випадках задають тільки вершини циклу у певному порядку. Оскільки ми зараз розглядаємо неорієнтовані графи, можна також ототожнювати цикли з протилеженими напрямками, наприклад,  $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$  та  $u \rightarrow y \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u$ . Ми будемо цикл довжини  $n$  позначати  $C_n$  ( $n$  вершин і  $n$  ребер,  $n > 1$ ), а простий ланцюг довжини  $n-1$  (тобто  $n$  вершин) -  $P_n$ . Так, наприклад,  $P_2 = K_2$ ,  $C_3 = K_3$ .

**Означення 5.** Граф називається зв'язним, якщо для будь-якої пари вершин  $x, y$  знайдеться простий ланцюг з  $v_0 = x$  та  $v_n = y$ . Якщо граф не є зв'язним, то його зв'язні частини називаються компонентами.

## 4. Дерева

**Означення 6.** Деревом називається зв'язний простий граф без циклів.

**Означення 7.** Довільний ациклічний граф, тобто такий, що не містить циклів, називається лісом. Очевидно, що зв'язними компонентами лісу є дерева, і тому кожен ліс – це об'єднання дерев.

**Теорема 2.** Якщо  $T$  - дерево з  $p \geq 2$  вершинами, то  $T$  містить не менше, як 2 висячих вершини.

**Теорема 3.** Нехай  $T$  - простий граф з  $p$  вершинами. Тоді наступні твердження еквівалентні:

- 1)  $T$  - дерево;
- 2)  $T$  має  $p - 1$  ребро і не має циклів;
- 3)  $T$  має  $p - 1$  ребро і є зв'язним.

**Означення 8.** Два графа  $G_1$  і  $G_2$  називаються ізоморфними, якщо вершини графів можна занумерувати тими ж номерами так, що для будь-якої пари номерів  $u, v$  число ребер, що сполучають їх, однаково в  $G_1$  і  $G_2$ .

## 5. Дводольні графи

**Означення 9.** Граф називається дводольним, якщо множину вершин  $V$  можна розділити на дві напересічні множини  $B$  і  $W$  таким чином, що кожне ребро з'єднує вершину з  $B$  з вершиною з  $W$ . Поділ  $V = B \cup W$  називається дводольним поділом вершин.

**Теорема 4 (теорема Кьоніга).** Зв'язний граф є дводольним тоді і тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

**Означення 10.** Дводольний граф, у якого кожна вершина з  $B$  з'єднана (одним) ребром з кожною вершиною з  $W$ , називається повним дводольним графом. Повний дводольний граф, у якому доля  $B$  має  $m$  вершин, а доля  $W$  має  $n$  вершин, позначається  $K_{m,n}$ . Граф  $K_{1,n}$  називається зіркою. Простіші приклади повних дводольних графів наведено на наступному рисунку:

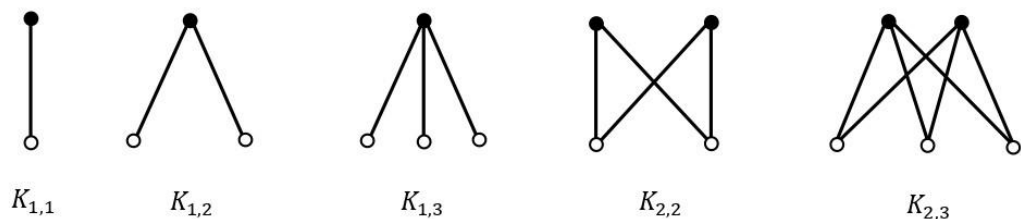


Рис. 2

Вочевидь, повний дводольний граф  $K_{m,n}$  має  $m+n$  вершин і  $mn$  ребер.

**Теорема 5.** Суми степенів долей дводольного графу рівні між собою і дорівнюють кількості ребер,  $mn$ .

## 6. Планарність

Граф називається планарним, якщо він може бути намальований на площині без перетину ребер. Якщо граф планарний, то будь-який рисунок його без перетину ребер називається плоским графом. Наприклад,  $K_4$  - планарний, як показано на рис. 1. Другий рисунок  $K_4$  - плоский граф.

Планарні графи виникають природним чином у задачі чотирьох кольорів. При розфарбовуванні географічної карти природньо фарбувати сусідні країни в різні кольори. Стало загально прийнятим вважати, що чотирьох кольорів досить для розмалювання будь-якої карти. Загальне доведення було запропоновано А. Кемпе в 1879 році. Через 10 років, однак, Хейвуд знайшов помилку в доведенні Кемпе і замість теореми про чотири кольори залишилася гіпотеза про чотири кольори. Нарешті, в 1976 р. справедливність гіпотези була доведена К. Апелем і В. Хакеном.

Задача розфарбовування карти може бути зведена до задачі розфарбування вершин планарного графу. Якщо дана карта, то ми можемо уявити кожну країну як вершину і з'єднати дві вершини ребром в тому (і тільки тому) випадку, коли відповідні країни мають спільний кордон. Наприклад, на рис. 3 зображена карта і відповідний планарний граф.

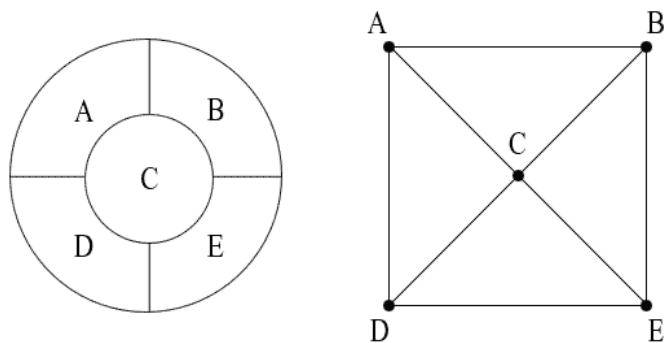


Рис. 3

Таким чином, завдання зводиться до задачі фарбування вершин планарного графу в чотири кольори так, що пов'язані вершини пофарбовані в різні кольори.

Будь-який плоский граф, очевидно, розділяє площину на сусідні області, одна з яких - нескінченна. Основний результат про плоскі графи називається формулою Ейлера. Ейлер спочатку отримав цю формулу, розглядаючи многогранники (поліедри) і ми також почнемо з них.

**Теорема 6 (Формула Ейлера).** Будь-який зв'язний плоский  $(p, q)$  - граф розділяє площину на  $r$  областей, де

$$p - q + r = 2.$$

**Доведення.** Якщо у графі є цикл, то приберемо одне ребро з нього, але так, щоб граф залишився зв'язним. Тоді  $q$  і  $r$  зменшається на 1 (так як дві області зливаються), при цьому  $p$  не зміниться. Отриманий таким чином граф має  $p' = p$ ,  $q' = q - 1$ ,  $r' = r - 1$ , звідки  $p' - q' + r' = p - q + r$ . Повторюємо цю процедуру, поки не залишиться циклів. Отриманий граф буде деревом і

$$p'' - q'' + r'' = p - (p-1) + 1 = 2.$$

**Приклад 2.** Плоский граф на рисунку 3 має

$$p - q + r = 5 - 8 + 5 = 2.$$

Є 4 скінченні області і одна нескінченна.

Означимо ступінь області плоского графа як число ребер при обході кордону області.

**Приклад 3.** На рисунку 4 області 3 і 4 мають ступінь 3. Нескінченна область 1 має ступінь 5. Область 2 має ступінь 9 (зауважимо, що одне ребро тут враховується двічі).



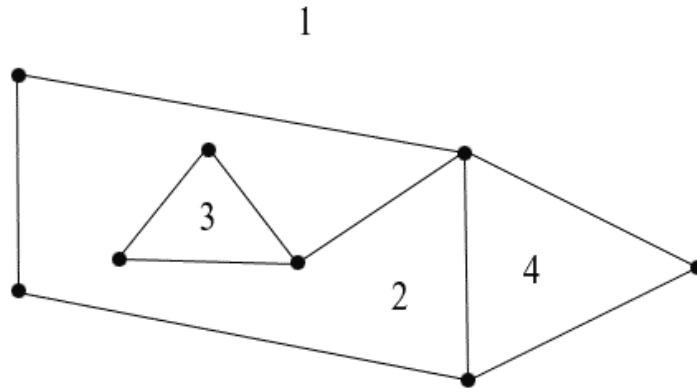


Рис. 4

На додаток як аналог леми про рукостискання маємо наступну теорему.

**Теорема 7.** У зв'язному плоскому графі  $2q =$  сумі ступенів областей.

**Доведення.** Кожне ребро входить двічі в границі областей.

**Теорема 8.**  $K_n$  - планарний граф тільки при  $n \leq 4$ .

**Доведення.** Достатньо показати, що  $K_5$  - не планарний.  $K_5$  має  $p = 5$ ,  $q = C_5^2 = 10$ . Тому, якщо плоске зображення  $K_5$  існує, то воно повинно мати  $r = 2 - 5 + 10 = 7$  областей (за формулою Ейлера). Кожна область повинна мати степінь  $\geq 3$ . Тепер за теоремою 7:

$$20 = 2q \geq 7 \cdot 3 = 21.$$

Протиріччя.

**Теорема 9.**  $K_{3,3}$  - не планарний.

**Доведення.**  $K_{3,3}$  має  $p = 6$  і  $q = 9$ , тому, якщо плоске зображення існує, то воно має  $r = 2 - 6 + 9 = 5$  областей. Оскільки,  $K_{3,3}$  - простий дводольний, він не може мати циклів довжини 2 і циклів непарної довжини. Це означає, що степені областей  $\geq 4$ . Таким чином,

$$18 = 2q \geq 4 \cdot 5 = 20.$$

Протиріччя.

**Наслідок 2.**  $K_{m,n}$  - планарний  $\Leftrightarrow \min(m,n) \leq 2$ .

Техніка підрахунку сум степенів областей вельми корисна. Її можна застосувати до знаменитого графу Петерсена, зображеного на рисунку 5.

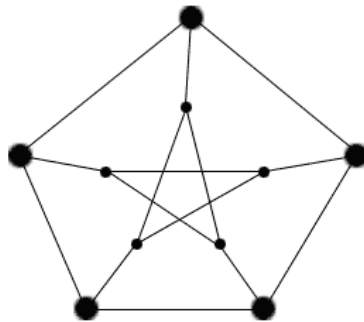


Рис. 5

**Приклад 4.** Доведемо, що граф Петерсена не планарний. Припустимо існування плоского зображення графу Петерсена. Оскільки  $p = 10$  і  $q = 15$ , маємо  $r = 2 - 10 + 15 = 7$ . З рисунку 5 видно, що найкоротший цикл має довжину 5. Значить, за теоремою 7

$$30 = 2q = 7 \cdot 5 = 35.$$

Протиріччя.

### Теорема Куратовського

Що робить граф не планарним? Ясно, що, якщо він містить  $K_5$  або  $K_{3,3}$  як підграф, то він не планарний. У 1930 році польський математик

Куратовський довів, що тільки наявність  $K_5$  або  $K_{3,3}$  робить граф непланарним.

Щоб роз'яснити це твердження зазначимо таке. Оскільки  $K_5$  - не планарний, то граф, зображений на рисунку 6, також не планарний.

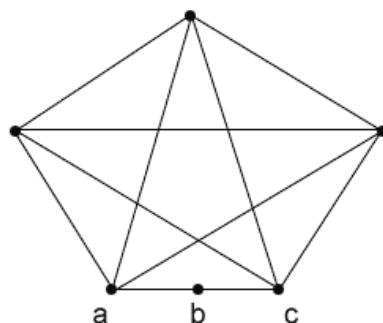


Рис. 6

Інакше ми могли б видалити вершину  $b$  з ребра  $ac$  і отримати плоске зображення  $K_5$ . Додавання вершини в існуюче ребро називається підрозбиттям. Одне або більше підрозбиттів ребер призводять до підрозбиттю графу.

**Теорема 10 (теорема Куратовського).** Граф планарний тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів  $K_5$  або  $K_{3,3}$ .

Покажемо як за допомогою цієї теореми можна довести, що граф Петерсена не планарний. На лівій стороні рисунка 7 розташований граф Петерсена. На правій - той же граф без двох ребер. Цей підграф є підрозбиттям  $K_{3,3}$ , що ясно при відповідному позначенні вершин.

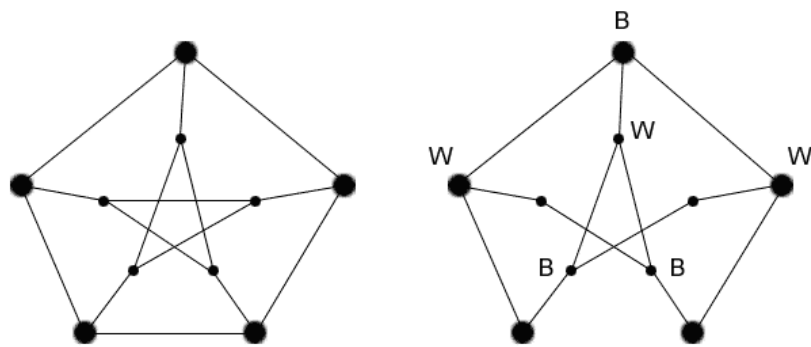


Рис. 7

### Хорди кола

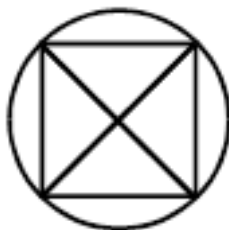
Ми закінчимо цей розділ про планарність прикладом застосування формули Ейлера до відомої задачі про хорди кола.

Нехай є  $n$  точок, розташованих на колі. Наше завдання з'єднати кожну пару точок хордою так, щоб ніякі три хорди не перетиналися в одній точці. На скільки областей буде розбите коло? Випадки  $n = 3, 4, 5$  показані на рисунку 8. Може здатися, що при  $n = 6$  кількість таких областей буде 32. Однак, це не так. (Перевірте!)



$n=3$

4 області



$n=4$

8 областей



$n=5$

16 областей

Рис. 8

Припустимо, що ми маємо  $n$  точок і намалювали  $C_n^2$  хорд. Тоді утворюється  $n$  областей, що мають дугу кола, як частину границі. Розглянемо

тепер інші області. Перетворимо малюнок (вже без дуг) в граф, намалювавши вершини в точках перетину хорд. Скільки точок перетину вийде? По одній на кожну пару хорд, тобто по одній на кожну четвірку вершин, тобто  $C_n^4$ . Таким чином, отриманий граф має  $n + C_n^4$  вершин. Кожна з  $n$  вихідних вершин має степінь  $n - 1$ , а кожна з нових  $C_n^4$  вершин має степінь 4. Тоді за лемою про рукостискання

$$2q = n(n-1) + 4C_n^4,$$

тобто

$$q = C_n^2 + 2C_n^4.$$

Таким чином,

$$r = 2 - p + q = 2 - n - C_n^4 + C_n^2 + 2C_n^4 = 2 - n + C_n^2 + C_n^4.$$

Тут  $r$  включає в себе одну нескінченну область, тому, число областей, на які поділено  $n$ -кутник, на 1 менше і дорівнює  $1 - n + C_n^2 + C_n^4$ . Сюди слід додати  $n$  криволінійних областей. Таким чином, число областей, на які розділене коло, дорівнює  $1 + C_n^2 + C_n^4$ .

Перевіримо: для  $n = 3$  маємо 4, для  $n = 4$  маємо 8, для  $n = 5$  маємо 16 і для  $n = 6$  маємо 31.

## 7. Орієнтовані графи (орграфи)

Вище ми розглядали неорієнтовані графи, тобто такі, в яких ребра не мали напрямку. В цьому ж розділі розглянемо орієнтовані графи. Для цього задамо напрям кожному ребру неорієнтованого графа. Приклад орієнтованого графу буде розглянуто пізніше – дивись рис. 10. Для таких графів розглядають степінь входу  $d^+(v)$  – кількість ребер, які входять у вершину  $v$ , та степінь виходу  $d^-(v)$  – кількість ребер, які виходять з вершини  $v$ . Вочевидь,

$$d^+(v) + d^-(v) = d(v).$$

Є вірною також наступна теорема.

**Теорема 11.** Суми степенів входу і степенів виходу орієнтованого графу рівні між собою і дорівнюють кількості ребер:

$$\sum_v d^+(v) = \sum_v d^-(v) = q.$$

Орграф  $G$  будемо називати простим, якщо відповідний неорієнтований граф  $G^H$  (тобто граф, отриманий з  $G$  ігноруванням орієнтації ребер) простий.

## 8. Матриці суміжності і інцидентності графа

У теоретико-множинній і геометричній формах означення (завдання) графів часто використовується матрична форма їх подання. Існують різні види матриць графів, однак всі вони, як правило, повністю передають основні властивості графів. Матрична форма завдання графів є достатньо наочною при будь-якому степені складності графа і, що найважливіше, дозволяє автоматизувати процес обробки інформації, представлені в термінах теорії графів, - будь-яка матриця графа може бути введена у комп'ютер. При завданні графів в матричній формі можуть враховуватися або відносини суміжності вершин, або відображення інцидентності вершин і ребер. У зв'язку з цим матриці графів діляться на два основні класи: матриці суміжності і матриці інцидентності.

**Означення 11.** Матрицею суміжності вершин простого неорієнтованого графа  $G$  називається квадратна матриця  $A(G) = [a_{i,j}]$  порядку  $p = p(G)$  ( $p$  - кількість вершин графа), елемент  $a_{i,j}$  якої рівний 1, якщо вершини  $v_i$  і  $v_j$  з'єднані ребром, і 0, якщо вони не з'єднані ребром.

**Приклад 5.** На рис. 9 наведено неорієнтований граф  $G(V, E)$ , а під ним відповідна йому матриця суміжності вершин  $A(G)$ .

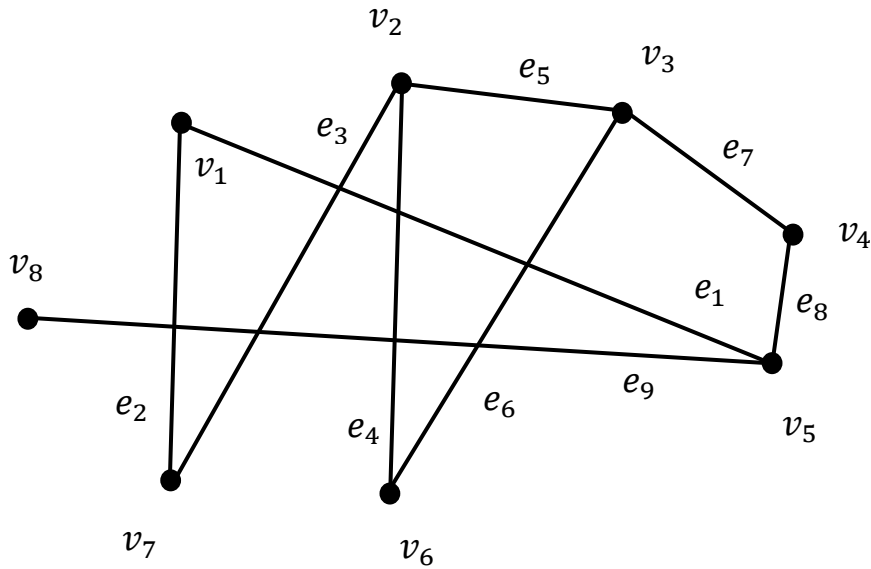


Рис. 9

$$A(G) = \begin{array}{c|cccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

З означення 11 безпосередньо випливають основні властивості матриць цього виду.

**Властивості матриці суміжності вершин простого неорієнтованого графа:**

1. Матриця суміжності вершин простого неорієнтованого графа  $A(G)$  є квадратною і симетричною відносно головної діагоналі:  $a_{i,j} = a_{j,i}$  для усіх  $i, j$ .

2. Елементами матриці  $A(G)$  є одиниці і нулі.
3. Сума елементів матриці  $A(G)$  по  $i$ -му рядку (або по  $i$ -му стовпцю) дорівнює степеню відповідної вершини  $d(v_i)$ .

З означення матриці суміжності вершин простого неорієнтованого графа і основних властивостей впливають деякі відповідності між графом  $G(V, E)$  і його матрицею  $A(G)$ . На рис. 9 вказана деяка нумерація вершин графа; розташована поруч матриця відповідає саме цій нумерації. Якщо ж у графі  $G(V, E)$ , наведеному на цьому рисунку, використовувати іншу нумерацію вершин (наприклад, зсунувши її відносно вершин за годинниковою стрілкою), то це призведе до того, що в матриці  $A(G)$  відбудеться перестановка окремих рядків і стовпців. Тому кажуть, що кожний простий неорієнтований граф має єдину з точністю до перестановки рядків і стовпців матрицю суміжності вершин. І навпаки, кожна квадратна симетрична відносно головної діагоналі матриця, елементами якої є одиниці і нулі, визначає єдиний з точністю до ізоморфізму простий неорієнтований граф, матрицею суміжності вершин якого є дана матриця.

Рекомендується самостійно побудувати матрицю суміжності вершин графа  $G(V, E)$ , показаного на рис. 9, з використанням іншої нумерації вершин і порівняти отриману при цьому матрицю з матрицею суміжності вершин наведеного графа.

**Означення 12.** Матрицею суміжності вершин простого орієнтованого графа  $G$  називається квадратна матриця  $A(G) = [a_{i,j}]$  порядку  $p = p(G)$  ( $p$  - кількість вершин графа), елемент  $a_{i,j}$  якої дорівнює одиниці, якщо існує ребро, що виходить з вершини  $v_i$  і заходить у вершину  $v_j$ , і нулю в іншому випадку.

**Приклад 6.** На рис. 10 наведено простий орієнтований граф  $G(V, E)$ , а під ним відповідна йому матриця суміжності вершин  $A(G)$ .



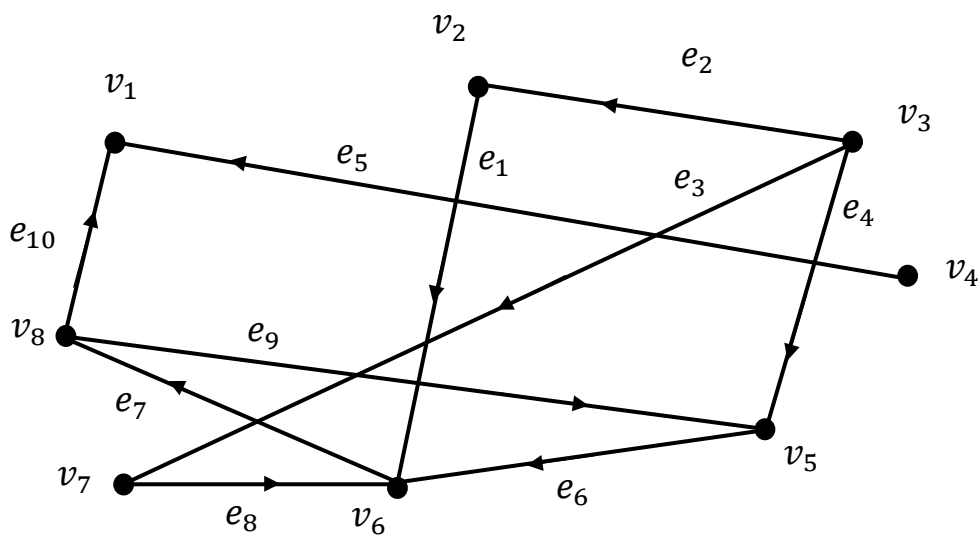


Рис. 10

$$A(G) = \begin{array}{c|cccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

**Властивості матриці суміжності вершин простого орієнтованого графа:**

1. Сума елементів  $i$ -го рядка матриці  $A(G)$  орграфа  $G$  дорівнює степеню виходу  $d^-(v_i)$ , а  $i$ -го стовпця - степеню входу  $d^+(v_i)$  вершини  $v_i$ .
2. Елементи матриці  $A(G)$  – одиниці і нулі.

$$3. A(G) + A(G)^T = A(G^H).$$

Як і у випадку простих неорієнтованих графів, кожен простий оргграф має єдину з точністю до перестановки рядків і стовпців матрицю суміжності вершин.

**Означення 13.** Матрицею інцидентності простого неорієнтованого графа  $G$  називається матриця  $B(G) = [b_{i,j}]$  розміром  $(p \times q)$  ( $p$  і  $q$  - кількості вершин і ребер графа), елементи  $b_{i,j}$  якої дорівнюють одиниці, якщо вершина  $v_i$  інцидентна ребру  $e_j$ , і нулю, якщо ця вершина цьому ребру не інцидентна.

### Властивості матриці інцидентності неорієнтованого графа:

1. Сума елементів матриці  $B(G)$  у кожному рядку дорівнює  $d(v_i)$ .
2. Сума елементів матриці у кожному стовпці дорівнює 2.

Матриця інцидентності графа, зображеного на рис. 9, має вигляд:

$$B(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{matrix}$$

Слід зазначити, що ребру  $e_k = \{v_m, v_n\}$  відповідає в матриці інцидентності  $k$ -й стовпець, що складається з нулів і двох одиниць, розташованих на  $m$ -м і  $n$ -му місцях. Нульовий рядок матриці відповідає ізольованій вершині.

**Означення 14.** Матрицею інцидентності (простого) оргграфа  $G$  з  $p$  вершинами і  $q$  ребрами називається матриця  $B(G) = [b_{i,j}]$  розміром  $(p \times q)$ , елементи якої визначаються наступним чином:  $b_{i,j} = -1$ , якщо вершина  $v_i \in$



$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{bmatrix}.$$

**Теорема 12.** Ранг матриці інцидентності  $B$  простого зв'язного орграфу з  $n$  вершинами дорівнює  $n-1$  (числу рядків без одного).

**Доведення.** Внаслідок зв'язності графа кожній вершині інцидентне хоча б одне ребро, тому у матриці  $B$  немає нульових рядків. Згідно властивості матриці інцидентності простого орграфу сума її рядків дорівнює нульовому рядку. Отже ранг цієї матриці менший, ніж  $n$ .

Доведемо тепер, що він становить саме  $n-1$ . Викреслімо останній рядок  $\vec{b}_n$  і припустимо, що для матриці  $B_0$ , яка залишилася після викреслення, лінійна комбінація її вектор-рядків дорівнює нульовому вектор-рядку:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{b}_i = \vec{0}.$$

Вершина  $v_n$  зв'язана ребром  $e_{j_1}$  з деякою вершиною  $v_{i_1}$ , тому у викресленому рядку  $\vec{b}_n$  елемент  $b_{n,j_1}$  відмінний від нуля, а у рядку  $\vec{b}_{i_1}$  - елемент  $b_{i_1,j_1} \neq 0$ . Оскільки у стовпці  $j_1$  матриці  $B_0$  тільки один елемент  $b_{i_1,j_1}$  відмінний від нуля, то  $\alpha_{i_1} = 0$ . В графі  $G$  система вершин  $\{v_n, v_{i_1}\}$  зв'язана деяким ребром  $e_{j_2}$  з новою вершиною  $v_{i_2}$ , тому  $b_{i_2,j_2} \neq 0$ . Другий ненульовий елемент стовпця  $j_2$  матриці  $B$  належить одному з рядків  $\vec{b}_n, \vec{b}_{i_1}$ , отже  $\alpha_{i_2} = 0$ . Продовжуючи процес приєднання вершин (рядків):  $\{v_n\}, \{v_n, v_{i_1}\}, \{v_n, v_{i_1}, v_{i_2}\}, \dots, V$ , ми послідовно одержимо нульові значення для всіх коефіцієнтів  $\alpha_i$  у лінійній комбінації вектор-рядків матриці  $B_0$ , отже рядки матриці  $B_0$  лінійно незалежні і

$$\text{rank } B_0 = \text{rank } B = n - 1.$$

Теорема доведена.

## 9. Власні значення матриці суміжності

Розглянемо рівняння на власні значення

$$(\lambda I - A)Y = 0,$$

де  $A$  – матриця суміжності графа,  $I$  – одинична матриця,  $\lambda$  – спектральний параметр,  $Y$  – стовпець невідомих. Таке рівняння має нетривіальний розв'язок  $Y$  тоді і тільки тоді, коли визначник, тобто  $\det(\lambda I - A) = 0$ . Це приводить до алгебраїчного рівняння, а многочлен  $\det(\lambda I - A)$  називають характеристичним многочленом. Корені цього многочлена – власні значення матриці суміжності, їх множину називають спектром матриці суміжності  $A$ .

До певного часу вважали, що неізоморфні графи мають різні спектри поки Коллац і Сінеговіц [10] не довели, що графи, зображені на рис. 11 – коспектральні (інакше кажучи – ізоспектральні), тобто такі, що спектри їх матриць суміжності співпадають. Виявилося, що серед всіх графів з чотирма та менше вершинами немає пари графів з однаковими спектрами матриць суміжності. Однак, серед графів з п'ятьма вершинами вже є пара коспектральних графів, яка зображена на рис. 12.

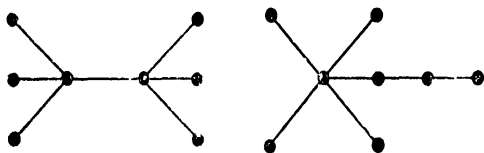


Рис. 11

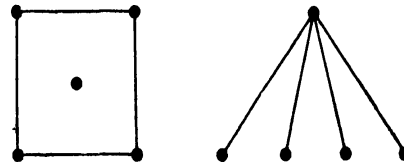


Рис. 12

Серед зв'язних графів з п'ятьма та менше вершинами немає пари графів з однаковими спектрами матриць суміжності, але коспектральна пара зв'язних графів з 6 вершинами існує [11]. Ця пара показана на рис. 13. Відповідний характеристичний многочлен має вигляд:

$$\lambda^6 - 7\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda + 1).$$

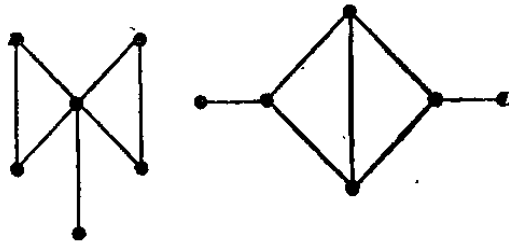


Рис. 13

## ЗМІСТ

1. Вступ	2
2. Основні поняття	2
3. Маршрути на графах	4
4. Деревя	5
5. Дводольні графи	6
6. Планарність	7
7. Орієнтовані графи (орграфи)	13
8. Матриці суміжності і інцидентності графа	14
9. Власні значення матриці суміжності	21

## ЛІТЕРАТУРА

1. Борисенко О. Дискретна математика. К.: Університетська книга, 2007, 255 с.
2. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А. Основи дискретної математики. Київ : Наукова думка, 2002. 578 с.
3. Möller M., Pivovarchik V. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications. Birkhauser, 2015. 412 p.
4. Möller M, Pivovarchik V. Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs. Birkhäuser/Springer, 2020. 359 pp.
5. Barnett S. Discrete mathematics. Numbers and Beyond. Addison Wesley Longman, 1998. 441 p.
6. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 345 с.
7. Dossey A, Otto A. D., Spence L. E., Eynden C. V. Discrete Mathematics. Boston, 2001. 620p.
8. Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to quantum graph theory. AMS, Providence, R.I. 2013. 270 p.
9. Anderson I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer, 2002. 200p.
10. Collatz L., Sinogowitz U. Spektren endlicher Grafen. Abh. Math. Univ. Hamburg, (1957), 63-77.
11. Babai L. Automorphism group and category of cospectral graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (1978), Vol. 31, 295—306.