МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для самостійної роботи

та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни

«Математичний аналіз»

тема «Невизначений інтеграл»

Одеса – 2022

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Математичний аналіз» тема «Невизначений інтеграл»

Розробник:

О. І. Олефір, к. ф.-м. н., старший викладач кафедри вищої математики і статистики
Г. Д. Урум, к. тех. н., доцент кафедри вищої математики і статистики

Рецензенти:

М. Г. Волкова, кандидат фізико-математичних наук., доцент кафедри вищої математики

О. М. Болдарєва, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Методичні рекомендації до самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Математичний аналіз» тема «Невизначений інтеграл» призначені для студентів ЗВО денної та заочної форм навчання, зокрема для студентів фізико-математичного факультету Університету Ушинського. Матеріал дозволить у найкоротші терміни навчитися вирішувати основні та найпоширеніші типи невизначених інтегралів.

Зміст

1. **Поняття невизначеного інтеграла** **4**

2. **Властивості невизначеного інтеграла** **6**

3. **Внесення функції під знак диференціалу.** **8**

4. **Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі.** **9**

5. **Метод інтегрування частинами.** **11**

6. **« Тригонометричні » інтеграли.** **13**

7. **Біноміальні інтеграли** **17**

8. **Дробово-раціональні функції та їх інтегрування** **19**

9. **Завдання для самостійного виконання** **24**

10. **Список використаної літератури** **29**

Ласкаво просимо до дивовижного світу інтегрального числення!

Щоб навчитися розв’язувати інтеграли - їх треба багато розв’язувати!

1. Поняття невизначеного інтеграла.

Одним із основних завдань диференціального обчислення є задача знаходження похідної заданої функції. Однак часто представляє інтерес і обернена задача: за даною функцією $f(x)$ знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює функції f(x).

Означення: Функція $F(x)$ називається первисною функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для будь-якого $X \in x$ функція $F(x)$ диференційована та виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Означення: Процес знаходження первисних називається інтегруванням, а сукупність всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ у цьому проміжку та позначається символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$, де C = const (будь-яке число)

Розбираємось у позначеннях і термінах:

$\int$ – значок інтеграла

$f(x)$ – підінтегральна функція

dx – значок диференціала. НЕ ВТРАЧАЙТЕ його!

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз

$\int f(x)dx$ – невизначений інтеграл

$F(x)$ – первісна

$F(x) + C$ – множина первісних функцій (ВАЖЛИВО: в будь-якому невизначеному інтегралі до відповіді приплюсовується C)

Інтеграли $\int f(x)dx$ перетворюються на деякі функції $F(x) + C$.

Розв'язати невизначений інтеграл $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ (не обов'язково табличний) – це означає перетворити його на певну множину функцій $\boldsymbol{F(x) + C}$, користуючись деякими правилами, прийомами та таблицею, а не якусь одну функцію.

Процес називається **інтегруванням** функції $\boldsymbol{f(x)}$**.**

Наприклад: таблична запис $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

Інтеграл $\int \cos x \, dx$ перетворився в множину первісних $F(x) = \sin x + C$.

Знаходження похідних та знаходження невизначених інтегралів (диференціювання та інтегрування) – це дві взаємно зворотні дії.

Інакше кажучи, якщо продиференціювати правильну відповідь, то обов'язково має вийти підінтегральна функція.

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Повертаючись до розглянутого прикладу, отримуємо

$(\sin x + C)' = (\sin x)' + (C)' = \cos x$ – підінтегральна функція.

Усі функції: $\sin x + 5, \sin x - \frac{1}{2}, \sin x + e^2$ та інші є розв'язками інтеграла $\int \cos x \, dx$. Цих розв'язків нескінченно багато.

Таблиця невизначених інтегралів:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x \, dx = e^x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
8. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg \, x + C$

9. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C$

10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, arctg\frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ ,\ |x| < |a|$

12. Формула «високого» логарифму: $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ \ |x| \neq a$

13. Формула «довгого» логарифму: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

2. Властивості невизначеного інтеграла

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

2. $(\int f(x)dx)' = f(x)$

3. $\int c\, f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx\ ,\ \ c \neq 0$ - постійний множник треба винести за знак інтеграла

4. $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\, dx$ - інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі двох інтегралів від кожної функції окремо.

Це правило справедливе для будь-якої кількості доданків.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

$$\int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{sin^2 x} + tg\, 5\right) dx$$

Розв’язання:

$\int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{sin^2 x} + tg\, 5\right) dx$

За властивістю 4, отримуємо:

$\int x\, dx + \int \sqrt{x}\, dx - \int 3x^5\, dx + \int \frac{2}{x^3} dx - \int \frac{1}{sin^2 x} dx + \int tg\, 5\, dx =$

$= \int x\, dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - 3\int x^5 dx + 2\int x^{-3}\, dx - \int \frac{1}{sin^2 x} dx + tg\, 5 \int dx$

За формулами 1, 2, 9 з таблиці інтегралів приходимо до відповіді:

$\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} - 3 \cdot \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot x^2} + ctg\, x + tg\, 5 \cdot x + C =$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctg\, x + tg\, 5 \cdot x + C$$

Перевірка:

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctg\, x + tg\, 5 \cdot x + C\right)' =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)' + \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}\right)' - \left(\frac{x^6}{2}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)' + (ctg\, x)' + \ (tg\, 5 \cdot x)' + \ (C)' =$$

$$= \frac{2x}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} - \frac{6 \cdot x^{6-1}}{2} - (-2 \cdot x^{-2-1}) + \left(-\frac{1}{sin^2 x}\right) + \ tg\, 5 \cdot 1 + 0 =$$

$$= x + x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot x^5 + 2 \cdot x^{-3} - \frac{1}{sin^2 x} + tg\, 5 = x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{sin^2 x} + tg\, 5$$

Отримана відповідь збігається з підінтегральною функцією, заданою за умовою. Таким чином, приклад розв’язано правильно.

По можливості завжди виконуйте перевірку!

На жаль, немає хороших і зручних формул для інтегрування добутку та суми:

$$\cancel{\int u \cdot v\, dx = \int u\, dx \cdot \int v\, dx} \quad ; \quad \cancel{\int \frac{u}{v} dx = \frac{\int u\, dx}{\int v\, dx}}$$

Тому, якщо є можливість, спочатку необхідно перетворити підінтегральну функцію.

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл.

$\int x^2 \cdot (3 + 4x)^2 dx$

Розв’язання:

По- перше, використовуємо формулу квадрата суми $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

По друге, внесемо у дужки x^2.

На третьому кроці скористаємося властивостями та таблицею інтегралів.

$$\int x^2 \cdot (3 + 4x)^2 dx = \int x^2 \cdot (9 + 2 \cdot 3 \cdot 4x + 16 \cdot x^2)\, dx = \int (9 \cdot x^2 + 24x^3 + 16x^4) dx =$$

$$= \int 9 \cdot x^2 dx + \int 24x^3 dx + \int 16x^4\, dx = 9 \int x^2 dx + 24 \int x^3 dx + 16 \int x^4 dx =$$

$$= 9 \cdot \frac{x^3}{3} + 24 \cdot \frac{x^4}{4} + 16 \cdot \frac{x^5}{5} + C = 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5} x^5 + C$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$$

Розв’язання:

У цьому прикладі підінтегральна функція є дріб. А коли ми бачимо в підінтегральному виразенні дріб, то першою думкою має бути питання: А чи не можна якось від цього дробу позбутися, або хоча б спростити?

$$\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2x^3 - x^{\frac{5}{2}} + 1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$$

Застосовуючи властивості степенів, отримуємо

$$\int \left(2x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

З властивостей невизначених інтегралів та таблиці інтегралів виходить:

$$2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{4}{7}\sqrt{x^7} - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \sqrt{x} + C$$

У розглянутих прикладах нам вдалося позбутися добутку та дробів, але це, звичайно ж, окремі випадки.

Розглянемо ключові методи інтегрування:

- **внесення функції під знак диференціалу;**
- **заміною змінної інтегрування.**

По своїй суті це одне й те саме, і ми починаємо з більш простої варіації.

3. Внесення функції під знак диференціалу.

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin(3x+1)\,dx$

Розв'язання:

У таблиці інтегралів є схожа формула $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

Проблема полягає в тому, що у нас під синусом складний вираз. Внесемо функцію $(3x+1)$ під знак диференціалу.

$$d(3x+1) = (3x+1)'dx = 3\cdot dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{d(3x+1)}{3}$$

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \int \sin(3x+1)\cdot\frac{d(3x+1)}{3} = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot d(3x+1) =$$

Тепер можна користуватися табличною формулою:

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$$

Виконав перевірку, отримаємо підінтегральну функцію, отже, інтеграл знайдено правильно.

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int e^{5x}dx$

Розв'язання:

$$\int e^{5x}dx = \begin{bmatrix} d(5x) = (5x)'dx = 5\cdot dx \\ dx = \dfrac{d(5x)}{5} \end{bmatrix} = \int e^{5x}\cdot\frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot d(5x) = \frac{1}{5}\cdot e^{5x} + C$$

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int tg\,x\;\,dx$.

Розв'язання:

Використовуємо тригонометричну формулу $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Розуміємо, $d(\cos x) = (\cos x)'dx = -\sin x\;dx$

Використовуємо табличний інтеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

$$\int tg\,x\;\,dx = \int\frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -ln|\cos x| + C$$

4. Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі.

Розглянемо другий спосіб інтегрування, в якому здійснюється прямий перехід до нової змінної. Ідея методу заміни полягає в тому, щоб складний вираз замінити однією літерою.

Для використання методу заміни змінної: у підінтегральному виразі має знаходитися деяка функція $\varphi(x)$ та її похідна $\varphi'(x)$: $\int \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\, dx$.

Необов'язково між $\varphi(x)$ та $\varphi'(x)$ добуток.

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin(3x+1)\,dx$

Розв'язання:

Як ми вже говорили, для вирішення цього інтеграла нам треба таблична формула $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \begin{bmatrix} 3x+1=t \\ d(3x+1)=dt \\ (3x+1)'dx=dt \\ 3dx=dt \\ dx=\frac{1}{3}dt=\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin t \cdot dt = -\frac{1}{3}\cdot \cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot \cos t + C = -\frac{1}{3}\cdot \cos\,(3x+1) + C$$

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}\,dx$

Розв'язання:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}\,dx = \begin{bmatrix} 3-4x=t \\ d(3-4x)=dt \\ -4\cdot dx=dt \\ dx=\frac{dt}{-4} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt = \int t^{-\frac{2}{3}}dt =$$

$$= \frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\cdot\sqrt[3]{t} + C = 3\cdot\sqrt[3]{3-4x} + C$$

В результаті заміни інтеграл значно спростився - звівся до звичайної степеневої функції.

Спростити інтеграл – це і є мета заміни!

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

Розв'язання:

$$\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{c} \arccos 3x = t \\ d(\arccos 3x) = dt \\ (\arccos 3x)'\,dx = dt \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot (3x)'dx = dt \\ -\dfrac{3\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = dt \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\dfrac{dt}{3} \end{array}\right] = \int t \cdot \left(-\frac{dt}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\int t\,dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^2}{2} + C = -\frac{(\arccos 3x)^2}{6} + C$$

5. Метод інтегрування частинами.

Цей метод дозволяє проінтегрувати деякі функції, яких немає у таблиці, деякий добуток функцій та деякі дроби.

Для всіх перелічених випадків існує один-єдиний інструмент, який називається **формула інтегрування частинами**:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Частинами беруться інтеграли наступних видів:

1. Логарифми та логарифми помножені на багаточлен. Логарифм не обов'язково є натуральним.

$$\int \ln x\,dx,\ \ \int (x^2+3)\cdot lnx\,dx,\ \ \int x \cdot ln^2 x\,dx$$

Правило: *В інтегралах такого типу за* $\boldsymbol{u}$ *завжди позначається логарифм.*

2. Добуток показникової (експоненціальної)функції та багаточлена.

$$\int x\cdot e^x\,dx,\quad \int (x^2-2x+3)\cdot e^{-2x}dx,\quad \int x\cdot 4^x dx$$

Правило: *За* $\boldsymbol{u}$ *завжди позначається багаточлен.*

3. Тригонометричні функції помножені на будь-який багаточлен.

$$\int x\cdot\cos 6x\,dx,\quad \int x\cdot tg^2x\,dx,\quad \int (x^2+5x)\cdot\sin 2x\,dx$$

Правило: *За* $\boldsymbol{u}$ *завжди позначається багаточлен.*

4. Обернені тригонометричні функції помножені на багаточлен.

$$\int \arcsin x\,dx,\quad \int x^2\cdot arctg\,x\,dx$$

Правило: *За* $\boldsymbol{u}$ *завжди позначається обернена тригонометрична функція.*

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл $\int \ln x\,dx$

Розв'язання:

$$\int \ln x\,dx=\left[\begin{matrix} u=\ln x & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & \Rightarrow & v=\displaystyle\int dx=x \end{matrix}\right]=$$

$$=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\cdot\ln x-x+\ C$$

Приклад 11. Знайти невизначений інтеграл $\int \arcsin x\,dx$.

Розв'язання:

$$\int \arcsin x\,dx=$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} = \arcsin x \ \Rightarrow \ du = (\arcsin x)' dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \,, |x| < 1 \\ dv = dx \ \Rightarrow \ v = \displaystyle\int dx = x \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \ x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Для другого інтегралу застосували метод заміни змінної.

Приклад 12. Знайти невизначений інтеграл $\int (x-6) \cdot \sin\frac{x}{2}\ dx$.

Розв'язання:

$$\int (x-6) \cdot \sin\frac{x}{2}\ dx = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} = x - 6 \Rightarrow \ d\boldsymbol{u} = dx \\ dv = \sin\dfrac{x}{2} \cdot dx \ \Rightarrow \ v = \displaystyle\int \sin\frac{x}{2} \cdot dx = -2 \cdot \cos\frac{x}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \ -2 \cdot (x-6) \cdot \cos\tfrac{x}{2} + 2 \int \cos\tfrac{x}{2} \cdot \ dx = -2 \cdot (x-6) \cdot \cos\tfrac{x}{2} + 4 \cdot \sin\tfrac{x}{2} + \ C$$

Приклад 13. Знайти невизначений інтеграл $\int (x^2 + x) \cdot \mathrm{e}^{-x} dx$

Розв'язання:

$$\int (x^2 + x) \cdot \mathrm{e}^{-x} dx = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} = x^2 + x \ \Rightarrow \ d\boldsymbol{u} = \mathbf{2}x + 1 \\ dv = \mathrm{e}^{-x} dx \ \Rightarrow \ v = \displaystyle\int \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\,(x^2 + x) \cdot \mathrm{e}^{-x} + \int (\mathbf{2}x + 1)\mathrm{e}^{-x} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} = \mathbf{2}x + 1 \ \Rightarrow \ d\boldsymbol{u} = \mathbf{2}dx \\ dv = \mathrm{e}^{-x} dx \ \Rightarrow \ v = \displaystyle\int \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\,(x^2 + x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - (\mathbf{2}x + 1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2 \int \mathrm{e}^{-x} dx =$$

$$= -\,(x^2 + x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - (\mathbf{2}x + 1) \cdot \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + \ C$$

В цьому прикладі формула інтегрування частинами застосовувалась два рази.

6. « Тригонометричні » інтеграли.

Тобто розглянемо інтеграли, які містять тригонометричні функції.

В багатьох інтегралах тригонометричні функції знаходяться в будь-яких степенях. Якщо степінь парна, то такі інтеграли розв'язуються **методом пониження степені** за допомогою наступних формул:

$$sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Приклад 14. Обчислить інтеграл $\int sin^4x\,dx$

Розв'язання:

$$\int sin^4x\,dx = \int (sin^2x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cdot\cos 2x + cos^2 2x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\int dx - 2\cdot\int \cos 2x\cdot dx + \int cos^2 2x\cdot dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x + \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot\sin 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\int dx + \int \cos 4x\cdot dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin 4x + C =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot\sin 2x + \frac{1}{32}\cdot\sin 4x + C.$$

Якщо степінь непарна, то требо відокремити одну функцію, щоб отримати парний ступінь і цю відокремлену функцію внести під знак диференціала, використовуючи основне тригонометричне тотожність:

$$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

Приклад 15. Обчислить інтеграл $\int sin^3x\,dx$

Розв'язання:

$$\int sin^3x\,dx = \int sin^2x\cdot sinx\,dx = \int (1 - cos^2x)\cdot(-d(cosx)) =$$

$$= -\int d(\cos x) + \int cos^2 x \cdot d(cos\ x) = -\cos x + \frac{cos^3 x}{3} + C$$

Якщо тангенс або котангенс знаходяться до третього ступеня, використовуємо означення цих функцій.

Приклад 16. Обчислить інтеграл $\int ctg^2 x \cdot dx$

Розв’язання:

$$\int ctg^2 x \cdot dx = \int \frac{cos^2 x}{sin^2 x} \cdot dx = \int \frac{1 - sin^2 x}{sin^2 x} \cdot dx = \int \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1\right) \cdot dx =$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} - \int dx = -ctg\, x - x + C\,.$$

А якщо ступінь цих функцій вищий за другий, то нам знадобляться формули:

$$tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} - 1 \quad \text{або} \quad ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} - 1$$

Для розв’язання іноді требо використовувати формули:

$$\sin \propto \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \qquad (*)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \qquad (**)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \qquad (***)$$

Приклад 17. Обчислить інтеграл $\int \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot dx$

Розв’язання:

Використаємо формулу (***)

$$\int \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right)\right)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{4} dx + \frac{1}{2}\int \sin\frac{3x}{4} dx = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \cos\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos\frac{3x}{4} + C$$

Хочу нагадати, що **косинус – це парна функція**, тобто, і мінус зникає без жодних наслідків.

Синус же – функція непарна: тут мінус, навпаки – не пропадає, а виноситься.

Коли не видно інших способів вирішення інтегралів, які містять тригонометричні функції, на допомогу приходять **формули універсальної тригонометричної підстановки:**

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

З технічного погляду, універсальна тригонометрична підстановка є звичайною заміною змінної.

$$tg\frac{x}{2} = z \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{2\cdot z}{1+z^2} \;\;;\;\; \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Виразимо dx:

$$\frac{x}{2} = arctg\, z \;\Longrightarrow x = 2\cdot\, arctg\, z \;\Longrightarrow\; dx = 2\cdot(arctg\, z)'dz = 2\cdot\frac{dz}{1+z^2}$$

Типовими інтегралами, де її потрібно застосувати, є $\int R(\sin x, \cos x)dx$:

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}\;;\;\int\frac{dx}{1-\sin x}\;;\;\int\frac{(7+\cos x)\cdot dx}{5-\sin x}$$

Приклад 18. Обчислить інтеграл $\int\frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$

Розв’язання:

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x-\sin x} = \int\frac{\frac{2\cdot dz}{1+z^2}}{3+2\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}-\frac{2\cdot z}{1+z^2}} =$$

$$= \int\frac{\frac{2\cdot dz}{1+z^2}}{\frac{3\cdot(1+z^2)+2\cdot(1-z^2)-2\cdot z}{1+z^2}} =$$

$$= \int \frac{2 \cdot dz}{3 + 3z^2 + 2 - 2z^2 - 2 \cdot z} = \int \frac{2 \cdot dz}{z^2 - 2z + 5} =$$

$$= \int \frac{2 \cdot dz}{z^2 - 2z + 1 + 4} = \int \frac{2 \cdot dz}{(z-1)^2 + 2^2} = 2 \cdot \int \frac{d(z-1)}{(z-1)^2 + 2^2} =$$

$$= \frac{2}{2} \, arctg \frac{z-1}{2} + C =$$

Так як $tg\frac{x}{2} = z$, то отримуємо відповідь: $arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2} - 1}{2}\right) + C$

Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, тобто. при всіх x з області інтегрування вірно $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t = \cos x$.

7. Біноміальні інтеграли

Так званий біноміальний інтеграл має наступний вигляд:

$\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$, де $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$

Первісна для функції цього виду є елементарною функцією лише у наступних трьох випадках:

1) *якщо* $p \in \mathbb{Z}$, то $t = \sqrt[s]{x}$, де s –спільний знаменник дробів m, n

2) *якщо* $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p

3) *якщо* $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то $a + bx^n = x^n \cdot t^s$, де s – знаменник дробу p.

Приклад 19. Обчислить інтеграл $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^2}$

Розв’язання:

Перепишемо інтеграл у вигляді $\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$

$m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=-2 \in \mathbb{Z}$

Це самий легкий спосіб. Спільний знаменник дробив m, n дорівнює 6, тому

$t=\sqrt[6]{x}, \quad x=t^6, \quad \sqrt{x}=t^3, \ \sqrt[3]{x}=t^2, dx=6t^5dt$

В результаті заміни змінної інтегрування приходимо до інтегралу:

$$6\int\frac{t^8dt}{(1+t^2)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{3(t^2+1)+t^2}{(1+t^2)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18arctgt-6\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}, \text{ де}$$

$$\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}arctgt+C.$$

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21arctgt+C, \text{ где } t=\sqrt[6]{x}.$$

Приклад 20. Обчислить інтеграл $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$

Розв'язання:

Перепишемо інтеграл у вигляді $\int x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$ так як

$m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \quad \frac{m+1}{n}=2 \in \mathbb{Z}$

Тому $\sqrt[4]{x}+1=t^3, \ x=(t^3-1)^4, \ dx=4\cdot(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt$

Таким чином,

$$\int \frac{t}{(t^3-1)^2}\cdot 12\cdot t^2\cdot (t^3-1)^3\,dt = 12\int (t^6-t^3)dt = 12\cdot\frac{t^7}{7} - 12\cdot\frac{t^4}{4} + C$$

$$t = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1},$$

Звідки, $I = \frac{12}{7}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{7}{3}} - 3\cdot\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{4}{3}} + C.$

Приклад 21. Обчислить інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання . Приведемо інтеграл до виду $\int x^0\left(1+x^4\right)^{\frac{-1}{4}}dx$ та визначаємо

$$m=0,\quad n=4,\quad p=-\frac{1}{4},\quad s=4.$$

Так як $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле, тоді нехай $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$.

$$x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}},\quad dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt,\quad \sqrt[4]{1+x^4}=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int\frac{t^2dt}{t^4-1} = \int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Cx+D}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}arctgt + C,\ \text{де}\ t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}.$$

8. Дробово-раціональні функції та їх інтегрування

Функція, яка дорівнює відношенню двох многочленів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_m}$$

де m, n – цілі додатні числа, $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – дійсні числа, називається дробово-раціональною функцією.

Відомо, якщо $n \geq m$, то дріб називається неправильним дробом. Будь-який неправильний дріб шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити у вигляді суми деякого многочлена і правильного дробу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{L_k(x)}{Q_m(x)}$$

де $M(x)$ – многочлен і $k < m$.

Інтегрування многочлена $M(x)$ зводиться до інтегрування суми табличних інтегралів. А інтегрування правильного дробу зводиться, в свою чергу, до інтегрування так званих найпростіших дробів.

Правильні дроби наступних чотирьох видів називаються найпростішими (елементарними):

$$I.\ \frac{A}{x-a} \quad II.\ \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k = 2,3,4,\dots.)$$

$$III.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad IV.\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad (k = 2,3,4,\dots.\ )$$

де A, B, p, q – дійсні числа, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів ($D < 0$) (Серед коренів знаменника є комплексні.)

Обчислимо інтеграли від цих дробів:

$$I.\ \int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A \cdot \ln(x-a) + C$$

$$II.\ \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \begin{bmatrix} x-a=t \\ dx=dt \end{bmatrix} = A\int \frac{dt}{t^k} = A \cdot \int t^{-k}dt = A \cdot \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$
$$= \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{t^{k-1}} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

Інтеграл від елементарного дробу третього та четвертого типу розглянемо далі на прикладах.

Приклад 22. Обчислить інтеграл $\int \frac{(x^2-19x+6)\,dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$

Розв’язання:

Перше, що ми ЗАВЖДИ робимо при вирішенні інтегралу від дробово-раціональної функції – це відповідаємо на таке запитання: чи є дріб правильним? Цей крок виконується усно.

Спочатку дивимося на чисельник і з'ясовуємо старший ступінь багаточлена: У прикладі старший ступінь чисельника дорівнює двом. Тепер дивимося на знаменник і з'ясовуємо старший ступінь знаменника. Шлях, що напрошується, - це розкрити дужки і привести подібні доданки, але можна вчинити простіше, у кожній дужці знаходимо старший ступінь і множимо відповідні члени. Таким чином, старший ступінь знаменника дорівнює трьом. **Висновок:** старший ступінь чисельника (2) СТРОГО менше старшого ступеня знаменника (3), отже, дріб є правильним.

Крок 2. Розкладаємо знаменник на множники.

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

Загальне правило: ВСЕ, що у знаменнику МОЖНА розкласти на множники -розкладаємо на множники.

Наступний крок: Методом невизначених коефіцієнтів розкладаємо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів. Такі дроби часто називають елементарними.

$$\frac{(x^2 - 19x + 6)}{(x-1)(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

де A, B, C – поки що невідомі коефіцієнти.

Ці коефіцієнти можна знайти двома способами: за корінням і за ступенями.

Ми будемо шукати другим способом.

$$\frac{(x^2 - 19x + 6)}{(x-1)(x+3)(x+2)} = \frac{A(x+3)(x+2) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

Оскільки знаменники однакові, позбавляємося їх.

$$x^2 - 19x + 6 = A(x+3)(x+2) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

Згадуємо шкільне правило: для того, щоб помножити багаточлен на багаточлен, потрібно кожен член одного багаточлена помножити на кожен член іншого багаточлена:

$$x^2 - 19x + 6 = Ax^2 + 5Ax + 6A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx^2 + Cx - 2C$$

Тепер складемо систему лінійних рівнянь за ступенями:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 5A + 2B + C = -19 \\ 6A - 3B - 2C = 6 \end{cases}$$

Вирішуючи систему, отримаємо:

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = -16 \\ C = 18 \end{cases}$$

$$\int \frac{(x^2-19x+6)\,dx}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{-16}{x+2} + \frac{18}{x+3}\right)dx = -\int \frac{dx}{x-1} - -16\int \frac{dx}{x+2} + +18\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\ln|x-1| - 16\ln|x+2| + 18\ln|x+3| + C, \quad \text{де} \quad C = const$$

Приклад 23. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$ (тип дробу II)

Розв'язання.

Підінтегральна функція – правильний дріб, знаменник якого перетворюється в нуль при x = 0 та x = –1 .

При цьому x = 0 – корінь простий (кратності 1), а x =–1 – корінь кратності 2. Тоді

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Зведемо до спільного знаменника усі найпростіші дроби та прирівняємо один до одного чисельники обох частин рівності.

Отримуємо: $x^2 - 3x + 2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$

Для обчислення коефіцієнтів скористаємось способом частинних значень(або способом коренів):

$x = 0: \quad 2 = A$

$x = -1: \quad 6 = -C \Rightarrow C = -6$

$x = 1: \quad 0 = 4A + 2B + C \Rightarrow 0 = 4 \cdot 2 + 2B - 6 \Rightarrow 2B = -2 \Rightarrow B = -1$

Згідно з цими обчисленнями, можна записати:

!!!!!!

III. Інтегрування цього дробу розглянемо на прикладі (якщо розглядати інтегрування III дробу в загальному вигляді, то розв'язання буде дуже громіздким)

Приклад 24. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{4x^2+4x+10}$

Розв'язання.

Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де A = 0, B = 1, $b^2 - 4ac = -144 < 0$

Виділимо повний квадрат : $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$$4x^2 + 4x + 10 = \begin{bmatrix} a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ 2ab = 4x \Rightarrow b = \frac{4x}{2a} = \frac{4x}{4x} = 1 \end{bmatrix} = 4x^2 + 4x + 1 - 1 + 10$$
$$= (2x+1)^2 + 9$$

Одержимо табличний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} arctg\,(2x+1) + C$$
$$= \frac{1}{6}\, arctg(2x+1) + C$$

Завдання для самостійного виконання

Варіант №1

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

   a) $\int (x^2+2)^2 dx$ b) $\int 5^x(2^x+6)dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

   a) $\int \cos(4x-3)dx$ b) $\int (12x-7)^9 dx$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

   a) $\int xe^{-8x^2}dx$ b) $\int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

   a) $\int x^2 \ln x\, dx$ b) $\int sin3x\, e^{3x}dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

   $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$

Варіант №2

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

   a) $\int \frac{4x+3}{x^2}dx$ b) $\int (2x^5+5^x-7)dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

   a) $\int (5x+4)^8 dx$ b) $\int \frac{dx}{6x+7}$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

   a) $\int sin^6 x\, cosx dx$ b) $\int \frac{dx}{xln^3 x}$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int \frac{x+3}{sin^2 2x}\,dx$ b) $\int log_3(2x-1)dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{dx}{1+x^3}$$

Варіант №3

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int \frac{5e^x sin^2 x-2}{sin^2 x}dx$ b) $\int x^2(2x^3+5)\,dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int \sqrt[4]{10-7x}dx$ b) $\int 4^{5-x}dx$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int e^x(7e^x+3)^5 dx$ b) $\int \frac{x^4\,dx}{2x^5-3}$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int \frac{2x+3}{cos^2 4x}\,dx$ b) $\int (2x-7)e^{4x}dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$$

Варіант №4

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int \frac{4-3x^2}{x^3}dx$ b) $\int (5x^4+3cosx-x)dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int \sqrt[4]{x-6}dx$ b) $\int \frac{dx}{\frac{x}{6}-6}$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int \frac{dx}{cos^2 x(tgx+3)}$ b) $\int e^x cose^x dx$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int \ln(x^2+9)\,dx$ b) $\int (x-3)sin2x\,dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{xdx}{x^3-1}$$

Варіант №5

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int \frac{5sin^2x-4}{sin^2x}dx$ b) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int e^{7-10x}dx$ b) $\int \frac{dx}{9x+10}$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int \frac{\sqrt[3]{lnx}}{x}dx$ b) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x+1}}$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int ln(x^2+1)\,dx$ b) $\int x^3 \sin x\,dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-5)^4}\,dx$$

Варіант №6

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int (4x-3)(x+2)dx$ b) $\int cos^2\frac{x}{2}dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int \frac{dx}{7-(x+1)^2}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x-2}}$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int \frac{3^{arctgx}dx}{1+x^2}$ b) $\int \frac{dx}{x^2 sin^2\frac{1}{x}}$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int x^2 cos^2 x\,dx$ b) $\int x \cdot 3^x dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Варіант №7

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int \left(2 - 4^x + \frac{6}{x}\right) dx$ b) $\int tg^2 x\,dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{5}\right) dx$ b) $\int \frac{dx}{25+9x^2}$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int xcos(x^2 + \frac{\pi}{7})\,dx$ b) $\int \frac{dx}{xlog_2 x}$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int \frac{ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$ b) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} dx$$

Варіант №8

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int (5x-2)(x^2+1)dx$ b) $\int \frac{6xe^x+1}{x} dx$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int \frac{dx}{(8x+1)^3}$ b) $\int cos^2 2x\,dx$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3} dx$ b) $\int \frac{7^{arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ b) $\int x^3 e^x \, dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$$

Варіант №9

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2tx}}$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5+1}}$ b) $\int tg\, 3x\, dx$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int \frac{x+3}{sin^2 2x} dx$ b) $\int \frac{x \cdot arctgx}{\sqrt{x^2+1}} dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$$

Варіант №10

1. Знайти інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування:

a) $\int (4x^3 + cosx - 1) dx$ b) $\int \frac{5dx}{x^6}$

2. Проінтегрувати функцію, що залежить від лінійного аргументу:

a) $\int \frac{cosx}{\sqrt[3]{sin^2 x}} dx$ b) $\int \frac{dx}{7x-10}$

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$ b) $\int \frac{dx}{x ln^3 x}$

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

a) $\int e^{2x}x^3dx$ b) $\int \frac{2x+3}{\cos^2 4x}\ dx$

5. Знайти інтеграл раціональної функції:

$$\int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$$

Список використаної літератури

1. Шкіль М. І. Математичний аналіз. : підручник у 2ч. Ч.1 – 3-тє вид. – К.: Вища шк., 2005. - 447 с.
2. Берман Г. Н. Збірник задач з курсу математичного аналізу.: навчальний посібник для вузів. – 20-те вид. – М.: Наука, 1985. – 384 с.