

Міністерство освіти і науки України
Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ДУДКО АНАСТАСІЯ ІГОРІВНА

УДК 519.177

ДИСЕРТАЦІЯ

СКІНЧЕННОВИМІРНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ НА ГРАФАХ

111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

А. І. Дудко

Науковий керівник:

**Пивоварчик Вячеслав
Миколайович**

доктор фізико-математичних наук,
професор

Одеса – 2022

Анотація

Дудко А.І. Скінченновимірні спектральні задачі на графах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика. – ДЗ "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського". Міністерство освіти і науки України, Одеса, 2022.

Дисертаційна робота присвячена задачам, що описують малі поперечні коливання графів, ребрами яких є стільтьєсівські струни, тобто невагомі пружні нитки, що несуть на собі скінченну кількість точкових мас (намистин, у термінології М.Г. Крейна). Такі ж, з точки зору математики, скінченновимірні спектральні задачі описують поздовжні коливання графів, ребра яких складаються з точкових мас, з'єднаних пружинами. Ця тематика є скінченновимірним аналогом так званої теорії квантових графів, у якій вивчаються спектральні задачі, породжені диференціальними рівняннями квантової механіки, задані на графах.

Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел, що містять 104 найменування. У вступі визначено об'єкт і предмет дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовано мету і завдання, визначено методи дослідження, його наукову новизну, практичне значення, прокоментовано апробацію, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У *першому розділі* наведена коротка історія скінченновимірних прямих і обернених задач на інтервалі, на зірковому графі та на довільному дереві. Розглянуті такі необхідні далі поняття, як ланцюговий дріб Стільтьєса, ланцюговий дріб Стільтьєса, який розгалуджується, наведені означення раціональної неванліннівської функції (яку ще називають функцією Герглотца), раціональної S -функції (функції Стільтьєса) та S_0 -функції.

Також наведені деякі відомі леми та теореми, котрі описують чергування коренів та полюсів раціональних неванліннівських функцій, раціональних S -функцій та S_0 -функцій, які використовуються при доведенні основних теорем у подальших розділах.

У *другому розділі* розв'язана, по-перше, пряма задача, тобто опис спектру коливань стільтьєсівської струни з вільними кінцями (умови Неймана на обох кінцях) та порівняння спектру відповідної спектральної задачі зі спектрами задач, що описують коливання з цієї ж струни з вільними кінцями і фіксованою проміжною точкою. З точки зору фізики це відповідає закріпленню проміжної точки.

Доведено, що власні значення задачі з умовами Неймана на кінцях чергуються у нестрогому сенсі з об'єднанням спектрів двох задач, одна з яких породжена лівою частиною струни з умовою Неймана на лівому кінці та умовою Діріхле на правому, а друга породжена правою частиною струни з умовою Неймана на правому кінці та умовою Діріхле на лівому.

Також розв'язана обернена задача, тобто задача відновлення даних стільтьєсівської струни за відомими:

1. спектром коливань цієї струни з вільними кінцями (умови Неймана на обох кінцях);
2. спектром коливань лівої частини цієї струни з лівим кінцем вільним (умова Неймана), а правим – закріпленим (умова Діріхле);
3. спектром коливань правої частини з правим кінцем вільним (умова Неймана), а лівим – закріпленим (умова Діріхле);
4. загальними масами на частинах струни.

У *третьому розділі* розв'язана наступна пряма задача, породжена рівняннями стільтьєсівської струни на зірковому графі з трьома ребрами.

Розглянута спектральна задача на зірковому графі з кількістю мас на мистин n_1, n_2, n_3 на ребрах з умовами Діріхле на висячих вершинах, спектр

якої позначений через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$, задача на першому ребрі з n_1 масами з умовою Діріхле на лівому кінці та умовою Неймана на правому кінці, спектр якої позначений через $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$, а також задача з умовами Діріхле на кінцях з $n_2 + n_3$ масами на об'єднанні другого та третього ребра, спектр якої позначений через $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$. Пряма задача полягала в доведенні того, що власні значення першої з цих трьох задач чергуються з елементами об'єднання спектрів другої та третьої задачі у нестрогому розумінні.

Розв'язана також обернена задача, тобто задача відновлення мас намистин та довжин інтервалів між ними на ребрах графу, виходячи з трьох вище згаданих спектрів та повних довжин струн. Виявилось, що умова строгого чергування елементів послідовності $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ з елементами послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} = \{\mu_k\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ є достатньою для існування розв'язку оберненої задачі.

При цьому маси намистин та довжин інтервалів на першій струні відновлюються однозначно, а на інших двох струнах – ні.

У *четвертому розділі* розглядаються дві спектральні (основні) задачі на зірковому графі з $q > 1$ ребрами, породжені тими ж самими рекурентними співвідношеннями стільтьєсівських струн з тими ж самими умовами неперервності та балансу сил у центральній вершині та умовами Діріхле на всіх висячих вершинах окрім однієї (кореня). У корені у першій задачі накладена умова Неймана, а у другій – умова Діріхле. Відомо, що спектри цих задач чергуються у нестрогому сенсі. У підході прямої задачі показано, що власне значення λ першої задачі співпадає з власним значенням другої задачі тоді і тільки тоді, коли це λ є водночас і власним значенням принаймні двох задач на не інцидентних з коренем ребрах з умовами Діріхле на обох кінцях. Це означає, що упорядкований вектор кратностей тих власних значень першої основної задачі, які співпадають з власними значеннями другої основної задачі, підпорядкований у певному сенсі вектору, утвореному з кількостей намистин на не кореневих ребрах згідно з відомою

процедурою.

Також розв'язана відповідна обернена задача, тобто задача знаходження мас намистин на ребрах зіркового графу за відомими спектрами першої та другої задач з умовою Неймана перша та умовою Діріхле друга у висячій вершині з заданими кількостями намистин на ребрах. Умова заданої кількості намистин на ребрах суттєво ускладнює задачу опису достатніх умов існування розв'язку такої задачі. Доведено, що якщо дві послідовності додатних чисел чергуються у нестрогому сенсі, а кратності співпадаючих елементів цих послідовностей підпорядковані у сенсі Мюрхеда [83] мажоруючому вектору, побудованому згідно з процедурою, описаною у прямій задачі цього розділу, то ці дві послідовності є спектрами основних задач з умовою Неймана у корені – перша і з умовою Діріхле у корені – друга.

У *п'ятому розділі* розглянуті дві спектральні задачі на довільному дереві з $q > 1$ ребрами, породжені тими ж самими рекурентними співвідношеннями стільтьєсівських струн з тими ж самими умовами неперервності та балансу сил у внутрішніх вершинах та умовами Діріхле на всіх висячих вершинах окрім однієї (кореня). У корені у першій задачі накладена умова Неймана, а у другій задачі – умова Діріхле. Показано, що дріб, чисельник якого є характеристичним многочленом спектральної задачі з умовою Діріхле на дереві, а знаменник – характеристичний многочлен спектральної задачі з умовою Неймана на цьому дереві, може бути розвинений у ланцюговий дріб, що розгалуджується у точках, які відповідають внутрішнім вершинам дерева.

У *шостому розділі* ми перейшли до розгляду зв'язного графу, котрий не є деревом (але є циклічно зв'язним). Загальна теорія спектральних задач на довільних зв'язних графах не існує. Існують тільки подеякі конкретні результати. Результати розділу 6 вдалося отримати завдяки тому, що ми розглядаємо граф з однаковими ребрами. Більш того, ці ребра, тобто стільтьєсівські струни були симетричними відносно середин ребер. Завдяки цьо-

му задача зведена до більш простої алгебраїчної задачі. Це було зроблено для того, щоб розглянути коливання графу напівправильного многогранника, а саме усіченого ікосаедра, котрий має застосування у хімії і котрий має іншу назву – фулерін. При розв’язуванні було використано програму MAPLE і були знайдені власні значення і перевірено, що максимальна кратність власного значення цієї задачі є $\mu + 1$, де μ – цикломатичне число графу, в даному випадку $\mu + 1 = 32$, що узгоджується з результатом роботи [41].

Практичне значення одержаних результатів. Ця дисертаційна робота має теоретичний характер, тому її результати становлять інтерес у галузі математичної фізики, диференціальних і різницевих рівнянь та їх застосувань. Також вони можуть бути використані в теорії синтезу електричних ланцюгів.

Ключові слова: стільтьєсівська струна, струна Крейна, узагальнена стільтьєсівська функція, граф, дерево, корінь, вершина, висяча вершина, ребро, зірковий граф, алгебраїчна кратність, власні значення, рекурентні співвідношення, граничні умови, ланцюговий дріб, крайова умова Діріхле, крайова умова Неймана, різницево-диференціальне числення, крайова задача, обернена задача.

Abstract

Dudko A.I. Finite - dimensional spectral problems on graphs. — Qualifying work on the right of a manuscript.

Thesis for a degree of Doctor of Philosophy in specialty 111 – Mathematics. – South - Ukrainian national pedagogical university named after K. D. Ushinsky. Ministry of Education and Science of Ukraine, Odesa, 2022.

The thesis is devoted to problems describing small transverse vibrations of graphs the edges of which are Stieltjes strings, i.e. weightless elastic threads bearing finite number of point (concentrated) masses (beads in M.G. Krein’s

terminology). The same from the mathematical point of view finite-dimensional spectral problems describe longitudinal vibrations of graphs the edges of which are point masses connected by springs. This topic is a finite-dimensional analogue of the so-called quantum graphs theory which deals with spectral problems generated by the differential equations of quantum theory for metric graphs.

The thesis consists of the introduction, six sections, conclusions to each section, general conclusions and the list of content which contains 104 items. In the introduction the object, the subject and the subject-matter of the investigation are described, relevance of the topic and its novelty are proved, practical importance is shown. The approbation is described and the structure and the main content are given.

In *Section 1* a brief history of finite-dimensional direct and inverse spectral problems on an interval, on a star graph and on an arbitrary tree is presented. The notions of a Stieltjes continued fraction, a branching Stieltjes continued fraction used in the sequel are described together with the notions of a rational Nevanlinna function (also called Herglotz function), rational S -function (Stieltjes function) and S_0 -function. Some known lemmas and theorems are given on interlacing of poles and zeros of a rational Nevanlinna function, rational S -function and S_0 -function which are used in proofs of main theorems in the further sections.

In *Section 2*, first of all, we solve the direct problem, i.e. describe the spectrum of vibrations of a Stieltjes string with free ends (the Neumann conditions at both ends) and compare this spectrum with the spectrum of the problem describing vibrations of the same string with the ends free and an intermediate point fixed.

It is proved that the eigenvalues of the problem with the Neumann conditions at the ends interlace in the non - strict sense with the union of the spectra of the two problems one of which is generated by the left part of the string with

the Neumann condition at the left end and the Dirichlet condition at the right end and the other is generated by the right part of the string with the Neumann condition at the right end and the Dirichlet condition at the left end.

The corresponding inverse problem is also solved, i.e. the problem of recovering the Stieltjes string data by known:

1. The spectrum of the problem of vibrations of this string with free ends (the Neumann conditions at both ends).
2. The spectrum of the problem of vibrations of the left part of the string with the Neumann condition at its left end and the Dirichlet condition at its right end.
3. The spectrum of the problem of vibrations of the right part of the string with the Neumann condition at its right end and the Dirichlet condition at its left end.
4. Total masses on the parts of the string.

In *Section 3* the direct problem generated by the Stieltjes string equations on a star graph with three edges is considered.

We deal with the spectral problem for such graph with the number of beads n_1, n_2, n_3 on the edges and with the Dirichlet conditions at the pendant vertices. The spectrum of this problem is denoted by $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$. The second problem is the one generated by the Stieltjes string equations on the first edge with the Dirichlet condition at the left end and the Neumann condition at the right end. The spectrum of it is denoted by $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$. The third problem is the problem on the union of the second and the third edges with the Dirichlet conditions at both ends with the spectrum $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$. The direct problem lies in proving that the spectrum of the first problem interlaces (in the non-strict sense) with the union of the spectra of the second and the third problem.

The corresponding inverse problem, i.e. the problem of recovering masses of the beads and lengths of the intervals between them using the three spectra

mentioned above and total lengths of the strings is also solved. It appeared that the condition of strict interlacing of the terms of the sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ with the terms of the sequence $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} = \{\mu_k\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ is sufficient for the solution of the inverse problem to exist.

Wherein the masses of the beads and the lengths of the intervals on the first string are uniquely determined while the masses and lengths on the other strings are not.

In *Section 4* two (main) spectral problems are considered on a star graph of $q > 1$ edges generated by the recurrence relations of Stieltjes strings with the conditions of continuity and balance of forces at the central vertex and the Dirichlet conditions at all the pendant vertices except of one (the root). For the first problem we impose the Neumann condition at the root while for the second problem the Dirichlet condition. It is known that the spectra of these problems interlace in the nonstrict sense. In direct problem approach it is shown that an eigenvalue λ of the first problem coincides with an eigenvalue of the second problem if and only if λ is an eigenvalue of at least two problems on the edges which are not incident with the root with the Dirichlet conditions at both ends. This means that the ordered vector of multiplicities of those eigenvalues of the first main problem which coincide with the eigenvalues of the second main problem is majorized in certain sense by the ordered vector composed of the numbers of beads on non-root edges by the known procedure.

The corresponding inverse problem, i.e. the problem of recovering masses of the beads and lengths of the intervals between them on the edges of a star graph using the two spectra: the spectrum of the problem with the Neumann condition at the root and the problem with the Dirichlet condition at the root, is solved also. The fact that the numbers of the beads are given makes the problem more complicated. It is proved that if two sequences of positive numbers interlace in the non-strict sense and the multiplicities of coinciding elements of these sequences are majorized in the sense of Muirhead by a vector constructed via

the procedure described above in the approach of direct problem then these two sequences are the spectra of the two main problems with the Dirichlet condition at the root the first, and the Neumann condition the second.

In *Section 5* two spectral problems are considered on an arbitrary tree of $q > 1$ edges generated by the same recurrence relations of Stieltjes strings with the same continuity conditions and the balance of forces conditions at the interior vertices and the Dirichlet conditions at all the pendant vertices except of one (the root). In the first problem the Neumann condition is imposed at the root while in the second problem the Dirichlet condition. It is shown that the quotient with the characteristic polynomial of the spectral problem with the Dirichlet condition at the root as the numerator and the characteristic polynomial of the spectral problem with the Neumann condition at the root as the denominator can be expanded into a continuous fraction branching at the points corresponding to the interior vertices of the tree.

In *Section 6* we consider a connected graph which is not a tree but is cyclically connected. A general theory of spectral problems on connected graphs does not exist. There are only particular concrete results. The results of section 6 are obtained under the condition that the graph is equilateral. Moreover, the edges, i.e. the Stieltjes strings are symmetric with respect to the midpoint of the edge. Due to this, the problem is reduced to a simpler algebraic problem. It allowed to consider vibrations of a semi-regular graph of truncated icosahedron which appears in applications and has another name of fullerene in chemistry. Program MAPLE is used to find the eigenvalues and it is shown that the maximal multiplicity of an eigenvalue of this problem is $\mu + 1$ where μ is the cyclomatic number of the graph. In our case $\mu + 1 = 32$ what fits the results of [41].

Practical significance of the obtained results. This PhD thesis is of theoretical direction. Its results are of interest for mathematical physics, differential and difference equations theory and their applications. They can be

used in the electrical circuits' synthesis theory also.

Keywords: Stieltjes string, Krein's string, generalized Stieltjes function, graph, tree, root, vertex, pendant vertex, edge, star graph, algebraic multiplicity, eigenvalues, recurrence relations, boundary conditions, continued fraction, the Dirichlet boundary condition, the Neumann boundary condition, difference-differential calculus, boundary value problem, inverse problem.

Список публікацій здобувача за тематикою дисертації

1. Dudko A., Pivovarchik V. Three spectra problem for Stieltjes string equation and Neumann conditions. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2019. Vol. 12, No. 1. P. 41–55.
2. Dudko A., Pivovarchik V. Three spectra problem for star graph of Stieltjes strings. *Methods Functional Analysis and Topology*. 2019. Vol. 25, No. 4. P. 311–323.
3. Dudko A. I., Pivovarchik V. M. Spectral problem of Fullerene vibrations. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 25, Is. 1 (35). P. 7–15.
4. Dudko A., Pivovarchik V. On inverse problem for tree of Stieltjes strings. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021. Vol. 14, No. 1. P. 1–18.
5. Дудко А. І., Пивоварчик В. М. Обернена спектральна задача для зіркового графа зі стільтьєсівських струн із заданими кількостями мас на ребрах. *Український математичний журнал*. 2021. Т. 73, № 1. С. 47–60; translation: Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings with prescribed numbers of masses on the edges. *Ukraine mathematics journal*. 2021. Vol. 73, № 1. P. 50–66.
6. Dudko A. I., Pivovarchik V. M. Inverse three spectra problem for a Stieltjes string with the Neumann boundary conditions. *Algebraic and geometric methods of analysis: book of abstracts of International scientific conference*. (Odesa, May 30 – June 4, 2018). Odesa, 2018. P. 16–17.
7. Dudko A., Pivovarchik V. Vibrations of a polyhedron. *3d International Conference on Computer Algebra and Information Technologies: book of abstracts of 3d International Conference*. (Odesa, August 20 – 25, 2018). Odesa, 2018. P. 155–156.

8. Dudko A. I., Pivovarchik V. M. Inverse problem for tree of Stieltjes strings. *Algebraic and geometric methods of analysis* : book of abstracts of International scientific conference. (Odesa, May 26–30, 2020). Odesa, 2020. P. 17–18.

ЗМІСТ

ВСТУП	16
1 Огляд результатів за темою дисертації	23
1.1. Коротка історія теорії обернених задач	23
1.2. Ланцюговий дріб Т. І. Стільтьєса	24
Висновки до розділу 1	30
2 Спектральна задача за трьома спектрами для рівняння стільтьєсівської струни з умовами Неймана	31
2.1. Стільтьєсівська струна	31
2.2. Пряма спектральна задача	32
2.3. Обернена задача	40
Висновки до розділу 2	46
3 Спектральна задача за трьома спектрами для зіркового графу зі стільтьєсівських струн	47
3.1. Зірковий граф зі стільтьєсівських струн	47
3.2. Обернена задача	55
Висновки до розділу 3	62
4 Обернена спектральна задача для зіркового графу зі стільтьєсівських струн з заданою кількістю мас на ребрах	64
4.1. Пряма задача	64
4.2. Обернена задача	75
Висновки до розділу 4	83

5	Обернена задача для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн	84
5.1.	Постановка спектральних задач	84
5.2.	Необхідні результати	87
5.3.	Пряма задача	89
5.4.	Обернена задача	92
	Висновки до розділу 5	101
6	Спектральна задача коливань фулеріна	102
6.1.	Граф фулеріна	102
6.2.	Колівання графу фулеріна зі стільтьєсівських струн	105
	Висновки до розділу 6	110
	ВИСНОВКИ	111
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	113

ВСТУП

Перші дослідження в галузі коливань струн були розпочаті у 18 сторіччі у роботах Ейлера, Даламбера та Лагранжа. Першими систематизованими результатами на цю тему є монографії Гельмгольца (1863) [64] та Релея (1877) [94]. Зокрема, Гельмгольц розглядав струну з вантажем на середині її довжини, а Релей знаходив власні частоти та власні функції і їх залежність від місця, де розташований вантаж. Із сучасних досліджень на цю тему ми зазначимо лише [47], де частоти коливань струн, обчислені за допомогою теорії, порівнювалися з експериментальними даними.

Математики працюють з ідеалізованими простими моделями. При розгляді малих поперечних коливань струни М.Г. Крейн запровадив модель, назвавши її стільтьєсівською струною. Назву він пояснив тим, що у своїх дослідженнях на цю тему він використовував результати Т.І. Стільтьєса. Стільтьєсівською струною він назвав невагому пружну нитку, що несе на собі точкові маси, котрі він називав ще намистинами. Стільтьєсівська струна є частковим випадком струни, котрі називають струнами Крейна. У своїх роботах М.Г. Крейн припускав можливість нескінченної кількості намистин, але ми будемо вважати, що кількість намистин на струні скінченна. До тої ж самої, з точки зору математики, моделі зводиться задача про продольні коливання точкових мас, з'єднаних пружинами. (див. [27]). До тих самих рівнянь, що розглядав Крейн, зводяться деякі задачі з теорії синтезу електричних ланцюгів [62], зокрема у методі Кауера [43]. Ця модель широко використовується у фізиці [55], [56], [73].

Як завжди у спектральній теорії крайових задач має сенс розглядати пряму задачу, тобто опис спектру, що складається з власних значень та обернену задачу, тобто задачу відновлення параметрів струни, виходячи з відомих спектрів крайових задач, що нею породжені. Слід зазначити, що

пряма та обернена задачі для стільтьєсівської струни зі скінченною кількістю намистин, були повністю розв'язані у монографії Гантмахера і Крейна [6]. Зокрема, цими авторами було показано, що для відновлення параметрів стільтьєсівської струни, тобто для знаходження мас намистин та довжин інтервалів між ними, знання одного спектра крайової задачі не є достатнім, а потрібне знання двох спектрів та загальної довжини струни. Цього можна було очікувати тому, що загальна кількість невідомих в оберненій задачі – це n (кількість намистин) плюс $n + 1$ (кількість інтервалів між ними, враховуючи інтервали на обох кінцях), тобто $2n + 1$. Оскільки спектр крайової задачі складається з n власних значень, то потрібне знання двох спектрів і ще одного параметру.

Ця дисертація присвячена задачам, що описують малі поперечні коливання графів, ребрами яких є стільтьєсівські струни. Слід зазначити, що мабуть першою роботою на тему коливань дерев зі стільтьєсівських струн є робота [58]. У вище згаданій монографії [6] обернена задача на інтервалі полягала в наступному. Відомі : 1) спектр задачі Діріхле-Діріхле, тобто задачі, породженої рекурентними співвідношеннями стільтьєсівської струни з умовами Діріхле на обох кінцях (з точки зору фізики це відповідає закріпленню кінців струни); 2) спектр задачі Неймана-Діріхле, тобто спектр задачі з умовою Неймана на одному кінці та умовою Діріхле на іншому кінці (з точки зору фізики умова Неймана означає, що відповідний кінець струни може вільно рухатись у напрямку, перпендикулярному до положення рівноваги струни); 3) загальна довжина струни. Треба знайти маси намистин та довжини інтервалів між ними. Ця задача у [6] була розв'язана повністю, тобто 1) знайдені умови на дві послідовності чисел, необхідні та достатні, щоб вони були спектрами задач Діріхле-Діріхле (перша) та Неймана-Діріхле (друга); 2) доведена єдиність розв'язку; 3) запропонований метод знаходження шуканих мас намистин та довжин інтервалів між ними. Такий повний розв'язок є ідеалом, до якого прагнуть у дослідженні більш

складних задач на цю тему, тобто задач про коливання графів зі стільтьєсівських струн. На жаль, навіть у випадку зіркового графу розв'язок не є єдиним (див., наприклад [39]).

Актуальність теми. Запроваджене М.Г. Крейном поняття стільтьєсівської струни – це найпростіша модель фізичних об'єктів, що коливаються. Попри простоту, ця модель має таку перевагу, що в ній пряма та обернена задача були розв'язані повністю (див. [6]), причому розв'язання є вельми простим, знайдені необхідні і достатні умови існування розв'язку і ці умови легко перевірити. На відміну від цієї моделі у моделі, в якій струна є гладкою (її щільність є двічі неперервно диференційованою), розв'язок був знайдений у роботах Марченка [27], Гельфанда та Левітана [7], М.Г. Крейна [14], але метод відновлення щільності струни виявився дуже складним.

В той же час важливий фізичний зміст мають задачі, де розглядається не одна струна, а граф, утворений зі струн [58], [60], [61]. Також рівняння коливань графу зі стільтьєсівських струн зустрічається у теорії синтезу електричних ланцюгів [62]. У зв'язку з цим робота є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертації затверджена вченою радою Державного закладу „Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського“ (протокол № 3 від "25" жовтня 2018 р.).

Дисертаційне дослідження виконано відповідно до плану науково-дослідної роботи кафедри вищої математики і статистики фізико-математичного факультету Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського" та здійснено в межах науково-дослідної роботи за темами

1. "Скінченновимірна та нескінченновимірна теорія операторів та операторних в'язок на графах" з 2018 р. по теперешній час, державний реєстраційний номер 01119U002030;

2. "Скінченновимірні та нескінченновимірні демпфовані системи" (2018 р., державний реєстраційний номер 0114U000006).

Мета і завдання дослідження. *Об'єкт дослідження* – прямі та обернені спектральні задачі для графів зі стільтьєсівських струн. *Предмет дослідження* – розв'язання прямих та обернених задач для графу зі стільтьєсівських струн з умовами Діріхле та Неймана на висячих вершинах і умовами неперервності та балансу сил у внутрішніх вершинах.

Реалізація поставленої мети передбачає вирішення таких *завдань*:

1. Розв'язання прямої задачі, тобто описання спектру коливань стільтьєсівської струни з вільними кінцями (умова Неймана на обох кінцях) та спектру коливань цієї ж струни з закріпленою проміжною точкою (умова Діріхле).
2. Розв'язання оберненої задачі, тобто задачі відновлення даних стільтьєсівської струни за відомими:
 - (а) спектром коливань цієї струни з вільними кінцями (умова Неймана на обох кінцях);
 - (б) спектром коливань лівої частини цієї струни з одним вільним (умова Неймана), а другим – закріпленим (умова Діріхле);
 - (в) спектром коливань правої частини з одним вільним (умова Неймана), а іншим – закріпленим кінцем (умова Діріхле);
 - (г) загальними масами на частинах струни.
3. Опис спектру коливань зіркового графу, що складається з трьох стільтьєсівських струн і порівняння цього спектру зі спектрами задач на одному ребрі та на об'єднанні двох інших ребер.
4. Розв'язання оберненої задачі відновлення даних зіркового графу, який складається з трьох стільтьєсівських струн, за відомими загальними

довжинами ребер та трьома спектрами, перший з яких – це спектр задачі на усьому графі, другий – це спектр задачі на першому ребрі, а третій – це спектр задачі на об'єднанні другого і третього ребра.

5. Розв'язання оберненої спектральної задачі для зіркового графу зі стільтьєсівських струн з заданою кількістю намистин на ребрах. Знаходження умов на дві послідовності дійсних чисел, необхідних та достатніх для того, щоб ці послідовності були спектрами задач Діріхле та Неймана на зірковому графі із заданою кількістю намистин на ребрах.
6. Опис спектру задачі для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн. Розклад дробу, чисельник якого є характеристичним многочленом задачі Діріхле для дерева, а знаменник є характеристичним многочленом задачі Неймана для цього ж дерева у ланцюговий дріб, що розгалуджується.
7. Розв'язання оберненої задачі для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн.
8. Опис коливань усіченого ікосаедра, ребрами якого є однакові стільтьєсівські струни. Знаходження спектру в задачі про поперечні коливання усіченого ікосаедра, ребрами якого є однакові стільтьєсівські струни.

Методи дослідження. В дисертаційному дослідженні використовується теорія ланцюгових дробів Т.І. Стільтьєса, розклад раціональних S -функцій у скінченний ланцюговий дріб М.Г. Крейна, а також у ланцюговий дріб, що розгалуджується.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані наукові результати є новими. Хоча задача за трьома спектрами для стільтьєсівської струни вже розглядалася у [38], але там крайові умови були умовами Діріхле, що значно спрощувало ситуацію. Задачі, аналогічно тій, що становить розділ 3 дисертації взагалі не розглядалися для стільтьєсівських струн.

Задача, аналогічна тій, що становить розділ 4, розглядалася раніше, але без обмежень на кількість намистин на ребрах. У постановці розділу 4 ця задача раніше не розглядалась.

Задача розділу 5 відрізняється від попередніх задач на цю тему тим, що в ній допускається наявність намистин у внутрішніх вершинах.

Задача розділу 6 раніше не розглядалась.

Практичне значення одержаних результатів. Ця дисертаційна робота має теоретичний характер, тому її результати становлять інтерес у галузі математичної фізики, диференціальних і різницевих рівнянь та їх застосувань. Також ці результати можуть бути використані в теорії синтезу електричних ланцюгів.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно. Постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику В.М. Пивоварчику.

Апробація результатів дисертації. Основні положення, висновки і результати дисертаційного дослідження обговорювалися на науковому семінарі "Quantum Graphs and Related Topics" і на розширеному засіданні кафедри вищої математики і статистики Університету Ушинського та отримали позитивну оцінку, а також були представлені на міжнародних і всеукраїнських математичних конференціях:

1. International scientific conference, "Algebraic and geometric methods of analysis" Odesa, May 30 – June 4, 2018.
2. "3d International Conference on Computer Algebra and Information Technologies" Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa, August 20 – 25, 2018.
3. International scientific conference , "Algebraic and geometric methods of analysis" Odesa, May 26–30, 2020.

Публікації. Основні положення дисертаційного дослідження викладені

у 5 наукових працях, з яких 1 належить до переліку фахових наукових видань (див. [51]), 4 статті опубліковані у журналах, які індексуються у наукометричних базах даних Scopus(див. [9], [52], [53], [54]).

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел, що містить 104 найменування. Загальний обсяг тексту дисертації – 125 сторінок, з них 110 – основного тексту.

РОЗДІЛ 1

Огляд результатів за темою дисертації

1.1. Коротка історія теорії обернених задач

Історія теорії обернених задач починалася з оберненої задачі Штурма-Ліувілля. Вона полягає у відновленні потенціалу рівняння Штурма-Ліувілля за відомими спектрами крайових задач, породжених цим рівнянням на скінченному інтервалі. Прийнято вважати, що теорія обернених задач, породжених рівнянням Штурма-Ліувілля, бере свій початок зі знаменитої роботи В. А. Амбарцумяна (див. [21]). В цій роботі розглядалась задача Штурма-Ліувілля з умовами Неймана на обох кінцях і було доведено, що у випадку незбуреного спектру (тобто спектру, що відповідає нульовому потенціалу) сам цей спектр однозначно визначає потенціал рівняння, котрий є тотожно нульовим. Втім виявилось, що ця ситуація є винятковою. Так, якщо наприклад крайові умови на кінцях інтервалу є умовами Діріхле, то одного спектру недостатньо для однозначного визначення потенціалу. В роботах Г. Борга (див. [37]) було доведено, що для однозначного визначення потенціалу потрібно знати два спектри крайових задач (окрім випадку задачі, розглянутої В. А. Амбарцумяном).

Виявилось, що у випадку скінченновимірних задач, тобто задач, породжених рекурентними співвідношеннями стільтьєсівської струни, ситуація схожа.

Стільтьєсівською струною М.Г. Крейн назвав невагому нитку, на яку намічено скінченну кількість намистин (зосереджених мас), котра натягнута і може коливатись у напрямку, перпендикулярному до положення свого рівноважного стану.

В даному випадку обернена задача полягає у знаходженні мас намистин та довжин інтервалів між ними, виходячи зі спектрів крайових задач. В монографії Гантмахера і Крейна [6] повністю розв'язана обернена задача стільтьєсівської струни, тобто було доведено, що для однозначного відновлення мас намистин та довжин інтервалів між ними, потрібно знати два спектри крайових задач, породжених рекурентними співвідношеннями, що описують поперечні коливання цієї струни, та загальну довжину струни. Також була знайдена умова на дві послідовності додатних чисел необхідна і достатня для того, щоб ті послідовності були спектрами крайових задач, породжених однією струною. Також був запропонований метод відновлення мас намистин та довжин інтервалів між ними (див. [6]).

Перша задача Штурма-Ліувілля за трьома спектрами була розв'язана у роботах [59], [86]. Ідея цих робіт полягає в тому, що замість спектрів двох задач на всьому інтервалі можна використовувати спектр задачі на всьому інтервалі та спектри двох задач на частинах цього інтервалу.

Виявилось, що має сенс і задача за трьома спектрами у випадку скінченновимірних задач, тобто у випадку задач, породжених рекурентними співвідношеннями стільтьєсівської струни. Першою роботою на цю тему була [38].

1.2. Ланцюговий дріб Т. І. Стільтьєса

Ми будемо використовувати наступні позначення: \mathbb{C} – площина комплексних чисел, \mathbb{C}^+ – відкрита верхня півплощина комплексних чисел, \mathbb{C}^- – відкрита нижня півплощина комплексних чисел, \mathbb{R} – множина дійсних чисел, \mathbb{N} – множина натуральних чисел.

Означення 1.1. (дивись [81], Означення 5.1.20). Функція $\omega(z)$ називається неванліннівською функцією (або R -функцією у термінах [69]), якщо:

1. функція $\omega(z)$ є аналітичною у півплощинах $\text{Im}z > 0$ та $\text{Im}z < 0$;

2. $\omega(\bar{z}) = \overline{\omega(z)}$;
3. $\operatorname{Im}z \operatorname{Im}\omega(z) \geq 0$ при $\operatorname{Im}z \neq 0$.

Наступні допоміжні результати цього розділу взяті із монографії [81].

Лема 1.1. *Нехай задані дійсні многочлени p та q без спільних не дійсних коренів. Розглянемо функції*

$$\omega = p + iq, \quad f = \frac{q}{p}, \quad g = \frac{\omega}{\bar{\omega}}.$$

1. *Наступні твердження є еквівалентними:*

- (а) $|g(z)| < 1$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$, таких що $\bar{\omega}(z) \neq 0$;
- (б) ω не має коренів у відкритій нижній півплощині та $|g(z)| < 1$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$;
- (в) $p \neq 0$ та $\operatorname{Im}f(z) > 0$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$ з $p(z) \neq 0$;
- (г) усі корені p та q є дійсними, $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$ та $f(\mathbb{C}^-) \subset \mathbb{C}^-$.

2. *Припустимо, що $p \neq 0$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

- (а) $|g(z)| \leq 1$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$, таких що $\bar{\omega}(z) \neq 0$;
- (б) ω не має коренів у відкритій нижній півплощині та $|g(z)| \leq 1$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$;
- (в) $\operatorname{Im}f(z) \geq 0$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$ з $p(z) \neq 0$;
- (г) усі корені p є дійсними, $q = 0$ або всі корені q є дійсними, $f(\mathbb{C}^+) \subset \overline{\mathbb{C}^+}$ та $f(\mathbb{C}^-) \subset \overline{\mathbb{C}^-}$.

Лема 1.2. *Якщо $f \neq 0$ є раціональною неванлінівською функцією, то і функції $-\frac{1}{f}$ та $\left(\frac{1}{f} + c\right)^{-1}$ є також раціональними неванлінівськими*

функціями для кожного значення дійсної сталої c , якщо не $f \neq -\frac{1}{c}$.

Лема 1.3. Нехай f – дійсна раціональна функція, котра задовольняє умову $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$. Тоді f має хоча б один корінь або полюс, $f(\mathbb{C}^+) = \mathbb{C}^+$, та усі корені та полюси f лежать на дійсній осі, є простими та чергуються, тобто між двома полюсами f є корінь f та між двома коренями f є полюс f . Для кожного $z \in \mathbb{R}$, котре не є полюсом f , виконується нерівність $f'(z) > 0$.

Теорема 1.1. Дійсна раціональна функція f задовольняє умову $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$ тоді й тільки тоді, коли вона може бути представлена у наступній формі:

$$f(z) = C \prod_{k=1}^m (z - \beta_k) \prod_{k=1}^n \frac{1}{z - \alpha_k}, \quad (1.1)$$

де $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m + n > 0$, послідовності $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ є послідовностями дійсних чисел, які чергуються, $C > 0$, якщо f має хоча б один корінь та найбільший корінь f більший, ніж будь-яке полюс f , та $C < 0$, якщо f має хоча б один полюс та найбільший полюс f більший, ніж будь-який корінь f .

Лема 1.4. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та нехай задана раціональна неванліннівська функція f з n полюсами. Тоді існують дійсні числа $A \geq 0$, B , $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $C_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$) такі, що

$$f(z) = Az + B - \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{z - \alpha_j}.$$

Означення 1.2. Раціональна функція f називається стільтьєсівською функцією або S -функцією, якщо вона є раціональною неванліннівською функцією та задовольняє умови:

1. f не має полюсів на півосі $(-\infty, 0)$;
2. $f(z) > 0$ при $z \in (-\infty, 0)$.

Таку функцію, яку ми називаємо стільтьєсівською, в літературі інколи називають узагальненою стільтьєсівською функцією.

Означення 1.3. Раціональна S -функція f називається раціональною S_0 -функцією, якщо 0 не є полюсом f .

Також ми кажемо, що S -функція (S_0 -функція) f належить до класу S (S_0) та записуємо $f \in S$ ($f \in S_0$).

Лема 1.5. Раціональна неванлінівська функція, яка не є сталою, є раціональною S -функцією тоді й тільки тоді, коли вона має хоча б один полюс та найменший полюс є невід'ємним та він менший за будь-який корінь цієї функції.

Наслідок 1.1. Дійсна раціональна функція f , що не є сталою, є раціональною S -функцією тоді й тільки тоді, коли f може бути представлена у формі:

$$f(z) = C_0 \prod_{k=1}^m (\beta_k - z) \prod_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k - z}, \quad (1.2)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, зростаючі послідовності $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ є послідовностями дійсних чисел, які чергуються, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_1 < \beta_1$, якщо $m > 0$ та $C_0 > 0$.

Лема 1.6. Нехай $r \in \mathbb{N}$ та нехай f є раціональною S -функцією з полюсами. Тоді:

1. існують єдине число a , єдине число b та єдина раціональна функція g , яка або тотожно дорівнює нулю, або має якнайбільше $r - 1$ корені такі, що

$$f(z) = a + \frac{1}{-bz + g(z)}; \quad (1.3)$$

2. $a = \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) \geq 0$, $b > 0$, та кількість коренів f є r , якщо $a > 0$ та $r - 1$, якщо $a = 0$;

3. полюси α_k та корені β_k функції f усі є простими та чергуються,

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{r-1} < \alpha_r < \beta_r, \quad \text{якщо } a > 0, \quad (1.4)$$

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{r-1} < \alpha_r, \quad \text{якщо } a = 0; \quad (1.5)$$

4. раціональна функція f строго зростає між своїми полюсами, тобто в інтервалах $(-\infty, \alpha_1), (\alpha_k, \alpha_{k+1}), k = 1, \dots, r-1$ та (α_r, ∞) .
5. якщо $r = 1$, то g є невід'ємною сталою функцією та $g = 0$ тоді й тільки тоді, коли 0 є полюсом f ;
6. якщо $r > 1$, то $g \neq 0$ та $h = \frac{1}{g}$ є раціональною S -функцією з $r-1$ полюсами та $r-1$ коренями $\beta_{h,k}, k = 1, \dots, r-1$, котрі є простими і чергуються, 0 є полюсом h тоді й тільки тоді, коли 0 є полюсом f , та

$$\beta_k < \beta_{h,k} < \beta_{k+1} \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, r-1, \text{ якщо} \quad a > 0,$$

$$\beta_k = \beta_{h,k} \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, r-1, \text{ якщо} \quad a = 0.$$

Лема 1.7. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та нехай f є раціональною S -функцією з полюсами. Тоді:

1. f допускає єдиний розклад у ланцюговий дріб

$$f(z) = a_n + \frac{1}{-b_n z + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{-b_{n-1} z + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_1 z + c_0}}}}} \quad (1.6)$$

з $a_n = \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) \geq 0, a_k > 0$ при $k = 1, \dots, n-1, b_k > 0$ при $k = 1, \dots, n, c_0 \geq 0$ з $c_0 = 0$ тоді й тільки тоді, коли 0 є полюсом f ;

2. кількість коренів f є n , якщо $a_n > 0$ та $n-1$, якщо $a_n = 0$;
3. полюси α_k та корені β_k функції f є простими та чергуються,

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n, \quad \text{якщо} \quad a > 0; \quad (1.7)$$

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n, \quad \text{якщо} \quad a = 0; \quad (1.8)$$

4. раціональна функція f є строго зростаючою між її полюсами, тобто на інтервалах $(-\infty, \alpha_1)$, (α_k, α_{k+1}) , $k = 1, \dots, n-1$, та (α_n, ∞) ;
5. якщо $f_j(z)$ означає $n-j$ -доданок ланцюгового розкладу дробу (1.6) при $j = 1, \dots, n$, тобто

$$f_j(z) = a_j + \frac{1}{-b_j z + \frac{1}{a_{j-1} + \frac{1}{-b_{j-1} z + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_1 z + c_0}}}}} \quad (1.9)$$

то всі корені f_j є дійсними та простими, запишемо $\beta_1^{(j)} < \dots < \beta_{m_j}^{(j)}$ з $m_j = j$, якщо $j < n$ або $j = n$ та $a_n > 0$, та $m_n = n-1$, якщо $a_n = 0$, та впливає наступне:

$$\beta_k^{(j)} < \beta_k^{(j-1)} < \beta_{k+1}^{(j)} \quad \text{при } j = 2, \dots, m_n, \quad k = 1, \dots, j-1,$$

$$\beta_k^{(n)} < \beta_k^{(n-1)} \quad \text{при } k = 1, \dots, n-1, \quad \text{якщо } a_n = 0;$$

тут ми зазначимо, що $\beta_k = \beta_k^{(n)}$.

Лема 1.8. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та нехай функція f задана формулою (1.6) з $a_n \geq 0$, $a_k > 0$ при $k = 1, \dots, n-1$, $b_k > 0$ при $k = 1, \dots, n$ та $c_0 \geq 0$. Тоді f є раціональною S -функцією з n полюсами.

Означення 1.4. Раціональна функція f називається дійсною функцією, якщо

1. $f(z)$ є дійсною при дійсному z ,
2. $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$.

Лема 1.9. Якщо всі корені та полюси додатної дійсної функції f , яка не є сталою, знаходяться на уявній осі, то функція h визначена як

$h(z) = if(-iz)$, є раціональною неванлінівською функцією і тоді є раціональною S -функцією g , такою, що $f(z) = zg(-z^2)$. В цьому випадку, g належить S_0 тоді й тільки тоді, коли 0 не є полюсом f .

Висновки до розділу 1

У розділі 1 наведено коротку історичну довідку стосовно кола питань, що мають відношення до теми роботи і наведені означення, що використовуються та деякі відомі леми та теореми.

РОЗДІЛ 2

Спектральна задача за трьома спектрами для рівняння стільтьєсівської струни з умовами Неймана

2.1. Стільтьєсівська струна

Стільтьєсівською струною будемо називати невагому нитку довжини l , на яку нанизано скінченну кількість n намистин, маси яких - m_1, \dots, m_n . Намистини занумеровані у порядку зростання індексу, починаючи з лівого кінця. Відстань між лівим кінцем та першою намистиною позначимо через l_0 , відстань між j -ою намистиною та $(j + 1)$ -ою через l_j , $j = 1, \dots, n - 1$, а відстань між останньою намистиною та правим кінцем - через l_n , зрозуміло, що $\sum_{k=0}^n l_k := l$ - це повна довжина струни.

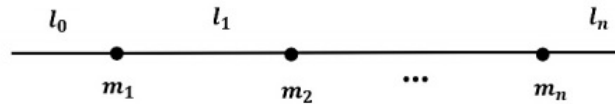


Рис. 2.1:

Розглянемо малі поперечні коливання такої струни. Позначимо через $v_k(t)$ поперечне зміщення k -ої намистини ($k = 1, \dots, n$) у момент часу t , а через $v_0(t)$ та $v_{n+1}(t)$ поперечні зміщення лівого та правого кінців. Струна натягнута з силою, що дорівнює 1.

Другий закон Ньютона приводить нас до наступних тричленних рекурентних співвідношень:

$$\frac{v_k(t) - v_{k-1}(t)}{l_{k-1}} - \frac{v_{k+1}(t) - v_k(t)}{l_k} + m_k \frac{d^2 v_k(t)}{dt^2} = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.1)$$

Розглянемо випадок, коли кінці струни закріплені, що описано рівняннями

$$v_0(t) = 0, \quad (2.2)$$

$$v_{n+1}(t) = 0, \quad (2.3)$$

які будемо називати крайовими умовами Діріхле. Задача (2.1)– (2.3) є задачею різницево-диференціального числення.

Спектральні задачі ми отримуємо, якщо разом з рівнянням коливань розглядаємо крайові умови. Наприклад, такими умовами можуть бути умови Діріхле (2.2), (2.3), але цілком фізично обґрунтованими є також умови Неймана

$$v_0(t) = v_1(t) \quad (2.4)$$

на лівому кінці та

$$v_n(t) = v_{n+1}(t) \quad (2.5)$$

на правому. Умова Неймана означає, що кінець струни може вільно рухатись у напрямі, перпендикулярному до стану рівноваги струни.

2.2. Пряма спектральна задача

Розглянемо стільтьєсівську струну, яка складається з двох частин, які з'єднані кінцями, а інші кінці цих струн вільно рухаються в напрямку, перпендикулярному до стану рівноваги струни. Точка з'єднання не містить намистин. Вимірюємо відстані, починаючи від вільних кінців. Нумеруємо намистини, починаючи від вільних кінців, n_j маси $m_k^{(j)} > 0$, $k = 1, 2, \dots, n_j$, розташовані на j -тій частині, $j = 1, 2$. Ці намистини поділяють j -ту частину струни на $n_j + 1$ ($n_j \geq 1$) підінтервали, довжини яких позначаються $l_k^{(j)} > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n_j$) знову починаючи нумерувати від вільних кінців. Зокрема, $l_0^{(j)}$ це відстань на j -тій частині струни між вільним кінцем та $m_1^{(j)}$, $l_k^{(j)}$ для ($k = 1, 2, \dots, n_j - 1$) – це відстань між $m_k^{(j)}$ та $m_{k+1}^{(j)}$, та $l_{n_j}^{(j)}$ – це відстань на j -тій струні між точкою з'єднання P та $m_{n_j}^{(j)}$.

Сила натягу нитки вважається рівною 1. Поперечне зміщення намисти-ни $m_k^{(j)}$ у час t позначимо $v_k^{(j)}(t)$. Для зручності, позначимо через $v_0^{(j)}(t)$ поперечне зміщення вільних кінців та через $v_{n_j+1}^{(j)}(t)$ поперечне зміщення у точці з'єднання, див. Рис 2.2.

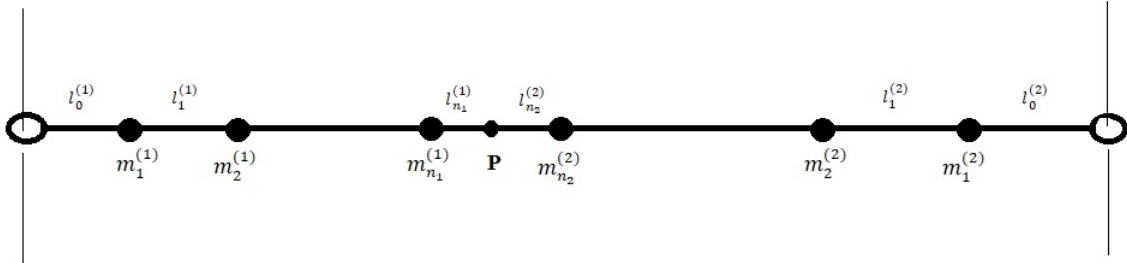


Рис. 2.2:

Загальна маса j -тої частини струни позначається через m_j :

$$m_j = \sum_{k=1}^{n_j} m_k^{(j)}. \quad (2.6)$$

Другий закон Ньютона дає наступні рівняння руху для мас намистин:

$$\frac{v_k^{(j)}(t) - v_{k+1}^{(j)}(t)}{l_k^{(j)}} + \frac{v_k^{(j)}(t) - v_{k-1}^{(j)}(t)}{l_{k-1}^{(j)}} + m_k^{(j)} v_k^{(j)''}(t) = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2).$$

Те, що кінці струн з'єднані у точці P , дає умову неперервності

$$v_{n_1+1}^{(1)}(t) = v_{n_2+1}^{(2)}(t).$$

Рівняння балансу сил у P призводить до

$$\sum_{j=1}^2 \frac{v_{n_j}^{(j)}(t) - v_{n_j+1}^{(j)}(t)}{l_{n_j}^{(j)}} = 0.$$

На вільних кінцях маємо

$$v_0^{(j)}(t) = v_1^{(j)}(t), \quad j = 1, 2,$$

що означає, що кінці можуть вільно рухатись у напрямку, ортогональному до положення рівноваги струни. Підставляючи $v_k^{(j)}(t) = u_k^{(j)} e^{i\lambda t}$ та роблячи заміну спектрального параметру $z = \lambda^2$, ми отримуємо наступні співвідношення для амплітуд $u_k^{(j)}$ коливань ($k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2$):

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} z u_k^{(j)} = 0, \quad (2.7)$$

$$u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_2+1}^{(2)}, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{u_{n_j}^{(j)} - u_{n_j+1}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}} = 0, \quad (2.9)$$

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)}, \quad j = 1, 2. \quad (2.10)$$

Згідно з [6] шукаємо розв'язок спектральної задачі (2.7)–(2.10) у вигляді:

$$u_k^{(j)} = Q_{2k-2}^{(j)}(z) u_1^{(j)} \quad (k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2), \quad (2.11)$$

де $Q_{2k-2}^{(j)}(z)$ – многочлени степеня $k - 1$, котрі є розв'язками (2.7) та (2.10).

Введемо многочлени непарного індексу:

$$Q_{2k-1}^{(j)}(z) = \frac{Q_{2k}^{(j)}(z) - Q_{2k-2}^{(j)}(z)}{l_k^{(j)}}. \quad (2.12)$$

Згідно з (2.7) та (2.12) многочлени $Q_k^{(j)}$ задовольняють співвідношення

$$Q_{2k-1}^{(j)}(z) = -z m_k^{(j)} Q_{2k-2}^{(j)}(z) + Q_{2k-3}^{(j)}(z),$$

$$Q_{2k}^{(j)}(z) = l_k^{(j)} Q_{2k-1}^{(j)}(z) + Q_{2k-2}^{(j)}(z)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2)$$

та початкові умови

$$Q_{-1}^{(j)}(z) = 0, \quad Q_0^{(j)}(z) = 1.$$

Підставляючи (2.11) в (2.8) та (2.9), ми отримуємо:

$$Q_{2n_1}^{(1)}(z) u_1^{(1)} = Q_{2n_2}^{(2)}(z) u_1^{(2)}, \quad (2.13)$$

$$\sum_{j=1}^2 Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)u_1^{(j)} = 0. \quad (2.14)$$

Спектр задачі (2.7)–(2.10) збігається з множиною коренів визначника системи (2.13), (2.14), тобто многочлена

$$\phi(z) = Q_{2n_1-1}^{(1)}(z)Q_{2n_2}^{(2)}(z) + Q_{2n_1}^{(1)}(z)Q_{2n_2-1}^{(2)}(z). \quad (2.15)$$

Зазначимо, що $Q_{2n_j}^{(j)}(z)$ є характеристичним многочленом задачі Неймана – Діріхле на j -тій струні:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)}zu_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n_j), \quad (2.16)$$

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)}, \quad (2.17)$$

$$u_{n_j+1}^{(j)} = 0, \quad (2.18)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2),$$

а $Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)$ – характеристичний многочлен задачі Неймана – Неймана на j -тій струні:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)}zu_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n_j),$$

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)}, \quad (2.19)$$

$$u_{n_j+1}^{(j)} = u_{n_j}^{(j)}. \quad (2.20)$$

Відповідно до [6] (Додаток II, рівняння (28)) дроби $\frac{Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}$ можуть бути представлені у вигляді наступного ланцюгового дроби:

$$\frac{Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)} = l_{n_j}^{(j)} + \frac{1}{-m_{n_j}^{(j)}z + \frac{1}{l_{n_j-1}^{(j)} + \frac{1}{-m_{n_j-1}^{(j)}z + \dots + \frac{1}{l_1^{(j)} + \frac{1}{-m_1^{(j)}z}}}}, \quad (2.21)$$

та з урахуванням (2.6) ми отримуємо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}{zQ_{2n_j}^{(j)}(z)} = -m_j. \quad (2.22)$$

В подальшому нам буде потрібно поняття неванліннівської функції та S -функції.

Означення 2.1. (дивись [69] або [81], Означення 5.1.24). Кажуть, що неванліннівська функція $\omega(z)$ є S -функцією, якщо $\omega(z) > 0$ для $z < 0$.

Означення 2.2. Раціональна S -функція називається S_0 -функцією, якщо $|\omega(0)| < \infty$.

Теорема 2.1. Після скорочення спільних множників (якщо такі є) у чисельнику та у знаменнику функція

$$\frac{\prod_{j=1}^2 Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{\phi(z)}$$

стає S -функцією.

Доведення. Представимо дріб, використовуючи (2.15) наступним чином:

$$\frac{\prod_{j=1}^2 Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{\phi(z)} = \left(\sum_{j=1}^2 \frac{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j}^{(j)}(z)} \right)^{-1}.$$

Так як $\frac{Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}$ – неванліннівська функція (дивись, наприклад, [6],

с. 343), то приходимо до висновку, що функція $-\frac{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j}^{(j)}(z)}$ також є неван-

ліннівською так само як і функція $\left(\sum_{j=1}^2 \frac{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j}^{(j)}(z)} \right)^{-1}$. Так як S -функція

$\frac{Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}$ є також додатною для всіх $z \in (-\infty, 0)$, то $\left(\sum_{j=1}^2 \frac{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j}^{(j)}(z)} \right)^{-1}$ є також додатною для $z \in (-\infty, 0)$. \square

Позначимо через $n = \sum_{j=1}^2 n_j$ та через $\{\vartheta_k\}_{k=1}^n$ ($\vartheta_k \geq \vartheta_{k'}$ для $k > k'$) власні значення задачі (2.7)–(2.10).

Розглянемо тепер спектральну задачу, котра описує випадок, в якому точка P закріплена (див. Рис 2.2.). Тоді замість рівнянь (2.7)–(2.10) отримуємо:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} z u_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2), \quad (2.23)$$

$$u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_2+1}^{(2)} = 0, \quad (2.24)$$

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)}, \quad j = 1, 2. \quad (2.25)$$

Позначимо через $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ ($\xi_k \leq \xi_{k+1}$) – спектр задачі (2.23)–(2.25), а через $\{\theta_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($\theta_k^{(j)} < \theta_{k+1}^{(j)}$) – спектр задачі Неймана – Діріхле (2.16)–(2.18) на j -тій струні. Спектр $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ є об'єднанням спектрів задач (2.16)–(2.18) з $j = 1$ та $j = 2$, тобто $\{\xi_k\}_{k=1}^n = \bigcup_{j=1}^2 \{\theta_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$. Тут і далі ми нумеруємо елементи послідовності, що є об'єднанням послідовностей у неспадаючому порядку.

Теорема 2.2. *Послідовності $\{\vartheta_k\}_{k=1}^n$ та $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ мають наступні властивості:*

1. $0 = \vartheta_1 < \xi_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \xi_n$;
2. $\vartheta_k = \xi_{k-1}$ тоді і тільки тоді, коли $\vartheta_k = \xi_k$ ($k = 2, 3, \dots, n$);
3. кратність ξ_k не перевищує 2.

Доведення. За теоремою 2.1 раціональна функція

$$\frac{\prod_{j=1}^2 Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{\phi(z)}$$

є S -функцією (після скорочення спільних множників у чисельнику та у знаменнику, якщо такі є), отже її корені чергуються з її полюсами. Це означає,

що

$$0 \leq \vartheta_1 \leq \xi_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \xi_n.$$

Припустимо, що $\xi_k = \vartheta_k$ та $\xi_k = \theta_p^{(1)}$ для деяких k, p , тоді з (2.15) випливає, що

$$Q_{2n_1-1}^{(1)}(\theta_p^{(1)})Q_{2n_2}^{(2)}(\theta_p^{(1)}) + Q_{2n_1}^{(1)}(\theta_p^{(1)})Q_{2n_2-1}^{(2)}(\theta_p^{(1)}) = 0. \quad (2.26)$$

Так як $\theta_p^{(1)}$ - це корінь многочлена $Q_{2n_1}^{(1)}(z)$, маємо $Q_{2n_j-1}^{(j)}(\theta_p^{(j)}) \neq 0$. Тоді згідно з (2.26) отримуємо:

$$Q_{2n_1-1}^{(1)}(\theta_p^{(j)})Q_{2n_2}^{(2)}(\theta_p^{(1)}) = 0$$

і, отже,

$$Q_{2n_2}^{(2)}(\theta_p^{(1)}) = 0.$$

Тоді $\xi_{k-1} = \xi_k$ та $\xi_{k-1} = \vartheta_k = \xi_k$ і твердження 2. доведено.

З 2. слідує, що $\vartheta_1 < \xi_1$. Оскільки $Q_{2n_j-1}^{(j)}(0) = 0$ для $j = 1, 2$, маємо, що згідно з (2.15) $\phi(0) = 0$, отже $\vartheta_1 = 0$ і твердження 1. доведено.

Кратність коренів $\prod_{j=1}^2 Q_{2n_j}^{(j)}(z)$ не може перевищувати 2, бо кожен множник у добутку має тільки прості корені. \square

Зауваження 2.1. Твердження 3. Теорема 2.2. рівносильне тому, що кратність $Q_k^{(j)}$ дорівнює 1.

Теорема 2.3. Після скорочення спільних множників у чисельнику та у знаменнику, якщо такі є, функція

$$\frac{\phi(z)}{\prod_{j=1}^2 Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}$$

стає S -функцією.

Доведення. Використовуючи (2.15), ми отримуємо

$$\frac{\phi(z)}{\prod_{j=1}^2 Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)} = \frac{Q_{2n_1}^{(1)}(z)}{Q_{2n_1-1}^{(1)}(z)} + \frac{Q_{2n_2}^{(2)}(z)}{Q_{2n_2-1}^{(2)}(z)}.$$

Так як $\frac{Q_{2n_j}^{(j)}(z)}{Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}$ ($j = 1, 2$) є S -функціями, ми приходимо до висновку, що їх сума також є S -функцією. \square

Позначимо через $\{\chi_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, $0 = \chi_1^{(j)} < \chi_2^{(j)} < \dots < \chi_{n_j}^{(j)}$ корені многочлена $Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)$ та через $\{\tau_k\}_{k=1}^n = \cup_{j=1}^2 \{\chi_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$.

Теорема 2.4. *Послідовність $\{\tau_k\}_{k=1}^n$ чергується з $\{\vartheta_k\}_{k=1}^n$ наступним чином:*

1. $0 = \tau_1 = \vartheta_1 = \tau_2 < \vartheta_2 < \tau_3 \leq \vartheta_3 \leq \tau_4 \leq \dots < \vartheta_n$;
2. $\vartheta_k = \tau_k$ ($k = 3, 4, \dots, n-1$) тоді і тільки тоді, коли $\vartheta_k = \tau_{k+1}$;
3. кратність τ_k не перевищує 2.

Доведення. За теоремою 2.3 дріб

$$\frac{\phi(z)}{\prod_{j=1}^2 Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)}$$

є S -функцією (після скорочення спільних множників у чисельнику та у знаменнику, якщо такі є) та тоді корені цієї раціональної функції чергуються з її полюсами:

$$\tau_1 \leq \vartheta_1 \leq \tau_2 \leq \vartheta_2 \leq \tau_3 \leq \vartheta_3 \leq \tau_4 \leq \dots \leq \vartheta_n.$$

Нехай $\vartheta_k = \tau_k = \chi_p^{(1)}$, тоді з

$$Q_{2n_1-1}^{(1)}(\chi_p^{(1)})Q_{2n_2}^{(2)}(\chi_p^{(1)}) + Q_{2n_1}^{(1)}(\chi_p^{(1)})Q_{2n_2-1}^{(2)}(\chi_p^{(1)}) = 0$$

випливає

$$Q_{2n_1}^{(1)}(\chi_p^{(1)})Q_{2n_2-1}^{(2)}(\chi_p^{(1)}) = 0.$$

Так як з $Q_{2n_1-1}^{(1)}(\chi_p^{(1)}) = 0$ випливає $Q_{2n_1}^{(1)}(\chi_p^{(1)}) \neq 0$, маємо $Q_{2n_1}^{(1)}(\chi_r^{(2)}) = 0$.

Твердження 2. доведено.

Так як $\chi_1^{(1)} = \chi_1^{(2)} = 0$, то маємо $\tau_1 = \tau_2 = \vartheta_1 = 0$. Це разом з твердженням 2. доводить твердження 1.

Твердження 3. випливає з того, що власні значення кожної з задач (2.16), (2.19), (2.20) з $j = 1$ та $j = 2$ є простими (див. [6]). \square

2.3. Обернена задача

В цьому розділі буде розглянута обернена задача відновлення множин

$$\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}, \quad \{l_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \quad (j = 1, 2),$$

використовуючи спектр $\{\vartheta_k\}_{k=1}^n$, всі окрім одного елемента множини

$$\{\xi_k\}_{k=1}^n = \bigcup_{j=1}^2 \{\theta_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$$

та загальні маси m_j частин струни. Тут $n = \sum_{j=1}^2 n_j$.

Теорема 2.5. *Нехай задані загальні маси $m_j = \sum_{k=1}^{n_j} m_k^{(j)} > 0$ на частинах струни ($j = 1, 2$). Нехай також $\{\vartheta_k\}_{k=1}^n$ є спектр задачі (2.7)–(2.10), $\{\theta_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ є спектр задачі (2.16)–(2.18) з $j = 1$, а $\{\theta_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2-1}$ є послідовність власних значень (частина спектру) задачі (2.16)–(2.18) з $j = 2$ такі, що:*

$$0 = \vartheta_1 < \xi_1 < \vartheta_2 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} < \vartheta_n, \quad (2.27)$$

$$\text{де } \{\xi_k\}_{k=1}^{n-1} = \{\theta_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\theta_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2-1}.$$

Тоді ці дані однозначно визначають маси $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, ($j = 1, 2$) та інтервали $\{l_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($j = 1, 2$).

Доведення. Побудуємо наступні многочлени:

$$R_0(z) = (m_1 + m_2) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{z}{\vartheta_k}\right), \quad (2.28)$$

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{n_1} \left(1 - \frac{z}{\theta_k^{(1)}}\right), \quad (2.29)$$

$$R_2(z) = \prod_{k=1}^{n_2-1} \left(1 - \frac{z}{\theta_k^{(2)}} \right). \quad (2.30)$$

Розглянемо функціональне рівняння

$$R_0(z) = m_2 R_1(z) \tilde{X}_2(z) + m_1 R_2(z) \tilde{X}_1(z) \quad (2.31)$$

за умов $\tilde{X}_1(0) = 1$, $\tilde{X}_2(0) = 1$. Шукаємо розв'язок цього рівняння у класі многочленів. Підставляючи $z = \theta_k^{(1)}$ в рівняння (2.31) та беручи до уваги (2.28)–(2.30) (зазначимо, що з (2.27) та (2.30) випливає $R_2(\theta_k^{(1)}) \neq 0$), отримуємо:

$$\tilde{X}_1(\nu_p^{(1)}) = \frac{(m_1 + m_2) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{\theta_p^{(1)}}{\vartheta_k} \right)}{m_1 \prod_{k=1}^{n_2-1} \left(1 - \frac{\theta_p^{(1)}}{\theta_k^{(2)}} \right)}. \quad (2.32)$$

Позначимо $\theta_0^{(1)} := 0$ та оберемо

$$\tilde{X}_1(\nu_0^{(1)}) := 1.$$

Побудуємо наступний інтерполяційний многочлен Лагранжа

$$\tilde{X}_1(z) = \sum_{p=0}^{n_1} \tilde{X}_1(\theta_p^{(1)}) \prod_{i \neq p, i=0}^{n_1} \frac{z - \theta_i^{(1)}}{\theta_p^{(1)} - \theta_i^{(1)}}. \quad (2.33)$$

Позначимо через $\{\chi_k\}_{k=2}^{n_1+1}$ корені многочлена \tilde{X}_1 . Вочевидь,

$$\tilde{X}_1(\theta_p^{(1)}) = \frac{R_0(\theta_p^{(1)})}{m_1 R_2(\theta_p^{(1)})} = \frac{R_0(\theta_p^{(1)})}{m_1} \left(\frac{\frac{d}{dz}(R_1(z)R_2(z)) \Big|_{z=\theta_p^{(1)}}}{\frac{d}{dz}R_1(z) \Big|_{z=\theta_p^{(1)}}} \right)^{-1}.$$

Якщо $\theta_p^{(1)} = \xi_r$, то

$$(-1)^r R_0(\theta_p^{(1)}) = R_0(\xi_r)(-1)^r < 0,$$

$$\begin{aligned} (-1)^r \frac{d}{dz}(R_1(z)R_2(z)) \Big|_{z=\theta_p^{(1)}} &= (-1)^r \frac{d}{dz}(R_1(z)R_2(z)) \Big|_{z=\xi_r} > 0, \\ (-1)^p \frac{dR_1(z)}{dz} \Big|_{z=\theta_p^{(1)}} &> 0, \end{aligned}$$

отже,

$$(-1)^{p-1} \tilde{X}_1(\theta_p^{(1)}) > 0. \quad (2.34)$$

Тоді, корені $\{\chi_k^{(1)}\}_{k=2}^{n_1+1}$ многочлена $\tilde{X}_1(z)$ чергуються з елементами послідовності $\{\theta_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ наступним чином:

$$0 < \theta_1^{(1)} < \chi_2^{(1)} < \theta_2^{(1)} < \dots < \chi_{n_1}^{(1)} < \theta_{n_1}^{(1)} < \chi_{n_1+1}^{(1)}. \quad (2.35)$$

Нарешті побудуємо многочлен

$$X_1(z) := \prod_{k=2}^{n_1} \left(1 - \frac{z}{\chi_k^{(1)}} \right).$$

Завдяки (2.35) дріб $-\frac{R_1(z)}{zm_1X_1(z)}$ є S -функцією, а отже

$$-\frac{R_1(z)}{zm_1X_1(z)} = l_{n_1}^{(1)} + \frac{1}{-m_{n_1}^{(1)}z + \frac{1}{l_{n_1-1}^{(1)} + \frac{1}{-m_{n_1-1}^{(1)}z + \dots + \frac{1}{l_1^{(1)} + \frac{1}{-m_1^{(1)}z}}}} \quad (2.36)$$

з $l_k^{(1)} > 0$, $m_k^{(1)} > 0$.

Аналогічно до (2.32) ми отримуємо

$$\tilde{X}_2(\theta_p^{(2)}) = \frac{(m_1 + m_2) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{\theta_p^{(2)}}{\mu_k} \right)}{m_2 \prod_{k=1}^{n_1} \left(1 - \frac{\theta_p^{(2)}}{\theta_k^{(1)}} \right)}. \quad (2.37)$$

Позначимо $\theta_0^{(2)} := 0$ та оберемо

$$\tilde{X}_2(\theta_0^{(2)}) := 1.$$

Тоді $\tilde{X}_2(z)$ можна знайти у вигляді інтерполяційного многочлена Лагранжа

$$\tilde{X}_2(z) = \sum_{p=0}^{n_2-1} \tilde{X}_2(\theta_p^{(2)}) \prod_{i \neq p, i=0}^{n_2-1} \frac{z - \theta_i^{(2)}}{\theta_p^{(2)} - \theta_i^{(2)}}. \quad (2.38)$$

Аналогічно до (2.34) ми приходимо до висновку, що

$$(-1)^{p-1} \tilde{X}_2(\theta_p^{(2)}) > 0.$$

Корені $\{\chi_k^{(2)}\}_{k=2}^{n_2}$ многочлена $\tilde{X}_2(z)$ чергуються з елементами послідовності $\{\theta_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$ наступним чином:

$$0 < \theta_1^{(2)} < \chi_2^{(2)} < \theta_2^{(2)} < \dots < \chi_{n_2}^{(2)} < \theta_{n_2}^{(2)}. \quad (2.39)$$

З (2.35) та (2.39) випливає, що $\frac{\tilde{X}_j}{R_j}$ є S -функцією для $j = 1$ та $j = 2$. Тоді (див. доведення теореми 2.1),

$$\left(\left(\frac{\tilde{X}_1}{R_1} \right)^{-1} + \left(\frac{\tilde{X}_2}{R_2} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

також є S -функцією. Це означає, що існує тільки один корінь многочлена $\tilde{X}_1 \tilde{X}_2$ на інтервалі (ϑ_n, ∞) . Згідно з (2.39) цим коренем є $\chi_{n_1+1}^{(1)} = \theta_{n_2}^{(2)}$ і тоді $\theta_{n_2}^{(2)} > \vartheta_n$. Отже завдяки (2.27) ми приходимо до нерівностей $\theta_{n_2}^{(2)} > \vartheta_n > \chi_{n_2}^{(2)}$.

Завдяки (2.39) та нерівності $\theta_{n_2}^{(2)} > \chi_{n_2}^{(2)}$, ми приходимо до висновку, що

$$-\frac{R_2(z)}{zm_2 \tilde{X}_2(z)} \left(1 - \frac{z}{\theta_{n_2}^{(2)}} \right)$$

є S -функцією та

$$-\frac{R_2(z)}{zm_2 \tilde{X}_2(z)} \left(1 - \frac{z}{\theta_{n_2}^{(2)}} \right) =$$

$$= l_{n_2}^{(2)} + \frac{1}{-m_{n_2}^{(2)}z + \frac{1}{l_{n_2-1}^{(2)} + \frac{1}{-m_{n_2-1}^{(2)}z + \dots + \frac{1}{l_1^{(2)} + \frac{1}{-m_1^{(2)}z}}}}. \quad (2.40)$$

де

$$l_k^{(2)} > 0, \quad m_k^{(2)} > 0.$$

Ми ототожнюємо коефіцієнти $m_k^{(2)}$ з масами намистин на правій частині струни, а коефіцієнти $l_k^{(2)}$ - з інтервалами між цими намистинами.

Отже, ми знайшли всі маси намистин та інтервали між ними (окрім $l_0^{(1)}$ та $l_0^{(2)}$) на лівій ($j = 1$) та на правій ($j = 2$) частинах струни.

Тепер ми маємо довести, що спектр задачі (2.7)–(2.10), породжений отриманими величинами мас намистин та довжинами інтервалів збігається з $\{\vartheta_k\}_{k=1}^n$, де $\vartheta_1 := 0$.

Нехай $Q_{2n_j}^{(j)}(z)$ є характеристичний многочлен задачі Неймана – Діріхле (2.16)–(2.18), породженої отриманими масами намистин $\{m_k\}_{k=1}^n$ та інтервалами $\{l_k\}_{k=1}^n$ (значення $l_0^{(j)}$ беремо довільно), нехай $Q_{2n_j-1}^{(j)}(z)$ – характеристичний многочлен задачі Неймана – Неймана (2.16), (2.19), (2.20). Тоді справедливе розвинення (2.21). Порівнюючи (2.21), де $j = 1$ з (2.40), приходимо до висновку, що

$$Q_{2n_1}^{(1)}(z) = T_1 R_1(z), \quad Q_{2n_1-1}^{(1)}(z) = -T_1 m_1 z X_1(z), \quad (2.41)$$

де T_1 – ненульова константа.

Порівнюючи (2.21), де $j = 2$ з (2.40), ми приходимо до

$$Q_{2n_2}^{(2)}(z) = T_2 R_2(z) \left(1 - \frac{z}{\theta_{n_2}^{(2)}} \right), \quad Q_{2n_2-1}^{(2)}(z) = -T_2 z m_2 \tilde{X}_2(z). \quad (2.42)$$

Використовуючи (2.41)–(2.42), отримуємо

$$Q_{2n_1}^{(1)}(z) Q_{2n_2-1}^{(2)}(z) + Q_{2n_2}^{(2)}(z) Q_{2n_1-1}^{(1)}(z) = \quad (2.43)$$

$$= -T_1 T_2 z \left(m_2 R_1(z) \tilde{X}_2(z) + m_1 R_2(z) X_1(z) \left(1 - \frac{z}{\theta_{n_2}^{(2)}} \right) \right) = -T_1 T_2 z R_0(z).$$

Тоді спектр задачі (2.7)–(2.10), породженої отриманими масами намистин та довжинами інтервалів є $\{0\} \cup \{\vartheta_k\}_{k=2}^n$.

Тепер доведемо, що розв'язок оберненої задачі єдиний. Припустимо, що існують набори

$$\{\{\tilde{l}_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_j}, \{\tilde{m}_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_j}, j = 1, j = 2\},$$

котрі не співпадають з отриманими наборами

$$\{\{l_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_j}, \{m_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_j}, j = 1, j = 2\},$$

котрі породжують задачу (2.7)–(2.10) зі спектром $\{0\} \cup \{\vartheta_k\}_{k=2}^n$, задачу (2.16)–(2.18) з $j = 1$, чийм спектром є $\{\theta_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ та задачу (2.16)–(2.18) з $j = 2$, для якої $\{\theta_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2-1}$ є власними значеннями. Тоді

$$\begin{aligned} \phi(z) &= -T_1 T_2 z R_0(z) = \\ &= T_1 R_1(z) \tilde{Q}_{2n_2-1}^{(2)}(z) + T_2 R_2(z) \tilde{Q}_{2n_1-1}^{(1)}(z) \left(1 - \frac{z}{\tilde{\theta}_{2n_2}^{(2)}} \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

де $\tilde{Q}_{2n_1-1}^{(1)}$ та $\tilde{Q}_{2n_2-1}^{(2)}$ є характеристичними многочленами задачі (2.16), (2.19), (2.20) з $j = 1$ та $j = 2$, відповідно, породжені множинами

$$\{\{\tilde{l}_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_j}, \{\tilde{m}_k^{(i)}\}_{k=1}^{n_j}\}$$

з $j = 1$ та $j = 2$.

Віднімаючи (2.44) від (2.43) та використовуючи (2.41) та (2.42), отримуємо

$$\frac{T_1 R_1(z)}{T_2 R_2(z)} = - \frac{\tilde{Q}_{2n_1-1}^{(1)}(z) \left(1 - \frac{z}{\tilde{\theta}_{2n_2}^{(2)}} \right) - Q_{2n_1-1}^{(1)}(z) \left(1 - \frac{z}{\theta_{2n_2}^{(2)}} \right)}{\tilde{Q}_{2n_2}^{(2)}(z) - Q_{2n_2}^{(2)}(z)},$$

і тоді $T_1 R_1(0) = 0$, що невірно, бо $T_1 \neq 0$ та $R_1(0) = 1$. \square

Висновки до розділу 2

Для однозначного визначення шуканих даних обернених задач цього розділу достатньо знати спектр задачі (2.7)–(2.10), тобто спектральної задачі на всьому інтервалі з умовами Неймана на обох кінцях, спектр задачі (2.16)–(2.18), тобто спектр задачі на лівій частині інтервалу з умовами Неймана на лівому кінці та Діріхле на правому кінці та частину спектру задачі (2.16)–(2.18) на правій частині інтервалу з умовами Діріхле на лівому кінці та Неймана на правому кінці.

РОЗДІЛ 3

Спектральна задача за трьома спектрами для зіркового графу зі стільтьєсівських струн

3.1. Зірковий граф зі стільтьєсівських струн

Ми розглядаємо три стільтьєсівські струни, котрі з'єднані в одній точці (див. Рис. 3.1), утворюючи зірковий граф. Точка з'єднання отриманого зіркового графу не містить намистин. Висячі вершини отриманого зіркового графу зафіксовані, тобто накладені умови Діріхле. Струни натягнуті і граф може вільно коливатись у напрямку, перпендикулярному до положення рівноваги графу. Нумеруємо намистини, починаючи від висячих вершин графу. Позначимо через $m_k^{(j)} > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n_j$) – масу k -тої намистини j -тої струни, а через $l_k^{(j)} > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n_j$) – довжину k -того інтервалу на j -тій струні.

Сила натягу нитки вважається рівною 1. Поперечне зміщення намистини $m_k^{(j)}$ у час t позначимо $v_k^{(j)}(t)$.

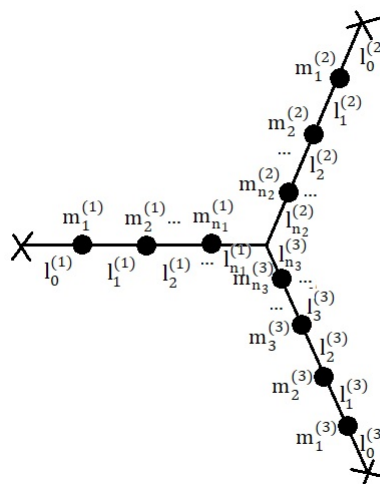


Рис. 3.1:

Другий закон Ньютона дає наступні рівняння руху для намистин:

$$\frac{v_k^{(j)}(t) - v_{k+1}^{(j)}(t)}{l_k^{(j)}} + \frac{v_k^{(j)}(t) - v_{k-1}^{(j)}(t)}{l_{k-1}^{(j)}} + m_k^{(j)} v_k^{(j)''}(t) = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, 3).$$

З неперервності струн у центральній вершині графу ми отримуємо

$$v_{n_1+1}^{(1)}(t) = v_{n_2+1}^{(2)}(t) = v_{n_3+1}^{(3)}(t),$$

а баланс сил у цій точці призводить до

$$\sum_{j=1}^3 \frac{v_{n_j}^{(j)}(t) - v_{n_j+1}^{(j)}(t)}{l_{n_j}^{(j)}} = 0.$$

Закріплення висячих вершин означає умову Діріхле на кожній зі струн:

$$v_0^{(1)}(t) = v_0^{(2)}(t) = v_0^{(3)}(t) = 0.$$

Підставляючи $v_k^{(j)}(t) = u_k^{(j)} e^{i\lambda t}$ та роблячи заміну спектрального параметру $z = \lambda^2$, ми отримуємо наступні рекурентні співвідношення для амплітуд коливань $u_k^{(j)}$:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} z u_k^{(j)} = 0 \quad (3.1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, 3),$$

$$u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_2+1}^{(2)} = u_{n_3+1}^{(3)}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{u_{n_j}^{(j)} - u_{n_j+1}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}} = 0, \quad (3.3)$$

$$u_0^{(1)} = u_0^{(2)} = u_0^{(3)} = 0. \quad (3.4)$$

Позначимо через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ спектр задачі (3.1)–(3.4).

Також ми розглянемо спектральну задачу для першої струни з умовою Діріхле на лівому кінці та умовою Неймана на правому кінці (див. Рис. 3.2):

$$\frac{u_k^{(1)} - u_{k+1}^{(1)}}{l_k^{(1)}} + \frac{u_k^{(1)} - u_{k-1}^{(1)}}{l_{k-1}^{(1)}} - m_k^{(1)} z u_k^{(1)} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_1), \quad (3.5)$$

$$u_0^{(1)} = 0, \quad (3.6)$$

$$u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_1}^{(1)}. \quad (3.7)$$

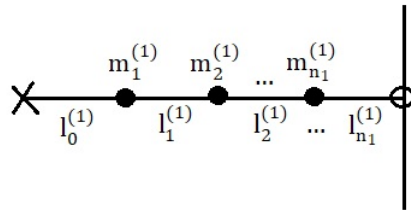


Рис. 3.2:

Позначимо через $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ спектр задачі (3.5)–(3.7).

Разом із задачами (3.1)–(3.4) та (3.5)–(3.7), ми розглянемо задачу, котра виникає, коли один з кінців другої струни з'єднаний з одним з кінців третьої струни та на вільних кінцях накладені умови Діріхле (див. Рис. 3.3):

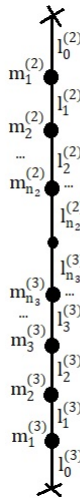


Рис. 3.3:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} z u_k^{(j)} = 0 \quad (3.8)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 2, 3),$$

$$u_0^{(2)} = u_0^{(3)} = 0, \quad (3.9)$$

$$u_{n_2+1}^{(2)} = u_{n_3}^{(3)}. \quad (3.10)$$

$$\sum_{j=2}^3 \frac{u_{n_j}^{(j)} - u_{n_{j+1}}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}} = 0. \quad (3.11)$$

Позначимо через $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ спектр задачі (3.8)–(3.11).

Слідуючи за [6], будемо шукати розв'язки задач (3.1)–(3.4), (3.5)–(3.7), (3.8)–(3.11) у наступній формі:

$$u_k^{(j)} = R_{2k-2}^{(j)}(z) u_1^{(j)} \quad (k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, 3), \quad (3.12)$$

де $R_{2k-2}^{(j)}(z)$ – многочлени степеня $k - 1$.

Завдяки [6] ми знаємо, що многочлени $R_k^{(j)}(z)$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$R_{2k-1}^{(j)}(z) = -z m_k^{(j)} R_{2k-2}^{(j)}(z) + R_{2k-3}^{(j)}(z),$$

$$R_{2k}^{(j)}(z) = l_k^{(j)} R_{2k-1}^{(j)}(z) + R_{2k-2}^{(j)}(z)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, 3)$$

та початкові умови

$$R_{-1}^{(j)}(z) = \frac{1}{l_0^{(j)}}, \quad R_0^{(j)}(z) = 1.$$

Підставляючи (3.12) у (3.2), (3.3), ми отримуємо

$$R_{2n_1}^{(1)}(z) u_1^{(1)} = R_{2n_2}^{(2)}(z) u_1^{(2)} = R_{2n_3}^{(3)}(z) u_1^{(3)},$$

$$R_{2n_1-1}^{(1)}(z) u_1^{(1)} + R_{2n_2-1}^{(2)}(z) u_1^{(2)} + R_{2n_3-1}^{(3)}(z) u_1^{(3)} = 0,$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} R_{2n_1}^{(1)}(z) & -R_{2n_2}^{(2)}(z) & 0 \\ 0 & R_{2n_2}^{(2)}(z) & -R_{2n_3}^{(3)}(z) \\ R_{2n_1-1}^{(1)}(z) & R_{2n_2-1}^{(2)}(z) & R_{2n_3-1}^{(3)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_1^{(3)} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Множина власних значень задачі (3.1)–(3.4) співпадає з послідовністю значень спектрального параметру z , для яких система (3.13) має нетривіальний розв'язок, тобто для тих z , для яких визначник матриці системи дорівнює 0:

$$\begin{vmatrix} R_{2n_1}^{(1)}(z) & -R_{2n_2}^{(2)}(z) & 0 \\ 0 & R_{2n_2}^{(2)}(z) & -R_{2n_3}^{(3)}(z) \\ R_{2n_1-1}^{(1)}(z) & R_{2n_2-1}^{(2)}(z) & R_{2n_3-1}^{(3)}(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Тобто, спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ задачі (3.1)–(3.4) співпадає з послідовністю розв'язків рівняння:

$$\begin{aligned} \Phi(z) := & R_{2n_1}^{(1)}(z)R_{2n_2}^{(2)}(z)R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_1-1}^{(1)}(z)R_{2n_2}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) + \\ & + R_{2n_1}^{(1)}(z)R_{2n_2-1}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Назвемо $\Phi(z)$ характеристичним многочленом задачі (3.1)–(3.4).

Спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ задачі (3.5)–(3.7) співпадає з множиною розв'язків рівняння

$$R_{2n_1-1}^{(1)}(z) = 0. \quad (3.15)$$

Ліва частина рівняння (3.15) є характеристичним многочленом задачі (3.5)–(3.7).

Підставляючи (3.12) у (3.8)–(3.11), ми отримуємо

$$\begin{aligned} R_{2n_2}^{(2)}(z)u_1^{(2)} &= R_{2n_3}^{(3)}(z)u_1^{(3)}, \\ R_{2n_2-1}^{(2)}(z)u_1^{(2)} + R_{2n_3-1}^{(3)}(z)u_1^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} R_{2n_2}^{(2)}(z) & -R_{2n_3}^{(3)}(z) \\ R_{2n_2-1}^{(2)}(z) & R_{2n_3-1}^{(3)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_1^{(3)} \end{pmatrix} = 0.$$

Спектр $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ задачі (3.8)–(3.11) співпадає з множиною розв’язків рівняння

$$\Psi(z) := R_{2n_2}^{(2)}(z)R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) = 0.$$

Назвемо $\Psi(z)$ характеристичним многочленом задачі (3.8)–(3.11). Позначимо через $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ об’єднання спектрів задач (3.5)–(3.7) та (3.8)–(3.11), тобто $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} = \{\mu_k\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$.

Будемо нумерувати елементи $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ у неспадаючому порядку:

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n_1+n_2+n_3}.$$

Лема 3.1. *Нехай $f_1(z)$ та $f_2(z)$ є S_0 - функції. Тоді $f_1(z) + f_2(z)$ та $(f_1^{-1}(z) + f_2^{-1}(z))^{-1}$ також є S_0 - функції.*

Доведення. З того, що $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} (f_1(z) + f_2(z)) = \operatorname{Im} z \operatorname{Im} f_1(z) + \operatorname{Im} z \operatorname{Im} f_2(z) \geq 0$ для $\operatorname{Im} z \neq 0$ та $f_1(\bar{z}) + f_2(\bar{z}) = \overline{f_1(z) + f_2(z)} = \overline{f_1(z)} + \overline{f_2(z)}$, ми робимо висновок, що $f_1(z) + f_2(z)$ є неванліннівською функцією.

Зазначивши, що $f_1(z) > 0$ та $f_2(z) > 0$ для $z \leq 0$, ми приходимо до $f_1(z) + f_2(z) > 0$ для $z \leq 0$. Отже, $f_1(z) + f_2(z)$ є S_0 - функцією.

З того, що

$$\operatorname{Im} \frac{1}{f_j(z)} = \operatorname{Im} \frac{\overline{f_j(z)}}{|f_j(z)|^2} = \frac{-\operatorname{Im} f_j(z)}{|f_j(z)|^2} \quad (3.16)$$

для $j = 1, 2$, ми отримуємо

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)}} = \operatorname{Im} \frac{\overline{\frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)}}}{\left| \frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)} \right|^2} = \frac{-\operatorname{Im} \left(\frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)} \right)}{\left| \frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)} \right|^2}.$$

Використовуючи (3.16), ми приходимо до

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)}} = \frac{\frac{\operatorname{Im} f_1(z)}{|f_1(z)|^2} + \frac{\operatorname{Im} f_2(z)}{|f_2(z)|^2}}{\left| \frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)} \right|^2}.$$

Завдяки $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f_j(z) > 0$ для $\operatorname{Im} z \neq 0$ та $j = 1, 2$ ми

$$\text{приходимо до } \operatorname{Im} z \operatorname{Im} \frac{1}{\frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)}} \geq 0 \text{ для } \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Також є вірним те, що $\frac{1}{\frac{1}{f_1(\bar{z})} + \frac{1}{f_2(\bar{z})}} = \frac{1}{\frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)}}$ та

$$\frac{1}{\frac{1}{f_1(z)} + \frac{1}{f_2(z)}} > 0 \text{ для } z \leq 0.$$

□

Теорема 3.1. *Послідовності $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ та $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$*

задовольняють наступні умови:

$$1. \ 0 < \xi_1 \leq \lambda_1 \leq \xi_2 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \xi_{n_1+n_2+n_3} < \lambda_{n_1+n_2+n_3};$$

$$2. \ \text{Якщо } \lambda_k = \lambda_{k+1}, \text{ то } \xi_k < \lambda_k = \xi_{k+1} = \lambda_{k+1} < \xi_{k+2}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3 - 2);$$

Якщо $\lambda_{n_1+n_2+n_3-1} = \lambda_{n_1+n_2+n_3}$, то

$$\xi_{n_1+n_2+n_3-1} < \lambda_{n_1+n_2+n_3-1} = \xi_{n_1+n_2+n_3} = \lambda_{n_1+n_2+n_3}.$$

3. *Кратність λ_k та ξ_k не перевищує 2 для всіх k .*

Доведення. З того, що $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ є коренями $R_{2n_1-1}^{(1)}(z)$ та $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ є коренями многочлена $\Psi(z)$, робимо висновок, що $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ є коренями многочлена

$$F(z) := R_{2n_1-1}^{(1)}(z) \left(R_{2n_2}^{(2)}(z) R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z) R_{2n_3}^{(3)}(z) \right).$$

Розглянемо дріб

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(z)}{F(z)} &= \frac{R_{2n_1}^{(1)}(z) \left(R_{2n_2}^{(2)}(z) R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z) R_{2n_3}^{(3)}(z) \right)}{R_{2n_1-1}^{(1)}(z) \left(R_{2n_2}^{(2)}(z) R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z) R_{2n_3}^{(3)}(z) \right)} + \\
&+ \frac{R_{2n_1-1}^{(1)}(z) R_{2n_2}^{(2)}(z) R_{2n_3}^{(3)}(z)}{R_{2n_1-1}^{(1)}(z) \left(R_{2n_2}^{(2)}(z) R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z) R_{2n_3}^{(3)}(z) \right)} = \\
&= \frac{R_{2n_1}^{(1)}(z)}{R_{2n_1-1}^{(1)}(z)} + \frac{R_{2n_2}^{(2)}(z) R_{2n_3}^{(3)}(z)}{R_{2n_2}^{(2)}(z) R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z) R_{2n_3}^{(3)}(z)} = \\
&= \frac{R_{2n_1}^{(1)}(z)}{R_{2n_1-1}^{(1)}(z)} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{R_{2n_3}^{(3)}(z)}{R_{2n_3-1}^{(3)}(z)}} + \frac{1}{\frac{R_{2n_2}^{(2)}(z)}{R_{2n_2-1}^{(2)}(z)}}}}.
\end{aligned}$$

З [6] нам відомо, що $\frac{R_{2n_j}^{(j)}(z)}{R_{2n_j-1}^{(j)}(z)} \in S_0$ - функцією для кожного

$j = 1, 2, 3$. Тоді $\left(\left(\frac{R_{2n_2}^{(2)}(z)}{R_{2n_2-1}^{(2)}(z)} \right)^{-1} + \left(\frac{R_{2n_3}^{(3)}(z)}{R_{2n_3-1}^{(3)}(z)} \right)^{-1} \right)^{-1}$ також є S_0 - функцією (див. Лема 3.1.)

Отже, ми робимо висновок, що $\frac{\Phi(z)}{F(z)}$ також є S_0 - функцією і тоді корені цієї раціональної функції чергуються з її полюсами як у твердженні 1. теореми.

Зараз доведемо твердження 3. Відомо, що власні значення $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ задачі Діріхле – Неймана (3.5)–(3.7) є простими (див., наприклад [6], Додаток II, нерівності (20)), так само як і власні значення $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ задачі Діріхле – Діріхле (3.8)–(3.11). Це означає, що кратність будь-якого елемента послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ не перевищує 2. У [39] (Теорема 2.2) було доведено, що кратність λ_k не перевищує 2.

Твердження 3. доведено.

Тепер доведемо твердження 2. Нехай $\lambda_k = \lambda_{k+1}$, тоді, беручи до уваги твердження 1., маємо $\lambda_k = \xi_{k+1} = \lambda_{k+1}$. Але це означає, що $R_{2n_1}^{(1)}(\lambda_k) = R_{2n_2}^{(2)}(\lambda_k) = R_{2n_3}^{(3)}(\lambda_k) = 0$ (див. доведення Теорема 2.2 у [39]). З $R_{2n_1}^{(1)}(\lambda_k) = 0$ випливає, що $R_{2n_1-1}^{(1)}(\lambda_k) \neq 0$, бо корені $R_{2k}^{(j)}(\lambda)$ строго чергуються з коренями $R_{2k-1}^{(j)}(\lambda)$ (див. [6]). З іншого боку, ξ_{k+1} може бути двократним тільки якщо $R_{2n_1-1}^{(1)}(\xi_{k+1}) = 0$ та $R_{2n_2}^{(2)}(\xi_{k+1})R_{2n_3-1}^{(3)}(\xi_{k+1}) + R_{2n_2-1}^{(2)}(\xi_{k+1})R_{2n_3-2}^{(3)}(\xi_{k+1}) = 0$. Тоді ξ_{k+1} – це простий елемент послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$. Твердження 2. доведено. \square

Оскільки задача (3.1)–(3.4) самоспряжена, то немає різниці між алгебраїчною та геометричною кратностями власних значень $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$. Тому ми вживаємо термін "кратність".

3.2. Обернена задача

В цьому розділі ми розглянемо обернену задачу знаходження мас намистин $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($j = 1, 2, 3$) та довжин інтервалів $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ ($j = 1, 2, 3$), використовуючи наступні дані: повні довжини l_1, l_2, l_3 струн та спектри $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$, $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$, $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ задач (3.1)–(3.4), (3.5)–(3.7), (3.8)–(3.11), відповідно.

Надалі нам знадобиться допоміжна теорема, котра була доведена у [38], (тут Теорема 3.2), котра в наших термінах має наступну форму.

Теорема 3.2. *Нехай l_2 та l_3 – додатні числа. Нехай задані три послідовності дійсних чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$, $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$, $\{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$, котрі задовольняють наступні умови:*

1. $\nu_k < \nu_{k'}$, якщо $k < k'$, $\nu_k^{(j)} < \nu_{k'}^{(j)}$, якщо $k < k'$ та $j = 2, 3$;

- 2.

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3} \cap \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2} = \emptyset,$$

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3} \cap \{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3} = \emptyset,$$

$$\{\tau_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2} \cap \{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3} = \emptyset.$$

3. Елементи послідовності $\{\chi_k\}_{k=1}^{n_2+n_3} := \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2} \cup \{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$, занумеровані так: $\chi_k < \chi_{k'}$, якщо $k < k'$, чергуються з елементами послідовності $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$, тобто

$$0 < \nu_1 < \chi_1 < \nu_2 < \chi_2 < \dots < \nu_{n_2+n_3} < \chi_{n_2+n_3}.$$

Тоді існує єдиний набір послідовностей $\{m_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$, $\{m_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$, $\{l_k^{(2)}\}_{k=0}^{n_2}$, $\{l_k^{(3)}\}_{k=0}^{n_3}$ таких, що $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$ ($j = 2, 3$), котрий породжує задачу (3.8)–(3.11) зі спектром $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ та задачі

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} z u_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n_j), \quad (3.17)$$

$$u_0^{(j)} = u_{n_j+1}^{(j)} = 0 \quad (3.18)$$

зі спектром $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$ при $j = 2$ та зі спектром $\{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$ при $j = 3$.

Наразі ми представимо головний результат цього розділу.

Теорема 3.3. Нехай задані три додатних числа l_1, l_2, l_3 разом з послідовностями додатних чисел $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$, $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$, котрі задовольняють наступні умови:

$$1) \quad 0 < \xi_1 < \lambda_1 < \xi_2 < \lambda_2 < \dots < \xi_{n_1+n_2+n_3} < \lambda_{n_1+n_2+n_3}, \quad (3.19)$$

де $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} = \{\mu_k\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$;

$$2) \quad (-1)^{n_1} \left(\prod_{j=1}^{n_1} \frac{l_1}{\mu_0 - \mu_j} + \sum_{k=1}^{n_1} \frac{P_3(\mu_k)}{P_2(\mu_k)} \prod_{j=0, j \neq k}^{n_1} \frac{1}{\mu_k - \mu_j} \right) > 0; \quad (3.20)$$

$$3) \quad (-1)^{n_2+n_3} \left(\prod_{j=1}^{n_2+n_3} \frac{l_2 l_3}{\nu_0 - \nu_j} + \sum_{k=1}^{n_2+n_3} \frac{P_3(\nu_k)}{P_1(\nu_k)} \prod_{j=0, j \neq k}^{n_2+n_3} \frac{1}{\nu_k - \nu_j} \right) > 0, \quad (3.21)$$

де

$$P_1(z) = \prod_{k=1}^{n_1} \left(1 - \frac{z}{\mu_k} \right),$$

$$P_2(z) = (l_2 + l_3) \prod_{k=1}^{n_2+n_3} \left(1 - \frac{z}{\nu_k}\right),$$

$$P_3(z) = (l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3) \prod_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Тоді:

1. існують послідовності додатних чисел $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($j = 1, 2, 3$) та $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ ($j = 1, 2, 3$), котрі породжують задачі (3.1)–(3.4), (3.5)–(3.7), (3.8)–(3.11) такі, що $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ є спектром задачі (3.1)–(3.4), $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ є спектром задачі (3.5)–(3.7), $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ є спектром задачі (3.8)–(3.11) та загальні довжини струн є l_1, l_2, l_3
 $\left(l_j = \sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3\right)$ відповідно;
2. ці дані однозначно визначають маси намистин та довжини інтервалів на першій струні.

Доведення. Розглянемо функціональне рівняння

$$P_3(z) = P_1(z)Y(z) + P_2(z)X(z), \quad (3.22)$$

де $X(z), Y(z)$ – невідомі многочлени.

Підставляючи $z = \mu_k$ у (3.22), ми отримуємо:

$$X(\mu_k) = \frac{P_3(\mu_k)}{P_2(\mu_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n_1. \quad (3.23)$$

З умови строгого чергування (3.19) випливає, що знаменник $P_2(\mu_k) \neq 0$.

Знайдемо многочлен $X(z)$, використовуючи його відомі значення (3.23) та використовуючи як означення $\mu_0 = 0$ та $X(\mu_0) = X(0) = l_1$.

Побудуємо наступний інтерполяційний многочлен Лагранжа

$$X(z) = \sum_{k=0}^{n_1} X(\mu_k) \prod_{j=0, j \neq k}^{n_1} \frac{z - \mu_j}{\mu_k - \mu_j}.$$

Позначимо через $\{\zeta_k\}_{k=1}^{n_1}$ корені $X(z)$. Потрібно показати, що вони чергуються з елементами послідовності $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$.

Тепер знайдемо знаки значень, які приймає многочлен $X(z)$ у точках $z = \mu_k$ ($k = 1, 2, \dots$). За означенням $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} = \{\mu_k\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ і тоді μ_k повинен співпадати з деяким елементом послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$. Нехай $\mu_k = \xi_p$, де $p \geq k \geq 1$. Отже, $P_3(\mu_k) = P_3(\xi_p)$ і завдяки (3.19) маємо: $P_3(\mu_k)(-1)^{p-1} = P_3(\xi_p)(-1)^{p+1} > 0$. З того, що $\mu_k = \xi_p$ випливає, що повинні бути $p - k$ елементи множини $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ на інтервалі $(-\infty, \mu_k)$. Це означає, що $(-1)^{p-k}P_2(\mu_k) > 0$. Тоді з (3.23) випливає $(-1)^{k+1}X(\mu_k) > 0$, для всіх $k \geq 1$. Також відзначимо, що з (3.20) випливає $(-1)^{n_1}X(z) > 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Тоді маємо

$$0 < \mu_1 < \zeta_1 < \mu_2 < \zeta_2 < \dots < \mu_{n_1} < \zeta_{n_1}. \quad (3.24)$$

Завдяки нерівностям (3.24), послідовності $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ та $\{\zeta_k\}_{k=1}^{n_1}$ можуть бути розглянуті як спектри задач Діріхле – Неймана та Діріхле – Діріхле. Використовуючи ці спектри та довжину l_1 , можемо побудувати стільтьєсівську струну, тобто знайти маси $\{m_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ та довжини $\{l_k^{(1)}\}_{k=0}^{n_1}$ за відомою процедурою, описаною у [6]:

Завдяки (3.24) дріб $\frac{X(z)}{P_1(z)}$ є S_0 -функцією та може бути розкладений у ланцюговий дріб:

$$\frac{X(z)}{P_1(z)} = a_{n_1}^{(1)} + \frac{1}{-b_{n_1}^{(1)}z + \frac{1}{a_{n_1-1}^{(1)} + \dots + \frac{1}{-b_1^{(1)}z + \frac{1}{a_0^{(1)}}}}},$$

де $a_k^{(1)} > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n_1$), $b_k^{(1)} > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n_1$).

Ідентифікуємо ці коефіцієнти з масами намистин та довжинами інтервалів між ними на першій струні, тобто $a_k = l_k^{(1)}$, ($k = 0, 1, \dots, n_1$), $b_k = m_k^{(1)}$, ($k = 1, 2, \dots, n_1$). Це означає, що послідовності $\{l_k^{(1)}\}_{k=0}^{n_1}$,

$\{m_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ породжують задачу (3.5)–(3.7) зі спектром $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ та задачу (3.17), (3.18) зі спектром $\{\zeta_k\}_{k=1}^{n_1}$. Тоді

$$R_{2n_1-1}^{(1)}(z) = P_1(z) \quad (3.25)$$

та

$$R_{2n_1}^{(1)}(z) = X(z). \quad (3.26)$$

Знайдемо $Y(z)$. Тепер підставимо $z = \nu_k$ у рівняння (3.22) та отримаємо

$$Y(\nu_k) = \frac{P_3(\nu_k)}{P_1(\nu_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n_2 + n_3. \quad (3.27)$$

З умови строгого чергування (3.19) випливає, що $P_1(\nu_k) \neq 0$.

Побудуємо многочлен $Y(z)$, використовуючи його відомі значення (3.27) та використовуючи як означення $\nu_0 = 0$ та $Y(\nu_0) = Y(0) = l_2 l_3$.

Інтерполяційний многочлен Лагранжа буде мати наступну форму

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{n_2+n_3} Y(\nu_k) \prod_{j=0, j \neq k}^{n_2+n_3} \frac{z - \nu_j}{\nu_k - \nu_j}.$$

Позначимо через $\{\chi_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ корені многочлена $Y(z)$. Потрібно показати, що вони чергуються з елементами послідовності $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$. Тепер знайдемо знаки значень, які приймає многочлен $Y(z)$ у точках $z = \nu_k$ ($k = 1, 2, \dots, n_2 + n_3$). За означенням $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} = \{\mu_k\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ і тоді ν_k повинен співпадати з деяким елементом послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$. Нехай $\nu_k = \xi_p$, де $p \geq k \geq 1$. Отже, $P_3(\nu_k) = P_3(\xi_p)$ і завдяки (3.19) маємо: $P_3(\nu_k)(-1)^{p-1} = P_3(\xi_p)(-1)^{p+1} > 0$. З того, що $\nu_k = \xi_p$, випливає, що повинні бути $p - k$ елементи послідовності $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$ на інтервалі $(-\infty, \mu_k)$. Це означає, що $(-1)^{p-k} P_1(\nu_k) > 0$. Зараз із рівняння (3.27) випливає, що $(-1)^{k+1} Y(\nu_k) > 0$ при $k \geq 1$. Отже, з (3.21) випливає, що $(-1)^{n_2+n_3} Y(z) > 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Тоді маємо

$$0 < \nu_1 < \chi_1 < \nu_2 < \chi_2 < \dots < \nu_{n_2+n_3} < \chi_{n_2+n_3}.$$

Послідовність $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ може бути розглянута як спектр задачі Діріхле – Діріхле на інтервалі, сформованому як об'єднання другої та третьої струн, коли $\{\chi_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ є об'єднанням спектрів задач Діріхле – Діріхле на другій та третій струнах.

Маємо послідовність $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ та послідовність $\{\chi_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$, котру ми розглядаємо як об'єднання послідовностей $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$, $\{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$. Звісно, ми можемо довільно ідентифікувати їх. Вочевидь, $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$, $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$, $\{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$ задовольняють умови Теорема 3.2. Отже, $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ є спектром задачі (3.8)–(3.11), $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$ є спектром задачі (3.17), (3.18) з $j = 2$ та $\{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$ є спектром задачі (3.17), (3.18) з $j = 3$.

Метод знаходження $\{m_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$, $\{m_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$, $\{l_k^{(2)}\}_{k=0}^{n_2}$, $\{l_k^{(3)}\}_{k=0}^{n_3}$ полягає у наступному.

Побудуємо наступні многочлени:

$$Q_j(z) = l_j \prod_{k=1}^{n_j} \left(1 - \frac{z}{\nu_k^{(j)}} \right), \quad j = 2, 3,$$

та інтерполяційні многочлени Лагранжа

$$R_2(z) = \sum_{k=1}^{n_2} \frac{z P_2(\nu_k^{(2)})}{\nu_k^{(2)} Q_3(\nu_k^{(2)})} \prod_{p=1, p \neq k}^{n_2} \frac{z - \nu_p^{(2)}}{\nu_k^{(2)} - \nu_p^{(2)}} + \prod_{k=1}^{n_2} \frac{\nu_k^{(2)} - z}{\nu_k^{(2)}},$$

$$R_3(z) = \sum_{k=1}^{n_3} \frac{z P_2(\nu_k^{(3)})}{\nu_k^{(3)} Q_2(\nu_k^{(3)})} \prod_{p=1, p \neq k}^{n_3} \frac{z - \nu_p^{(3)}}{\nu_k^{(3)} - \nu_p^{(3)}} + \prod_{k=1}^{n_3} \frac{\nu_k^{(3)} - z}{\nu_k^{(3)}}.$$

Позначимо через $\{\alpha_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, ($j = 2, 3$) корені многочлена $R_j(z)$, занумеровані у порядку зростання.

Згідно з доведенням теореми 2.1 у [38], виконуються наступні умови чергування:

$$0 < \alpha_1^{(j)} < \nu_1^{(j)} < \alpha_2^{(j)} < \nu_2^{(j)} < \dots < \alpha_{n_j}^{(j)} < \nu_{n_j}^{(j)}, \quad j = 2, 3.$$

Завдяки цим нерівностям ми приходимо до висновку, що $\frac{Q_j(z)}{R_j(z)} \in$

S_0 - функцією при $j = 2, 3$. Розвиваючи раціональні функції $\frac{Q_j(z)}{R_j(z)}$

($j = 2, 3$) у ланцюговий дріб, отримуємо:

$$\frac{Q_j(z)}{R_j(z)} = a_{n_j}^{(j)} + \frac{1}{-b_{n_j}^{(j)}z + \frac{1}{a_{n_{j-1}}^{(j)} + \cdots + \frac{1}{-b_1^{(j)}z + \frac{1}{a_0^{(j)}}}},$$

де усі $a_k^{(j)}$ та $b_k^{(j)}$ є додатними числами. Ідентифікуємо їх наступним чином: $a_k^{(j)} = l_k^{(j)}$, $b_k^{(j)} = m_k^{(j)}$, тобто припустимо, що числа $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, ($j = 2, 3$) є масами намистин на j -тій стільтьєсівській струні та $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$, ($j = 2, 3$) є довжинами підінтервалів на j -тій стільтьєсівській струні. Вочевидь, маємо

$$\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = \frac{Q_j(0)}{R_j(0)} = l_j.$$

Тоді, згідно з [38], $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ є спектром задачі (3.8)–(3.11) та $\{\nu_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, ($j = 2, 3$) є спектрами задач (3.17), (3.18), породженими цими масами та довжинами.

Таким чином,

$$R_{2n_2-1}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) + R_{2n_3-1}^{(3)}(z)R_{2n_2}^{(2)}(z) = P_2(z) \quad (3.28)$$

та

$$R_{2n_j}^{(j)}(z) = Q_j(z), \quad (j = 2, 3), \quad (3.29)$$

$$R_{2n_j-1}^{(j)}(z) = R_j(z), \quad (j = 2, 3). \quad (3.30)$$

Тепер доведемо, що задача (3.1)–(3.4), породжена отриманими масами та довжинами, має спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$.

Розглянемо рівняння (3.22) з умовами $Y(0) = l_2l_3$, $X(0) = l_1$. Ми вже знайшли його розв'язок, а зараз нам потрібно довести єдиність цього розв'язку.

Припустимо, що існує інший розв'язок $(\tilde{X}(z); \tilde{Y}(z))$, такий, що

$$P_3(z) = P_1(z)\tilde{Y}(z) + P_2(z)\tilde{X}(z). \quad (3.31)$$

Віднімаючи (3.31) від (3.22), ми отримуємо

$$P_1(z)(Y(z) - \tilde{Y}(z)) = -P_2(z)(X(z) - \tilde{X}(z)).$$

Звідси ми бачимо, що $Y(z) - \tilde{Y}(z) = CP_2(z)$ та $X(z) - \tilde{X}(z) = -CP_1(z)$, де C є константою.

Виходячи з того, що $\tilde{Y}(0) = Y(0) = l_2l_3$ та $\tilde{X}(0) = X(0) = l_1$, робимо висновок, що $C = 0$. Таким чином, ми довели єдиність розв'язку (3.31) з умовами $\tilde{Y}(0) = Y(0) = l_2l_3$ та $\tilde{X}(0) = X(0) = l_1$.

Спектр задачі (3.1)–(3.4) з отриманими масами та інтервалами відповідно до (3.14) є послідовністю коренів многочлена

$$\begin{aligned} & R_{2n_1-1}^{(1)}(z)R_{2n_2}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) + \\ & + R_{2n_1}^{(1)}(z) \left(R_{2n_2}^{(2)}(z)R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) \right). \end{aligned}$$

Відповідно до (3.25), (3.26), (3.28), (3.29), (3.30), маємо:

$$\begin{aligned} & R_{2n_1-1}^{(1)}(z)R_{2n_2}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) + \\ & + R_{2n_1}^{(1)}(z) \left(R_{2n_2}^{(2)}(z)R_{2n_3-1}^{(3)}(z) + R_{2n_2-1}^{(2)}(z)R_{2n_3}^{(3)}(z) \right) = \\ & = P_1(z)Y(z) + P_2(z)X(z) = P_3(z), \end{aligned}$$

та послідовністю коренів $P_3(z) \in \{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$. □

Зауваження 3.1. З доведення Теорема 3.3 зрозуміло, що дані $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$, $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$, l_1, l_2, l_3 однозначно визначають маси $\{m_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ та довжини $\{l_k^{(1)}\}_{k=0}^{n_1}$ на першій струні, але довільний вибір $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$ та $\{\nu_k^{(3)}\}_{k=1}^{n_3}$ серед $\{\chi_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ не дає можливості однозначно визначити маси $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($j = 2, 3$) та довжини $\{l_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($j = 2, 3$).

Висновки до розділу 3

У розділі 3 розв'язана наступна пряма задача, породжена рівняннями стільтьєсівської струни на зірковому графі. Розглянуті спектральна задача

на зірковому графі з кількістю мас $n_1 + n_2 + n_3$ на ребрах з умовами Діріхле на висячих вершинах, спектр якої позначений через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$, задача на першому ребрі з n_1 масами з умовою Діріхле на лівому кінці та умовою Неймана на правому кінці, спектр якої позначений через $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_1}$, а також задача з умовами Діріхле на кінцях з $n_2 + n_3$ масами на об'єднанні другого та третього ребра, спектр якої позначений через $\{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$. Пряма задача полягала в доведенні того, що власні значення першої з цих трьох задач чергуються з елементами об'єднання спектрів другої та третьої задачі у нестрогому розумінні.

Розв'язана також обернена задача, тобто задача відновлення мас намистин та довжин інтервалів між ними на ребрах графу, виходячи з трьох вище згаданих спектрів та повних довжин струн. Виявилось, що умова чергування елементів послідовності $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3}$ з елементами послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{n_1+n_2+n_3} = \{\mu_k\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k\}_{k=1}^{n_2+n_3}$ є достатньою для існування розв'язку оберненої задачі. При цьому маси намистин та довжин інтервалів на першій струні відновлюються однозначно, а на інших двох струнах – ні.

РОЗДІЛ 4

Обернена спектральна задача для зіркового графу зі стільтьєсівських струн з заданою кількістю мас на ребрах

4.1. Пряма задача

В цьому розділі ми розглянемо плоский зірковий граф з $q (\geq 3)$ стільтьєсівських струн, з'єднаних у центральній вершині, де може бути розташована точкова маса. Припустимо, що ребра графу лежать в одній площині, цей граф розтягнуто і висячі вершини, окрім однієї, котру будемо називати коренем та позначати \mathbf{v} , зафіксовані. Будемо вивчати малі поперечні коливання цього графу з балансом сил та умовами неперервності у центральній вершині.

Розглянемо два випадки: 1) корінь вільно рухається у напрямку, перпендикулярному до площини рівноваги струн, 2) корінь є зафіксованим. Ми досліджуємо власні частоти малих поперечних коливань такого графу.

Надалі будемо називати струну, що інцидентна з коренем, як головне ребро або головну струну, а інші ребра зіркового графу будемо позначати через e_j ($j = 1, 2, \dots, q - 1$).

Ми припускаємо, що головне ребро складається з $\mathbf{n} + 1$ ($\mathbf{n} \in N_0$) інтервалів довжини $\mathbf{l}_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1$) та $\mathbf{l}_{\mathbf{n}} \geq 0$ з масами намистин $\mathbf{m}_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$), які розділяють ці інтервали. Ми нумеруємо маси та інтервали ззовні до центру; довжина головного ребра позначається через $\mathbf{l} := \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{l}_k$. Для інших $q - 1$ ребер, припускаємо, що j -те ребро складається з $n_j + 1$ ($n_j \in N_0$) інтервалів довжини $l_k^{(j)} > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n_j$) з масами намистин $m_k^{(j)} > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n_j$), які розділяють їх (нумеруємо їх обох

ззовні до центру); довжина j -тої струни позначається через $l_j := \sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)}$.

Через $\mathbf{v}_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$) позначимо поперечне зміщення k -тої точкової маси \mathbf{m}_k на головному ребрі у час t , та через $\mathbf{v}_0(t)$, $\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1}(t)$ поперечні зміщення кінців на головній струні. Для інших $q-1$ ребер, через $v_k^{(j)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n_j$) ми позначимо поперечне зміщення k -тої точкової маси $m_k^{(j)}$ на j -тому ребрі у час t , та через $v_0^{(j)}(t)$, $v_{n_j+1}^{(j)}(t)$ поперечні зміщення кінців на j -тій струні ($j = 1, 2, \dots, q-1$).

Якщо ми припустимо, що нитки були натягнуті з силами, кожна з яких дорівнює 1, то рівняння Лагранжа для малих поперечних коливань системи (див. [6, Chapter III.1]) будуть мати вигляд:

$$\frac{\mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_{k+1}(t)}{\mathbf{l}_k} + \frac{\mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_{k-1}(t)}{\mathbf{l}_{k-1}} + \mathbf{m}_k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}_k(t) = 0 \quad (4.1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, \tilde{\mathbf{n}}),$$

$$\frac{v_k^{(j)}(t) - v_{k+1}^{(j)}(t)}{l_k^{(j)}} + \frac{v_k^{(j)}(t) - v_{k-1}^{(j)}(t)}{l_{k-1}^{(j)}} + m_k^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_k^{(j)}(t) = 0 \quad (4.2)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, q-1),$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1}(t) = v_{n_1+1}^{(1)}(t) = v_{n_2+1}^{(2)}(t) = \dots = v_{n_{q-1}+1}^{(q-1)}(t), \quad (4.3)$$

$$\frac{\mathbf{v}_{\tilde{\mathbf{n}}+1}(t) - \mathbf{v}_{\tilde{\mathbf{n}}}(t)}{\mathbf{l}_{\tilde{\mathbf{n}}}} + \sum_{j=1}^{q-1} \frac{v_{n_j+1}^{(j)}(t) - v_{n_j}^{(j)}(t)}{l_{n_j}^{(j)}} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathbf{l}_{\mathbf{n}} > 0, \\ \mathbf{m}_{\mathbf{n}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}_{\mathbf{n}}(t), & \text{якщо } \mathbf{l}_{\mathbf{n}} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

$$v_0^{(j)}(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q-1. \quad (4.5)$$

Тут $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$, якщо $\mathbf{l}_{\mathbf{n}} > 0$ та $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} - 1$, якщо $\mathbf{l}_{\mathbf{n}} = 0$.

Рівняння (4.1), (4.2) описують коливання точкових мас. Рівняння (4.3) є умовою неперервності у центральній вершині зіркового графу. Рівняння (4.4) описує баланс сил у центральній вершині.

Якщо корінь вільно рухається у напрямку, перпендикулярному до положення рівноваги графу, то маємо умову Неймана

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_0(t). \quad (4.6)$$

Також ми розглянемо задачу з умовою Діріхле в корені, котра описує закріплення кінця

$$\mathbf{v}_0(t) = 0. \quad (4.7)$$

Розділяючи змінні, тобто підставляючи $\mathbf{v}_k(t) = \mathbf{u}_k e^{i\lambda t}$, $v_k^{(j)}(t) = u_k^{(j)} e^{i\lambda t}$ у (4.1)–(4.5), де λ – це спектральний параметр, отримуємо наступні різницеві рівняння для амплітуд \mathbf{u}_k та $u_k^{(j)}$:

$$\frac{\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{l}_k} + \frac{\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}}{\mathbf{l}_{k-1}} - \mathbf{m}_k \lambda^2 \mathbf{u}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \tilde{\mathbf{n}}), \quad (4.8)$$

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} \lambda^2 u_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, q-1), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_2+1}^{(2)} = \dots = u_{n_{q-1}+1}^{(q-1)}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{n}}+1} - \mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{n}}}}{\mathbf{l}_{\tilde{\mathbf{n}}}} + \sum_{j=1}^{q-1} \frac{u_{n_j+1}^{(j)} - u_{n_j}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathbf{l}_{\mathbf{n}} > 0, \\ -\mathbf{m}_{\mathbf{n}} \lambda^2 \mathbf{u}_{\mathbf{n}}, & \text{якщо } \mathbf{l}_{\mathbf{n}} = 0. \end{cases}, \quad (4.11)$$

$$u_0^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q-1. \quad (4.12)$$

Умова Неймана дає

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0. \quad (4.13)$$

Задачу (4.8)–(4.13) ми назвемо задачею Неймана (N2) та позначимо її спектр через $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$. Також ми розглянемо умову Діріхле в корені:

$$\mathbf{u}_0 = 0 \quad (4.14)$$

Задачу (4.8)–(4.12), (4.14) ми назвемо задачею Діріхле(D2) та позначимо її спектр через $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$.

Паралельно розглянемо наступні допоміжні спектральні задачі на зірковому графі T' , отриманому з початкового зіркового графу T видаленням основного ребра \mathbf{e} разом з масою $\mathbf{m}_{\mathbf{n}}$, якщо вона розташована в центральній вершині. Задачу

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} \lambda^2 u_k^{(j)} = 0 \quad (4.15)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, q - 1),$$

$$u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_2+1}^{(2)} = \dots = u_{n_{q-1}+1}^{(q-1)}, \quad (4.16)$$

$$\sum_{j=1}^{q-1} \frac{u_{n_j+1}^{(j)} - u_{n_j}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}} = 0, \quad (4.17)$$

$$u_0^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q - 1 \quad (4.18)$$

ми назвемо задачею Неймана (N1) та позначимо її спектр через $\{\xi_k\}_{k=-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$. Задачу

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} \lambda^2 u_k^{(j)} = 0 \quad (4.19)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, q - 1),$$

$$u_{n_j+1}^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q - 1. \quad (4.20)$$

$$u_0^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q - 1. \quad (4.21)$$

ми назвемо задачею Діріхле (D1) та позначимо її спектр через $\{\nu_k\}_{k=-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$.

Зрозуміло, що $\{\nu_k\}_{k=-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}} = \bigcup_{j=1}^{q-1} \{\nu_k^{(j)}\}_{-n_1, k \neq 0}^{n_j}$, де $\{\nu_k^{(j)}\}_{-n_j, k \neq 0}^{n_j}$ – це спектр задачі Діріхле-Діріхле на ребрі e_j :

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} \lambda^2 u_k^{(j)} = 0 \quad (4.22)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_j),$$

$$u_{n_j+1}^{(j)} = u_0^{(j)} = 0. \quad (4.23)$$

В цьому розділі ми розглянемо зв'язок між задачею Неймана (N2), задачею Діріхле (D2) та задачами (N1), (D1). Для струн, позначених $j = 1, 2, \dots, q - 1$ та для головної струни ми застосуємо підхід, який використовували у розділі 2.2.

Цим шляхом ми послідовно отримуємо розв'язки \mathbf{u}_k ($k = 1, 2, \dots, \mathbf{n} + 1$) рівняння (4.8) та для $j = 1, 2, \dots, q - 1$ розв'язки $u_k^{(j)}$ ($k = 1, 2, \dots, n_j + 1$) рівняння (4.9) у наступній формі

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} \mathbf{R}_{2k-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) \mathbf{u}_1 & \text{для умови Діріхле (4.14),} \\ \mathbf{R}_{2k-2}(\infty, \lambda^2) \mathbf{u}_1 & \text{для умови Неймана (4.13),} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$u_k^{(j)} = R_{2k-2}^{(j)}(\lambda^2) u_1^{(j)} \quad (k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, q - 1), \quad (4.25)$$

де $\mathbf{R}_{2k-2}(\cdot, \lambda^2)$ та $R_{2k-2}^{(j)}(\lambda^2)$ – многочлени степеня $2k - 2$, котрі можна отримати, розв'язуючи (4.8) та (4.9), відповідно. Оберемо

$$\mathbf{R}_{2k-1}(\cdot, \lambda^2) := \frac{\mathbf{R}_{2k}(\cdot, \lambda^2) - \mathbf{R}_{2k-2}(\cdot, \lambda^2)}{\mathbf{l}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, \mathbf{n}), \quad (4.26)$$

$$R_{2k-1}^{(j)}(\lambda^2) := \frac{R_{2k}^{(j)}(\lambda^2) - R_{2k-2}^{(j)}(\lambda^2)}{l_k^{(j)}} \quad (k = 1, 2, \dots, n_j). \quad (4.27)$$

Тоді, завдяки (4.15) та початковій умові (4.18), многочлени $R_0^{(j)}(\lambda^2)$, $R_1^{(j)}(\lambda^2)$, \dots , $R_{2n_j}^{(j)}(\lambda^2)$ ($j = 1, 2, \dots, q - 1$) задовольняють рівняння

$$R_{2k-1}(\lambda^2) = -\lambda^2 m_k R_{2k-2}(\lambda^2) + R_{2k-3}(\lambda^2), \quad (4.28)$$

Многочлени, які відповідають головній струні, задовольняють рівняння

$$\mathbf{R}_{2k-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) = -\lambda^2 \mathbf{m}_k \mathbf{R}_{2k-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) + \mathbf{R}_{2k-3}(\mathbf{l}_0, \lambda^2), \quad (4.29)$$

Завдяки (4.12), (4.13) та (4.14), ми отримуємо

$$R_0(l_0, \lambda^2) = 1, \quad R_{-1}(l_0, \lambda^2) = \frac{1}{l_0}. \quad (4.30)$$

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{l}_0, \lambda^2) = 1, \quad \mathbf{R}_{-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{l}_0}, & \text{якщо } \mathbf{l}_0 \in (0, \infty), \\ 0, & \text{якщо } \mathbf{l}_0 = \infty. \end{cases} \quad (4.31)$$

Підставляючи (4.24), (4.25) в умови (4.10) та (4.11) ми приходимо до наступної системи лінійних рівнянь для $\mathbf{u}_1, u_1^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, q-1$):

$$\mathbf{R}_{2\tilde{n}}(\infty, \lambda^2)\mathbf{u}_1 = R_{2n_1}^{(1)}(\lambda^2)u_1^{(1)} = R_{2n_2}^{(2)}(\lambda^2)u_1^{(2)} = \dots = R_{2n_{q-1}}^{(q-1)}(\lambda^2)u_1^{(q-1)}, \quad (4.32)$$

$$(\mathbf{R}_{2\tilde{n}-1}(\infty, \lambda^2) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2n-2}(\infty, \lambda^2))\mathbf{u}_1 + \sum_{j=1}^{q-1} R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2)u_1^{(j)} = 0, \quad (4.33)$$

де

$$M = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathbf{l}_n > 0, \\ \mathbf{m}_n, & \text{якщо } \mathbf{l}_n = 0. \end{cases}$$

Тоді, спектр задачі (4.8)–(4.13) співпадає з множиною коренів многочлена

$$\begin{aligned} \phi(\infty, \lambda^2) &= \mathbf{R}_{2\tilde{n}}(\infty, \lambda^2) \sum_{j=1}^{q-1} \left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2) \prod_{k=1, k \neq j}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2) \right] \\ &+ (\mathbf{R}_{2\tilde{n}-1}(\infty, \lambda^2) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2n-2}(\infty, \lambda^2)) \prod_{k=1}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

та спектр задачі (4.8)–(4.12), (4.14) співпадає з множиною коренів многочлена

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{l}_0, \lambda^2) &= \mathbf{R}_{2\tilde{n}}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) \sum_{j=1}^{q-1} \left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2) \prod_{k=1, k \neq j}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2) \right] \\ &+ (\mathbf{R}_{2\tilde{n}-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2n-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2)) \prod_{k=1}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Зауваження 4.1. 1.

$$\phi(\mathbf{l}_0, z) = \quad (4.36)$$

$$\mathbf{R}_{2\tilde{n}}(\mathbf{l}_0, z)\phi_{N,q-1}(z) + (\mathbf{R}_{2\tilde{n}-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2n-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2))\phi_{D,q-1}(z),$$

$$\phi(\infty, z) = \quad (4.37)$$

$$\mathbf{R}_{2\tilde{n}}(\infty, z)\phi_{N,q-1}(z) + (\mathbf{R}_{2\tilde{n}-1}(\infty, z) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2n-2}(\infty, z))\phi_{D,q-1}(z),$$

де $\phi_{D,q-1}(z)$ – характеристичний многочлен задачі (4.19)–(4.21) та $\phi_{N,q-1}(z)$ – характеристичний многочлен задачі (4.15)–(4.18).

2. Якщо $\phi(\mathbf{l}_0, z) = \phi(\infty, z) = 0$ для деякого z , тоді

$$\phi_{N,q-1}(z) = \phi_{D,q-1}(z) = 0.$$

Доведення. 1. Рівняння (4.36), (4.37) такі самі, як і (4.34) та (4.35).

2. Завдяки тотожності Лагранжа (див. [89], Лема 3.5)

$$\mathbf{R}_{2n}(\mathbf{l}_0, z)\mathbf{R}_{2n-1}(\infty, z) - \mathbf{R}_{2n-1}(\mathbf{l}_0, z)\mathbf{R}_{2n}(\infty, z) = -\frac{1}{\mathbf{l}_0}$$

визначник системи рівнянь (4.36), (4.37) має вигляд

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_{2\tilde{n}}(\mathbf{l}_0, z)(\mathbf{R}_{2\tilde{n}-1}(\infty, z) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2n-2}(\infty, z)) - \\ & - \mathbf{R}_{2\tilde{n}}(\infty, z)(\mathbf{R}_{2\tilde{n}-1}(\mathbf{l}_0, \lambda^2) - M\lambda^2\mathbf{R}_{2n-2}(\mathbf{l}_0, \lambda^2)) = -\frac{1}{\mathbf{l}_0}. \end{aligned}$$

Він не дорівнює 0 (в обох випадках $\mathbf{l}_0 = 0$ та $\mathbf{l}_0 > 0$).

Ми приходимо до рівнянь $\phi_{N,q-1}(z) = \phi_{D,q-1}(z) = 0$.

□

Теорема 4.1. (Теорема 3.7 у [89]) Після скорочення спільних множників (якщо такі є) у чисельнику та знаменнику

$$\frac{\phi(\mathbf{l}_0, z)}{\phi(\infty, z)}$$

стає S_0 -функцією.

Теорема 4.2. (див. [89], Теорема 3.12) Власні значення $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$, $\mu_{-k} = -\mu_k$, задачі Неймана (N2) та власні значення $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$ задачі Діріхле (D2) мають наступні властивості:

1) $0 < \mu_1 < \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \lambda_n$;

2) кратності μ_k та λ_k не перевищують $q-1$; тоді як сума кратностей μ_k та λ_k (або λ_{k+1}) не перевищує $2q-3$;

3) якщо $\mu_k = \lambda_k$ (або $= \lambda_{k+1}$), тоді μ_k є коренем $\phi_{q-1}(z) := \frac{\phi_{D,q-1}(z)}{\phi_{N,q-1}(z)}$.

Слід зауважити, що максимальна кратність власних значень для довільних графів зі стільтьєсівських струн залежить лише від форми графу (див. [41]).

Для того, щоб отримати умови, необхідні для того, щоб послідовності чисел були спектрами задач Неймана та Діріхле, нам потрібне поняття мажоризації, яке походить від Мюрхеда [83] для випадку цілих чисел і було узагальнено для невід'ємних чисел Харді, Літлвуд та Пойа (див. [77]).

Означення 4.1. Нехай дано два вектори $x = (x_i)_{i=1}^s$ та $y = (y_i)_{i=1}^t$ з невід'ємними координатами, які впорядковані за зменшенням,

$x_s \geq x_{s-1} \geq \dots \geq x_1 \geq 0$, $y_t \geq y_{t-1} \geq \dots \geq y_1 \geq 0$. Якщо $s = t$, то кажуть, що x мажорує y $x \succ y$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$x \succ y \iff \sum_{i=1}^t x_i = \sum_{i=1}^t y_i, \quad \sum_{i=1}^{\tau} x_i \geq \sum_{i=1}^{\tau} y_i \quad (\tau = 1, 2, \dots, t-1). \quad (4.38)$$

Якщо $s \neq t$, ми доповнюємо коротший вектор нулями і позначаємо $\tilde{x} := (x_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ та $\tilde{y} := (y_i)_{i=1}^{\max\{s,t\}}$ з $x_i = 0$ для $i = s+1, \dots, \max\{s,t\}$, $y_i = 0$ для $i = t+1, \dots, \max\{s,t\}$. Тоді кажуть, що x мажорує y , $x \succ y$, якщо \tilde{x} мажорує \tilde{y} , $\tilde{x} \succ \tilde{y}$.

Зауваження 4.2. Якщо вектор $x = (x_i)_{i=1}^s$ мажорує вектор $y = (y_i)_{i=1}^t$, тоді кількість ненульових координат в x менша або дорівнює кількості ненульових координат в y ,

$$x \succ y \rightarrow \#\{i \in \{1, \dots, s\} : x_i > 0\} \leq \#\{i \in \{1, \dots, t\} : y_i > 0\}.$$

Означення 4.2. Для вектора $x = (x_i)_{i=1}^s \in R^s$ ми позначимо через $x^\downarrow = (x_i^\downarrow)_{i=1}^s \in R^s$ вектор з такими ж координатами, але впорядкованими в незростаючому порядку, тобто оберемо таку перестановку π з індексів $\{1, 2, \dots, s\}$, що

$$x_i^\downarrow = x_{\pi(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad x_1^\downarrow \geq x_2^\downarrow \geq \dots \geq x_s^\downarrow.$$

Означення 4.3. Нехай дано два вектори $x = (x_i)_{i=1}^s$ та $y = (y_i)_{i=1}^s$ з невід'ємними елементами, які впорядковані в незростаючому порядку, $x_s \geq x_{s-1} \geq \dots \geq x_1 \geq 0$, $y_t \geq y_{t-1} \geq \dots \geq y_1 \geq 0$. Тоді кажуть, що x слабо мажоруює y , якщо

$$x \succ^w y \iff \sum_{i=1}^{\tau} x_i \geq \sum_{i=1}^{\tau} y_i \quad (\tau = 1, 2, \dots, t). \quad (4.39)$$

Позначимо через $\{p_1^\downarrow, p_2^\downarrow, \dots, p_r^\downarrow\}$ впорядкований вектор кратностей додатних власних значень задачі (4.8)–(4.13).

Позначимо $N_m = \#j : n_j \geq m, j \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\}$ ($m = 1, 2, \dots, n_1$).

Далі ми будемо використовувати теорему, котра є Теоремою 2.10 у [91], записаною у наших термінах для зіркового графу T' .

Теорема 4.3. Нехай $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ – послідовність усіх власних значень задачі Неймана (N1), $\xi_k > 0$, $\xi_{-k} = -\xi_k$ ($k > 0$), порашована з урахуванням кратностей. Позначимо через r_N кількість різних додатних власних значень задачі Неймана ξ_{k_s} , а через $(p_s(N))_{s=1}^{r_N}$ вектор їх кратностей та через $p^\downarrow(N) = (p_s^\downarrow(N))_{s=1}^{r_N}$ відповідний впорядкований у порядку зменшення вектор кратностей. Тоді

- 1) $0 < \xi_1^2 < \xi_2^2 \leq \xi_3^2 \leq \dots \leq \xi_{n-\mathbf{n}-1}^2 \leq \xi_{n-\mathbf{n}}^2$;
- 2) якщо $p_i(N) > 1$, то $p_{i-1}(N) = p_{i+1}(N) = 1$ ($i = 2, \dots, r_N - 1$) та якщо $p_{r_N}(N) > 1$, то $p_{r_N-1}(N) = 1$;
- 3) $\sum_{i=1}^{r_N} p_i(N) = n - \mathbf{n}$;
- 4) $r_N \geq n_1 + n_2$;
- 5) $\{N_1 - 1, N_2 - 1, \dots, N_{n_1} - 1\} \succ \{p_1^\downarrow(N), p_2^\downarrow(N), \dots, p_{r_N-n_1}^\downarrow(N)\}$.

Зауважимо, що 4) є неявним наслідком властивості мажоризації 5). Узагальнення нерівності 4) до випадку довільного дерева отримано в [87].

Означення 4.4. Нехай $\{\alpha_k\}_{k=1}^\tau$ та $\{\sigma_k\}_{k=1}^\tau$ – послідовності, які строго чергуються, тобто

$$0 < \alpha_1 < \sigma_1 < \dots < \alpha_\tau < \sigma_\tau.$$

Нехай $\{\alpha_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\tau}}$ є якоюсь підпослідовністю $\{\alpha_k\}_{k=1}^\tau$ та $\{\sigma_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\tau}}$ є якоюсь підпослідовністю $\{\sigma_k\}_{k=1}^\tau$, де $0 \leq \hat{\tau} \leq \tau$ та $0 \leq \check{\tau} \leq \tau$. Ми назвемо $\{\alpha_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\tau}}$, $\{\sigma_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\tau}}$ неповною парою чергування довжини τ .

Зауваження 4.3. Позначимо через $\{\beta_k\}_{-p_1, k \neq 0}^{p_1} = \{\mu_k\}_{-n, k \neq 0}^n \cap \{\lambda_k\}_{-n, k \neq 0}^n$ та занумеруємо їх таким чином, що $\beta_{-k} = -\beta_k$ та $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{p_1}$ та через $\{\beta_{k_s}\}_{-r, s \neq 0}^r$ ми позначимо послідовність елементів $\{\beta_k\}_{-p_1, k \neq 0}^{p_1}$, що не співпадають один з одним, та занумеруємо їх таким чином, що $0 < \beta_{k_1} < \beta_{k_2} < \dots < \beta_{k_r}$. Тоді послідовності $\{\mu_k\}_{-n, k \neq 0}^n$ та $\{\lambda_k\}_{-n, k \neq 0}^n$ можуть бути представлені наступним чином:

$$\{\mu_k\}_{-n, k \neq 0}^n = \{\gamma_k\}_{-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{-p_1, k \neq 0}^{p_1} \quad \text{та} \quad \{\lambda_k\}_{-n, k \neq 0}^n = \{\delta_k\}_{-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{-p_1, k \neq 0}^{p_1}, \quad \text{де}$$

$$0 < \gamma_1 < \delta_1 < \dots < \gamma_{n-p_1} < \delta_{n-p_1}.$$

Позначимо через $\{\tilde{p}(\beta_{k_1}), \dots, \tilde{p}(\beta_{k_r})\}$ вектор кратностей елементів $\{\beta_k\}_{-p_1, k \neq 0}^{p_1}$. Нехай $\{\tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_1}), \dots, \tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_r})\}$ – відповідний впорядкований вектор.

За означенням, β_{k_s} є коренем обох многочленів $\phi(\infty, \lambda^2)$ та $\phi(\mathbf{1}_0, \lambda^2)$ кратності, яка дорівнює кратності β_{k_s} як кореня $\phi_{N, q-1}(\lambda^2)$. Тоді, завдяки Теоремі 4.3, застосованої до зіркового графу T' , отримуємо

Теорема 4.4. 1) Кількість r різних елементів $\{\beta_{k_s}\}_{s=1}^r$ у послідовності $\{\beta_k\}_{k=1}^{p_1}$ задовольняє нерівність $r \leq \lfloor \frac{n-n}{2} \rfloor$, де $\lfloor \cdot \rfloor$ означає цілу частину;

2) $p(\beta_{k_s}) \leq q - 2$ для усіх k_s .

Доведення. Твердження 1) нашої теореми випливає з твердження 2) Теореми 4.3.

Твердження 2) нашої теореми випливає з твердження 5) Теореми 4.3, тому що у нашому випадку $N_1 = q - 1$. \square

Зауваження 4.4. Позначимо через

$$\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{-\hat{\mathbf{n}}, s \neq 0}^{\hat{\mathbf{n}}} = \{\beta_{k_s}\}_{-r, k \neq 0}^r \cap \{\gamma_k\}_{-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1} \text{ та через}$$

$$\{\beta_{\check{k}_s}\}_{-\check{\mathbf{n}}, s \neq 0}^{\check{\mathbf{n}}} = \{\beta_{k_s}\}_{-r, k \neq 0}^r \cap \{\delta_k\}_{-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1}.$$

Приклад. Нехай $q = 4$, $\mathbf{n} = n_1 = n_2 = n_3 = 4$. Це можливо, бо $0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 = \lambda_2 = \mu_3 = \lambda_3 < \mu_4 < \lambda_4 < \mu_5 = \lambda_5 = \mu_6 = \lambda_6 = \mu_7 < \lambda_7 < \mu_8 < \lambda_8 = \mu_9 = \lambda_9 = \mu_{10} = \lambda_{10} < \mu_{11} < \lambda_{11} < \mu_{12} < \lambda_{12} = \mu_{13} = \lambda_{13} = \mu_{14} = \lambda_{14} < \mu_{15} = \lambda_{15} < \mu_{16} < \lambda_{16}$.

В цьому випадку $p_1 = 9, r = 5$ та

$$\beta_1 = \beta_2 = \mu_2, \quad \beta_3 = \beta_4 = \mu_5, \quad \beta_5 = \beta_6 = \mu_9, \quad \beta_6 = \beta_7 = \mu_{13}, \quad \beta_8 = \mu_{15},$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 5, \quad k_4 = 6, \quad k_5 = 8,$$

$$\hat{k}_1 = k_2 = 3, \quad \check{k}_1 = k_3 = 5, \quad \check{k}_2 = k_4 = 6$$

$$\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{-1, s \neq 0}^1 = \{\pm\beta_{k_2}\} = \{\pm\beta_3\}, \quad \{\beta_{\check{k}_s}\}_{-2, k \neq 0}^2 = \{\pm\beta_{k_3}, \pm\beta_{k_4}\} = \{\pm\beta_5, \pm\beta_6\}.$$

Теорема 4.5. Послідовності $\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\mathbf{n}}}$ та $\{\beta_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\mathbf{n}}}$ формують неповну пару чергування довжини $\leq \mathbf{n}$.

Доведення. За означенням β_{k_s} є коренем обох $\phi(\infty, \lambda^2)$ та $\phi(\mathbf{1}_0, \lambda^2)$ кратності, яка щонайменше дорівнює його кратності, як кореня $\phi_{N, q-1}(\lambda^2)$.

Кратність $\beta_{\hat{k}_s}$ як кореня $\phi(\infty, \lambda^2)$ перевищує (на 1) кратність $\beta_{\check{k}_s}$ як кореня $\phi_{N, q-1}(\lambda^2)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\infty, \beta_{\check{k}_s}^2) = 0$.

Отже, $0 \leq \hat{\mathbf{n}} \leq \mathbf{n}$.

Кратність $\beta_{\check{k}_s}$ як кореня $\phi(\mathbf{1}_0, \lambda^2)$ перевищує (на 1) кратність β_{k_s} як кореня $\phi_{N, q-1}(\lambda^2)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\mathbf{1}_0, \beta_{\check{k}_s}^2) = 0$, отже $0 \leq \check{\mathbf{n}} \leq \mathbf{n}$. З того, що корені $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\mathbf{1}_0, \lambda^2)$ строго (див. [6]) чергуються з коренями $\mathbf{R}_{2\mathbf{n}}(\infty, \lambda^2)$, ми отримуємо, що $\{\beta_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\mathbf{n}}}$ та $\{\beta_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\mathbf{n}}}$ – неповна пара чергування довжини $\leq \mathbf{n}$. \square

Зауважимо, що

$$N_i(T') := \#\{j \in \{1, 2, \dots, q-1\} : n_j \geq i\} = \max\{j \in \{1, 2, \dots, q-1\} : n_j \geq i\}.$$

Теорема 4.6. (Теорема 2.7 у [91]) Нехай $\{\xi_k\}_{k=-n-\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ – послідовність власних значень задачі (4.15)–(4.18), $\xi_k > 0$, $\xi_{-k} = -\xi_k$ ($k > 0$) та $\{\nu_k\}_{k=-n-\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ – множина власних значень задачі (4.19)–(4.21), $\nu_k > 0$, $\nu_{-k} = -\nu_k$ ($k > 0$) обидва рахуються з кратністю. Позначимо через $\{\nu_{k_s}\}_{-r_D, s \neq 0}^{r_D}$ послідовність різних власних значень задачі (4.19)–(4.21), r_D – число різних додатних власних значень, через $\{\tilde{p}^\downarrow(\nu_{k_1}), \dots, \tilde{p}^\downarrow(\nu_{k_{r_D}})\}$ – вектор їх кратностей у незростаючому порядку. Тоді

- 1) $0 < \xi_1^2 < \nu_1^2 \leq \dots \leq \xi_{n-\mathbf{n}}^2 \leq \nu_{n-\mathbf{n}}^2$;
- 2) $\nu_{k-1} = \xi_k$ тоді й тільки тоді, коли $\xi_k = \nu_k$;
- 3) $(N_1(T'), N_2(T'), \dots, N_{n_1}(T')) \succ \{\tilde{p}^\downarrow(\nu_{k_1}), \dots, \tilde{p}^\downarrow(\nu_{k_{r_D}})\}$.

Теорема 4.7. Нехай $\{\tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_1}), \dots, \tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_r})\}$ – впорядкований вектор кратностей елементів $\{\beta_{k_s}\}_{s=-r, s \neq 0}^r$. Тоді $\{M_1, \dots, M_m\} \succ^w \{\tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_1}), \dots, \tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_r})\}$, де $M_j = N_j(T') - 1$, якщо $N_j(T') \geq 2$ та $m = \#\{j : N_j(T') \geq 2\}$.

Доведення. Нехай $\beta_{k_s} \in \{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n \cap \{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та $\beta_{k_s} = \xi_k = \nu_k$, тоді за Теоремою 3.3 маємо $p(\beta_{k_s}) = p(\xi_k) = p(\nu_k) - 1$. З твердження 3) Теорема 4.6 впливає

$$(N_1(T') - 1, N_2(T') - 1, \dots, N_{n_1}(T') - 1) \succ^w \{\tilde{p}^\downarrow(\nu_{k_1}) - 1, \dots, \tilde{p}^\downarrow(\nu_{k_{r_D}}) - 1\}.$$

З того, що $p(\beta_{k_s}) > 0$ тоді й тільки тоді, коли $p(\nu_k) \geq 2$, ми приходимо до $\{M_1, \dots, M_m\} \succ^w \{\tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_1}), \dots, \tilde{p}^\downarrow(\beta_{k_r})\}$ \square

4.2. Обернена задача

Зараз нашою метою є показати, що твердження 1), 3) Теорема 4.2, твердження 1) Теорема 4.4, та слабе мажорювання у Теоремі 4.7 є не тільки необхідними, але й також достатніми умовами для двох послідовностей, щоб вони були спектрами задач (4.8)–(4.13) та (4.8)–(4.12), (4.14).

Лема 3.13 з [89] у наших термінах буде виглядати наступним чином:

Лема 4.1. Нехай $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $n - p_1 \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1 > 0$. Припустимо, що $\{\mu_k\}_{-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1}$, $\{\lambda_k\}_{-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1} \subset \mathbb{R}$ такі, що

$$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{n-p_1} < \lambda_{n-p_1}, \quad (4.40)$$

та нехай

$$\begin{aligned} \Phi(z) &:= \gamma \frac{\prod_{k=1}^{n-p_1} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n-p_1} \left(1 - \frac{z}{\mu_k^2}\right)} = \\ &= a_0 + \frac{1}{-b_1 z + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_2 z + \cdots + \frac{1}{a_{n-p_1-1} + \frac{1}{-b_{n-p_1} z + \frac{1}{a_{n-p_1}}}}}}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Тоді $a_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n - p_1$), $b_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n - p_1$) та функція Φ може бути представлена у наступному вигляді:

$$\Phi(z) = a_0 + \frac{1}{-b_1 z + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_2 z + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{-b_n z + \frac{1}{a_n - a_n^1 + \widehat{f}_n(z)}}}}}},$$

де

$$\widehat{f}_{\mathbf{n}}(z) := a_{\mathbf{n}}^1 + \frac{1}{-b_{\mathbf{n}+1}z + \frac{1}{a_{\mathbf{n}+1} + \frac{1}{-b_{\mathbf{n}+2}z + \cdots + \frac{1}{a_{\mathbf{n}-p_1-1} + \frac{1}{-b_{\mathbf{n}-p_1}z + \frac{1}{a_{\mathbf{n}-p_1}}}}}}}, \quad (4.42)$$

\mathbf{n} обрано так, що

$$\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} a_k < \mathbf{1}, \quad \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} a_k \geq \mathbf{1}, \quad (4.43)$$

$$\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} a_k + a_{\mathbf{n}} - a_{\mathbf{n}}^1 + \widehat{f}_{\mathbf{n}}(0) = \gamma, \quad \widehat{f}_{\mathbf{n}}(0) > 0$$

та $\widehat{f}_{\mathbf{n}}(z)$ є S_0 -функцією.

Теорема 4.8. (Теорема 3.14 у [89]) Нехай $q \in N$, $q \geq 2$, $\{\mathbf{1}\} \cup \{l_j\}_{j=1}^{q-1} \subset (0, \infty)$, $n \in N$ та припустимо, що $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$, $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n \subset R$ такі, що

0) $\mu_{-k} = -\mu_k, \quad \lambda_{-k} = -\lambda_k;$

1) $0 < \mu_1 < \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \lambda_n;$

2) кратності μ_k у $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та λ_k у $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ не мають перевищувати $q - 1$;

3) якщо $\mu_k = \lambda_k$ (або $= \lambda_{k+1}$), то $\widehat{f}_{\mathbf{n}}(\lambda_k^2) = 0$ з функцією $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$, визначеною як у Лемі 4.1.

Тоді існує зірковий граф з q стільтьєсівських струн, тобто числа $\{\mathbf{n}\}, \{n_j\}_{j=1}^{q-1} \subset N_0 = \{0\} \cup N$, маси $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}, \{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \subset (0, \infty)$ та довжини інтервалів $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{l}_{\mathbf{n}} \geq 0$, $\mathbf{l}_k > 0$ при $k = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1$),

$\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j} \subset (0, \infty)$ ($j = 1, 2, \dots, q-1$) між ними з $\sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{l}_k = \mathbf{1}$, $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$
та

$$n = \mathbf{n} + \sum_{j=1}^{q-1} n_j,$$

такі, що задача Неймана (4.15)–(4.18) має власні значення $\{\mu_k\}_{-n, k \neq 0}^n$, а задача Діріхле (4.19)–(4.21) має власні значення $\{\lambda_k\}_{-n, k \neq 0}^n$.

Наступна теорема – це Теорема 4.3, пристосована до дерева T' .

Теорема 4.9. Нехай $q \in N$, $q \geq 3$, $(l_j)_{j=1}^{q-1} \subset (0, \infty)$, $n \in N$. Припустимо, що задані послідовності $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$, $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ такі, що $\xi_k, \nu_k > 0$, $\xi_{-k} = -\xi_k$, $\nu_{-k} = -\nu_k$ при $k > 0$ та нехай задані $(n_j)_{j=1}^{q-1} \subset N$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{q-1}$ з $\sum_{j=1}^{q-1} n_j = n - \mathbf{n}$. Позначимо через $N_i := \#\{j \in \{1, 2, \dots, q-1\} : n_j \geq i\}$ при $i = 1, 2, \dots, n_1$, через r_D – кількість різних додатних елементів у $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$, через $p(\nu_k)$ – їх кратності ($k = 1, 2, \dots, r_D$), та нехай $(p^\downarrow(\nu_{k_1}), p^\downarrow(\nu_{k_2}), \dots, p^\downarrow(\nu_{k_{r_D}}))$ – відповідний вектор кратностей у незростаючому порядку. Тоді умови

- 1) $0 < \xi_1^2 < \nu_1^2 \leq \dots \leq \xi_{n-\mathbf{n}}^2 \leq \nu_{n-\mathbf{n}}^2$,
- 2) $\nu_{k-1} = \xi_k$ тоді й тільки тоді, якщо $\xi_k = \nu_k$,
- 3) $(N_1(T'), N_2(T'), \dots, N_{n_1}(T')) \succ (p^\downarrow(\nu_{k_1}), p^\downarrow(\nu_{k_2}), \dots, p^\downarrow(\nu_{k_{r_D}}))$,

є необхідними та достатніми для того, щоб існував набір (додатних) мас $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ та довжин $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ ($j = 1, 2, \dots, q-1$) з $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$ так, що спектральні задачі (4.15)–(4.18) та (4.19)–(4.21) на зірковому графі T' мають множини $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ та $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ як власні значення задач Неймана та Діріхле.

Теорема 4.10. Нехай $q \in N$, $q \geq 3$, $\{l_j\}_{j=1}^{q-1} \subset (0, \infty)$, $\mathbf{l} \subset (0, \infty)$, $n \in N$, $n_j \in N$ ($j = 1, 2, \dots, q-1$), $\mathbf{n} \in N$, $\mathbf{n} + \sum_{j=1}^{q-1} n_j = n$, $p_1 \in N$, $p_1 \leq n - \mathbf{n}$, $r \in N$ ($p_1 \geq r \geq n_1 + n_2$ ($n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{q-1}$)) та припустимо, що $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n = \{\gamma_k\}_{k=-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{k=-p_1, k \neq 0}^{p_1}$, $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n =$

$\{\delta_k\}_{k=-n+p_1, k \neq 0}^{n-p_1} \cup \{\beta_k\}_{k=-p_1, k \neq 0}^{p_1} \subset \mathbb{R}$, $\{\beta_{k_s}\}_{s=1}^r$ є елементами $\{\beta_k\}_{k=1}^{p_1}$, які не співпадають один з іншим, такими, що:

0) $\mu_{-k} = -\mu_k$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k$;

1) $0 < \gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{n-p_1} < \delta_{n-p_1}$;

2) число r різних елементів β_{k_s} у $\{\beta_k\}_{k=1}^{p_1}$ задовольняє нерівність $r \leq \lfloor \frac{n-n}{2} \rfloor$;

3) при всіх β_k : $\widehat{f}_{\mathbf{n}}(\beta_k^2) = 0$ з $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$, визначеним як у (4.41), (4.42) з

$$\gamma = \mathbf{1} + \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{l_k} \right)^{-1} \text{ та деяким } a_{\mathbf{n}}^1 \text{ (} 0 < a_{\mathbf{n}}^1 \leq a_{\mathbf{n}} \text{)};$$

4) $\{M_1, \dots, M_m\} \succ^w \{\tilde{p}_1^\downarrow, \tilde{p}_2^\downarrow, \dots, \tilde{p}_r^\downarrow\}$, де $M_j = N_j(T') - 1$, якщо $N_j(T') \geq 2$ та $m = \#\{j : N_j(T') \geq 2\}$ та $\{\tilde{p}_1^\downarrow, \tilde{p}_2^\downarrow, \dots, \tilde{p}_r^\downarrow\}$ – це впорядкований вектор кратностей елементів $\{\beta_{k_s}\}_{s=1}^r$:

Тоді існує зірковий граф з q стільтьєсівських струн, тобто мас $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}$, $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \subset (0, \infty)$ та довжин інтервалів між ними $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$, ($\mathbf{l}_{\mathbf{n}} \geq 0$, $\mathbf{l}_k > 0$ при $k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1$) з $\sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{l}_k = \mathbf{1}$, $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j} \subset (0, \infty)$ ($j = 1, 2, \dots, q - 1$) з $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$, такий, що задача Неймана (4.15)–(4.20) має власні значення $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та задача Діріхле (4.15)–(4.19), (4.21) має власні значення $\{\lambda_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$.

Доведення. Так само як і у Лемі 4.1, побудуємо функцію

$$\Phi(z) := \gamma \frac{\prod_{k=1}^{n-p_1} \left(1 - \frac{z}{\gamma_k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n-p_1} \left(1 - \frac{z}{\delta_k^2}\right)} = \quad (4.44)$$

$$= a_0 + \frac{1}{-b_1z + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_2z + \cdots + \frac{1}{a_{\mathbf{n}-1} + \frac{1}{-b_{\mathbf{n}}z + \frac{1}{a_{\mathbf{n}} - a_{\mathbf{n}}^1 + \widehat{f}_{\mathbf{n}}(z)}}}}}}},$$

де

$$\widehat{f}_{\mathbf{n}}(z) := a_{\mathbf{n}}^1 + \frac{1}{-b_{\mathbf{n}+1}z + \frac{1}{a_{\mathbf{n}+1} + \frac{1}{-b_{\mathbf{n}+2}z + \cdots + \frac{1}{a_{\mathbf{n}-p_1-1} + \frac{1}{-b_{\mathbf{n}-p_1}z + \frac{1}{a_{\mathbf{n}-p_1}}}}}}}}. \quad (4.45)$$

Зірковий граф, який ми шукаємо, буде побудований наступним чином. Для головного ребра ми оберемо $\mathbf{m}_k := b_k$ ($k = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$) як маси, $\mathbf{l}_k := a_k$ ($k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1$) та $\mathbf{l}_{\mathbf{n}} := a_{\mathbf{n}} - a_{\mathbf{n}}^1$ як довжини інтервалів між ними на головному ребрі, в той час як функція $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ з (4.41), (4.42) буде використана для побудови підграфу з інших $q - 1$ ребер, використовуючи обернену Теорему 4.9.

З розвинення ланцюгового дроби (4.42) функції $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$, випливає, що функція $\widehat{f}_{\mathbf{n}} \in S_0$ -функцією; більш того, $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ є відношенням двох многочленів $g_{\mathbf{n}}(z)$ та $h_{\mathbf{n}}(z)$ степені $n - p_1 - \mathbf{n}$:

$$\widehat{f}_{\mathbf{n}}(z) = \frac{g_{\mathbf{n}}(z)}{h_{\mathbf{n}}(z)}.$$

За Лемою 4.1 корені та полюси функції $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$, тобто корені функцій $g_{\mathbf{n}}$ та $h_{\mathbf{n}}$ строго чергуються.

Оберемо

$$\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(z) := g_{\mathbf{n}}(z) \prod_{k=1}^{p_1} (z - \beta_k^2), \quad \widetilde{h}_{\mathbf{n}}(z) := h_{\mathbf{n}}(z) \prod_{k=1}^{p_1} (z - \beta_k^2).$$

Кількість коренів ν_k^2 функції $\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(z)$ та коренів ξ_k^2 функції $\widetilde{h}_{\mathbf{n}}(z)$, порахованих з урахуванням кратностей, є $n - \mathbf{n}$.

Зараз покажемо, що послідовності $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ та $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n}, k \neq 0}^{n-\mathbf{n}}$ задовольняють умови Теорема 4.9.

Умова 0) у Теоремі 4.9 задовольняється автоматично. Умови чергування в 1), за винятком другої строгої нерівності у Теоремі 4.9 виконуються, бо корені функцій $g_{\mathbf{n}}$, $h_{\mathbf{n}}$ усі додатні, чергуються строго та функції $\widetilde{g}_{\mathbf{n}}$, $\widetilde{h}_{\mathbf{n}}$ виникають із $g_{\mathbf{n}}$, $h_{\mathbf{n}}$ тільки шляхом додавання спільних коренів. Якщо $\xi_k = \nu_k$, тоді з умови 3) нашої теореми випливає, що $\nu_k = \beta_s$ та $p(\xi_k) = p(\beta_s) = p(\nu_k) - 1$, що задовольняє умову 2) Теорема 4.9.

Так як усі елементи послідовностей $\{\nu_k\}_{-n+\mathbf{n}, [\neq 0]}^{n-\mathbf{n}} \setminus \{\beta_k\}_{-p_1, k \neq 0}^{p_1}$ та $\{\xi_k\}_{-n+\mathbf{n}, [\neq 0]}^{n-\mathbf{n}} \setminus \{\beta_k\}_{-p_1, k \neq 0}^{p_1}$ є простими, припущення 4) нашої теореми впливає з умови 3) Теорема 4.9.

Спосіб відновлення $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ та довжин інтервалів $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ ($j = 1, 2, \dots, q - 1$) описаний у доведенні Теорема 3.3.).

Залишається довести, що отримані дані $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}$, $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$, $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ породжують задачу (4.8)–(4.13) зі спектром $\{\mu_k\}_{-n, k \neq 0}^n$ та задачу (4.8)–(4.12), (4.14) зі спектром $\{\lambda_k\}_{-n, k \neq 0}^n$.

Нам відомо, що відновлені згаданим методом послідовності $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ та $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ ($j = 1, 2, \dots, q - 1$) породжують задачу (4.15)–(4.18) з характеристичним многочленом

$$\sum_{j=1}^{q-1} \left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2) \prod_{k=1, k \neq j}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2) \right]$$

та задачу (4.19)–(4.21) з характеристичним многочленом

$$\prod_{k=1}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2),$$

де

$$\frac{\prod_{k=1}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2)}{\sum_{j=1}^{q-1} \left[R_{2n_j-1}^{(j)}(\lambda^2) \prod_{k=1, k \neq j}^{q-1} R_{2n_k}^{(k)}(\lambda^2) \right]} = \widehat{f}_{\mathbf{n}}(z).$$

Нехай $\Phi(\mathbf{l}_0, z)$ – многочлен, побудований згідно з (4.28)–(4.31), (4.35) та $\Phi(\infty, z)$ – многочлен, побудований згідно з (4.28)–(4.31), (4.34), використовуючи наші дані $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\mathbf{n}}$, $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, $\{\mathbf{l}_k\}_{k=0}^{\mathbf{n}}$, $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$. Тоді

$$\Phi(z) = \mathbf{l}_0 \frac{\Phi(\mathbf{l}_0, z)}{\Phi(\infty, z)}, \quad (4.46)$$

та за Лемою 4.1

$$\Phi(z) = \mathbf{l}_0 + \frac{1}{-\mathbf{m}_1 z + \frac{1}{\mathbf{l}_1 + \frac{1}{-\mathbf{m}_2 z + \cdots + \frac{1}{\mathbf{l}_{\mathbf{n}-1} + \frac{1}{-\mathbf{m}_{\mathbf{n}} z + \frac{1}{\mathbf{l}_{\mathbf{n}} + \widehat{f}_{\mathbf{n}}(z)}}}}}}}. \quad (4.47)$$

Порівнюючи (4.47) з (4.44), робимо висновок, що усі γ_k є коренями $\Phi(\mathbf{l}_0, z)$ та усі δ_k є коренями $\Phi(\infty, z)$. Кожне β_k співпадає з деяким μ_s та λ_s (або λ_{s-1}) кратності $p(\beta_k) \leq \min\{\mu_s, \lambda_s\}$ або $p(\beta_k) \leq \min\{\mu_s, \lambda_{s-1}\}$. \square

Зауваження 4.5. З умови 3) випливає, що якщо $\{\lambda_{\check{k}_s}\}_{-\check{\mathbf{n}}, s \neq 0}^{\check{\mathbf{n}}}$ є підпослідовністю послідовності $\{\lambda_k\}_{-n, k \neq 0}^n$, така що кожне $\lambda_{\check{k}_s}$ співпадає з деяким β_k та $\{\mu_{\hat{k}_s}\}_{-\hat{\mathbf{n}}, s \neq 0}^{\hat{\mathbf{n}}}$ є підпослідовністю послідовності $\{\mu_k\}_{-n, k \neq 0}^n$, такою, що кожне $\mu_{\hat{k}_s}$ співпадає з деяким β_k , тоді $\{\mu_{\hat{k}_s}\}_{s=1}^{\hat{\mathbf{n}}}$ та $\{\lambda_{\check{k}_s}\}_{s=1}^{\check{\mathbf{n}}}$ є неповною послідовністю довжини $\leq \mathbf{n}$, яка чергується.

Зауваження 4.6. Теорема 4.10 відрізняється від Теорема 4.8 умовою 4), котра означає, що значення \mathbf{n} та n_j при $j = 1, 2, \dots, q - 1$ задані апріорі.

Зауваження 4.7. Через те, що твердження 1), 3) Теорема 4.2 еквівалентні умовам 0), 1), 3) Теорема 4.10, твердження 1) Теорема 4.4 є еквівалентним умові 2) Теорема 4.10, твердження Теорема 4.7 співпадає з умовою 4) Теорема 4.10, можемо бачити, що умови Теорема 4.10 є необхідними та достатніми.

Висновки до розділу 4

Обернена задача відновлення мас намистин та довжин інтервалів між ними на зірковому графі за спектрами задач з узагальненою умовою Неймана та узагальненою умовою Діріхле у центральній вершині була розв'язана у [89]. В цій же роботі була розв'язана обернена задача з коренем у висячій вершині, але в цій роботі не вважалися відомими кількості мас на ребрах. Обернена задача відновлення мас намистин та довжин інтервалів між ними на зірковому графі за спектрами задач з узагальненою умовою Неймана та узагальненою умовою Діріхле у центральній вершині, але з заданими кількостями мас на ребрах була розв'язана у [91]. В розділі 4 нашої роботи розв'язана обернена задача на зірковому графі зі стільтьєсівських струн за спектрами задач з умовою Діріхле та з умовою Неймана у висячій вершині з заданими кількостями мас на ребрах.

РОЗДІЛ 5

Обернена задача для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн

5.1. Постановка спектральних задач

Нехай T – це планарне метричне дерево з $q \geq 2$ ребрами, що лежать в одній площині. Через v_i ми позначимо вершини, через e_j – ребра, через l_j – їх довжини, а через $n_j \geq 0$ позначимо кількість намистин мас $m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \dots, m_{n_j}^{(j)}$, які поділяють струну на підінтервали $l_0^{(j)}, l_1^{(j)}, \dots, l_{n_j}^{(j)}$ ($l_k^{(j)} > 0$ при $j = 0, 1, n_j - 1, l_{n_j}^{(j)} \geq 0, m_k^{(j)} > 0, l_j = \sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)}$). Коренем ми обираємо довільну вершину. Висячі вершини не містять маси. Всі ребра ми спрямовуємо від кореня.

Корінь \mathbf{v} є початком підінтервалу довжини $l_0^{(j)}$ на кожному ребрі e_j , інцидентному з коренем. Кожна інша вершина v_i має одне вхідне ребро e_j , яке закінчується з підінтервалом довжини $l_{n_j}^{(j)}$, в той час, як кожне вихідне ребро e_r починається у v_i з інтервалом довжини $l_0^{(r)}$. Випадок $l_{n_j}^{(j)} = 0$ відповідає розташуванню $m_{n_j}^{(j)}$ у внутрішній вершині.

Степінь вершини v_i позначається через $d(v_i)$, степінь її входу – через $d^+(v_i)$, в той час як степінь виходу – через $d^-(v_i)$. Зрозуміло, що $d^+(v_i) = 1$ для кожних $v_i \neq \mathbf{v}$ та $d^+(\mathbf{v}) = 0$. У кожній висячій вершині v_i , котра не є коренем, маємо $d^-(v_i) = 0$.

Припустимо, що дерево натягнуто і висячі вершини, крім кореня, закріплені. Ми розглядаємо два випадки: у першому корінь фіксується (задача Діріхле), а у другому корінь вільно рухається у напрямку, перпендикулярному до положення рівноваги дерева (задача Неймана). Дерево може коливатися у напрямку, перпендикулярному до положення рівноваги дере-

ва. Поперечні зміщення мас $m_k^{(j)}$ позначимо через $w_k^{(j)}(t)$, зміщення кореня – через $\mathbf{w}(t)$, де t – це час.

Якщо ребро e_j є вхідним для внутрішньої вершини v_i , то зміщення вхідного кінця ребра позначається через $w_{n_j+1}^{(j)}(t)$, в той час як, якщо ребро e_r є вихідним для вершини v_i , то зміщення вихідного кінця ребра позначається через $w_0^{(r)}(t)$. Використовуючи таке зауваження, коливання дерева може бути описане системою рівнянь

$$\frac{w_k^{(j)}(t) - w_{k+1}^{(j)}(t)}{l_k^{(j)}} + \frac{w_k^{(j)}(t) - w_{k-1}^{(j)}(t)}{l_{k-1}^{(j)}} + m_k^{(j)} \frac{\partial^2 w_k^{(j)}}{\partial t^2}(t) = 0 \quad (5.1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, \tilde{n}_j; \quad j = 1, 2, \dots, q),$$

де $\tilde{n}_j = n_j - 1$, якщо $l_{n_j}^{(j)} = 0$ та $\tilde{n}_j = n_j$, якщо $l_{n_j}^{(j)} > 0$.

Для кожної внутрішньої вершини v_i (за винятком кореня) з вхідним ребром e_j та вихідними ребрами e_r ми накладемо умови неперервності

$$w_0^{(r)}(t) = w_{\tilde{n}_j+1}^{(j)}(t) \quad (5.2)$$

при всіх r , які відповідають вихідним ребрам. З балансу сил в такій вершині v_i випливає

$$\frac{w_{\tilde{n}_j+1}^{(j)}(t) - w_{\tilde{n}_j}^{(j)}(t)}{l_{\tilde{n}_j}^{(j)}} + \sum_r \frac{w_0^{(r)}(t) - w_1^{(r)}(t)}{l_0^{(r)}} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_{n_j}^{(j)} > 0, \\ m_{n_j}^{(j)} \frac{\partial^2 w_{n_j}^{(j)}(t)}{\partial t^2}, & \text{якщо } l_{n_j}^{(j)} = 0. \end{cases}, \quad (5.3)$$

де сума узята по всіх вихідних ребрах. Для ребра e_j , інцидентного з висячою вершиною (за винятком кореня), ми накладемо крайову умову Діріхле:

$$w_{n_j+1}^{(j)}(t) = 0. \quad (5.4)$$

В корені ми накладемо умову Діріхле

$$\mathbf{w}(t) = 0, \text{ тобто } w_0^{(j)}(t) = 0 \quad (5.5)$$

при всіх j , які відповідають ребрам, інцидентним з коренем. Задачу (5.1)-(5.5) назвемо крайовою задачею Діріхле на T .

Для того, щоб отримати крайову задачу Неймана, ми змінимо (5.5) на узагальнену умову Неймана

$$w_0^{(j)}(t) = w_0^{(l)}(t) \quad (5.6)$$

при всіх j та l , які відповідають ребрам, інцидентним з коренем та

$$\sum_{j=1}^{d(\mathbf{v})} \frac{w_0^{(j)}(t) - w_1^{(j)}(t)}{l_0^{(j)}} = 0. \quad (5.7)$$

Ми виключаємо з розгляду випадок, коли в корені є намистина.

Якщо корінь є висячою вершиною, тоді ми позначимо через e_1 ребро, інцидентне з коренем. В цьому випадку умова Діріхле (5.5) в корені є

$$\mathbf{w}(t) = 0, \text{ тобто } w_0^{(1)}(t) = 0 \quad (5.8)$$

та умови Неймана (5.6), (5.7) в цьому випадку можна звести до

$$\mathbf{w}(t) = w_0^{(1)}(t) = w_1^{(1)}(t). \quad (5.9)$$

Роблячи заміну $w_j^{(k)}(t) = e^{i\lambda t} u_j^{(k)}$, $w_i(t) = e^{i\lambda t} u_i$ та $\mathbf{w}(t) = e^{i\lambda t} \mathbf{u}$ у (5.1)–(5.9), ми отримуємо наступні спектральні задачі:

Задача Діріхле

Для кожного ребра:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} \lambda^2 u_k^{(j)} = 0 \quad (5.10)$$

$$(k = 1, 2, \dots, \tilde{n}_j, j = 1, 2, \dots, q).$$

Для кожної внутрішньої вершини (за винятком кореня) з вхідним ребром e_j та вихідними ребрами e_r , маємо

$$u_{\tilde{n}_j+1}^{(j)} = u_0^{(r)}, \quad (5.11)$$

та

$$\frac{u_{\tilde{n}_j+1}^{(j)} - u_{\tilde{n}_j}^{(j)}}{l_{\tilde{n}_j}^{(j)}} + \sum_r \frac{u_0^{(r)} - u_1^{(r)}}{l_0^{(r)}} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_{n_j}^{(j)} > 0, \\ -m_{n_j}^{(j)} \lambda^2 u_{n_j}^{(j)}, & \text{якщо } l_{n_j}^{(j)} = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Для ребра e_j , інцидентного з висячею вершиною (за винятком кореня), маємо крайову умову Діріхле:

$$u_{n_j+1}^{(j)} = 0. \quad (5.13)$$

В корені ми маємо умову Діріхле

$$\mathbf{u} = 0 \text{ або } u_0^{(j)} = 0 \quad (5.14)$$

при всіх j , які відповідають ребрам, інцидентним з коренем.

Якщо корінь є висячою вершиною та e_1 – це ребро, інцидентне з коренем, то замість (5.14) в корені ми маємо:

$$u_0^{(1)} = 0. \quad (5.15)$$

Задача Неймана

Задача Неймана на дереві T складається з рівнянь (5.10)–(5.13), з рівнянь

$$u_0^{(j)} = u_0^{(l)} \quad (5.16)$$

при всіх j та l , які відповідають ребрам, інцидентним з коренем, та з

$$\sum_{j=1}^{d(\mathbf{v})} \frac{u_0^{(j)} - u_1^{(j)}}{l_0^{(j)}} = 0. \quad (5.17)$$

Якщо корінь є висячою вершиною та e_1 – це ребро, інцидентне з коренем, то замість (5.16) та (5.17) в корені ми маємо:

$$u_0^{(1)} = u_1^{(1)}. \quad (5.18)$$

5.2. Необхідні результати

Далі нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 5.1. *Нехай ϕ_j – раціональна S_0 -функція з n_j коренями та n_j полюсами при $j = 1, 2, \dots, s$. Тоді*

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^s \frac{1}{\phi_j}}$$

є раціональною S_0 -функцією з \tilde{n} коренями та \tilde{n} полюсами, де $\tilde{n} \geq \max\{n_1, n_2, \dots, n_s\}$.

Доведення. Приводячи до спільного знаменника отримуємо, що

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^s \frac{1}{\phi_j}} = \frac{\prod_{j=1}^s \phi_j}{\sum_{j=1}^s \prod_{k=1, k \neq j}^s \phi_k}.$$

Нехай $\phi_j = \frac{Q_j}{P_j}$, де Q_j і P_j – це многочлени степеня n_j . Тоді

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^s \frac{1}{\phi_j}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^s \frac{P_j}{Q_j}} = \frac{\prod_{j=1}^s Q_j}{\sum_{j=1}^s P_j \prod_{k=1, k \neq j}^s Q_k}.$$

Бачимо, що навіть після скорочення можливих спільних множників у чисельнику і знаменнику отримуємо, що многочлени чисельника і знаменника мають степінь щонайменше \tilde{n} . \square

Лема 5.2. (див. [89], Лема 2.2) *Нехай*

$$\varphi = a_0 + \frac{1}{-b_1 z + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_2 z + \dots + \frac{1}{a_{r-1} + \frac{1}{-b_r z + \frac{1}{a_r + \phi}}}}}}, \quad (5.19)$$

де $a_j > 0$ при $j = 0, 1, \dots, r-1$, $a_r \geq 0$, $b_j > 0$ при $j = 1, 2, \dots, r$ та нехай ϕ – раціональна S_0 -функція з \hat{n} полюсами та \hat{n} коренями. Тоді φ – це раціональна S_0 -функція з $\hat{n} + r$ коренями та $\hat{n} + r$ полюсами.

Лема 5.3. *Раціональна функція*

$$f(z) = C \prod_{k=1}^n \frac{1 - \frac{z}{(\nu_k)^2}}{1 - \frac{z}{(\mu_k)^2}}, \quad (5.20)$$

є S_0 -функцією тоді й тільки тоді, коли $C > 0$ та

$$0 < (\mu_1)^2 < (\nu_1)^2 < \dots < (\mu_n)^2 < (\nu_n)^2.$$

Лема 5.4. *(див., наприклад [50], Глава II.2, с. 19/26). Раціональна функція*

$$f(z) = C \prod_{k=1}^n \frac{1 - \frac{z}{(\nu_k)^2}}{1 - \frac{z}{(\mu_k)^2}}, \quad (5.21)$$

є S_0 -функцією тоді й тільки тоді, коли $0 < (\nu_1)^2 < (\nu_2)^2 < \dots < (\nu_k)^2$ та

$$f(z)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - (\nu_k)^2} + B,$$

де $A_k > 0$ при $k = 1, 2, \dots, n$ та

$$B > \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(\nu_k)^2}.$$

5.3. Пряма задача

Далі розглянемо дерево T , котре має корінь у висячій вершині. Задача Діріхле на цьому дереві складається з рівнянь (5.10)–(5.13) та (5.15), в той час як задача Неймана складається з (5.10)–(5.13) та (5.18).

Перш за все, ми помічаємо, що внутрішні вершини ступеня 2 не впливають на результати, і ми можемо припустити відсутність таких вершин без втрати загальності. Нехай P – це простий ланцюг у дереві T , який включає максимальну кількість мас. Вочевидь, він починається і закінчується висячими вершинами. Початкову вершину ми позначимо через v_0 та оберемо

її як корінь дерева. Нумерація інших вершин є довільною. Спрямовуємо ребра від кореня. Позначимо ребро, яке входить у вершину v_i через e_i для всіх i . Тоді $P : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_{s_2} \rightarrow v_{s_3} \rightarrow \dots \rightarrow v_{s_{r-1}} \rightarrow v_{s_r}$. Тут r – це довжина ланцюга. Видаливши v_0 та e_1 , ми отримуємо нове дерево T' , яке має корінь у вершині v_1 (див. Рис 5.1.).

Так як $d(v_1) > 2$, ми можемо поділити наше дерево T' на піддерева $T'_1, T'_2, \dots, T'_{d(v_1)-1}$, маючи v_1 як єдину спільну вершину. (Кажемо, що $T'_1, T'_2, \dots, T'_{d(v_1)-1}$ є доповнюючими піддеревами дерева T' (див. Рис 5.1.).

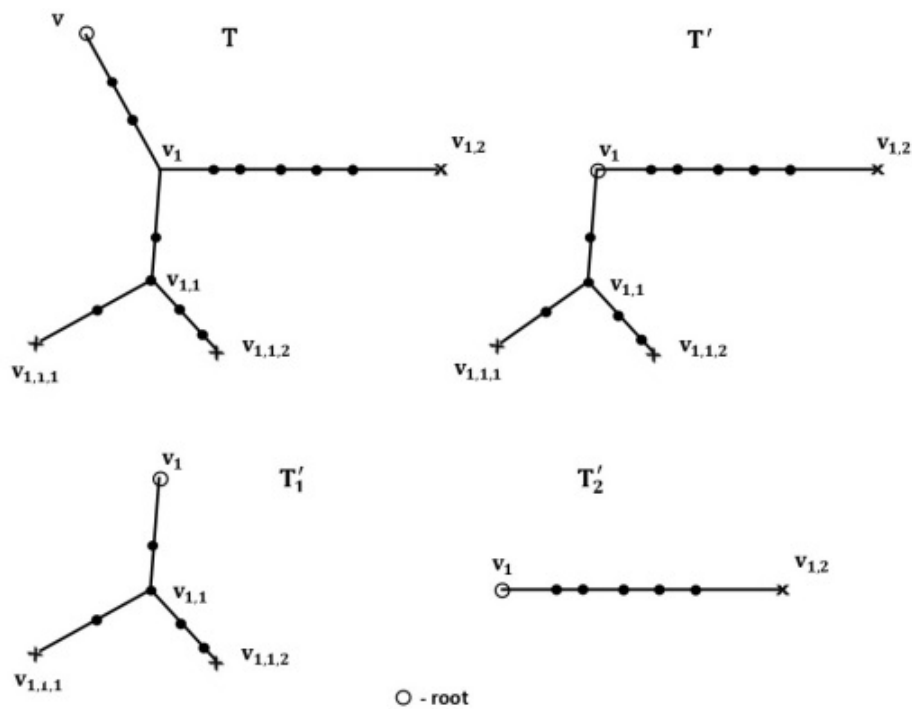


Рис. 5.1:

Позначимо через $\phi_N(\mathbf{v})$ характеристичний многочлен задачі (5.10)–(5.13), (5.18) для дерева T та через $\phi_D(\mathbf{v})$ характеристичний многочлен задачі (5.10)–(5.13), (5.15) для цього дерева. Ці многочлени нормалізовані так, що

$$\frac{\phi_{D(v)}(0)}{\phi_{N(v)}(0)} = l_1 + \frac{1}{\sum_{r=1}^{d(v_1)-1} \frac{\phi_{N_r(v_1)}(0)}{\phi_{D_r(v_1)}(0)}}$$

$\phi_{D,r(v_1)}(z)$ – це характеристичний многочлен задачі Діріхле (5.10)–(5.13),

(5.15) для T'_r та $\phi_{N,r(v_1)}(z)$ – це характеристичний многочлен задачі Неймана (5.10)– (5.13), (5.18) для T'_r і цей розклад можна продовжити.

Наступний результат був отриманий у [87] (дивись доведення Наслідку 2.9 там). У цій роботі передбачалося відсутність намистин у внутрішніх вершинах дерева ($l_{n_j}^{(j)} > 0$ при всіх j) але доведення залишається вірним, якщо $l_{n_j}^{(j)} = 0$ при деяких значеннях j .

Теорема 5.1. *Нехай корінь \mathbf{v} є висячою вершиною дерева T . Тоді дріб*

$\frac{\phi_{D(\mathbf{v})}(z)}{\phi_{N(\mathbf{v})}(z)}$ може бути розвинений у ланцюговий дріб

$$\frac{\phi_{D(\mathbf{v})}(z)}{\phi_{N(\mathbf{v})}(z)} = l_0^{(1)} + \frac{1}{-m_1^{(1)}z + \frac{1}{l_1^{(1)} + \frac{1}{-m_2^{(1)}z + \dots + \frac{1}{-m_{n_1}^{(1)}z + \frac{1}{l_{n_1}^{(1)} + \frac{\phi_{D(v_1)}(z)}{\phi_{N(v_1)}(z)}}}}}, \quad (5.22)$$

де $\phi_{D(v_1)}(z)$ – це характеристичний многочлен задачі (5.10)–(5.14) для T' та $\phi_{N(v_1)}(z)$ – це характеристичний многочлен задачі (5.10)–(5.13), (5.16), (5.17) для T' ,

$$\frac{\phi_{D(v_1)}(z)}{\phi_{N(v_1)}(z)} = \frac{1}{\sum_{r=1}^{d(v_1)-1} \frac{\phi_{N_r(v_1)}(z)}{\phi_{D_r(v_1)}(z)}}, \quad (5.23)$$

де $d(v_1)$ – це степінь v_1 як вершини T , $\phi_{D_r(v_1)}$ – це характеристичний многочлен задачі (5.10)– (5.13), (5.15) для T_r та $\phi_{N_r(v_1)}$ – це характери-

стичний многочлен задачі (5.10)– (5.13), (5.18) для нього,

$$\frac{\phi_{D_r(v_1)}(z)}{\phi_{N_r(v_1)}(z)} = l_0^{(r)} + \frac{1}{-m_1^{(r)}z + \frac{1}{l_1^{(r)} + \frac{1}{-m_2^{(r)}z + \dots + \frac{1}{-m_{n_r}^{(r)}z + \frac{1}{l_{n_r}^{(r)} + f_r(z)}}}}. \quad (5.24)$$

У свою чергу кожен f_r можна розвинути аналогічно до (5.23), (5.24).

Зауваження 5.1. У [88] доведено, що кількість різних власних значень кожної задачі (5.10)– (5.13), (5.15) та (5.10)–(5.13), (5.18) для дерева, що несе маси на кожному ребрі не менше максимальної кількості точкових мас на ланцюгу в цьому дереві.

5.4. Обернена задача

Тепер розглянемо обернену задачу, тобто задачу знаходження величин мас намистин та інтервалів між ними за відомими спектрами задач Неймана та Діріхле, та відомою формою дерева і відомими довжинами ребер.

Теорема 5.2. Нехай дані симетричні $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та $\{\nu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ ($\mu_{-k} = -\mu_k$, $\nu_{-k} = -\nu_k$) та монотонні послідовності дійсних чисел, котрі чергуються наступним чином:

$$0 < (\mu_1)^2 < (\nu_1)^2 < \dots < (\mu_n)^2 < (\nu_n)^2. \quad (5.25)$$

Нехай T – плоске метричне дерево заданої форми, котре має корінь у висячій вершині \mathbf{v} з заданими довжинами ребер $l_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, q$, q – це кількість ребер дерева T).

Тоді:

1. існують числа $n_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ($j = 1, 2, \dots, q$), послідовності додатних чисел $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ (маси намистин на ребрі e_j , $j = 1, 2, \dots, q$) та числа $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ (довжини інтервалів між ними) ($l_k^{(j)} > 0$ при всіх $k = 0, 1, \dots, n_j - 1$, $l_{n_j} \geq 0$ при всіх $j = 1, 2, \dots, q$, такі, що $\sum_{k=0}^{n_j} l_k^{(j)} = l_j$, $\sum_{j=1}^q n_j = n$), спектр задачі Неймана (5.10)–(5.13), (5.18) співпадає з $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та спектр задачі Діріхле (5.10)–(5.13), (5.15) співпадає з $\{\nu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$;
2. два спектри $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та $\{\nu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та довжина l_1 ребра, яке є інцидентним з коренем, однозначно визначають маси $\{m_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ (маси намистин ребра e_1) та довжини $\{l_k^{(1)}\}_{k=0}^{n_1}$ підінтервалів на цьому ребрі.

Доведення. По-перше, ми розглянемо раціональну функцію

$$F(z) := \Phi_{T, \mathbf{v}} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \frac{z}{(\mu_k)^2}}{1 - \frac{z}{(\nu_k)^2}}, \quad (5.26)$$

де $\Phi_{T, \mathbf{v}} > 0$ – це форм-фактор дерева T , котрий залежить від форми дерева та довжин ребер. Він може бути знайдений при підстановці $z = 0$ у (5.22)–

$$(5.24): \Phi_{T, \mathbf{v}} := \frac{\phi_{N(\mathbf{v})}(0)}{\phi_{D(\mathbf{v})}(0)}.$$

Нехай e_1 – ребро, яке поєднує корінь \mathbf{v} з вершиною v_1 та нехай l_1 – довжина цього ребра. Підставляючи $z = 0$ у (5.22), ми отримуємо

$$\Phi_{T, \mathbf{v}}^{-1} = l_1 + \frac{\phi_{D(v_1)}(0)}{\phi_{N(v_1)}(0)} > l_1. \quad (5.27)$$

Завдяки (5.25) та нерівності $\Phi_{T, \mathbf{v}} > 0$, $F^{-1}(z)$ є S_0 -функцією, і отже вона

може бути представлена як

$$F(z)^{-1} = a_0 + \frac{1}{-b_1z + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_2z + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{-b_nz + \frac{1}{a_n}}}}}}, \quad (5.28)$$

де $a_k > 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$ та $b_k > 0$ при $k = 1, 2, \dots, n$.

Так як $F^{-1}(0) = \sum_{k=0}^n a_k = \Phi_{T, \mathbf{v}}^{-1} \geq l_1$, ми можемо обрати ціле число n_1 таке, що

$$\sum_{k=0}^{n_1-1} a_k \leq l_1 < \sum_{k=0}^{n_1} a_k \quad (5.29)$$

та представити $F(z)^{-1}$ наступним чином:

$$F(z)^{-1} = a_0 + \frac{1}{-b_1z + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_2z + \dots + \frac{1}{a_{n_1-1} + \frac{1}{-b_{n_1}z + \frac{1}{\hat{a}_{n_1} + F_1(z)^{-1}}}}}}}, \quad (5.30)$$

де

$$\hat{a}_{n_1} = l_1 - \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k \quad (5.31)$$

та

$$F_1(z)^{-1} = a_{n_1} - \hat{a}_{n_1} + \frac{1}{-b_{n_1+1}z + \frac{1}{a_{n_1+1} + \frac{1}{-b_{n_1+2}z + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{-b_n z + \frac{1}{a_n}}}}}}. \quad (5.32)$$

Ототожнюємо $\{a_0, a_1, \dots, a_{n_1-1}, \hat{a}_{n_1}\}$ з підінтервалами ребра e_1 та $\{b_1, b_2, \dots, b_{n_1}\}$ з масами намистин на ньому: $a_k = l_k^{(1)}$ ($k = 0, 1, \dots, n_1 - 1$), $\hat{a}_{n_1} = l_{n_1}^{(1)}$, $b_k = m_k^{(1)}$ ($k = 1, 2, \dots, n_1$).

Так як $d(v_1) > 2$ на дереві T , поділимо дерево T' на $d(v_1) - 1$ доповнюючі піддерева T_j , які мають корені у v_1 кожне (див. Рис 5.2.). Зрозуміло, що $F_1(z)^{-1}$ належить до класу S_0 -функцій та отже

$$F_1(z) = \Phi_{T', v_1} \prod_{k=1}^{n-n_1} \frac{1 - \frac{z}{(\tilde{\mu}_k)^2}}{1 - \frac{z}{(\tilde{\nu}_k)^2}}, \quad (5.33)$$

де

$$\Phi_{T', v_1}^{-1} = \Phi_{T, \mathbf{v}}^{-1} - l_1, \\ 0 < (\tilde{\mu}_1)^2 < (\tilde{\nu}_1)^2 < (\tilde{\mu}_2)^2 < \dots < (\tilde{\nu}_{n-n_1})^2.$$

Відомо (див., наприклад, [81]), що якщо функція $F_1(z)^{-1}$ належить до S_0 , то функція $F_1(z)$ може бути представлена наступним чином:

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{n-n_1} \frac{A_k}{z - (\tilde{\nu}_k)^2} + B, \quad (5.34)$$

$$A_k > 0, \quad B > 0 \quad (5.35)$$

та оскільки $F^{-1}(0) = \Phi_{T',v_1}^{-1}$, то $B = \Phi_{T',v_1} + \sum_{k=1}^{n-n_1} \frac{A_k}{(\tilde{\nu}_k)^2}$.

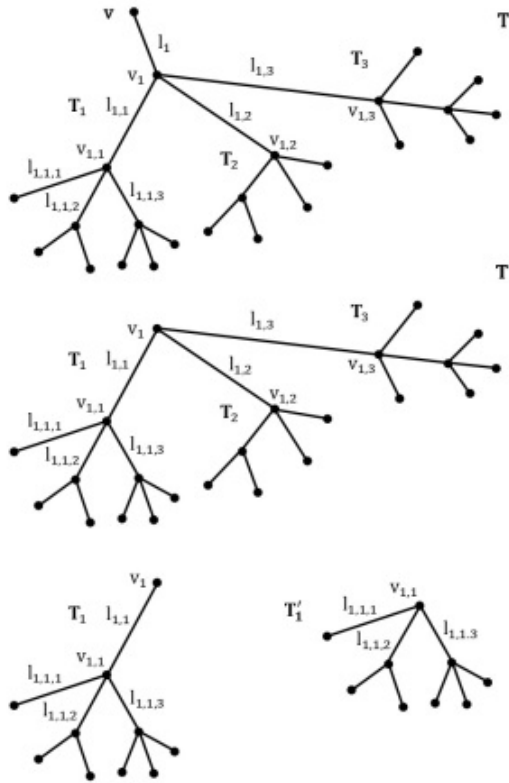


Рис. 5.2:

Оберемо невід'ємні цілі числа N_j ($j = 1, 2, \dots, d(v_1) - 1$) так, що

$$\sum_{j=1}^{d(v_1)-1} N_j = n - n_1.$$

Так як $\Phi_{T',v_1} > 0$, то маємо

$$B > \sum_{k=1}^{n-n_1} \frac{A_k}{(\tilde{\nu}_k)^2}. \quad (5.36)$$

Представимо множину $\{(\tilde{\nu}_k)^2\}_{k=1}^{n-n_1}$ як об'єднання непересічних множин $\{(\tilde{\nu}_{k_s^{(1)}})^2\}_{s=1}^{N_1}$, $\{(\tilde{\nu}_{k_s^{(2)}})^2\}_{s=1}^{N_2}$, ..., $\{(\tilde{\nu}_{k_s^{(d(v_1)-1)}})^2\}_{s=1}^{N_{d(v_1)-1}}$ та оберемо числа B_j ($j = 1, 2, \dots, d(v_1) - 1$) такі, що

$$\sum_{j=1}^{d(v_1)-1} B_j = B \quad (5.37)$$

та

$$B_j > \sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{(\tilde{\nu}_{k_s}^{(j)})^2}. \quad (5.38)$$

Тоді

$$F_1(z) = \Phi_{T',v_1} \prod_{k=1}^{n-n_1} \frac{1 - \frac{z}{(\tilde{\mu}_k)^2}}{1 - \frac{z}{(\tilde{\nu}_k)^2}} = \sum_{j=1}^{d(v_1)-1} \left(\sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{z - (\tilde{\nu}_{k_s}^{(j)})^2} + B_j \right). \quad (5.39)$$

Введемо позначення

$$\Phi_{T_j,v_1} = B_j - \sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{(\tilde{\nu}_{k_s}^{(j)})^2} > 0. \quad (5.40)$$

Покажемо, що існує такий розподіл намистин на доповнюючих піддеревах T_j ($j = 1, 2, \dots, d(v_1) - 1$, $\bigcup_{j=1}^{d(v_1)-1} T_j = T'$) такий, що:

1. кількість мас на деревах $T_j \in N_j$, форм-фактори дерев T_j – це Φ_{T_j,v_1} ;

2. раціональна функція

$$\sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{z - (\tilde{\nu}_{k_s}^{(j)})^2} + B_j, \quad (5.41)$$

яка має N_j простих коренів та N_j простих полюсів є $\frac{\phi_N^{(j)}(z)}{\phi_D^{(j)}(z)}$, де $\phi_N^{(j)}(z)$

та $\phi_D^{(j)}(z)$ – характеристичні многочлени задач Неймана та Діріхле для піддерева T_j .

Зараз розкладемо $\left(\sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{z - (\tilde{\nu}_{k_s}^{(j)})^2} + B_j \right)^{-1}$ у ланцюговий дріб

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{z - (\tilde{\nu}_{k_s}^{(j)})^2} + B_j \right)^{-1} = \tag{5.42} \\
& = a_0^{(j)} + \frac{1}{-b_1^{(j)}z + \frac{1}{a_1^{(j)} + \frac{1}{-b_2^{(j)}z + \dots + \frac{1}{a_{N_j-1}^{(j)} + \frac{1}{-b_{N_j}^{(j)}z + \frac{1}{a_{N_j}^{(j)}}}}}}},
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що завдяки (5.35) та (5.38) ліва частина (5.42) є S_0 -функцією.

Нерівності $\sum_{k=0}^{\tilde{n}_j-1} a_k^{(j)} \leq l_{1,j} < \sum_{k=0}^{\tilde{n}_j} a_k^{(j)}$, де $l_{1,j}$ – довжина ребра дерева T_j , інцидентного з v_1 однозначно визначають величини \tilde{n}_j . Тоді можемо переписати (5.42) таким чином:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{z - (\tilde{\nu}_{k_s}^{(j)})^2} + B_j \right)^{-1} = \\
& = a_0^{(j)} + \frac{1}{-b_1^{(j)}z + \frac{1}{a_1^{(j)} + \frac{1}{-b_2^{(j)}z + \dots + \frac{1}{a_{\tilde{n}_j-1}^{(j)} + \frac{1}{-b_{\tilde{n}_j}^{(j)}z + \frac{1}{\tilde{a}_{\tilde{n}_j}^{(j)} + F_{j,1}^{-1}(z)}}}}}}}, \tag{5.43}
\end{aligned}$$

де $\tilde{a}_{\tilde{n}_j}^{(j)} = l_{1,j} - \sum_{k=0}^{\tilde{n}_j-1} a_k^{(j)} > 0$ та

$$F_{j,1}^{-1}(z) = a_{\tilde{n}_j}^{(j)} - \tilde{a}_{\tilde{n}_j}^{(j)} + \frac{1}{-b_{\tilde{n}_j+1}^{(j)}z + \frac{1}{a_{\tilde{n}_j+1}^{(j)} + \frac{1}{-b_{\tilde{n}_j+2}^{(j)}z + \dots + \frac{1}{a_{N_j-1}^{(j)} + \frac{1}{-b_{N_j}^{(j)}z + \frac{1}{a_{N_j}^{(j)}}}}}}}. \quad (5.44)$$

Ототожнюємо числа $a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{\tilde{n}_j-1}^{(j)}, \tilde{a}_{\tilde{n}_j}^{(j)}$ з довжинами підінтервалів $l_0^{(1,j)}, l_1^{(1,j)}, \dots, l_{\tilde{n}_j}^{(1,j)}$ та $b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \dots, b_{\tilde{n}_j}^{(j)}$ з масами намистин $m_1^{(1,j)}, \dots, m_{\tilde{n}_j}^{(1,j)}$ на ребрі $e_{1,j}$. Таким самим чином як у (5.33), ми отримуємо

$$F_{j,1}(z) = \sum_{k=1}^{N_j-\tilde{n}_j} \frac{\tilde{A}_k}{z - (\tilde{\nu}_k)^2} + \tilde{B}_j \quad (5.45)$$

з $\tilde{A}_k^j > 0$ та $\tilde{B}_j > \sum_{k=1}^{N_j-\tilde{n}_j} \frac{\tilde{A}_k}{(\tilde{\nu}_k^{(j)})^2}$.

Позначимо через $v_{1,j}$ другу вершину, інцидентну з $e_{1,j}$ та через $d(v_{1,j})$ – степінь вершини $v_{1,j}$. Зараз ми розглянемо дерево T'_j , яке було отримано видаленням ребра $e_{1,j}$ з T_j (див. Рис. 5.2.). Нехай $v_{1,j}$ – це корінь дерева T'_j .

Підставляючи $z = 0$ у (5.39) та використовуючи (5.40), ми отримуємо

$$\Phi_{T',v_1} = \sum_{i=1}^{d(v_1)-1} \Phi_{T_j,v_1}.$$

З іншого боку, з (5.43) випливає

$$\Phi_{T_j,v_1}^{-1} = l_{1,j} + F_{j,1}(0)^{-1}$$

і, отже, $F_{j,1}^{-1}(0) = \Phi_{T_j,v_1}^{-1}$.

Продовжимо цю процедуру. В кінці ми отримуємо нескінченний ланцюговий дріб. Ми ототожнюємо $a_k^{(j)} = l_k^{(1,j)}$ ($k = 0, 1, \dots, n_j - 1$), $\hat{a}_{n_j} = l_{n_j}^{(1,j)}$,

$b_k^{(j)} = m_k^{(1,j)}$ ($k = 1, 2, \dots, n_{1,j}$). Завдяки Теоремі 5.1, задачі (5.10)–(5.13), (5.18) та (5.10)–(5.13), (5.15) з цими масами та підінтервалами мають дріб $\frac{\phi_{D(\mathbf{v})}(z)}{\phi_{N(\mathbf{v})}(z)} = F^{-1}(z)$, де $F(z)$ є даним у (5.26).

Так як рівняння (5.30) однозначно визначає множини $\{a_k\}_{k=0}^{n_1-1} \cup \{\hat{a}_{n_1}\}$ та $\{b_k\}_{k=1}^{n_1}$, та (5.31) однозначно визначає число n_1 . Твердження 2. є вірним. \square

Теорема 5.3. *Нехай $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та $\{\nu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ – симетричні ($\mu_{-k} = -\mu_k$, $\nu_{-k} = -\nu_k$) та монотонні послідовності дійсних чисел, які строго чергуються наступним чином:*

$$0 < (\mu_1)^2 < (\nu_1)^2 < \dots < (\mu_n)^2 < (\nu_n)^2. \quad (5.46)$$

Нехай T – плоске метричне дерево заданої форми, котре має корінь у висячій вершині \mathbf{v} із заданими кількостями мас на ребрах $n_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, q$, q – кількість ребер дерева T , $n_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^q n_j = n$).

Тоді існують послідовності додатних чисел $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($m_k^{(j)} > 0$ – маси намистин на ребрі e_j , $j = 1, 2, \dots, q$) та числа $\{l_k^{(j)}\}_{k=0}^{n_j}$ (довжини інтервалів між намистинами, $l_k^{(j)} > 0$ при всіх $k = 0, 1, \dots, n_j - 1$, $l_{n_j} \geq 0$ при всіх $j = 1, 2, \dots, q$), такі, що спектр задачі Неймана (5.10)–(5.13), (5.18) співпадає з $\{\mu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$ та спектр задачі Діріхле (5.10)–(5.13), (5.15) співпадає з $\{\nu_k\}_{k=-n, k \neq 0}^n$.

Доведення. Оберемо довільне додатне число $\Phi_{T,\mathbf{v}}$ та побудуємо раціональну функцію $F(z)$ як у (5.26) та розкладемо $F^{-1}(z)$ у ланцюговий дріб (5.28), оберемо l_1 так, щоб задовольнити (5.29) та позначимо

$$\Phi_{T',v_1}^{-1} := \Phi_{T,\mathbf{v}}^{-1} - l_1.$$

Так як

$$l_1 < \sum_{k=0}^{n_1} a_k \leq \sum_{k=0}^n a_k = F^{-1}(0) = \Phi_{T,\mathbf{v}}^{-1},$$

то ми приходимо до

$$\Phi_{T',v_1}^{-1} > 0.$$

Тепер число N_j ($j = 1, 2, \dots, d(v_1) - 1$), котре є загальною кількістю намистин дерева T_j може бути знайдено, використовуючи задані кількості намистин n_j на ребрах дерева T_j .

Розіб'ємо множину $\{A_k\}_{k=1}^{n-n_1}$ коефіцієнтів у (5.34) на групи $\{A_{k_s}^{(j)}\}_{s=1}^{N_j}$ ($j = 1, 2, \dots, d(\mathbf{v}) - 1$) довільним чином та оберемо додатні числа B_j так, щоб виконувались (5.37), (5.38). Це можливо завдяки (5.27). Позначимо через Φ_{T_j, v_1} величини, отримані з (5.31), котрі ми розглянемо як форм-фактори дерев T_j , котрі ми будуємо. Завдяки $A_j > 0$ та (5.38), функції

$\left(\sum_{s=1}^{N_j} \frac{A_{k_s}}{z - (\nu_{k_s}^{(j)})^2} + B_j \right)^{-1}$ є S_0 -функціями і, отже, (5.43) є вірним. Обере-мо довжину l_j ребра e_j , інцидентного з вершиною \mathbf{v} так, що $\sum_{k=0}^{n_j-1} a_k^{(j)} \leq l_j < \sum_{k=0}^{n_j} a_k^{(j)}$, де n_j – кількість мас на ребрі e_j . Тоді ми поставимо функції як у (5.43) та (5.44), але з даними n_j замість \tilde{n}_j . Тоді ми продовжимо цю процедуру як у доведенні Теорема 5.2. \square

Висновки до розділу 5

Відомо з [87] (див. також [82]), що якщо дві послідовності додатних чисел чергуються у строгому сенсі, то для будь-якого заданого дерева існує розподіл намистин, їх мас та відстаней між ними такий, що одна з послідовностей є спектром задачі Неймана на цьому дереві, а друга є спектром задачі Діріхле на цьому дереві. Якщо крім форми дерева задані загальні довжини ребер, то розв'язок такої оберненої задачі також існує, але довжини ребер мають бути обрані так, що у внутрішніх вершинах не опиняється намистина. Це уточнення було наведене у роботі [82] (Теорема 4.4.1).

У розділі 5 показано, що таке дерево і розподіл мас та відстаней між ними існує і у випадку, коли намистини можуть опинятися у внутрішніх вершинах дерева.

РОЗДІЛ 6

Спектральна задача коливань фулеріна

6.1. Граф фулеріна

Ще з часів Платона та Архімеда відомо, що існує тільки 5 правильних многогранників, котрі називають тілами Платона. Також є архімедові або, так звані, напівправильні многогранники.

У своїй роботі ми розглянемо усічений ікосаедр. З точки зору математики, це старий об'єкт, який знов привернув увагу відносно недавно. Інтерес до цього об'єкта виник несподівано знову у зв'язку з відкриттям хіміками третього стану агрегації вуглецю. Виявилось, що цей стан вуглецю відповідає молекулі, що складається з 60 атомів, які розташовані у вершинах усіченого ікосаедра. Фулерін – це будь-яка молекула, що складається повністю з вуглецю у вигляді порожнистої сфери, еліпсоїда, трубки та багатьох інших форм. У нашому випадку ми розглянемо бакмінстерфулерін C_{60} . Він був отриманий у 1989 році Річардом Споллі і був названий на честь Річарда Бакмінстера Фуллера, архітектора, який створив геодезичний купол, схожий на усічений ікосаедр. Бакмінстерфулерін - найменша молекула фулеріну, що містить п'ятикутну та шестикутну грані, у яких жодні два п'ятикутники не мають спільного ребра. Структура C_{60} - це усічений ікосаедр (один із напівправильних або архімедових твердих тіл), який нагадує футбольний м'яч такого типу, який виготовлений із двадцяти шестикутників та дванадцяти п'ятикутників, з атомами вуглецю у вершинах кожного многокутника і зв'язок уздовж кожного краю многокутника [93] (див. Рис 6.1, [104]).

У цьому розділі ми розглянемо малі поперечні коливання усіченого ікосаедра, ребрами якого є стільтьєсівські струни. Поперечні коливання гра-

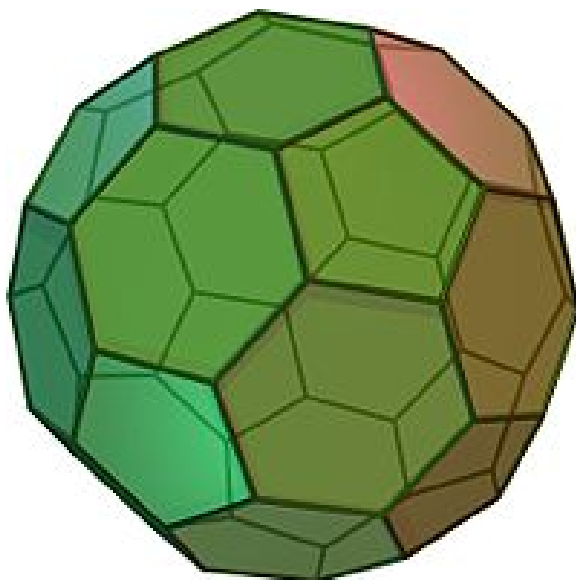


Рис 6.1

фів з таких струн розглядалися у багатьох публікаціях [58], [60], [61].

Спектральні задачі, що описують поздовжні коливання графа з пружин, що несуть маси, зводяться до тих же рівнянь [27].

Оберемо довільну орієнтацію ребер графу. Розглянемо стільтьєсівську струну, котра несе $n \geq 3$ намистин з масами m_1, m_2, \dots, m_n ($m_k > 0$), нехай l_0, l_1, \dots, l_n ($l_k > 0$) – інтервали, на які маси ділять повну довжину l струни ($\sum_{k=0}^n l_k = l$). Занумеруємо точкові маси m_k ($k = 1, 2, \dots, n$) та підінтервали l_k ($k = 0, 1, \dots, n$) на ребрі послідовно у напрямку ребра. У подальшому ми розглядаємо стільтьєсівські струни, симетричні відносно їх середини. Це означає що:

1. якщо n є парним, то: $m_k = m_{n-k+1}$, $k = 1, \dots, n$; $l_k = l_{n-k}$,
 $k = 0, \dots, n$;
2. якщо n є непарним, то: $m_k = m_{n-k+1}$, $k = 1, \dots, [n]$; $l_k = l_{n-k}$,
 $k = 0, \dots, [n]$,

де $[a]$ – це ціла частина a .

Розглянемо граф фулеріна G , всі ребра якого – однакові стільтьєсівські струни, кожна з яких несе на собі n намистин. Граф натягнутий і може рухатись таким чином, що кожна маса рухається в напрямку, перпендику-

лярному до положення рівноваги ребра.

Позначимо через v_i ($i = 1, 2, \dots, 60$) вершини графу G , а через e_j ($j = 1, 2, \dots, 90$) – ребра графу G .

Для кожного i маємо $d(v_i) = 3$ і позначимо через $d^+(v_i)$ – степінь входу, а через $d^-(v_i)$ – степінь виходу. Зрозуміло, що $0 \leq d^\pm(v_i) \leq 3$ та $d^+(v_i) + d^-(v_i) = d(v_i) = 3$.

Нехай W_i^+ – це множина номерів ребер, які входять у вершину v_i та W_i^- – це множина номерів ребер, які виходять з вершини v_i ($i = 1, 2, \dots, 60$).

Слід зазначити, що граф фулеріна належить до класу циклічно зв'язних графів.

Означення 6.1. (див. [41], Означення 2.2) Кажуть, що дві вершини v та w зв'язного графу G є циклічно зв'язними, якщо існує скінченна множина циклів C_1, C_2, \dots, C_k ($C_j \subset G$, $j = 1, 2, \dots, k$), така що $v \in C_1$, $w \in C_k$ та кожна сусідня пара циклів має щонайменше одну спільну вершину.

Означення 6.2. (див. [41], Означення 2.3) Кажуть, що граф є циклічно зв'язним, якщо кожна пара вершин у ньому є циклічно зв'язними.

Ми припустимо відсутність точкових мас у вершинах. Коливання мас на ребрах описується рівняннями (див. [6], с. 141 або [3], рівняння (0.7.4)).

$$\frac{w_k^{(j)}(t) - w_{k-1}^{(j)}(t)}{l_{k-1}} + \frac{w_k^{(j)}(t) - w_{k+1}^{(j)}(t)}{l_k} = m_k \frac{d^2}{dt^2} w_k^{(j)}(t), \quad (6.1)$$

при $k = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, q$; q – це кількість ребер; $w_k^{(j)}(t)$ – це поперечне зміщення мас m_k , які лежать на ребрі e_j ; t – це час.

У внутрішній вершині v_i ми накладемо умови неперервності

$$w_0^{(j_1^-)}(t) = w_0^{(j_2^-)}(t) = \dots = w_0^{(j_{d^-(v_i)}^-)}(t) = w_{n+1}^{(j_1^+)}(t) = w_{n+1}^{(j_2^+)}(t) = \dots = w_{n+1}^{(j_{d^+(v_i)}^+)}(t), \quad (6.2)$$

де $\{j_1^-, \dots, j_{d^-(v_i)}^-\} \in W_i^-$; $\{j_1^+, \dots, j_{d^+(v_i)}^+\} \in W_i^+$ та умова балансу сил

$$\sum_{m=1}^{d^+(v_i)} \frac{w_{n+1}^{(j_m^+)}(t) - w_n^{(j_m^+)}(t)}{l_n} - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} \frac{w_1^{(j_m^-)}(t) - w_0^{(j_m^-)}(t)}{l_0} = 0. \quad (6.3)$$

Зазвичай у лінійному наближенні ми розділяємо змінні наступним чином (див., наприклад, рівн. (0.7.4), (0.7.5) у [3]) $w_k^{(j)}(t) = u_k^{(j)}(z)e^{i\lambda t}$, $z = \lambda^2$. Підставляючи у (6.1)–(6.3), отримуємо наступну спектральну задачу:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k} = -m_k z u_k^{(j)}, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} u_0^{(j_1^-)} &= u_0^{(j_2^-)} = \dots = u_0^{(j_{d^-(v_i)}^-)} = \\ &= u_{n+1}^{(j_1^+)} = u_{n+1}^{(j_2^+)} = \dots = u_{n+1}^{(j_{d^+(v_i)}^+)}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\sum_{m=1}^{d^+(v_i)} \frac{u_{n+1}^{(j_m^+)} - u_n^{(j_m^+)}}{l_n} - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} \frac{u_1^{(j_m^-)} - u_0^{(j_m^-)}}{l_0} = 0, \quad (6.6)$$

де $k = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, 60$; $j_m^- \in W_i^-$, $m = j_1^-, \dots, j_{d^-(v_i)}^-$; $j_m^+ \in W_i^+$, $m = j_1^+, \dots, j_{d^+(v_i)}^+$ та $u_k^{(j)}$ – це амплітуда коливань маси $m_k^{(j)}$, розташованої на ребрі e_j , z – це спектральний параметр. Тут рівняння (6.5) є умовами неперервності та рівняння (6.6) описує баланс сил.

6.2. Коливання графу фулеріна зі стільтьєсівських струн

Слідуючи за [27], будемо шукати розв'язок у наступній формі $u_k^{(j)}(z) = R_{2k-2}(z, c)u_1^{(j)}$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, де $R_{2k-2}(z, c)$ – це многочлени степеня $k-1$. Надалі ми будемо використовувати $R_k(c)$ замість $R_k(z, c)$ для скорочення записів.

Многочлени $R_k(c)$ задовольняють наступні рекурентні співвідношення:

$$R_{2k}(c) = l_k R_{2k-1}(c) + R_{2k-2}(c), \quad (6.7)$$

$$R_{2k-1}(c) = R_{2k-3}(c) - m_k z R_{2k-2}(c)$$

з початковими умовами

$$R_{-1}(c) \equiv \frac{1-c}{l_0}, \quad R_0(c) \equiv 1.$$

Для симетричної струни маємо (див. [27])

$$R_{2n-1}(0) = \frac{1}{l_0} R_{2n}(1) \quad (6.8)$$

та завдяки тотожності Лагранжа

$$R_{2n-1}(0)R_{2n}(1) - R_{2n-1}(1)R_{2n}(0) = \frac{1}{l_0}$$

(див., наприклад [89], Лема 3.5), ми отримуємо

$$\frac{1}{l_0} (R_{2n}(1))^2 - \frac{1}{l_0} = R_{2n}(0)R_{2n-1}(1). \quad (6.9)$$

Зараз ми використаємо процедуру, описану у [91]. Зручно шукати розв'язок рівняння (6.4) у наступному вигляді:

$$U_k^{(j)}(z) = \frac{B^{(j)} - A^{(j)}R_{2n}(1)}{R_{2n}(0)} R_{2k-2}(0) + A^{(j)}R_{2k-2}(1), \quad (6.10)$$

де $A^{(j)}, B^{(j)}$ є константами, незалежними від k та z . Ці розв'язки існують для всіх z , котрі не є коренями $R_{2n}(0)$. З огляду на (6.1), (6.2), з рівняння (6.7) при $k = 0$ випливає $R_{-2}(0) = 0$, $R_{-2}(1) = 1$.

Підставляючи це у (6.10), маємо

$$U_0^{(j)}(z) = \frac{B^{(j)} - A^{(j)}R_{2n}(1)}{R_{2n}(0)} R_{-2}(0) + A^{(j)}R_{-2}(1) = A^{(j)}. \quad (6.11)$$

В цьому випадку, при $k = n + 1$

$$U_{n+1}^{(j)}(z) = \frac{B^{(j)} - A^{(j)}R_{2n}(1)}{R_{2n}(0)} R_{2n}(0) + A^{(j)}R_{2n}(1) = B^{(j)}. \quad (6.12)$$

Умови неперервності (6.5) зараз виглядають наступним чином:

$$A^{(j_1^-)} = A^{(j_2^-)} = \dots = A^{(j_{d^-(v_i)}^-)} = B^{(j_1^+)} = B^{(j_2^+)} = \dots = B^{(j_{d^+(v_i)}^+)} := \Phi(v_i). \quad (6.13)$$

Рівняння балансу сил (6.6) з урахуванням (6.10) та (6.13) будуть мати наступну форму

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{d^+(v_i)} \left(l_n B^{(j_m^+)} R_{2n-1}(0) - A^{(j_m^+)} \right) - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} \left(B^{(j_m^-)} - A^{(j_m^-)} R_{2n}(1) \right) = 0. \quad (6.14) \\
& \sum_{m=1}^{d^+(v_i)} \left(l_n B^{(j_m^+)} R_{2n-1}(0) - A^{(j_m^+)} \right) - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} \left(B^{(j_m^-)} - A^{(j_m^-)} R_{2n}(1) \right) = \\
& = \sum_{m=1}^{d^+(v_i)} l_n B^{(j_m^+)} R_{2n-1}(0) + \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} A^{(j_m^-)} R_{2n}(1) - \left(\sum_{m=1}^{d^+(v_i)} A^{(j_m^+)} + \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} B^{(j_m^-)} \right) = . \\
& = \sum_{m=1}^{d^+(v_i)} B^{(j_m^+)} R_{2n}(1) + \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} A^{(j_m^-)} R_{2n}(1) - \sum_{v_j \sim v_i} \Phi(v_j) = \\
& = R_{2n}(1) \left(\sum_{m=1}^{d^+(v_i)} \Phi(v_i) + \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} \Phi(v_i) \right) - \sum_{v_j \sim v_i} \Phi(v_j) = \\
& = R_{2n}(1) d(v_i) \Phi(v_i) - \sum_{v_j \sim v_i} \Phi(v_j).
\end{aligned}$$

або

$$R_{2n}(1) d(v_i) \Phi(v_i) - \sum_{v_j \sim v_i} \Phi(v_j) = 0.$$

Тут сума береться по всіх вершинах v_j , суміжних з v_i .

В кінці ми отримуємо, використовуючи позначення $\zeta = 3R_{2n}(z, 1)$, $F = \{\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_{60})\}^T$, та позначаючи через A матрицю суміжності нашого графу:

$$\zeta F - AF = 0. \quad (6.15)$$

Нехай z_0 не є коренем $R_{2n}(z, 0)$, тоді воно є власним значенням задачі (6.4)–(6.6) тоді й тільки тоді, якщо $\zeta_0 := 3R_{2n}(z_0, 1)$ є власним значенням матричного рівняння (6.15). Це означає, що спектр задачі (6.4)–(6.6) складається з коренів $R_{2n}(z, 0)$ та коренів многочленів $3R_{2n}(z, 1) - \zeta_s$, де ζ_s ($s = 1, 2, \dots, 60$) є розв'язками рівняння $\det(\zeta I - A) = 0$.

Теорема 6.1. *Характеристичним многочленом задачі (6.4)–(6.6) є*

$$\phi(z) = (R_{2n}(z, 0))^{30} P_{60}(3R_{2n}(z, 1)),$$

де P_{60} – це характеристичний многочлен матриці A .

Доведення. Вище ми вже показали, що якщо z_0 є власним значенням задачі (6.4)–(6.6) та $R_{2n}(z_0, 0) \neq 0$, то $\zeta_0 := 3R_{2n}(z_0, 1)$ є коренем $P_{60}(\zeta)$. Це дає $60n$ (з урахуванням кратностей) власних значень задачі (6.4)–(6.6). Загальним числом власних значень є $90n$, бо 90 – це кількість ребер у фулеріні. Тому є на $30n$ (з урахуванням кратностей) власних значень більше. Вони є коренями $(R_{2n}(z, 0))^{30}$, бо для кожного власного існує 30 лінійно незалежних власних векторів, котрі складаються з векторів $R_2(z, 0), R_4(z, 0), \dots, R_{2n-2}(z, 0)$ на ребрах шестикутних граней графу. \square

Використовуючи (6.15), ми отримуємо характеристичне рівняння для графу фулеріна за допомогою програми MAPLE

$$\begin{aligned} P_{60}(\zeta) = & 2985984 + 54743040\zeta + 186416640\zeta^2 - 1566501120\zeta^3 - 7440712560\zeta^4 + \\ & + 26034025632\zeta^5 + 108565938200\zeta^6 - 310065067080\zeta^7 - 831616531095\zeta^8 + \\ & + 2527365617120\zeta^9 + 3576552321006\zeta^{10} - 13627897407360\zeta^{11} - 8131429397135\zeta^{12} + \\ & + 49433493646080\zeta^{13} + 4679380503120\zeta^{14} - 126428882536240\zeta^{15} + \\ & + 29617003666920\zeta^{16} + 238553091055200\zeta^{17} - 112654402736360\zeta^{18} - \\ & - 344185906596720\zeta^{19} + 228227031040884\zeta^{20} + 390055074762240\zeta^{21} - \\ & - 324375523213200\zeta^{22} - 354145195147200\zeta^{23} + 351861389316780\zeta^{24} + \\ & + 261359090670624\zeta^{25} - 303315997028160\zeta^{26} - 158412719276240\zeta^{27} + \\ & + 212712221820840\zeta^{28} + 79417625268960\zeta^{29} - 123163094844616\zeta^{30} - \\ & - 33076275953760\zeta^{31} + 59443188508110\zeta^{32} + 11466942645600\zeta^{33} - \\ & - 24056403184260\zeta^{34} - 3308173115904\zeta^{35} + 8189116955350\zeta^{36} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +792175427520\zeta^{37} - 2346799508400\zeta^{38} - 156652575440\zeta^{39} + \\
& +565407465144\zeta^{40} + 25376437920\zeta^{41} - 114118295000\zeta^{42} - \\
& -3327625680\zeta^{43} + 19180834020\zeta^{44} + 347208896\zeta^{45} - 2661033600\zeta^{46} - \\
& -28113600\zeta^{47} + 300906380\zeta^{48} + 1700640\zeta^{49} - 27244512\zeta^{50} - \\
& -72240\zeta^{51} + 1925160\zeta^{52} + 1920\zeta^{53} - 102160\zeta^{54} - 24\zeta^{55} + \\
& +3825\zeta^{56} - 90\zeta^{58} + \zeta^{60},
\end{aligned}$$

і отже (отримано за допомогою MAPLE)

$$\begin{aligned}
P_{60}(\zeta) &= (\zeta - 3)(\zeta^2 + 3\zeta + 1)^3(\zeta^4 - 3\zeta^3 - 2\zeta^2 + 7\zeta + 1)^3 * \\
& * (\zeta + 2)^4(\zeta^2 + \zeta - 4)^4(\zeta^2 - \zeta - 3)^5(\zeta^2 + \zeta - 1)^5(\zeta - 1)^9.
\end{aligned}$$

Тоді ми отримуємо наступну множину коренів P_{60} : $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 \approx -2.618$, $\zeta_4 = \zeta_5 = \zeta_6 = \zeta_7 \approx -2.562$, $\zeta_8 = \zeta_9 = \zeta_{10} = \zeta_{11} = -2$, $\zeta_{12} = \zeta_{13} = \zeta_{14} = \zeta_{15} = \zeta_{16} \approx -1.6818$, $\zeta_{17} = \zeta_{18} = \zeta_{19} \approx -1.438$, $\zeta_{20} = \zeta_{21} = \zeta_{22} = \zeta_{23} = \zeta_{24} \approx -1.303$, $\zeta_{25} = \zeta_{26} = \zeta_{27} \approx -0.382$, $\zeta_{28} = \zeta_{29} = \zeta_{30} \approx -0.139$, $\zeta_{31} = \zeta_{32} = \zeta_{33} = \zeta_{34} = \zeta_{35} \approx 0.618$, $\zeta_{36} = \zeta_{37} = \zeta_{38} = \zeta_{39} = \zeta_{40} = \zeta_{41} = \zeta_{42} = \zeta_{43} = \zeta_{44} = 1$, $\zeta_{45} = \zeta_{46} = \zeta_{47} = \zeta_{48} \approx 1.562$, $\zeta_{49} = \zeta_{50} = \zeta_{51} \approx 1.820$, $\zeta_{52} = \zeta_{53} = \zeta_{54} = \zeta_{55} = \zeta_{56} \approx 2.303$, $\zeta_{57} = \zeta_{58} = \zeta_{59} \approx 2.757$, $\zeta_{60} = 3$.

Граф C_{60} є циклічно зв'язним (див. Означення 6.2.). Максимальною кратністю власного значення цієї задачі є $\mu + 1$, де μ – це цикломатичне число графу [41], Теорема 3.2. Так як $\mu = q - p + 1$, де p – кількість вершин та q – кількість ребер, в нашому випадку $\mu + 1 = 32$. Можемо бачити, що в нашій задачі максимально можливою кратністю є 32, яка досягається у власних значеннях, котрі є коренями многочлена $R_{2n}(z, 0)$ та одночасно коренями многочлена $R_{2n}(z, 1) - 1$ (кратності 2).

Висновки до розділу 6

У розділі 6 ми перейшли до розгляду зв'язного графу, котрий не є деревом (але є циклічно зв'язним). Загальної теорії спектральних задач на довільних зв'язних графах не існує. Існують тільки подежкі конкретні результати. Результати розділу 6 вдалося отримати завдяки тому, що ми розглядаємо граф з однаковими ребрами. Більш того, ці ребра, тобто стільтьєсівські струни були симетричними відносно середин ребер. Завдяки цьому задача зведена до більш простої алгебраїчної задачі. Це було зроблено для того, щоб розглянути коливання графу напівправильного многогранника, а саме усіченого ікосаедра, котрий має застосування у хімії і котрий там має іншу назву – фулерін. При розв'язанні було використано програму MAPLE і були знайдені власні значення і перевірено, що максимальна кратність власного значення цієї задачі є $\mu + 1$, де μ – цикломатичне число графу, в даному випадку $\mu + 1 = 32$, що узгоджується з результатом роботи [41].

ВИСНОВКИ

Отримані в дисертації результати є новими і стосуються прямої і оберненої спектральних задач, породжених рекурентними співвідношеннями стільтьєсівських струн на областях, що є графами. Дисертаційна робота містить такі результати:

1. Розв'язана пряма задача, тобто описаний спектр коливань стільтьєсівської струни з вільними кінцями (умови Неймана на обох кінцях) та порівняні спектр відповідної спектральної задачі зі спектрами задач, що описують коливання з цієї ж струни з вільними кінцями і фіксованою проміжною точкою. З точки зору фізики це відповідає закріпленню проміжної точки.

Доведено, що власні значення задачі з умовами Неймана на кінцях чергуються у нестрогому сенсі з об'єднанням спектрів двох задач, одна з яких породжена лівою частиною струни з умовою Неймана на лівому кінці та умовою Діріхле на правому, а друга породжена правою частиною струни з умовою Неймана на правому кінці та умовою Діріхле на лівому.

2. Розв'язана відповідна обернена задача, тобто задача відновлення даних стільтьєсівської струни за відомими:

- (а) спектром коливань цієї струни з вільними кінцями (умова Неймана на обох кінцях);
- (б) спектром коливань лівої частини цієї струни з лівим кінцем вільним (умова Неймана), а правим – закріпленим (умова Діріхле);
- (в) спектром коливань правої частини струни з правим вільним (умова Неймана), а лівим – закріпленим (умова Діріхле);
- (г) загальними масами на частинах струни.

3. Встановлений взаємозв'язок між спектром задачі на зірковому гра-

- фі, який складається з трьох стільтьєсівських струн, спектром задачі на одному з ребер зіркового графу та спектром задачі на об'єднанні другого і третього ребер, який полягає у певному чергуванні власних значень цих трьох задач.
4. Розв'язана обернена задача відновлення даних зіркового графу, який складається з трьох стільтьєсівських струн за відомими загальними довжинами ребер та трьома спектрами, перший з яких – це спектр задачі на усьому графі, другий – це спектр задачі на першому ребрі, а третій – це спектр задачі на об'єднанні другого і третього ребра.
 5. Для спектральної задачі на зірковому графі зі стільтьєсівських струн з умовами неперервності і балансу сил у центральній вершині, умовами Діріхле на всіх висячих вершинах, окрім кореня, розглянуті дві задачі: перша – з умовою Діріхле у корені, а друга – з умовою Неймана у корені (корінь – одна з висячих вершин). Описані спектри таких задач та їх взаємозв'язок. Розв'язано відповідну обернену задачу відновлення мас намистин і довжин інтервалів між ними, виходячи зі спектрів двох задач (Неймана та Діріхле) для випадку, коли кількості мас на ребрах задані. Знайдені умови на дві числові послідовності, необхідні і достатні для того, щоб вони були спектрами задач Діріхле та Неймана.
 6. Розв'язана обернена задача для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн. Був розкладений дріб, чисельник якого є характеристичним многочленом задачі Діріхле на дереві, а знаменник є характеристичним многочленом задачі Неймана на цьому ж дереві у ланцюговий дріб, що розгалуджується. Це є узагальненням відомих результатів на випадок існування намистин у внутрішніх вершинах дерева.
 7. Були описані коливання графу усіченого ікосаедра, ребрами якого є однакові стільтьєсівські струни. Спектральна задача отримана накла-

данням умов неперервності та балансу сил у вершинах. Показано, що якщо всі ребра однакові, то завдяки симетрії задачі виникають кратні власні значення. Максимальна кратність такого власного значення становить 32 , що є максимальним можливим для циклічно зв'язного графу, тобто $\mu + 1$, де μ – це цикломатичне число графу.

Основні положення дисертаційного дослідження викладені у наукових працях, з яких 1 належить до переліку фахових наукових видань (див. [51]), 4 статті опубліковані у журналах, які індексуються у наукометричних базах даних Scopus (див. [9], [52], [53], [54]).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Аров Д. З. Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости. *Сибирский математический журнал*. 1975. Т. 16, № 3. С. 440–465.
- [2] Атабеков Г. И. Основы теории электрических цепей. Москва: ОТЦ, 1968. 434 с.
- [3] Аткинсон Ф. В. Дискретные и непрерывные граничные задачи (пер. с англ. Иохвидова И. С., Каральник Г. А.) Москва: Мир, 1968. 749 с.
- [4] Аткинсон Ф. В. Функции отрицательного мнимого типа. Приложение II. Дискретные и непрерывные граничные задачи (пер. с англ. Иохвидова И. С., Каральник Г. А.) Москва: Мир, 1968. 749 с.
- [5] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: 2 изд. Москва: Наука, 1966. 544 с.
- [6] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем: монография. 2 изд. Москва: ГИТТЛ, 1950. 359 с.
- [7] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. *Известия Академии Наук СССР. Серия математическая*. 1951. № 15. С. 309–360.

- [8] Гомилко А. М., Пивоварчик В. Н. Обратная задача Штурма-Лиувилля на графе в виде восьмерки. *Український математичний журнал*. 2008. Т. 60, № 9. С. 1168–1188.
- [9] Дудко А. І., Пивоварчик В. М. Обернена спектральна задача для зіркового графа зі стільтьєсівських струн із заданими кількостями мас на ребрах. *Український математичний журнал*. 2021. Т. 73, № 1. С. 47–60; translation: Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings with prescribed numbers of masses on the edges. *Ukraine mathematics journal*. 2021. Vol. 73, № 1. P. 50 – 66.
- [10] Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. Москва: Энергия, 1975. 752 с.
- [11] Кац И. С., Крейн М. Г. О спектральной функции струны. Дополнение П. Аткинсон Ф. В. Дискретные и непрерывные граничные задачи (пер. с англ. Иохвидова И. С., Каральник Г. А.) Москва: Мир, 1968. 749 с.
- [12] Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. *Доклады Академии Наук СССР*. 1954. Т. 95, № 6. С. 767–770.
- [13] Крейн М. Г. О некоторых новых задачах теории колебаний штурмовых систем. *Прикладная математика и механика*. . 1952. Т. 16, № 5. С. 555–568.
- [14] Крейн М. Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля. *Доклады Академии Наук СССР*. 1951. Т. 76, № 1. С. 21–24.
- [15] Крейн М. Г., Нудельман А. А. О некоторых спектральных свойствах неоднородной струны с диссипативным граничным условием. *Journal of Operator Theory*. 1989. Vol. 22. P. 369–395.

- [16] Крейн М. Г., Нудельман А. А. О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны. *Доклады Академии Наук СССР*. 1979. Т. 247, № 5. С. 1046–1049.
- [17] Кузнецов В. Н. Обобщение теоремы Амбарцумяна. *Доклады Академии Наук СССР*. 1962. № 146. С. 1259–1262.
- [18] Лейн А., Томас Р. Теория ядерных реакций при низких энергиях (пер. с англ. Николаева М. Н., Шутько А. В., ред. Агранович В. М.) Москва: ИИЛ, 1960. 474 с.
- [19] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. Москва: Мир, 1968. 360 с.
- [20] Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. *Известия Академии Наук СССР. Серия математическая..* 1975. Т. 39, № 3. С. 657–702.
- [21] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. Москва: Наука, 1984. 240 с.
- [22] Левитан Б. М., Гасымов М. Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. *Успехи математических наук*. 1964. Т. 19, № 2 (116). С. 3–63.
- [23] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. Москва: Наука, 1988. 432 с.
- [24] Мартинюк О. М., Пивоварчик В. М. Обернена спектральна задача для стільтьєсівської струни, що має форму вісімки. *Український математичний вісник*. 2011. Т. 8, № 1. С. 112–128; translation: The inverse spectral problem for a Stieltjes eight-shaped string *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 178, № 1. P. 84–96.

- [25] Мартинюк О. М. Теорема Гохштадта-Лібермана для стільтьєсівської струни. *Математичні студії*. 2010. № 34. С. 80–89
- [26] Мартинюк О. М. Теорема Хохштадта-Лібермана для стільтьєсівської струни. *XIII Міжнародна наукова конференція імені М. Кравчука: матеріали конференції*, м. Київ, 13 – 15 травня 2010 р. Київ: НТУУ «КП», 2010. С. 264.
- [27] Марченко В. А. Введение в теорию обратных задач спектрального анализа. Харьков: АктаНУ, 2005. 256 с.
- [28] Марченко В. А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн. *Доклады Академии Наук СССР*. 1955. Т. 104, № 5. С. 695–698.
- [29] Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 331 с.
- [30] Пивоварчик В. М. Про мінімальну кількість різних власних значень у задачі на дереві зі стільтьєсівських струн. *Український математичний журнал*. 2020. Т. 72, № 1. С. 135–141.
- [31] Стильтьєс Т. И. Исследования о непрерывных дробях (пер. с франц. под ред. Ахиезера Н. И.) Харьков: ОНТИ, 1936. 160 с.
- [32] Титчмарш Е. Теория функций. 2 изд. (пер. с англ. Рохлина В. А.) Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 464 с.
- [33] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1970. 720 с.
- [34] Чудов Л. А. Обратная задача Штурма-Лиувилля. *Математический сборник*. 1949. № 25 (67):3. С. 451–456.

- [35] Шебес М. Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. Москва: Высшая школа, 1967. 480 с.
- [36] Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to quantum graphs. *Mathematical Surveys and Monographs*, AMS, Providence, RI, 2013. Vol. 186. 271 p.
- [37] Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe. *Acta Mathematica*. 1946. Vol. 78, № 1. P. 1–96.
- [38] Boyko O. P., Pivovarchik V. N. The inverse three spectral problem for a Stieltjes string and the inverse problem with one dimensional damping. *Inverse Problems*. 2008. Vol. 24, № 1. 015019 (13 pp).
- [39] Boyko O. P., Pivovarchik V. N. Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2008. Vol. 14, № 2. P. 159–167.
- [40] Boyko O. P., Pivovarchik V. N. Inverse problem for Stieltjes string damped at one end. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2008. Vol. 14, № 1. P. 10–19.
- [41] Boyko O. P., Pivovarchik V. N. On maximal multiplicity of eigenvalues of finite-dimensional spectral problem on a graph. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2019. Vol. 25, № 2. P. 104–117.
- [42] Brown M., Weikard M. A Borg-Levinson theorem for trees. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2005. Vol. 461, № 2062. P. 3231–3243.
- [43] Cauer W. Die Verwirklichung von Wechselstromwiderstanden vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit. *Arch. Electrotech.* 1926. Vol. 17, № 4. P. 355–388.

- [44] Chakravarty N. K., Acharyya N. K. On an extension of the theorem of V. A. Ambarzumyan. *Proceedings of the Royal society of Edinburgh*. 1988. Vol. 110. P. 79–84.
- [45] Chern H. H., Law C. K., Wang H. J. Extension of Ambarzumyan's theorem to general boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2005. Vol. 309. P. 764–768.
- [46] Chern H. H., Shen H. H. On the n-dimensional Ambarzumyan's theorem. *Inverse Problems*. 1997. Vol. 13. P. 15–18.
- [47] Cox S. J., Embree M., Hokanson J. M. One can hear the composition of a string: experiments with an inverse eigenvalue problem. *SIAM Rev.* 2012. Vol. 54, № 1. P. 157–178.
- [48] Currie S., Watson B. Eigenvalue asymptotic's for differential operators on graphs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2005. Vol. 182. P. 13–31.
- [49] Derevyagin M. S. Borg – type theorems for generalized Jacobi matrices and trace formulas. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2006. Vol. 12, № 3. P. 220–233.
- [50] Donoghue Jr. W. F. Monotone matrix functions and analytic continuation. New York: Springer Verlag, 1974. 182 p.
- [51] Dudko A. I., Pivovarchik V. M. Spectral problem of Fullerene vibrations. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 25, Is. 1 (35). P. 7–15.
- [52] Dudko A., Pivovarchik V. Three spectra problem for Stieltjes string equation and Neumann conditions. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2019. Vol. 12, No. 1. P. 41–55.

- [53] Dudko A., Pivovarchik V. Three spectra problem for star graph of Stieltjes strings. *Methods Functional Analysis and Topology*. 2019. Vol. 25, No. 4. P. 311–323.
- [54] Dudko A., Pivovarchik V. On inverse problem for tree of Stieltjes strings. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021. Vol. 14, No. 1. P. 1–18.
- [55] Filimonov A. M., Myshkis A. D. On properties of large wave effect in classical problem bead string vibration. *J. Difference Equations and Applications*. 2004. Vol. 10, № 13-15. P. 1171–1175.
- [56] Filimonov A. M., Myshkis A. D. Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with n beads when n is large. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Math.* 1991. Vol. 313, № 6. P. 961–965.
- [57] Fry T. C. The use of continued fractions in the design of electrical networks. *Bull. Am. Math. Soc.* 1929. Vol. 35, № 153. P. 463–498.
- [58] Genin J., Maybee J. S. Mechanical vibrations trees. *J. Math. Anal. Appl.* 1974. Vol. 45. P. 746–763.
- [59] Gesztesy F., Simon B. On determination of a potential from three spectra. *American Mathematical Society Translations: Series 2*. 1999. Vol. 189. P. 85–92.
- [60] Gladwell G. Inverse problems in vibration. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. 457 pp.
- [61] Gladwell G., Morassi A. Matrix inverse eigenvalue problems. (Dynamical Inverse Problems: Theory and Applications). *CISM Courses and Lectures*. 2011. Vol. 529. P. 1–29.

- [62] Guillemin E. A. Synthesis of passive networks. Theory and methods appropriate to the realization and approximation problems. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1958. 741 p.
- [63] Harrell E. M. On the extension of Ambarzumyan's inverse spectral theorem to compact symmetric spaces. *American Journal of Mathematics*. 1987. Vol. 109. P. 787–795.
- [64] Helmholtz H. On the sensations of Tone. New York : Dover Publications, N. Y., 1954. 608 p.
- [65] Hochstadt H., Lieberman B. An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1978. Vol. 34. P. 676–680.
- [66] Horvath M. Inverse spectral problems and closed exponential systems. *Annals of Mathematics*. 2005. Vol. 162, № 2. P. 885–918.
- [67] Horvath M. On a theorem of Ambarzumyan. *Proceedings of the Royal society of Edinburgh*. 2001. Vol. 131. P. 899–907.
- [68] Hryniv R., Mykytyuk Y. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials, III. Reconstruction by three spectra. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. Vol. 284, № 2. P. 626–646.
- [69] Kac I. S., Krein M. G. R-functions - analytic functions mapping the upper half-plane into itself. *Amer. Math. Transl. (2)*. 1974. Vol. 103, № 2. P. 1–18.
- [70] Kiss M. An n-dimensional Ambarzumyan type theorem for Dirac operators. *Inverse Problems*. 2004. Vol. 20. P. 1593–1597.

- [71] Krein M. G. On some new problems of the theory of vibrations of Sturm systems (in Russian). *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1952. Vol. 16, № 5. P. 555–568.
- [72] Kurasov P. Inverse scattering for lasso graph. *J. Math. Phys.* 2013. Vol. 54, № 4. 042102 (14 pp).
- [73] Kurchanov P. F., Myshkis A. D., Filimonov A. M. Train vibrations and Kronecker's theorem (in Russian). *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1991. Vol. 55, № 6. P. 989–995.
- [74] Latushkin Y., Pivovarchik V. Scattering in a forked-shaped waveguide. *Integral Equations and Operator Theory*. 2008. Vol. 61, № 3. P. 365–399.
- [75] Law C. K., Pivovarchik V. N. Characteristic functions of quantum graphs. *Journal of Physics A: Mathematical Theory*. 2009. Vol. 42. 035302 (11 pp.)
- [76] Law C. K., Tsao C. W. The Stieltjes string and its associated nodal points. *Operators and Matrices*. 2019. Vol. 13, № 2. P. 363–373.
- [77] Marshall A., Olkin I., Arnold B. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. New York: Springer. Second Edition. 2011. xxviii+909 pp.
- [78] Martinyuk O. M., Pivovarchik V. N. On the Hochstadt-Lieberman theorem. *Inverse Problems*. 2010. Vol. 26. 035011 (6 pp).
- [79] Martinyuk O. M., Pivovarchik V. N. Spectral Problem for figure-of-eight graph of Stieltjes strings. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2010. Vol. 16, № 4. P. 349–358.
- [80] Michor J., Teschl G. Reconstructing Jacobi matrices from three spectra. *Spectral Methods for Operators of mathematical physics*. 2004. Vol. 154. P. 151–155.

- [81] Möller M., Pivovarchik V. Spectral theory of operator pencils, Hermite-Biehler functions, and their applications. *Operator Theory: Advances and Applications*, 246. New York: Birkhäuser/Springer, 2015. 412 p.
- [82] Möller M., Pivovarchik V. Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs. *Operator Theory: Advances and Applications*, 283. New York: Birkhäuser/Springer, 2020. 349 p.
- [83] Muirhead R. F. Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 1903. Vol. 21. P. 144–157.
- [84] Nizhnik L. P. Inverse eigenvalue problems for nonlocal Sturm-Liouville operators. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2012. Vol. 18, № 1. P. 68–78.
- [85] Pivovarchik V.N. Ambarzumyan's theorem for a Sturm-Liouville boundary value problem on a star-shaped graph. *Functional Analysis and its Applications*. 2005. Vol. 39. P. 148–151.
- [86] Pivovarchik V. N. An inverse Sturm-Liouville problem by three spectra. *Integral Equations and Operator Theory*. 1999. Vol. 34, № 2. P. 234–243.
- [87] Pivovarchik V. N. Existence of a tree of Stieltjes strings corresponding to two given spectra. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009. Vol. 42, № 37. 375213 (16 pp).
- [88] Pivovarchik V. N. On minimum number of distinct eigenvalues for a Stieltjes string problem on a tree. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2020. Vol. 72, № 1. P. 149–156.
- [89] Pivovarchik V., Rozhenko N., Tretter C. Dirichlet-Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings. *Linear Algebra and Applications*. 2013. Vol. 439, № 8. P. 2263–2292.

- [90] Pivovarchik V., Taystruk O. Spectral problem for a graph of symmetric Stieltjes strings. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2014. Vol. 20, № 2. P. 164–174.
- [91] Pivovarchik V., Tretter C. Location and multiplicities of eigenvalues for a star graph of Stieltjes strings. *Difference Equation and Applications*. 2015. Vol. 21, № 5. P. 383–402.
- [92] Pöschel J., Trubowitz E. *Inverse Scattering Theory*. Boston: Academic Press, 1987. 192 pp.
- [93] Qiao R., Roberts A., Mount A., Klaine S., Kleine P. C. Translocation of C60 and Its Derivatives Across a Lipid Bilayer. *Nano Letters*. Vol. 7, № 3. – 2007. – P. 614–619.
- [94] Rayleigh J. W. S. *The Theory of Sound*. New York: Dover Publications, N. Y., 1945. 480 p.
- [95] Sakhnovich L. Half-inverse problem on the finite interval. *Inverse Problems*. 2001. Vol. 17. P. 527–532.
- [96] Shen C. L. On some inverse spectral problems related to the Ambarzumyan problem and an the dual string of the string equation. *Inverse Problems*. 2007. Vol. 23. P. 2417–2436.
- [97] Veseli'c K. On Linear Vibrational Systems with One Dimensional Damping. *Applicable Analysis*. 1988. Vol. 29, № 1-2. P. 1–18.
- [98] Yang C. F., Yang X. P. Some Ambarzumyan – type theorems for Dirac operators. *Inverse Problems*. 2009. Vol. 25. 095012 (13 pp.)
- [99] Yang L., Guo Y., Wei G. Inverse problem for a Stieltjes string damped at an interior point. *Integral equations and operator theory*. 2020. Vol. 92, № 4. 16 pp.

- [100] Yang L., Wei G., Pivovarchik V. Direct and Inverse spectral problems for a star graph of Stieltjes strings damped at a pendant vertex. *Inverse problems and Imaging* . 2021. Vol. 15, № 2. P. 257–270.
- [101] Young R. M. An introduction to non harmonic Fourier Series. N.Y.: Acad. Press, 1980. 257 pp.
- [102] Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs. *Inverse Problems*. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.
- [103] Wei G., Xu H. K. On the missing eigenvalue Problem for an inverse Sturm-Liouville problem. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009. Vol. 91. P. 468–475.
- [104] Усічений ікосаедр. URL: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/ff/Truncatedicosahedron.jpg/602px-Truncatedicosahedron.jpg> (дата звернення: 10.12.2021).