МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального завдання для студентів спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування з дисципліни «Вища та прикладна математика»

Одеса – 2021

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального завдання для студентів спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування з дисципліни «Вища та прикладна математика».

Розглянуто на засідання кафедри вищої математики і статистики.

Протокол від _27_ серпня 2021 № 1

Розробник:

к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики М. Г. Волкова.

Рецензенти:

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри менеджменту організацій ОРІДУ НАДУ при Президентові України Л. С. Сметаніна.

кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Г. Д. Урум.

Зміст

Тема 1. Теорія матриць та визначників.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 1 §§ 1-7.

Приклади розв'язання задач.

Вправа 1. Знайти матрицю, транспоновану до даної

1) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$,

Матриця А розміром 2×2. Поміняємо місцями стовпці та рядки і отримаємо матрицю A^{T}, транспоновану до матриці А:

$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

Матриця A^{T} розміром 2×2.

2) $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$,

Матриця B розміром 2×3. Поміняємо місцями стовпці та рядки і отримаємо матрицю B^{T} , транспоновану до матриці B:

$B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

Матриця B^{T} розміром 3×2.

Вправа 2. Обчисліть добуток матриць А і В:

1) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -5 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

Матриця А розміром 2×2, матриця В також розміром 2×2. Кількість стовпців матриці А співпадає з кількістю строк матриці В, тому множення $\mathrm{A}\cdot B$ виконати можна і результатом буде матриця розміром 2×2:

$$\mathrm{A}\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3+(-3)\cdot(-2) & 2\cdot 6+(-3)\cdot 4\\ -5\cdot 3+(-1)\cdot(-2) & -5\cdot 6+(-1)\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+6 & 12-12\\ -15+2 & -30-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 0\\ -13 & -34\end{pmatrix}.$$

2) $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Матриця А розміром 3×2, матриця В розміром 2×2. Кількість стовпців матриці А співпадає з кількістю строк матриці В, тому множення $\mathrm{A}\cdot B$ виконати можна і результатом буде матриця розміром 3×2:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1+3\cdot 2 & 0\cdot 3+3\cdot(-1)\\ -2\cdot 1+5\cdot 2 & -2\cdot 3+5\cdot(-1)\\ -1\cdot 1+4\cdot 2 & -1\cdot 3+4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 8 & -11\\ 7 & -7\end{pmatrix}.$$

Вправа 3. Обчислити визначники

1) $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 1-4\cdot(-3)=2+12=14.$

2) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 5 & -3\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot(-2)+2\cdot 0\cdot 4+1\cdot(-3)\cdot(-1)-(-1)\cdot 5\cdot 4-2\cdot 1\cdot(-2)-$

$$-3\cdot 0\cdot(-3)=-30+0+3+20+4+0=-3.$$

Вправа 4. Обчислити матрицю, обернену до даної:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 7\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)\cdot 7+4\cdot 5\cdot 1+3\cdot 0\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 1-4\cdot 3\cdot 7-$$

$$-5\cdot 0\cdot(-2)=14+20+0+3-84+0=-47\neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 5 & 7\end{vmatrix}=-1\cdot 7-5\cdot 0=-7,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-1\cdot(4\cdot 7-3\cdot 0)=-28,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=4\cdot 5-3\cdot(-1)=23,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 7\end{vmatrix}=-1\cdot(3\cdot 7-5\cdot 1)=-16,$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2\cdot 7-3\cdot 1=-17,$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-1\cdot(-2\cdot 5-3\cdot 3)=19,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3\cdot 0-(-1)\cdot 1=1,$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot(-2\cdot 0-4\cdot 1)=4,$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)-3\cdot 4=-10.$

Союзна матриця має вигляд:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -16 & 1\\ -28 & -17 & 4\\ 23 & 19 & -10\end{pmatrix},$$

тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -16 & 1 \\ -28 & -17 & 4 \\ 23 & 19 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{47} & \frac{16}{47} & -\frac{1}{47} \\ \frac{28}{47} & \frac{17}{47} & -\frac{4}{47} \\ -\frac{23}{47} & -\frac{19}{47} & \frac{10}{47} \end{pmatrix}.$$

Отже, відповідь:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{47} & \frac{16}{47} & -\frac{1}{47} \\ \frac{28}{47} & \frac{17}{47} & -\frac{4}{47} \\ -\frac{23}{47} & -\frac{19}{47} & \frac{10}{47} \end{pmatrix}.$$

Для перевірки потрібно перевірити виконання рівності $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -16 & 1 \\ -28 & -17 & 4 \\ 23 & 19 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -47 & 0 & 0 \\ 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -16 & 1 \\ -28 & -17 & 4 \\ 23 & 19 & -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -47 & 0 & 0 \\ 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & -47 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Знайти матрицю, транспоновану до даної

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

5) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

6) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

8) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$,

9) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$,

10) $A = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вправа 2. Обчисліть добуток матриць А $\cdot$ B

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -5\\ 4 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix},$

2) $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 8 & -5\\ 4 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix},$

3) $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},$

4) $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -5 & -5\\ 7 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix},$

5) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix},$

6) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -5\\ -4 & 10 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -5\\ 4 & 2\end{pmatrix},$

7) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 5 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix},$

8) $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ -1 & 7 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},$

9) $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -1 & 5 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},$

10) $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$

Вправа 3. Обчислити визначники

1) $\begin{vmatrix}4 & -3\\ 4 & 10\end{vmatrix},$

2) $\begin{vmatrix}4 & -6\\ 5 & 8\end{vmatrix},$

3) $\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix},$

4) $\begin{vmatrix}3 & -2\\ -5 & 4\end{vmatrix},$

5) $\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 3 & 7\end{vmatrix},$

6) $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix},$

7) $\begin{vmatrix}7 & -5\\ 3 & 6\end{vmatrix},$

8) $\begin{vmatrix}11 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix},$

9) $\begin{vmatrix}4 & -6\\ 7 & 5\end{vmatrix},$

$\begin{vmatrix}5 & 2\\ -3 & -7\end{vmatrix},$

11) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix},$

12) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 7\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix},$

13) $\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix},$

14) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 1\end{vmatrix},$

15) $\begin{vmatrix}6 & 0 & 1\\ 2 & 5 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix},$

16) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 10\\ 4 & -2 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix},$

17) $\begin{vmatrix}7 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix},$

18) $\begin{vmatrix}6 & 0 & 1\\ 2 & 5 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix},$

19) $\begin{vmatrix}9 & 10 & 1\\ 0 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 5\end{vmatrix},$

20) $\begin{vmatrix}7 & 4 & 0\\ 1 & 6 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}$

Вправа 4. Обчислити матрицю, обернену до даної, якщо це можливо:

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

5) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

9) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$,

10) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

Тема 2. Системи лінійних рівнянь

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 1 §§ 8-15.

Приклади розв'язання задач.

Вправа 1. Розвязати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

А) методом Крамера,

Б) матричним способом,

В) методом Гаусса.

Розв'язання:

А) Метод Крамера.

Знайдемо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=1+4+27-3+6+6=41.$$

Оскільки визначник системи $\Delta\neq 0$, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв’язок. Обчислимо визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ -8 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1-16-9+1+6-24=-41,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -8 & -3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=-8-2-9+24-3-2=0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -8\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1+4+72-3+16-6=82.$$

Отже, за формулами Крамера будемо мати:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-41}{41}=-1,$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{41}=0,$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{82}{41}=2.$$

Таким чином, $x_1=-1, x_2=0, x_3=2$ – єдиний розв’язок системи.

Відповідь: $x_1=-1, x_2=0, x_3=2$.

Б) Матричний метод.

Введемо позначення:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ -8\\ -1\end{pmatrix}.$$

Тоді система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі: $A\cdot X=B$, і матричним розв’язком системи буде $X=A^{-1}\cdot B$. Знайдемо матрицю A^{-1} (як ми це робили у вправі 4 Теми «Теорія матриць та визначників»):

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=1+4+27-3+6+6=41\neq 0,$$

Отже, обернена матриця A^{-1} існує, й можна знайти єдиний розв’язок системи. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів даної матриці:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+6=7,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot(2+9)=-11,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 - 2) = 5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 + 9) = -11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 - 2) = 5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7.$$

Союзна матриця має вигляд:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ -11 & -2 & 5 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix},$$

тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ -11 & -2 & 5 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{41} & \frac{5}{41} & \frac{8}{41} \\ -\frac{11}{41} & -\frac{2}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{1}{41} & -\frac{11}{41} & \frac{7}{41} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв’язок системи

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ -11 & -2 & 5 \\ 1 & -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} -41 \\ 0 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв’язком системи буде $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$.

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$.

В) Метод Гаусса.

За системою запишемо матрицю коефіцієнтів і зведемо її до трикутного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -10 \\ 0 & 11 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 41 & 82 \end{array}\right),$$

а тепер за матрицею відновимо систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_2 - 5x_3 = -10, \\ 41x_3 = 82, \end{cases}$$

звідки з третього рівняння системи знаходимо $x_3 = \frac{82}{41} = 2$,

тепер знайдене значення $x_3 = 2$ підставляємо в другу рівняння:

$$7x_2 - 5 \cdot 2 = -10,$$

$$7x_2 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

а тепер значення $x_3 = 2$, $x_2 = 0$ підставляємо в перше рівняння

$$x_1 - 3 \cdot 0 + 2 = 1,$$

$$x_1 = -1.$$

Отримали $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2.$

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2.$

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Розв'язати системи:

А) методом Крамера,

Б) матричним способом,

В) методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -16. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

Тема 3. Векторна алгебра.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 2 §§ 4-11 або [2] Розділ 1, Глава 2 §§ 1-8.

Приклади розв'язання задач.

Вправа 1. Дано вектори $\vec{a}(3;-1;0)$, $\vec{b}(2;-3;1)$, $\vec{c}(-1;4;2)$.

Знайти $2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot (\vec{a} + \vec{c})$.

Розв'язання.

$2 \cdot \vec{b} = 2 \cdot (2;-3;1) = (4;-6;2).$

$\vec{a} + \vec{c} = (3;-1;0) + (-1;4;2) = (2;3;2).$

$3 \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 3 \cdot (2;3;2) = (6;9;6).$

$2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = (4; -6; 2) - (6; 9; 6) = (-2; -15; -4)$.

Відповідь: $(-2; -15; -4)$.

Вправа 2. Дано вектор $\vec{a}(2; -1; 5)$. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Розв'язання.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}.$$

$$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{30}}, \qquad cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{30}}, \quad cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Вправа 3. Дано вектори $\vec{a}(5; -1; 2)$, $\vec{b}(2; -2; 3)$. Знайти $\vec{a}^2 - 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Розв'язання.

$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = 5^2 + (-1)^2 + 2^2 = 25 + 1 + 4 = 30$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 10 + 2 + 6 = 18$.

$4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 18 = 72$.

$\vec{a}^2 - 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 30 - 72 = -42$.

Відповідь: -42.

Вправа 4. Дано вектори $\vec{a}(1; -3; 2)$, $\vec{b}(4; -1; 5)$. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$.

Розв'язання.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -13 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 11 \cdot \vec{k}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = (-13; 3; 11)$.

Відповідь: $\vec{a} \times \vec{b} = (-13; 3; 11)$.

Вправа 5. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}(3; -1; 0)$, $\vec{b}(2; -3; 1)$, $\vec{c}(-1; 4; 2)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 1 - 0 - 12 + 4 = -25.$$

Відповідь: -25.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Знайти:

1) $3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$,

2) Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{c}$.

3) $\vec{b}^2 + 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$,

4) $\vec{a} \times \vec{b}$,

5) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Варіанти:

1) $\vec{a}(4;-2;0)$, $\vec{b}(5;-3;1)$, $\vec{c}(0;4;2)$.
2) $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(6;-2;1)$, $\vec{c}(-1;5;2)$.
3) $\vec{a}(4;-1;3)$, $\vec{b}(4;-3;0)$, $\vec{c}(-1;4;3)$.
4) $\vec{a}(3;4;1)$, $\vec{b}(1;-3;1)$, $\vec{c}(4;1;2)$.
5) $\vec{a}(5;-1;2)$, $\vec{b}(4;-1;2)$, $\vec{c}(-3;0;2)$.
6) $\vec{a}(2;-3;2)$, $\vec{b}(2;-5;1)$, $\vec{c}(-1;0;2)$.
7) $\vec{a}(2;-1;0)$, $\vec{b}(1;-4;1)$, $\vec{c}(-2;5;1)$.
8) $\vec{a}(3;-4;0)$, $\vec{b}(0;3;1)$, $\vec{c}(1;-4;2)$.
9) $\vec{a}(2;5;1)$, $\vec{b}(3;1;-1)$, $\vec{c}(-2;3;1)$.
10) $\vec{a}(3;5;1)$, $\vec{b}(2;1;1)$, $\vec{c}(1;4;-2)$.

Тема 4. Лінії першого порядку.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 2 § 16 -18.

Вправа 1. Пряму L задано точкою $M_0(-1;2)$ і нормальним вектором $\vec{n}(2;3)$. Записати: 1) загальне рівняння прямої; 2) нормальне рівняння прямої; 3) відстань від початку координат до прямої.

Розв’язання.

1) загальне рівняння прямої:

$$2\cdot\big(x-(-1)\big)+3\cdot(y-2)=0,$$
$$2x+2+3y-6=0,$$
$$2x+3y-4=0.$$

2) нормальне рівняння прямої:

знаходимо нормувальний множник $\mu=\frac{-sign\, C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{4}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$,

множимо загальне рівняння на μ:

$$\frac{4}{\sqrt{13}}\cdot 2x+\frac{4}{\sqrt{13}}\cdot 3y-\frac{4}{\sqrt{13}}\cdot 4=0,$$
$$\frac{8}{\sqrt{13}}x+\frac{12}{\sqrt{13}}y-\frac{16}{\sqrt{13}}=0.$$

3) відстань від початку координат $O(0;0)$ до прямої L:

$$\rho\ (O,L)=\left|\frac{8}{\sqrt{13}}\cdot 0+\frac{12}{\sqrt{13}}\cdot 0-\frac{16}{\sqrt{13}}\right|=\left|-\frac{16}{\sqrt{13}}\right|=\frac{16}{\sqrt{13}}.$$

Вправа 2. Записати загальне рівняння прямої L, що проходить через дві задані точки

$M_1(3;1)$ та $M_2(-1;4)$.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор $\vec{q}$ прямої L:

$$\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-1-3; 4-1) = (-4; 3).$$

Тоді загальне рівняння прямої L:

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{3},$$

$$3 \cdot (x-3) = -4 \cdot (y-1),$$

$$3x - 9 = -4y + 4,$$

$$3x + 4y - 13 = 0.$$

останнє рівняння є загальним рівнянням прямої.

Вправа 3. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3;2;-1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MN}$, де $M(-1;-2;5)$, $N(4;5;2)$.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярно заданому вектору $\vec{n}(A; B; C)$, має вигляд:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$

В нашому випадку $\vec{n} = \overrightarrow{MN} = (4-(-1); 5-(-2); 2-5) = (5; 7; -3)$. Тоді будемо мати:

$$5 \cdot (x-3) + 7 \cdot (y-2) + (-3) \cdot \big(z - (-1)\big) = 0,$$

$$5x - 15 + 7y - 14 - 3z - 3 = 0,$$

$$5x + 7y - 3z - 32 = 0,$$

останнє рівняння є загальним рівнянням площини.

Вправа 4. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(-3;1;4)$, $M_2(2;-1;-3)$, $M_3(-2;4;3)$. Записати загальне рівняння площини.

Розв'язання. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

отже,

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 1 & z - 4 \\ 2 - (-3) & -1 - 1 & -3 - 4 \\ -2 - (-3) & 4 - 1 & 3 - 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-4 \\ 5 & -2 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x+3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (y-1)(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-4)(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$23(x+3) - 2(y-1) + 17(z-4) = 0,$$

$$23x + 69 - 2y + 2 + 17z - 68 = 0,$$

$$23x - 2y + 17z + 3 = 0,$$

останнє рівняння є загальним рівнянням площини.

Вправа 5. Знайти відстань від точки $M(-3;1;4)$ до площини α: $4x - 7y - 4z + 3 = 0$.

Розв'язання. Запишемо спочатку нормальне рівняння площини, для чого знайдемо нормувальний множник

$$\mu = \frac{-sign\,D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{-3}{\sqrt{4^2+(-7)^2+(-4)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{81}} = -\frac{1}{3},$$

множимо дане рівняння $4x - 7y - 4z + 3 = 0$ на μ:

$$-\frac{1}{3}\cdot 4x - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 7y - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 4z + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 3 = 0,$$

$$-\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}y + \frac{4}{3}z - 1 = 0.$$

Знаходимо відстань від точки $M(-3;1;4)$ до даної площини α:

$$\rho\,(M,\alpha) = \left|-\frac{4}{3}\cdot(-3) + \frac{7}{3}\cdot 1 + \frac{4}{3}\cdot 4 - 1\right| = \left|\frac{38}{3}\right| = 12\frac{2}{3}.$$

Вправа 6. Знайти кут між прямими

$$L_1: \qquad \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-8}{4}$$

і

$$L_2: \qquad \frac{x+6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{6}.$$

Розв'язання. Напрямний вектор першої прямої $\vec{q}_1 = (16;21;12)$, другої прямої $\vec{q}_2 = (3;2;6)$. Кут між прямими L_1 і L_2 є кутом між напрямними векторами $\vec{q}_1$ і $\vec{q}_2$, отже

$$cos\angle(L_1,L_2) = cos\angle(\vec{q}_1,\vec{q}_2) = \frac{\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2}{|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|} = \frac{4\cdot 3 + (-7)\cdot 2 + 4\cdot 6}{\sqrt{4^2+(-7)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+6^2}} =$$

$$= \frac{22}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{49}} = \frac{22}{9\cdot 7} = \frac{22}{63},$$

$$\angle(L_1,L_2) = arccos\,\frac{22}{63}.$$

Відповідь: $arccos\,\frac{22}{63}$.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Пряму L задано точкою M_0 і напрямним вектором $\vec{q}$.

Записати: 1) загальне рівняння прямої; 2) нормальне рівняння прямої; 3) відстань від початку координат до прямої.

1) $M_0(3;-2)$, $\vec{q}=(-4;3)$,
2) $M_0(1;-1)$, $\vec{q}=(5;2)$,
3) $M_0(3;-5)$, $\vec{q}=(4;-3)$,
4) $M_0(2;-1)$, $\vec{q}=(-6;1)$,
5) $M_0(3;-4)$, $\vec{q}=(-2;-2)$,
6) $M_0(0;-2)$, $\vec{q}=(-4;1)$,
7) $M_0(1;-3)$, $\vec{q}=(-3;3)$,
8) $M_0(2;-1)$, $\vec{q}=(-4;4)$,
9) $M_0(0;-1)$, $\vec{q}=(4;-2)$,
10) $M_0(1;-2)$, $\vec{q}=(-5;3)$.

Вправа 2. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MN}$.

1) $M_0(1;2;-1)$ $M(3;-2;5)$, $N(-4;5;2)$.
2) $M_0(4;-2;-1)$ $M(0;-2;5)$, $N(4;-5;2)$.
3) $M_0(5;3;-1)$ $M(2;-3;1)$, $N(-4;3;-2)$.
4) $M_0(0;2;1)$ $M(1;2;3)$, $N(4;3;1)$.
5) $M_0(5;-2;2)$ $M(-1;3;2)$, $N(1;5;2)$.
6) $M_0(1;2;-3)$ $M(-1;2;6)$, $N(5;-5;-2)$.
7) $M_0(2;-2;-1)$ $M(5;-2;5)$, $N(2;5;2)$.
8) $M_0(4;4;-1)$ $M(-1;-4;3)$, $N(4;-2;2)$.
9) $M_0(5;-2;-3)$ $M(3;-2;1)$, $N(-3;5;-2)$.
10) $M_0(2;2;-4)$ $M(-5;-2;3)$, $N(4;-1;2)$.

Вправа 3. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки M_1, M_2, M_3. Записати загальне рівняння площини.

1) $M_1(-1;2;9)$, $M_2(3;-1;3)$, $M_3(-5;4;1)$.
2) $M_1(3;1;2)$, $M_2(5;-1;-3)$, $M_3(1;4;3)$.
3) $M_1(5;1;-4)$, $M_2(3;8;-1)$, $M_3(-2;-4;-3)$.
4) $M_1(2;1;4)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(2;1;3)$.
5) $M_1(-9;1;-4)$, $M_2(4;-1;3)$, $M_3(0;1;3)$.
6) $M_1(0;2;1)$, $M_2(-5;0;-3)$, $M_3(-1;-2;3)$.

7) $M_1(2;-1;4)$, $M_2(3;1;2)$, $M_3(2;-2;6)$.

8) $M_1(5;2;3), M_2(1;-1;-2), M_3(-3;5;3)$.

9) $M_1(6;1;3), M_2(1;0;-2), M_3(-4;8;3)$.

10) $M_1(-9;2;1), M_2(5;-1;-6), M_3(-3;8;3)$.

Вправа 4. Знайти відстань від точки M до площини α: $2x-y-2z-4=0$.

1) $M(-1;1;0)$.

2) $M(-2;3;1)$.

3) $M(2;-1;2)$.

4) $M(4;-1;3)$.

5) $M(-1;4;0)$.

6) $M(-6;1;3)$.

7) $M(2;-2;5$.

8) $M(1;4;3)$.

9) $M(3;2;-2)$.

10) $M(3;-1;5)$.

Вправа 5. Знайти кут між прямими L_1 і L_2:

1) L_1: $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-8}{-6}$, L_2: $\frac{x+2}{-6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{2}$.

2) L_1: $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{6}$, L_2: $\frac{x+1}{-4}=\frac{y-3}{-7}=\frac{z+1}{4}$.

3) L_1: $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{6}$, L_2: $\frac{x+1}{8}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{4}$.

4) L_1: $\frac{x-5}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-8}{2}$, L_2: $\frac{x+2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{8}$.

5) L_1: $\frac{x+2}{8}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{4}$, L_2: $\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-6}$.

6) L_1: $\frac{x}{-4}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-7}{-4}$, L_2: $\frac{x+6}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$.

7) L_1: $\frac{x-3}{4}=\frac{y+5}{-8}=\frac{z-5}{1}$, L_2: $\frac{x+7}{-3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{6}$.

8) L_1: $\frac{x+6}{1}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z-7}{4}$, L_2: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+5}{6}$.

9) L_1: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{8}$, L_2: $\frac{x+2}{7}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+1}{-4}$.

10) L_1: $\frac{x-7}{6}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-8}{3}$, L_2: $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{6}$.

Тема 5. Лінії другого порядку.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 2 § 19 -20 або [2] Розділ 1, Глава 3 §3.

Вправа 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика та мала піввісі дорівнюють, відповідно $a = 5, b = 2$.

Розв'язання. В рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

підставляємо значення $a = 5, b = 2$:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

це і є канонічне рівняння еліпса.

Вправа 2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо вісь $2a = 16$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

Розв'язання. В рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

потрібно визначити a, b. З умови $a = 8$, далі

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \varepsilon = 8 \cdot \frac{5}{4} = 10,$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 64 = 36.$$

Отже, канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Вправа 3. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $A(9; 6)$.

Розв'язання. В рівняння параболи

$$y^2 = 2px$$

підставимо координати точки $A(9; 6)$

$$6^2 = 2p \cdot 9 \ \Rightarrow 36 = 18p \ \Rightarrow p = 2,$$

Отже, рівняння параболи

$$y^2 = 4x.$$

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що:

1) велика вісь $2a = 10$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{5}$.

2) мала вісь $2b = 30$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$

3) велика вісь $2a = 10$, відстань між фокусами $2c = 8$.

4) мала вісь $2b = 24$, відстань між фокусами $2c = 10$.

5) відстань між фокусами $2c = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

6) мала вісь $2b = 10$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

7) велика вісь $2a = 30$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

8) велика вісь $2b = 24$, відстань між фокусами $2c = 10$.

9) мала вісь $2a = 10$, відстань між фокусами $2c = 8$.

10) відстань між фокусами $2c = 8$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{5}$.

Вправа 2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що:

1) вісі $2a = 16$, $2b = 8$.

2) відстань між фокусами $2c = 10$, вісь $2b = 8$.

3) відстань між фокусами $2c = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

4) вісі $2a = 10$, $2b = 18$.

5) відстань між фокусами $2c = 20$, вісь $2b = 16$.

6) відстань між фокусами $2c = 12$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

7) відстань між фокусами $2c = 34$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{17}{8}$.

8) відстань між фокусами $2c = 26$, вісь $2b = 24$.

9) відстань між фокусами $2c = 26$, вісь $2b = 10$.

10) вісі $2a = 14$, $2b = 12$.

Вправа 3. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $A(x; y)$:

1) $A(8; 2)$;

2) $A(5; 15)$;

3) $A(1; 8)$;

4) $A(8; 2)$;

5) $A(4; 6)$;

6) $A(3; 6)$;

7) $A(4; 6)$;

8) $A(10; 5)$;

9) $A(6; 12)$;

10) $A(4; 2)$.

Тема 6. Поверхні другого порядку.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [2] Розділ 1, Глава 3 § 5.

Вправа 1. Визначити вид поверхні:

$$x^2 + 2\,y^2 - 6z^2 = 0.$$

Розв’язання. Зведемо до канонічного вигляду:

$$x^2 + 2\,y^2 - 6z^2 = 0,$$
$$\frac{x^2 + 2\,y^2 - 6z^2}{6} = 0,$$
$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 0,$$
$$\frac{x^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{z^2}{1^2} = 0.$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням конуса.

Вправа 2. Визначити вид поверхні:

$$8x^2 - 4\,y^2 + 24z^2 - 48 = 0.$$

Розв’язання. Зведемо до канонічного вигляду:

$$8x^2 - 4\,y^2 + 24z^2 - 48 = 0,$$
$$8x^2 - 4\,y^2 + 24z^2 = 48,$$
$$\frac{8x^2 - 4\,y^2 + 24z^2}{48} = \frac{48}{48},$$
$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{2} = 1\,,$$
$$\frac{x^2}{\sqrt{6}^2} - \frac{y^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Отримане рівняння є рівнянням однополосного гіперболоїду з центральною віссю Oy.

Вправа 3. Визначити вид поверхні:

$$8x^2 + 3\,y^2 - 48z = 0.$$

Розв’язання. Зведемо до канонічного вигляду:

$$8x^2 + 3\,y^2 - 48z = 0.$$
$$48z = 8x^2 + 3\,y^2.$$
$$z = \frac{8x^2 + 3\,y^2}{48}.$$
$$z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{16}.$$

Отримане рівняння є рівнянням еліптичного параболоїду.

Задачі для самостійного розв’язання.

Вправа 1. Визначити вид заданих поверхонь і схематично побудувати їх.

1) $3x^2 + 2\,y^2 - 4z^2 + 12 = 0.$
2) $3x^2 - 4\,y^2 + 24z = 0.$
3) $x^2 - 9\,y^2 - 4z^2 + 1 = 0.$
4) $6x^2 - y^2 + 4z^2 = 0.$

5) $4x^2 - 12\,y^2 + 6z^2 = 12.$

6) $x^2 + 3\,y^2 - 9z = 0.$

7) $4x^2 + \ y^2 = 9.$

8) $x^2 + 4\,y^2 + 8z^2 - 16 = 0.$

9) $10x^2 + 5\,y^2 - 2z^2 - 50 = 0.$

10) $4x^2 - 12\,y^2 - 6z^2 = 12\,.$

Тема 7. Функції. Границя функції. Неперервність функції.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 3 § 3 – 5, 7 або [2] Розділ 2, Глава 4 §§ 1-4, Глава 5 §§ 1-7.

Вправа 1. Знайти границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3(n^2-n)}{4n+n^5}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3(n^2-n)}{4n+n^5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5-2n^4}{4n+n^5} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(2-2\cdot\frac{1}{n}\right)}{n^5\left(4\cdot\frac{1}{n^4}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-2\cdot\frac{1}{n}}{4\cdot\frac{1}{n^4}+1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Вправа 2. Знайти границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-11}\right)^{-3n+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-11}\right)^{-3n+1} = [1^\infty] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+5}{2n-11}-1\right)^{-3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+5-2n+11}{2n-11}\right)^{-3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{16}{2n-11}\right)^{-3n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{16}{2n-11}\right)^{\frac{2n-11}{16}\cdot\frac{16\cdot(-3n+1)}{2n-11}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{16}{2n-11}\right)^{\frac{2n-11}{16}\cdot\frac{-48n+16}{2n-11}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{16}{2n-11}\right)^{\frac{2n-11}{16}}\right)^{\frac{-48n+16}{2n-11}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{16}{2n-11}\right)^{\frac{2n-11}{16}}\right)^{\frac{n(-48+\frac{16}{n})}{n(2-\frac{11}{n})}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}(e)^{\frac{-48+\frac{16}{n}}{2-\frac{11}{n}}} = e^{-24}.$$

Вправа 3. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{2x^2-5x+3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{2x^2-5x+3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2\left(x-\frac{3}{5}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{3\left(1-\frac{1}{3}\right)}{2\left(1-\frac{3}{5}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{3\cdot\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{2}{5}} =$$

$$= \frac{10}{4} = 2{,}5.$$

Вправа 4. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-7x+1}{2x^2-9x^3+3}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-7x+1}{2x^2-9x^3+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4-7\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2\cdot\frac{1}{x}-9+3\cdot\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-7\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2\cdot\frac{1}{x}-9+3\cdot\frac{1}{x^3}}=\frac{4}{-9}.$$

Вправа 5. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to0}\frac{cos6x-1}{x\cdot arcsin2x}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to0}\frac{cos6x-1}{x\cdot arcsin2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\lim_{x\to0}\frac{-2sin^2 3x}{x\cdot arcsin2x}=\lim_{x\to0}\frac{-2\left(\frac{sin3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}{\frac{arcsin2x}{2x}\cdot 2x^2}=\frac{-2\cdot1^2\cdot9}{1\cdot2}=-9.$$

Вправа 6. Дослідити функцію на неперервність і вказати характер точок розриву.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{якщо} -\infty<x<0,\\ 2-x, & \text{якщо } 0\le x<3,\\ 8-x^2, & \text{якщо } 3\le x<+\infty. \end{cases}$$

Розв’язання.

Функція $f(x)$ є неперервною на $(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$. В точках $x=0$, $x=3$ можливий розрив, тому досліджуємо ці точки:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}x^2=0,$$

$$f(0)=2-0=2,$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}(2-x)\ =2,$$

отже, точка $x=0$ є точкою розриву I роду.

$$\lim_{\substack{x\to3\\x<3}}f(x)=\lim_{\substack{x\to3\\x<3}}2-x=-1,$$

$$f(3)=8-3^2=-1,$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x>3}}f(x)=\lim_{\substack{x\to3\\x<3}}(8-x^2)\ =-1,$$

отже, точка $x=3$ є точкою неперервності.

Таким чином, дана функція є неперервною на $(-\infty;0)\cup(0;\ +\infty)$.

Задачі для самостійного розв’язання.

Вправа 1. Обчислити границі послідовності

Варіант №1.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2(n-1)^2}{2n-n^5}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+2}\right)^{-n}$.

Варіант №2.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n^2+5n^3}{2n-n^3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-13}{n+2}\right)^{2n}$.

Варіант №3.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-2)^3}{100n^3-3n^4+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{10n+3}{10n+2}\right)^{2n^3}$

Варіант №4.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^4}{(n+1)^4-n^4}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{4n+2}\right)^{5n^2-n}$.

Варіант №5.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^2-(n+5)^2}{2n-n^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-7}{n+2}\right)^{-5n}$.

Варіант №6.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{100}+2000}{(2n-n^{99})n}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n-1}{7n+2}\right)^{3n}$.

Варіант №7.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+2}\right)^{n}$.

Варіант №8.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-2)^3}{100n^3-3n^4+1}$..

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+12}{4n+3}\right)^{5n-n^2}$.

Варіант №9.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^2-(n+5)^2}{2n-n^2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n-1}{7n+2}\right)^{5n-3}$.

Варіант №10.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3^{n+2}}{5-3^n}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+2}\right)^{-20n+3}$.

Вправа 2 Обчислити границі функцій

Варіант №1.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$, 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$, 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{4x}$,

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$, 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$.

Варіант №2

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$, 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$, 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tgx}{1-\cos 4x}$,

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$, 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{5x^3+3x^2-2x}$.

Варіант №3

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2+3}{3x^2+1}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Варіант №4

1. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^3+1}}{\arcsin(5x^3)}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$

Варіант №5

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{4x-3}\right)^{4x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{6x}$

Варіант №6

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+x-2}$, 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2x+5}\right)^{1-3x}$, 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$,

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{sinx}-e^{sin2x}}{x}$, 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x}{5x^2}$.

Варіант №7

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$

Варіант №8

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^3+4x+2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 6x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{1-2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

Варіант №9

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-9x+4}$, 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$, 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 3x}$,

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$, 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Варіант №10

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$ 2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$ 5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$

Вправа 3. Дослідити функцію на неперервність і вказати характер точок розриву. Виконайте рисунок.

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо} -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \le x < 4, \\ -x^2, & \text{якщо } 4 \le x < +\infty. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо} -\infty < x < -2, \\ 2 - x, & \text{якщо} -2 \le x < 3, \\ 3 + 2x, & \text{якщо } 3 \le x < +\infty. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & \text{якщо} -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \le x < 3, \\ 4 - x^2, & \text{якщо } 3 \le x < +\infty. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{якщо} -\infty < x < 2, \\ -x, & \text{якщо } 2 \le x < 4, \\ 1 + x^2, & \text{якщо } 4 \le x < +\infty. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{якщо} -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \le x < 4, \\ 1 + (x-2)^2, & \text{якщо } 4 \le x < +\infty. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{якщо} -\infty < x < 0, \\ 2x + 4, & \text{якщо } 0 \le x < 4, \\ 10 - x^2, & \text{якщо } 4 \le x < +\infty. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{якщо} -\infty < x < 3, \\ 10 - 3x, & \text{якщо } 3 \le x < 5, \\ 15 - x^2, & \text{якщо } 5 \le x < +\infty. \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 10 + x^2, & \text{якщо} -\infty < x < 0, \\ 5 + x, & \text{якщо } 0 \le x < 3, \\ x^2 - 1, & \text{якщо } 3 \le x < +\infty. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{якщо} -\infty < x < 1, \\ 5 - x, & \text{якщо } 1 \le x < 4, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } 4 \le x < +\infty. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{якщо} -\infty < x < 2, \\ \frac{2}{x}, & \text{якщо } 2 \le x < 4, \\ -x, & \text{якщо } 4 \le x < +\infty. \end{cases}$

Тема 8. Похідна функції. Дослідження функції за допомогою похідної.

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 4 § 1-6, 9-11 або [2] Розділ 3, Глава 6 §§ 1-8, Глава 7 §§ 1-5.

Вправа 1. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{10}{x} + x^2 - lnx - 3$.

Розв'язання.

$$f'(x) = \left(\frac{10}{x} + x^2 - lnx - 3\right)' = \left(10 \cdot \frac{1}{x}\right)' + (x^2)' - (lnx)' - (3)' = 10 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x - \frac{1}{x} =$$

$= -\frac{10}{x^2} + 2x - \frac{1}{x}.$

Вправа 2. Знайти похідну функції $f(x) = f(x) = x \cdot cosx$.

Розв'язання.

$$f'(x) = (x \cdot cosx)' = (x)' \cdot cosx + x \cdot (cosx)' = cosx + x \cdot (-sinx) = cosx - x \cdot sinx.$$

Вправа 3. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{1+2x^3}{2+x^4}$.

Розв'язання.

$$f'(x) = \left(\frac{1+2x^3}{2+x^4}\right)' = \frac{(1+2x^3)' \cdot (2+x^4) - (1+2x^3) \cdot (2+x^4)'}{(2+x^4)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 \cdot (2+x^4) - (1+2x^3) \cdot 4x^3}{(2+x^4)^2} = \frac{12x^2 + 6x^6 - 4x^3 - 8x^6}{(2+x^4)^2} = \frac{12x^2 - 4x^3 - 2x^6}{(2+x^4)^2}.$$

Вправа 4. Знайти похідну функції $f(x) = \sqrt{sinx + x}$.

Розв'язання.

$$f'(x) = \left(\sqrt{sinx + x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{sinx + x}} \cdot (sinx + x)' = \frac{1}{2\sqrt{sinx + x}} \cdot (cosx + 1) = \frac{cosx + 1}{2\sqrt{sinx + x}}.$$

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Знайти похідну функції $f(x)$.

Варіант 1.

1) $f(x) = \frac{3}{x} + x^5 + lnx$.
2) $f(x) = x^2 \cdot sinx$.
3) $f(x) = \frac{10-2x^3}{2+x^5}$.
4) $f(x) = e^{-x^2} + 10$.

Варіант 2.

1) $f(x) = 2^x + \frac{2}{x^2} + x^5 + 100$.
2) $f(x) = x^2 \cdot e^x$.
3) $f(x) = \frac{sinx+x}{cosx+1}$.
4) $f(x) = \sqrt{tgx}$.

Варіант 3.

1) $f(x) = e^x + \frac{2}{x^2} + x^3 + 100$.
2) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$.
3) $f(x) = \frac{cosx+x}{sinx+1}$.
4) $f(x) = \sqrt{ctgx + 1}$.

Варіант 4.

1) $f(x) = e^x + ctgx.$
2) $f(x) = x^3 \cdot lnx.$
3) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3+1}.$
4) $f(x) = \sqrt{e^x + 1}.$

Варіант 5.

1) $f(x) = 10e^x + lnx.$
2) $f(x) = x^3 \cdot 3^x.$
3) $f(x) = \frac{x^4+3x}{x^2+1}.$
4) $f(x) = \ln(x^2 + x).$

Варіант 6.

1) $f(x) = \arccos x + \sqrt{x}.$
2) $f(x) = x^3. e^x.$
3) $f(x) = \frac{2+3x}{\sqrt{x}}.$
4) $f(x) = \ln \sin x.$

Варіант 7.

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}.$
2) $f(x) = x^3. \mathrm{arctg}x$
3) $f(x) = \frac{x^6}{1+x^{12}}.$
4) $f(x) = ln \arccos x.$

Варіант 8.

1) $(x) = \frac{1}{x} + arcsinx.$
2) $f(x) = x^3. e^x.$
3) $f(x) = \frac{x^4}{1+x^8}.$
4) $f(x) = arcsin\sqrt{x}.$

Варіант 9.

1) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x^2 + 100x.$
2) $f(x) = x^2 \cdot arcsinx.$
3) $f(x) = \frac{1-2x^3}{5+x^2}.$
4) $f(x) = e^{-cosx}.$

Варіант 10.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 100x.$
2) $f(x) = x^2 \cdot 10^x.$
3) $f(x) = \frac{arccosx}{x^2}.$
4) $f(x) = \text{arctg}x^6.$

Тема 9. Невизначений інтеграл

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 6 § 1 або [2] Розділ 4, Глава 8 §§ 1-9.

Таблиця невизначених інтегралів.

Кожна з наступних формул є вірною на кожному проміжку, що належить до області визначення підінтегральної функції:

1. $\int x^{\alpha} du = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, де $\alpha \neq -1$.

Часткові випадки:

а) $\int dx = x + C$, б) $\int x du = \frac{x^2}{2} + C$, в) $\int x^2 du = \frac{x^3}{3} + C$, г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} du = 2\sqrt{x} + C$.

2. $\int x^{-1} du = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Окремий випадок : $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$.

7. $\int \cos ec^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$.

8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

Окремий випадок : $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C$, (при $a = 1$).

9. $\int \frac{du}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

Окремий випадок: $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$, (при $a = 1$).

11. $\int \frac{du}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + C, \quad a \neq 0.$

12. $\int 0dx = C$.

В цих формулах a - стала, x - незалежна змінна , С - довільна стала.

Вправа 1. Знайти інтеграл $\int \left(\sqrt{x} + cosx\right) dx.$

Розв'язання.

$$\int \left(\sqrt{x} + cosx\right) dx = \int \sqrt{x}dx + \int cosxdx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + sinx + C = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} + sinx + C.$$

Вправа 2. Знайти інтеграл $\int \left(x - 2e^x\right)dx$.

Розв'язання.

$$\int \left(x - 2e^x\right)dx = \int xdx - 2\int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C.$$

Вправа 3. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \left(\frac{x^{1/2}}{x^{1/4}} - 2\frac{x^{2/3}}{x^{1/4}} + \frac{1}{x^{1/4}} \right) dx == \int (x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4})dx =$$

$$= \int x^{1/4}dx - 2\int x^{5/12}dx + \int x^{-1/4})dx = \frac{4}{5}x^{5/4} - \frac{24}{17}x^{17/12} + \frac{4}{3}x^{3/4} + C.$$

Вправа 4. Знайти інтеграл $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Розв'язання.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

Вправа 4. Знайти інтеграл $\int \sin(3x - 5)dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin(3x - 5)dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x - 5)) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x - 5) + C.$$

Вправа 5. Знайти інтеграл $\int tg^2 x dx$.

Розв’язання.

Вправа 6. Знайти інтеграл $\int \sqrt[5]{5x^3+1} \cdot x^2 dx$.

Розв’язання. Виконаємо заміну $t=\varphi(x)=5x^3+1$, тоді

$dt = t'(x)dx = (5x^3+1)dx = 15x^2 dx$, отже $x^2 dx = \frac{1}{15}dt$. Таким чином отримуємо

$$\int \sqrt[5]{5x^3+1} \cdot x^2 dx = \int \sqrt[5]{t} \cdot \frac{1}{15}dt = \frac{1}{15}\int t^{1/5}dt = \frac{1}{15} \cdot \frac{t^{1/5}+1}{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{1}{15} \cdot \frac{t^{6/5}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{6} t^{6/5} + C =$$

$$= \frac{1}{18}t^{6/5} + C = \frac{1}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = \frac{1}{18}t \cdot \sqrt[5]{t} + C = \begin{bmatrix} \text{повернемося до} \\ \text{початкової змінної } x \\ t = 5x^3+1 \end{bmatrix} = .$$

$$= \frac{1}{18}(5x^3+1)\sqrt[5]{5x^3+1} + C$$

Зауваження. На практиці зручно користуватися наступними формулами:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

За допомогою цих формул обчислюються інтеграли вигляду:

$$1) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$3) \int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}, \quad 4) \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Вправа 7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2-11x+17}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{3x^2-11x+17}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{17}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-2x\cdot\frac{11}{6}+\left(\frac{11}{6}\right)^2-\frac{121}{36}+\frac{17}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{83}{36}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{83}}{6}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{83}}arctg\frac{x-\frac{11}{6}}{\frac{\sqrt{83}}{6}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{83}}arctg\frac{6x-11}{\sqrt{83}}+C$$

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{83}}arctg\frac{6x-11}{\sqrt{83}}+C$.

Вправа 8. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x^2-3x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5-\left(x^2-2x\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{29}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{29}}{2}}+C=$$

$$=\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{29}}+C.$$

Відповідь: $\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{29}}+C.$

Вправа 9. Знайти інтеграл $\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+6)}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+8}{x^2-2x-5}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-x+1}{\sqrt{6}+x-1}\right| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-x+1}{\sqrt{6}+x-1}\right| + C.$

Вправа 10. Знайти інтеграл $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{6}{5}}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)-4+\frac{6}{5}}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx + \frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{14}{5}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+4x+10} -$$

$$-7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}| + C = 5\sqrt{x^2+4x+10} -$$

$$-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.$$

Відповідь: $5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.$

Вправа 11. Знайти інтеграл $\int x^2 \sin x dx$;

Розв'язання.

$$\int \underbrace{x^2}_{u(x)} \underbrace{\sin x dx}_{dv(x)} = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x^2; & dv = \sin x dx \\ du = (x^2)' dx = 2x dx; & v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -x^2 \cos x - 2\int x(-\cos x)dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \textit{до останнього інтегралу знову} & \\ \textit{застосовуємо формулу інтнгрування частинами} & \\ u = x; & dv = \cos x dx \\ du = x' dx = dx; & v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Вправа 12. Знайти інтеграл $\int x \ln x dx$;

Розв’язання.

$$\int x \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x; & dv = x dx \\ du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx; & v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Вправа 13. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

Розв'язання. Приводимо неправильний дріб до правильного за допомогою ділення звичайним «стовпчиком»:

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = x + 1 + \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

Далі,

а) розкладаємо знаменник на множники

$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3)$;

б) записуємо схему розкладання раціонального дробу

$$\frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3};$$

в) звільняємося від знаменників

$$2x^2-1=A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x).$$

г) складаємо систему рівнянь, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, а саме:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & A+B+C=2 \\ x^1: & 5A+3B+2C=0 \\ x^0: & 6A=-1 \end{array}\right\}$$

д) розв'язуємо отриману систему за теоремою Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&3&2\\6&0&0\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=-6, \qquad \Delta_A=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&3&2\\-1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=1,$$

$$\Delta_B=\begin{vmatrix}1&2&1\\5&0&2\\6&-1&0\end{vmatrix}=21, \qquad \Delta_C=\begin{vmatrix}1&1&2\\5&3&0\\6&0&-1\end{vmatrix}=-34,$$

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=-\frac{7}{2},\quad C=\frac{\Delta_C}{\Delta}=\frac{17}{3}.$$

Очевидно, що систему можна розв'язати й іншими методами. Остаточно отримаємо

$$\int\frac{x^4-4x^3+3x^2+6x-1}{x^3-5x^2+6x}dx=\int(x+1)dx-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{17}{3}\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+c.$$

Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

зводиться до інтегралу від раціональної функції лише в трьох випадках:

а) коли p - ціле число, покладаємо $x=t^r$, де r - спільний знаменник дробів m та n.

б) коли $\dfrac{m+1}{n}$ - ціле число, покладаємо $a+bx^n=t^N$, где N знаменник дробу p.

в) коли $\dfrac{m+1}{n}$ + p - ціле число, підстановкою $ax^{-n}+b=t^N$, где N – знаменник дробу p.

Вправа 14. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx.$

Розв’язання . Перетворимо підінтегральний вираз $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx = \int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^{-2}dx$, отже

$m=\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{3},\ p=-2$. Маємо перший випадок, коли p = - 2 - ціле. Застосовуємо підстановку $x = t^6,\ dx = 6t^5 dt$, отримуємо

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx = \begin{bmatrix} x=t^6; \\ dx = 6t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^3}{(1+t^2)^2}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt = \begin{bmatrix} \textit{поділемо чисельник} \\ \textit{на знаменник} \end{bmatrix} =$$

$$= 6\int\left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt = 6\int t^4dt - 12\int t^2dt + 18\int dt - 6\int \frac{4t^2+4-4+3}{(1+t^2)^2}dt = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t -$$

$$-6\int \frac{4(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2}dt = \begin{bmatrix} \textit{під знаком інтегралу чисельник} \\ \textit{почленно ділимо на знаменник} \end{bmatrix} = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 24\int \frac{dt}{1+t^2} +$$

$$+6\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \begin{bmatrix} \textit{до останнього інтегралу} \\ \textit{застосовуємо рекуррентну} \\ \textit{формулу (2.9), де } a=1 \end{bmatrix} = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 24arctgt +$$

$$+6\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + arctgt\right) + C = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 24arctgt + \frac{3t}{t^2+1} + 3arctgt + C =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 21arctgt + \frac{3t}{t^2+1} + C = \begin{bmatrix} \textit{Повертаємось до} \\ \textit{початкової змінної} \\ t=\sqrt[6]{x} \end{bmatrix} = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} -$$

$$-21arctg\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C.$$

Відповідь: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21arctg\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C.$

Вправа 15. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Розв’язання . В цьому випадку $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, звідки m = 1; n = $\frac{2}{3}$; p = $-\frac{1}{2}$;

знаходимо, що $\frac{m+1}{n} = 3$ – ціле число, отже маємо 2-й випадок. Покладаємо $1+x^{\frac{2}{3}} = t^2$. Тоді

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.=\left[\begin{array}{l}1+x^{\frac{3}{2}}=t^2 \quad\Rightarrow\quad x^{\frac{3}{2}}=t^2-1 \quad\Rightarrow\quad x=\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\\ dx=\left(\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\right)'dt=\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2tdt=3t\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}dt\end{array}\right]=\int\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 3t\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}dt}{\sqrt{t^2}}=$$

$$=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=3\int(t^4-2t^2+1)dt=3\left(\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+t\right)+C=\frac{3t^5}{5}-2t^3+3t+C==\left[\begin{array}{l}t^2=1+x^{\frac{3}{2}}\\ t=\sqrt{1+\sqrt{x^3}}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{3\left(1+\sqrt{x^3}\right)^{\frac{5}{2}}}{5}-2\left(1+\sqrt{x^3}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{1+\sqrt{x^3}}+C.$$

Відповідь: $\dfrac{3\left(1+\sqrt{x^3}\right)^{\frac{5}{2}}}{5}-2\left(1+\sqrt{x^3}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{1+\sqrt{x^3}}+C.$

Вправа 16. Знайти інтеграл $\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

Розв'язання. Тут $m=\frac{1}{3};\ n=2;\quad p=\frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n}+p=1-$ ціле . Покладаємо $3x^{-2}+1=t^2$.

Тоді

$$I=\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=-\frac{9}{2}\int\frac{t^3dt}{(t^3+1)^2}=\frac{3}{2}\int td\left(\frac{1}{t^3+1}\right)=\frac{3t}{2(t^3+1)}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3+1}.$$

Поскольку

$$\int\frac{dt}{t^3+1}=\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}},$$

то окончательно имеем

$$I=\frac{3t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,\text{ где}\quad t=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}.$$

Ответ: $I=\dfrac{3t}{2(t^3+1)}-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}arctg\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,$ где $t=\dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Обчислити інтеграли і отримані відповіді перевірити диференціюванням.

1) $\int(x+\sqrt{x})dx$; 6) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$;

2 $\int 2^x\cdot 5^{2x}dx$; 7) $\int\left(\frac{8}{x^3}+\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x}\right)dx$;

3) $\int\frac{dx}{5x+4}$; 8) $\int ctg^2xdx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10}}$;   9) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-5}}$;

5) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$;   10) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

Вправа 2. Обчислити інтеграли і отримані відповіді перевірити диференціюванням:

1) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$;   6) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x+1}}$;

2) $\int tgx dx$;   7) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1}dx$;

3) $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$;   8) $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

4) $\int \frac{x^3 dx}{x^4+a^4}$;   9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+3}}$;

5) $\int \frac{x dx}{\sqrt{b^2x^2+a^2}}$;   10) $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вправа 3. Знайти інтеграл

1) $\int \ln x dx$;   6) $\int x^2 \ln x dx$;

2) $\int (x+1)\sin x dx$;   7) $\int x\cos 3x dx$;

3) $\int \arcsin x dx$;   8) $\int x arctg x dx$;

4) $\int (x+5)e^x dx$;   9) $\int x\ln(x-1)dx$;

5) $\int e^x \cos x dx$;   10) $\int x\cdot 5^x dx$.

Вправа 4. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^2(x+4)^2}$;   6) $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}$

2) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$ 7) $\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}$;

3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$ 8) $\int \frac{x^5 dx}{x^3-1}$;

4) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$ 9) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+x}dx$

5) $\int \frac{(x^3-2x^2+4)dx}{x^3(x-2)^2}$

10) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$

Вправа 5. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$;

6) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{(x-2)}{x}}dx$;

2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$;

3) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

8) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

9) $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

5) $\int x\sqrt{3-x}dx$;

10) $\int x^2\sqrt{4-x}^{\,2}dx$

Тема 10. Визначений інтеграл

Теоретичний матеріал викладається на лекціях та практичних заняттях. Рекомендовано використовувати підручник [1] Розділ 6 § 2 або [2] Розділ 4, Глава 9 §§ 1-7.

Вправа 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx$.

Розв’язання.

$$\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx = \left(2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4 = \left(2\sqrt{4}+\frac{3}{2}\sqrt{4^3}\right)-\left(2\sqrt{1}+\frac{3}{2}\sqrt{1^3}\right) =$$

$$= (4+12)-\left(2+\frac{3}{2}\right) = 16-3\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

Вправа 2. Обчислити площу фігури *Ф*, що обмежена параболою $y=-x^2+6x-7$ та прямою $y=x-3$ (рис.1).

Розв’язання. Побудуємо пряму $y=x-3$. При $x=3$ маємо $y=0$, при $x=0$ буде $y=-3$. Отже, точки $(3;\,0)$ та $(0;\,-3)$ - це точки перетину даної прямої з координатними вісями.

Тепер знайдемо координати вершини параболи $y=6x-x^2-7$. Для цього перепишемо в стандартному вигляді $y=-x^2+6x-7$, а потім за формулами

$$x_{верш}=-\frac{b}{2a},\ y_{верш}=y(x_{верш})$$

знаходимо $x_{верш} = -\dfrac{6}{2\cdot(-1)} = 3$, $y_{верш} = y(3) = -3^2 + 6\cdot 3 - 7 = 2$. Отже, вершина параболи знаходиться в точці $(3;\,2)$, а її вітки напрямлені вниз, оскільки старший коефіцієнт від'ємний.

Далі, знайдемо абсциси точок перетину даних кривих: з рівняння $x - 3 = 6x - x^2 - 7$, або $x^2 - 5x + 4 = 0$ знаходимо $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ (ці точки позначено на рис.1).

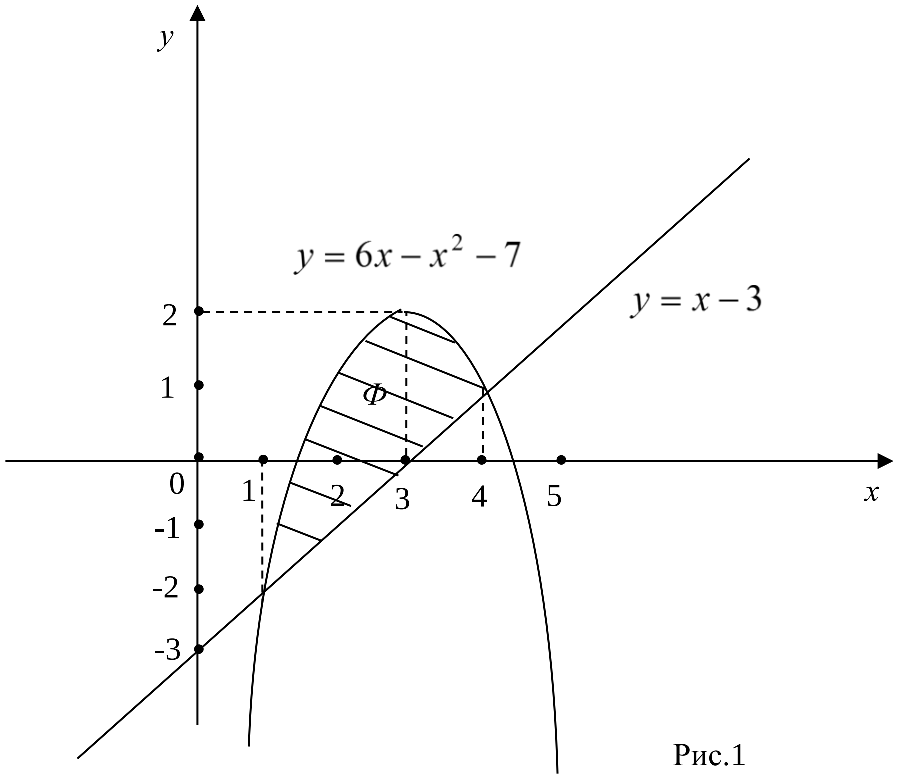


Рис.1

Ззнаходимо площу фігури:

$$S = \int_1^4 ((6x - x^2 - 7) - (x-3))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Bigg|_1^4 =$$

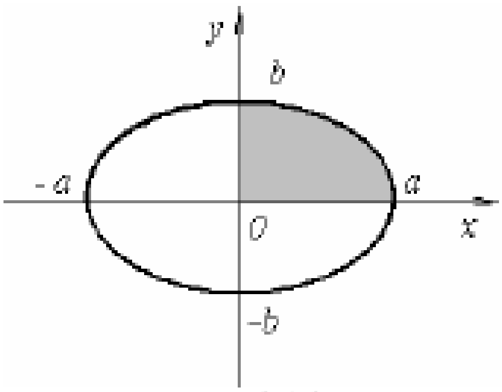
$$= \frac{5}{2}\cdot(4^2 - 1^2) - \frac{1}{3}\cdot(4^3 - 1^3) - 4\cdot(4-1) = \frac{5}{2}\cdot 15 - \frac{1}{3}\cdot 63 - 4\cdot 3 = 4\frac{1}{2} \quad (\textit{кв.од.})$$

Відповідь: $4\dfrac{1}{2}$ *кв.од.*

Задача 2. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Розв'язання. Еліпс – фігура, симетрична відносно *Ox* і *Oy*. Тому достатньо обчислити лише площу фігури, розташованої в I чверті, враховуючи, що при цьому *t* змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до *0*. Позначимо площу зафарбованої частини, обмеженої еліпсом в I чверті, через S_1, й знайдемо її за відповідною формулою:



$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (a\cos t)' dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt = -\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos 2t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \left[\begin{array}{l} \textit{верхня підстановка} \\ \textit{перетворює на нуль} \\ \textit{вираз, що стоїть у дужках} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}ab\left(0 - \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{2\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}ab\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi ab}{4} \quad (\textit{кв.од}).$$

Тепер знайдемо площу всієї фігури

$$S = 4 \cdot S_1 = 4 \cdot \frac{\pi ab}{4} = \pi ab \quad (\textit{кв. од}).$$

Зауважимо, що у випадку, коли $a = b = R$, еліпс перетворюється на коло, й отже, площа в цьому випадку буде співпадати з, відомою зі шкільного курсу математики, площею круга $S = \pi \cdot R^2$.

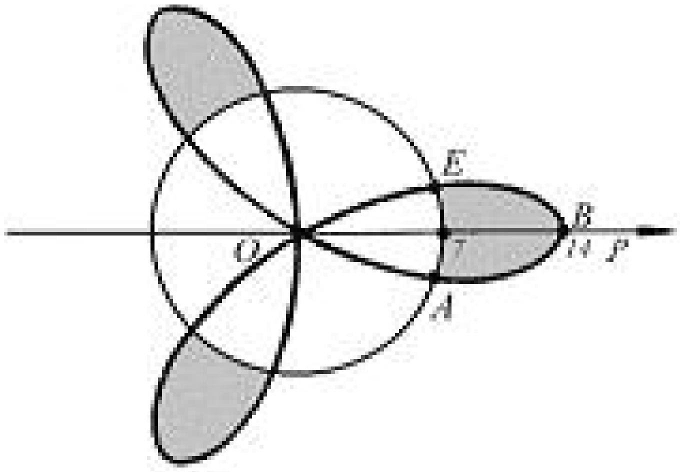
Відповідь: площа фігури, обмеженої еліпсом, дорівнює πab кв.од.

Задача 3.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $r = 7$ та $r = 14\cos 3\varphi,\ r \geq 7$.

Розв'язання. Перше з рівнянь $r = 7$ визначає коло з центром у полюсі та радіусом $R = 7$. Друге рівняння $r = 14\cos 3\varphi$ задає трипелюсткову „троянду". Умова $r \geq 7$

означає, що нас буде цікавити лише та частина площини, яка знаходиться поза колом радіусом $R = 7$. Отримана фігура має вигляд



Знайдена фігура, площу S якої необхідно знайти, складається з трьох рівновеликих частин. Знайдемо площу S_1 однієї з цих частин, наприклад, *ABE.* Шукаємо значення φ, які відповідають точкам перетину кривих $r = 7$ та $r = 14\cos 3\varphi$, з системи

$$\begin{cases} r = 7; \\ r = 14\cos 3\varphi; \end{cases} \Rightarrow 7 = 14\cos 3\varphi \Rightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\varphi = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z \quad \Rightarrow \quad 3\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in Z .$$

Значення φ для точок *A* та *E* знаходимо, покладаючи $n = 0$:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{9}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{9},$$

тобто, φ змінюється у проміжку $\left[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right]$. Застосуємо формулу (8) для обчислення площі S_1 частини *ABE* , яка обмежена графіками функцій $r_1 = 7$ та $r_2 = 14\cos 3\varphi$ й $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right]$:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left[(14\cos 3\varphi)^2 - 7^2\right]d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left[(196\cos^2 3\varphi - 49\right]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 196\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\cos^2 3\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\cdot 49\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}d\varphi = 98\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)d\varphi - \frac{49}{2}\cdot\varphi\ \Big|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} =$$

$$= 49\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} - \frac{49}{2}\left(\frac{\pi}{9} - \left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) = 49\left(\frac{\pi}{9} - \left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) + \frac{49}{6}\left(\sin\frac{6\pi}{9} - \sin\left(-\frac{6\pi}{9}\right)\right) -$$

$$-\frac{49}{2}\cdot\frac{2\pi}{9} = 49\cdot\frac{2\pi}{9} + \frac{49}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \frac{49\pi}{9} = \frac{49\sqrt{3}}{6} + \frac{49\pi}{9} \quad (кв.\ од).$$

Площа всієї фігури буде дорівнювати:

$$S = 3\cdot S_1 = 3\cdot\left(\frac{49\sqrt{3}}{6} + \frac{49\pi}{9}\right) = \frac{49\sqrt{3}}{2} + \frac{49\pi}{3} \quad (\text{кв. од.})$$

Відповідь: $\frac{49\sqrt{3}}{2} + \frac{49\pi}{3}$ кв. од.

Задачі для самостійного розв'язання.

Вправа 1. Обчислити визначений інтеграл

Варіант 1.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2t - \cos 2t)^2 dx$;

2. $\int_1^4\left(\frac{4}{x^2} + 2x\right)dx$.

Варіант 2.

1. $\int_0^{\ln 2} xe^{-2x}dx$;

2. $\int_1^4\left(4\sqrt{x} + 3x^2\right)dx$.

Варіант 3.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$;

2. $\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

Варіант 4.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos xdx$;

2. $\int_{-1}^{2}\frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx$.

Варіант 5.

1. $\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$;

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos 3xdx$.

Варіант 6.

1. $\int\limits_{1}^{2} x \cdot \log_2 x dx;$ 2. $\int\limits_{1}^{2}\left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right)dx.$

Варіант 7.

1. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{3} dx;$ 2. $\int\limits_{-1}^{-3} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} dx.$

Варіант 8.

1. $\int\limits_{0}^{1} x \cdot 2^{\frac{x}{2}} dx;$ 2. $\int\limits_{1}^{4}\left(4x^3 - 3\sqrt{x}\right)dx.$

Варіант 9.

1. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x dx;$ 2. $\int\limits_{0}^{1}\left(4x^3 - 2x + 1\right)dx.$

Варіант 10.

1. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+\ln x)^2} dx;$ 2. $\int\limits_{1}^{8} \frac{1+2\sqrt{x}}{x^3} dx.$

Література:

1. Вища математика. Підручник. Домбровський В. А., Крижанівський І. М. та ін, за редакцією Шинкарика М. І. Тернопіль: Видавництво Кап'юка, 2003. 480 с.
2. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: підручник. Київ: Знання, 2007.454 с.
3. Макаренко В. О. Вища математика для економістів: навч. посібник Київ : Знання, 2008. 517 с
4. Клепко В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ: Центр навчальної літератури, 2019.594 с.
5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Учебное пособие для вузов. Москва: Наука, 19864. 592 с
6. .Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды. Учебное пособие для вузов. Москва: Наука, 1984. 520 с.