МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для самостійної роботи

та виконання індивідуального завдання

для студентів спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування

з дисципліни «Статистика та статистичні методи дослідження»

Одеса – 2021

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання для студентів спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування з дисципліни «Статистика та статистичні методи дослідження», частина I «Теорія ймовірностей».

Розглянуто на засідання кафедри вищої математики і статистики.

Протокол від 27 серпня 2021 № 1

Розробник:

к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики М. Г. Волкова.

Рецензенти:

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри менеджменту організацій ОРІДУ НАДУ при Президентові України Сметаніна Людмила Сергіївна.

кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Урум Галина Дмитрівна.

Статистистика та статистичні методи дослідження

Частина І. Теорія ймовірностей

Зміст

Вступ

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності в явищах та випробуваннях, результати яких не можуть бути заздалегідь передбачені.

Виникнення теорії ймовірностей як науки відносять до Середньовіччя, до романтичного часу королів та мушкетерів, прекрасних дам й благородних лицарів. Початковим поштовхом до розвитку теорії ймовірностей послужили задачі, що відносяться до азартних ігор таких, як орлянка, кості, карти, рулетка, коли в них почали застосовувати кількісні розрахунки та прогнозування шансів на успіх. В перекладі з французького «азарт» (le hazard) означає випадок. Такого роду задачі неодноразово ставились в середньовічній літературі, в тому числі, й художній, й розв'язувались іноді вірно, а іноді невірно. Потужним стимулом розвитку теорії ймовірностей являли собою запити страхової справи, яка зародилась ще в XIV столітті, а також, починаючи з XVII віку, демографії, або, як тоді говорили, політичної арифметики. Зародження теорії ймовірностей почалось з того, що придворнийий французького короля, шевальє (кавалер) де Мере (1607-1648), сам азартний гравець, звернувся до французького фізика, математика й філософа Блеза Паскаля (1607-1648) з питанням до задачі про очки. До нас дійшли два знаменитих питання де Мере до Паскаля: 1) скільки разів необхідно кинути дві гральні кістки, щоб випадків випадіння одразу двох шісток було більше половини від загального числа кидань; 2) як справедливо розділити поставленні на кін гроші, якщо гравці припинили гру передчасно? В 1654 г. Паскаль звернувся до математика П'ера Ферма (1601-1665) й листувався з ним з приводу цих задач. Вони удвох встановили деякі вихідні положення теорії ймовірностей, зокрема прийшли до поняттю математичного сподівання й теорем додавання та множення ймовірностей. Далі голландський вчений Х. Гюйгенс (1629-1695) у книзі «Про розрахунки при азартних іграх» (1657 г.) намагався дати власний розв'язок питань, що були порушені в цьому листуванні. Іншим поштовхом для розвитку теорії ймовірностей послужила страхова справа, а саме з кінця XVII століття на науковій основі стало здійснюватися страхування від нещасних випадків й стихійного лиха. У XVI-XVII століттях у всіх країнах Західної Європи набуло поширення страхування судів и страхування від пожежі. В XVIII столітті було створено багаточисельні страхові компанії та лотереї в Італії, Фландрії, Нідерландах. Потім методи теорії ймовірностей почали широко застосовувати в демографії, наприклад, при веденні статистики народження й смерті. Важливу роль для розвитку математичної статистики зіграли роботи Э. Галлея з демографії. Відзначимо, що «за основною спеціальністю» цей вчений був астрономом, а його ім'ям названа відома комета. Почала зароджуватись нова наука, вимальовуватися її специфика й методологія: означення, теореми, методи. Становлення теорії ймовірностей пов'язано з ім'ям відомого швейцарського математика Якоба Бернуллі (1654-1705). В його трактаті «Мистецтво припущень» (1713), над яким він працював 20 років й який був виданий вже після смерті автора, вперше було введено й широко використовувалось класичне означення ймовірності, а також застосовувалась статистична концепція ймовірності. Наступний важливий етап у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з ім'ям Муавра (1667- 1754), Лапласа (1749-1827), Гаусса (1777-1855), Пуассона (1781-1840). Далі, у XIX столітті, велику роль зіграли представники Петербурзької математичної школи В.Я. Буняковський (1804-1889), П.Л. Чебышев (1821- 1894), А.А. Марков (1856-1922), А.А. Ляпунов (1857-1918). Великий внесок в наступний розвиток теорії ймовірностей й математичної статистики внесли радянські математики С.Н. Бернштейн, В.И. Романовський (1879-1954), А.Н. Колмогоров, А.Я. Хінчин (1894-1959), Ю.В. Леннік, Б.В. Гнеденко, Н.В. Смирнов та інші, а також вчені англо-американської школи Стьюдент (псевдонім В. Госсета), Р. Фішер, Э. Пірсон, Е. Нейман, А. Вальд та інші. Особливо слід відзначити неоцінений внесок академіка А.Н. Колмогорова в становленні теорії ймовірностей як математичної науки. Фундаментом сучасної будівлі теорії ймовірностей є аксіоматичний підхід, запропонований А.Н. Колмогоровим в книзі «Основні поняття теорії ймовірностей». В даний час аксіоматичний підхід є загальноприйнятим . Слід відзначити, що в інших розділах математики аксіоматичний підхід був прийнятий значно раніше, ніж в теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей та математична статистика й в даний час розвиваються й застосовуються на практиці: при організації виробництва, аналізі економічних процесів, контролі якості продукції, маркетингових й соціологичних дослідженнях, страховій справі та інше.

1. Елементи комбінаторики.

1.1. Правило суми та добутку.

Правило суми. Нехай об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b можна вибрати n способами, до того ж вибір одного об'єкту виключає одночасний вибір іншого об'єкту. Тоді вибір «або a , або b» можна здійснити $m + n$ способами.

Більш загальним чином, нехай об'єкт a_1 можна вибрати n_1способами, а об'єкт a_2 можна вибрати n_2 способами,…, об'єкт a_k можна вибрати n_kспособами, до того ж вибір одного об'єкту виключає одночасний вибір іншого об'єкту. Тоді вибір «або a_1 , або a_2, або a_k» можна здійснити $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k$ способами.

Задача. На підносі лежать 5 яблук та 3 груші. Скількома способами можна вибрати фрукт з підносу?

Розв'язання. Яблуко можна вибрати п'ятьма способами, грушу – трьома способами. Отже, один з фруктів можна вибрати $5 + 3 = 8$ способами.

Задача. На полиці стоять 10 томів Пушкіна, 4 томи Лермонтова й 6 томів Гоголя. Скількома способами можна вибрати з полиці одну книгу.

Розв'язання. Очевидно, що $10 + 4 + 6 = 20$ способів.

Правило добутку. Нехай об'єкт a можна вибрати m способами, після чого об'єкт b можна вибрати n способами. Тоді вибір (a , b) можна здійснити $m \cdot n$ способами; інакше кажучи, існує $m \cdot n$ різних впорядкованих пар (a , b).

Більш загальним чином, нехай об'єкт a_1 можна вибрати n_1способами, після чого об'єкт a_2 можна вибрати n_2 способами,…, після чого об'єкт a_k можна вибрати n_kспособами. Тоді вибір ланцюга $(a_1 , a_2, \ldots, a_k)$ можна здійснити $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами; інакше кажучи, існує $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ ланцюгів $(a_1 , a_2, \ldots, a_k)$.

Задача. В магазині є 7 видів піджаків, 5 видів брюк та 4 види краваток. Скількома способами можна придбати комплект з піджака, брюк та краватки?

Розв'язання. Припустимо, що піджак вже відібраний (це можна зробити 7 способами). До піджака обираємо брюки 5 способами. Разом пару (піджак, брюки) можна обрати $7 \cdot 5 = 35$ способами. До цієї пари можна придбати краватку 4 способами. Отже, для придбання піджака, брюк та краватки маємо $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способів.

1.2. Розміщення, перестановки, комбінації.

А) Розміщення.

Означення. Нехай є множина, що містить n елементів. Довільний впорядкований набір, складений з k елементів даної множини, називається **розміщенням з n елементів по k елементів** (або просто **розміщенням з n по k**).

Число розміщень з n елементів по k елементів позначається через A_n^k (читається «а із ен по ка») і обчислюється за формулою

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1), \qquad (1)$$

або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

(нагадаємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, й за означенням $0! = 1$).

Задача. У футбольній команді 11 чоловік. Скількома способами можна обрати: а) капітана та його асистента; б) капітана, першого асистента й другого асистента.

Розв'язання. а) Капітаном можна обрати будь-якого з 11 футболістів. Асистентом – будь-якого з 10 футболістів, що залишились. Тому капітана та асистента можна обрати $11 \cdot 10 = 110$ способами.

б) Капітана та першого асистента ми вже обрали $11 \cdot 10$ способами. Для вибору другого асистента залишається 9 способів. Тому капітана, першого асистента можна обрати $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ способами.

Зауваження. Число розміщень з n елементів по k елементів $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ можна обчислити за допомогою статистичної функції ПЕРЕСТ(n; k).

Б) Перестановки.

Означення. Нехай маємо множину, що містить n елементів. Довільний ланцюг довжини n , що складається з з усіх елементів даної множини, називається перестановкою цієї множини, або **перестановкою n елементів**.

Інакше кажучи, перестановка n елементів – це розміщення з n елементів по n. Число перестановок n - елементної множини позначається через P_n.

$$P_n = n! \,. \qquad (3)$$

Задача. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 при умові, що цифри не повинні повторюватись.

Розв'язання. Для вибору першої цифри маємо п'ять способів, для вибору другої - чотири, для вибору третьої – три, для вибору другої – два, й для вибору останньої цифри залишається всього один спосіб. Всього чисел отримуємо $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Зауваження. Число перестановок з n елементів $P_n = n!$ можна обчислити за допомогою математичної функції ФАКТР(n), або застосовуючи статистичну функцію ПЕРЕСТ(n; n).

В) Комбінації.

Означення. Нехай маємо множину з n елементів. Довільний невпорядкований набір, що складається з k різних елементів даної множини, називається **комбінацією з n елементів по k елементів** (або просто **комбінацією з n по k**).

Інакше кажучи, сполука з n елементів по k елементів – це просто k-елементна підмножина n- елементної множини.

Кількість комбінацій з n елементів по k елементів позначається через C_n^k (читається «це з ен по ка») й обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Згідно з формулою (1) маємо:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,. \qquad (4)$$

Задача. У футбольній команді 11 гравців. Скількома способами можна обрати з них двох гравців для проходження допінг-контролю?

Розв'язання. Двох футболістів з одинадцяти для допінг-теста можна обрати $C_{11}^2 = \frac{11!}{2!9!} = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$ способами.

Властивості комбінацій:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
4. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Зауваження. Число комбінацій з n елементів по k елементів $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ можна обчислити за допомогою функції ЧИСЛКОМБ(n, k), яка відноситься до математичних функцій.

Задача. Скількома способами можна з семи людей обрати комісію з трьох людей на чолі з головою?

Розв'язання. Голову можна обрати 7 способами. Інших двох ми обираємо з шести людин $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ способами. Тому кількість способів вибору комісії дорівнює $7 \cdot 15 = 105$.

Задача. Скількома способами можна зібрати бригаду з 3 малярів та 4 штукатурів, якщо є 6 малярів та 8 штукатурів.

Розв'язання. Малярів можна обрати C_6^3 способами. Штукатурів можна обрати C_8^4 способами. Отже, для формування бригади маємо $C_6^3 \cdot C_8^4 = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{8!}{4!4!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1400$ способів.

2. Події та їхні ймовірності.

2.1. Основні понятття та предмет вивчення теорії ймовірностей. Операції над подіями.

Випробуванням називається експеримент, який можна (хоча б принципово) проводити в однакових умовах будь-яку кількість разів. Найпростіший результат випробування називається елементарною подією або результатом й позначатимемо через ω . При випробуванні неминуче наступає який-небудь результат й до того ж тільки один. Результат – це первинне (яке формально не визначається) поняття.

Означення. Множина усіх можливих результатів випробування називається простором елементарних подій та позначається Ω.

Приклад 1. На гранях шестигранного грального кубика нанесено цифри від 1 до 6. Експеримент полягає в підкиданні кубика і фіксації грані, якою кубик впаде догори. Множина Ω ={"1", "2", "3", "4", "5", "6"} є множиною можливих наслідків експерименту, тобто простором елементарних подій. Тут $\omega_i = i, i = \overline{1,6}$. Поява на верхній грані кубика однієї з цифр від 1 до 6 означає, що відбувається відповідна елементарна подія.

Приклад 2. Підкидається кубик, як і в прикладі 1, але фіксується лише парна чи непарна цифра на грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина Ω ={«парна», «непарна»} є множиною двох можливих наслідків експерименту, тобто простором із двох елементарних подій. Тут $\omega_1 =$ «парна», $\omega_2 =$ «непарна».

У розглянутих прикладах простір елементарних подій був скінченним. Проте часто трапляються випадки, коли множина Ω нескінченна.

Означення. Випадковою подією (подією) називається будь-яка множина результатів, тобто підмножина простору Ω.

Результати, з яких складається подія A, називаються сприятливими для A ($\omega \in A$), або елементарними подіями, що сприяють події A. Подія A наступає при випробуванні тоді й тільки тоді, коли наступає результат, сприятливий для неї.

Означення. Множина Ω називається вірогідною подією. Порожня множина результатів ($\emptyset$) називається неможливою подією.

Інакше кажучи, вірогідна подія – така подія, яка при випробуванні обов'язково відбудеться (їй сприяють всі результати випробування), неможлива подія – така подія, яка при випробування заздалегідь не відбудеться (вона не має сприятливих результатів).

Означення. Дві випадкові події називаються несумісними, якщо в них немає спільних сприятливих результатів, тобто поява однієї події виключає появу іншої події при тому самому випробуванні.

Розглянемо операції, які можна виконувати над подіями.

Означення. Нехай підмножини A і B множини Ω є подіями. Говорять, що *подія A спричинює подію B* або *подія B спричинюється подією A*, коли з відбуванням події A відбувається і подія B і записують $A \subset B$.

Означення. Події A і B називають рівними, або рівносильними, або еквівалентними, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто кожна з них спричинює іншу і спричинюється іншою. Отже, події A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони одночасно або відбуваються, або не відбуваються. Рівність подій A і B записують у вигляді $A = B$.

Означення. Нехай $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ – деякі події. Сумою подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A або B. Суму C події A і B позначають $C = A \cup B$ або $C = A + B$.

Інакше кажучи, для події $A+B$ сприяють ті й тільки ті результати випробування, які сприяють хоча б одній з подій A або B.

Аналогічно визначається сума довільної кількості подій $A_1, A_2, \dots, A_n$– це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій $A_k, k = \overline{1, n}$. Зокрема,

$\bigcup_1^n A_k$ сума скінченної кількості n подій $\mathrm{A_k}$, $\bigcup_1^\infty \mathrm{A_k}$ – сума зчисленної кількості подій $\mathrm{A_k}$ (тут номер події набуває значень з множини **N** натуральних чисел). Суму скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcup_\mathrm{k} \mathrm{A_k}$, а також $\sum_k \mathrm{A_k}$.

Означення. Добутком подій *A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події *A* і *B*. Позначають $C = A \cap B$ або $C = A \cdot B$.

Інакше кажучи, для події $A \cdot B$ сприяють ті й тільки ті результати випробування, які сприяють як події *A* так й події *B*.

Аналогічно визначається добуток довільної кількості подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються всі події $A_k, k = \overline{1,n}$. Зокрема $\bigcap_1^\mathrm{n} \mathrm{A_k}$ – добуток скінченної кількості n подій, $\bigcap_1^\infty \mathrm{A_k}$ – добуток зчисленної кількості подій. Добуток скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcap_\mathrm{k} \mathrm{A_k}$, а також $\prod_\mathrm{k} \mathrm{A_k}$.

Приклад 3. Нехай Ω ={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} – множина елементарних подій, що відповідає підкиданню шестигранного кубика один раз, *A*={“3”, “6”} – подія, що полягає у випаданні на верхній грані числа, кратного 3, а *B*={“2”, “4”, “6”} – подія, що полягає у випаданні парного числа. Тоді *A+B*={“2”, “3”, “4”, “6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде або число, кратне 2 (відбувається подія *B*), або число, кратне 3 (відбувається подія *A*). Подія $A \cdot B$ ={“6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде число, кратне 3 (відбувається подія A) і парне (відбувається подія B).

Тепер за допомогою операції добутку можна дати ще одне означення несумісних подій, еквіваленте попередньому.

Означення. Події і називають несумісними, якщо $A \cdot B = \emptyset$, тобто якщо вони не можуть відбутися обидві в одному і тому ж випробуванні.

Приклад 4. Якщо для Ω із попереднього прикладу *C*={*”1”, “3”, “5”*}, а *D*={ *”2”, “4”, “6”*}, то *C* і *D* несумісні події, оскільки не існує елементарної події, яка належить як до множини *C*, так і до множини *D*.

Означення. Різницею подій *A* і *B* (*A* мінус *B*) називають таку подію, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія *A* і не відбувається подія *B*. Позначають $C = A \backslash B$ або $C = A - B$.

Означення. Подією, протилежною до події *A*, називають різницю $\Omega \backslash B$, яку позначають $\bar{A}$.

Приклад 5. Якщо *A*={*“3”,”6”*} і *B*={*“2”,”4”,”6”*} (див. приклад 3), то

- подія $A \backslash B$ ={“3”} – подія, що полягає у випаданні непарного числа, кратного 3,
- подія $B \backslash A$ ={“2”,”4”} полягає у випаданні парного числа, не кратного 3,
- подія $\Omega \backslash A$ ={“1”,”2”,”4”,”5”} – полягає у випаданні числа, не кратного 3,

- подія $\Omega\backslash B$ {“1”,”3”,”5”} – подія, що полягає у випаданні непарного числа.

Зауваження. Подія $\overline{\Omega} = \emptyset$, протилежна до вірогідної, є неможливою. Неможливій події відповідає порожня множина можливих наслідків випробування. Очевидно, що $\overline{\emptyset} = \Omega$.

Властивості операцій над подіями.

1. $A + B = B + A$.
2. $A \cdot B = B \cdot A$.
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
5. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
6. $(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$.
7. $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}$, $\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$ - закони де Моргана.
8. $A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$.
9. $A \cap \Omega = A,\ A \cup \Omega = \Omega$.

2.2. Частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності. Властивості ймовірності

А) **Частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності.**

Нехай проводиться серія випробувань, в кожному з яких можуть відбутися або не відбутися певна подія A. Позначимо через n число усіх проведених випробувань в цій серії, а через $n\ (A)$ – число тих випробувань, при яких відбулася подія A.

Означення. Відношення

$$r(A) = \frac{n\ (A)}{n} \qquad (5)$$

числа випробувань, при яких відбулася подія A, до числа усіх випробувань в проведеній серії називається відносною частотою події A.

Відносна частота події – величина експеріментальна.

Вона підраховується лише тільки після проведеної серії випробувань. Так, наприклад, якщо робочий виробляє 100 деталей, з яких 3 виявилися бракованими, то відносна частота бракованої деталі у виробленій партії дорівнює $\frac{3}{100} = 0{,}03$. В іншій партії, виробленої тим самим робочим на тому ж самому верстаті, відносна частота бракованої деталі буде, взагалі кажучи, іншою. Однак, помічено, що в різних партіях з великою кількістю деталей, вироблених одним й тим самим робочим на одному й тому самому верстаті при налагодженій технології виробництва та нормальній роботі верстата й робочого відносна частота браковки деталі буде приблизно одна й та ж сама.

Взагалі у багатьох випадках відносна частота події має властивість стійкості. Вона полягає в тому, що при достатньо великій кількості випробувань n, проведених в однакових умовах, відносна частота $r(A)$ події A, як правило, мало відрізняється від певного числа $P(A)$. Число $P(A)$, що характеризує подію A в розглянутих умовах випробування й не залежить від проведеної серії випробувань, називається ймовірністю події A. Таке введення поняття ймовірності називається статистичним. Властивість стійкості відносної частоти є важливішою статистичною закономірністю, яка широко використовується в науці й техніці. Воно дозволяє передбачити надійність роботи автоматичного пристрою при його проектуванні, розробити правила стрільби, кодувати (шифрувати) й розкодувати тексти та багато іншого. Ще з давнини, заздалегідь до зародження теорії ймовірностей, було відомо, що частота народження хлопчика у різних країнах та містах у всі часи була приблизно ода й та ж сама, мало відрізняється від 0,51.

Враховуючи властивість стійкості відносної частоти, німецький математик й механік, що емігрував в роки фашизму у США, Р. Мізес запропонував визначити ймовірність події як границю

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} r_n(A). \qquad (6)$$

Цим статистичним означенням ймовірності й досі частіше за всього користуються у фізиці й техніці.

Б) **Класичне означення ймовірності.**

Нехай при випробуванні можливі N результатів,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

й всі ці результати мають рівні шанси для відбування, тобто рівноможливі, і знаходяться в однакових умовах при випробуванні. Нехай для події A маємо $N(A)$ сприятливих результатів, тобто $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_{N(A)}}\}$.

Означення. Ймовірністю події A називається відношення

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \qquad (7)$$

числа сприятливих результатів для події A до числа всіх результатів. До того ж припускається, що всі результати є рівноможливими.

Приклад. Яка ймовірність випадіння герба при підкиданні навмання правильної монети?

Розв'язання. тут маємо $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A = \{\omega_1\}$, де ω_1- випадіння герба, ω_2 – випадіння цифри. Обидва результати рівноможливі, оскільки монета є правильною й кидається навмання.

Маємо $N = 2, N(A) = 1$, отже $P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$. Відзначимо, що такою ж є статистична ймовірність випадіння герба.

Зауваження. Спостереження показують, що взагалі кажучи, ймовірність, що обчислюється за класичним означенням, співпадає зі статистичною ймовірністю розглянутої події. Це дозволяє прогнозувати відносну частоту при великій кількості випробувань: як правило, повинно бути $r_n(A) \approx P(A)$, а $P(A)$ в деяких випадках ми вже вміємо обчислювати, користуючись класичним означенням ймовірності.

Схема розв'язування задач. Розгляд задач, пов'язаних з обчисленням ймовірностей за класичним означенням, зручно проводити за наступною схемою:

1) з'ясовуємо, в чому полягає випробування;
2) з'ясовуємо, в чому полягає результат випробування. Підбираємо простір Ω так, щоб він складався лише з рівноможливих результатів;
3) знаходимо кількість N усіх результатів, тобто кількість елементів множини Ω;
4) описуємо подію A, ймовірність якої потрібно знайти. З'ясовуємо, які результати з множини рівноможливих є сприятливими для нашої події A;
5) підраховуємо кількість N(A) усіх сприятливих результатів;
6) обчислюємо шукану ймовірність за формулою (7).

Далі ми покажемо як елементи комбінаторики використовуються при обчисленні ймовірності події за класичним означенням для визначення числа сприятливих результатів $N(A)$ й числа усіх можливих результатів N.

Приклад (Гіпергеометричний розподіл ймовірностей). Нехай в множині, що містить n елементів, маємо m елементів $(m < n)$, які мають певну властивість S. Знайти ймовірність того, що серед k обраних навмання елементів з цієї множини точно l елементів, що мають властивість S.

Розв'язання. Задачу на обчислення ймовірності за класичним означенням будемо розв'язувати за зазначеною схемою:

1. *З'ясовуємо, в чому полягає випробування.*

В даній задачі воно полягає в тому, що беруться k елементів з множини, яка містить n елементів.

2. *З'ясовуємо, в чому полягає результат випробування. Підбираємо простір Ω так, щоб він складався лише з рівноможливих результатів.*

В цій задачі рівноможливими результатами є різні сполуки з n елементів по k елементів.

3. *Знаходимо кількість N усіх результатів, тобто кількість елементів множини Ω.*

$$N = C_n^k.$$

4. *Описуємо подію A, ймовірність якої потрібно знайти. З'ясовуємо, які результати з множини рівноможливих є сприятливими для нашої події A.*

В нашій задачі подія A полягає в тому, що серед взятих навмання k елементів маємо точно l елементів, що мають властивість S. Таким чином, сприятливим буде результат, при якому ми обрано l елементів з m елементів (що мають властивість S), при цьому необхідна решта $k-l$ обрана з решти $n-m$ елементів (що не мають властивість S).

5. *Підраховуємо кількість $N(A)$ усіх сприятливих результатів.*

$$N(A) = C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}.$$

6. *Обчислюємо шукану ймовірність за формулою (7):*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k} \qquad (8)$$

дає нам відповідь на поставлену задачу. Отже, задачу розв'язано.

При фіксованих n, m й k число l залежить від випадка. Воно може приймати будь-які цілі значення такі, що $0 \leq l \leq m, 0 \leq k-l \leq n-m$. Для можливих значень l відповідні ймовірності обчислюються за формулою

$$P_{n,m,k}(l\,) = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}. \qquad (9)$$

Ця послідовність ймовірностей (як функція від l) називається **гіпергеометричним розподілом ймовірностей.** Такий розподіл часто використовується у додатках.

Приклад. Колода в 36 карт навмання ділиться на дві рівні частини. Яка ймовірність того, що в кожній частині опиниться однакові кількість червоних та чорних карт.

Розв'язання. тут можна слідкувати за складом лише однієї половини колоди. Маємо справу з задачею розглянутого в прикладі 4 типу: властивість S – карта червона, $n = 36$, $m = 18$, $k = 18$, $l = 9$. Шукана ймовірність:

$$P = \frac{C_{18}^9 \cdot C_{18}^9}{C_{36}^{18}} = \frac{\left(\frac{18!}{9! \cdot 9!}\right)^2}{\frac{36!}{18! \cdot 18!}} = \frac{(18!)^4}{(9!)^4 \cdot 36!}.$$

Відповідь, якщо залишити її в такому вигляді, не є цінною, оскільки хотілось би знати ймовірність P хоча б з точністю до 0,1. Скористаємось формулою Стірлінга. При цьому будемо мати відносну похибку, меншу за $4 \cdot 0{,}009 + 4 \cdot 0{,}009 + 0{,}008 = 0{,}08$. Отримуємо

$$P \approx \frac{\left(\sqrt{2\pi 18} \cdot 18^{18} \cdot e^{-18}\right)^4}{\left(\sqrt{2\pi 9} \cdot 9^9 \cdot e^{-9}\right)^4 \sqrt{2\pi 36} \cdot 36^{36} \cdot e^{-36}} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}27.$$

Оскільки відносна похибка менша за 0,08, то абсолютна похибка менша за $0{,}08 \cdot\ 0{,}27 = 0{,}02$, так що $P = 0{,}27 \pm 0{,}02$, $0{,}25 < P < 0{,}29$.

В) Геометрична ймовірність.

Класичне означення ймовірності передбачає, що множина усіх можливих результатів є скінченною й всі результати є рівноможливими. Однак у багатьох практично важливих задачах мова йде про випробування та події, пов'язані з нескінченної множиною результатів (можливих й сприятливих $N = \infty,\ N(A) = \infty$). В таких випадках часто користуються замість класичного означення ймовірності так звану геометричну ймовірність відповідно на прямій, на площині, в тривимірному просторі й, взагалі, у n −вимірному просторі.

Так називається ймовірність того, що взята навмання точка з (можливого) відрізка довжини l належить до (сприятливого) відрізка x, що міститься у можливому відрізку l. Вона обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{x}{l}, \qquad (10)$$

Ймовірність $P(A)$ того, що навмання взята точка з (можливої) області S належить сприятливій області $S(A)$, що міститься у можливій області, обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{S(A)}{S}. \qquad (11)$$

В тривимірному просторі аналогічна ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{V(A)}{V}, \qquad (12)$$

де $V(A)$, V – об'єми сприятливої та можливої областей відповідно.

Г) **Найпростіші властивості ймовірностей.**

1. Ймовірність будь-якої події є величина невід'ємна: $P(A) \geq 0$.

   Доведення. Оскільки $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, де $N(A)$ – ціле невід'ємне число, N- натуральне, то $P(A) \geq 0$.

2. Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці: $P(\Omega) = 1$.

   Доведення. Оскільки для вірогідної події усі результати є сприятливими, то $N(\Omega) = N$, тому $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N} = \frac{N}{N} = 1$.

3. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

   або

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

   Доведення. Для несумісних подій $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$, тому

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = P(A) + P(B).$$

4. Ймовірність протилежної події дорівнює одиниці без ймовірності вихідної події:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Доведення. Оскільки сприятливими результатами для $\bar{A}$ є ті й тільки ті результати, які не є сприятливими для A, то $N(\bar{A}) = N - N(A)$ й тому

$$P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N} = \frac{N - N(A)}{N} = \frac{N}{N} - \frac{N(A)}{N} = 1 - \ P(\bar{A}).$$

5. Ймовірність будь-якої події не більш за 1: $P(A) \leq 1$.

   Доведення. Оскільки $N(A) \leq N,$ то $P(A) = \frac{N(A)}{N} \leq 1$.

6. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\emptyset) = 0$.

Дійсно, для неможливої події $N(\emptyset) = 0$, тому $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N} = \frac{0}{N} = 0$.

7. Якщо подія A міститься в події B, то $P(A) \leq P(B)$.

Доведення. Дійсно, включення $A \subset B$ означає, що кожний результат, сприятливий для A, є сприятливим й для B. Тому $N(A) \leq N(B)$ й, отже,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \leq \frac{N(B)}{N} = P(B).$$

8. Ймовірність суми будь-яких двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхнього добутку:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - \ P(A \cdot B).$$

Доведення. За умови події A та B можуть бути сумісними, тоді кількість сприятливих результатів для $A + B$ дорівнює $N(A + B) = N(A) + N(B) - N(A \cdot B)$, оскільки в $N(A + B)$ можуть бути результати, які рахуються двічі й в $N(A)$, й в $N(B)$. Отже,

$$P(A + B) = \frac{N(A + B)}{N} = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cdot B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} - \frac{N(A \cdot B)}{N} =$$
$$= P(A) + P(B) - \ P(A \cdot B).$$

2.3. Складні події. Умовна ймовірність. Незалежні події. Повна ймовірність. Формула Байеса.

А. Поняття умовної ймовірності. Ймовірність добутку подій.

Характеристикою залежності події A від події B, що має додатну ймовірність, є умовна ймовірність $P_B(A)$ події A при умові, що подія B відбулася, яка визначається наступним чином.

Означення. Умовною ймовірністю події A за умові виконання події B називається відношення ймовірності добутку подій A та B до ймовірності події B, що розглядається у якості умови.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \qquad (18)$$

При цьому припускається, що $P(B) \neq 0$ (тобто $P(B) > 0$).

З формули (18) випливає $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$. Оскільки $A \cdot B = B \cdot A$, то не має значення яка подія в добутку розглядається першим множником, а яка – другим. Тому маємо

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (19)$$

Отже, маємо наступне твердження.

Теорема (про добуток). Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності першого з них на умовну ймовірність другого за умови виконання першого, тобто

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B), \qquad \text{або} \qquad P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Для будь-якої скінченної кількості події методом повної математичної індукції доводиться наступне узагальнення теореми про добуток.

Теорема (узагальнена теорема про добуток).

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n). \qquad (20)$$

Б. Незалежні події. Незалежність у сукупності.

Означення. Події A та B називаються незалежними, якщо умовна ймовірність одного з них за умови виконання іншої дорівнює безумовній ймовірності першої події; або якщо ймовірність однієї з цих подій дорівнює 0:

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{або } P(B) = 0, \qquad (21а)$$

$$(P_A(B) = P(B) \quad \text{або } P(A) = 0). \qquad (21б)$$

До того ж, не має значення, яка з подій A та B розглядаються першою, а яка другою, тобто якщо $P_B(A) = P(A)$ то $P_A(B) = P(B)$ або $P(A) = 0$. Дійсно, нехай $P_B(A) = P(A)$, тоді за теоремою про добуток $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$, так що у випадку коли $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{P(B)P_B(A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Теорема (Критерій незалежності). Для того щоб дві події A та B були незалежними необхідно й достатньо, щоб ймовірність добутку цих подій дорівнювала добутку їх ймовірностей, тобто, щоб

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (22)$$

Зауваження. В конкретних задачах про незалежність подій часто керуються не означенням, а спираючись на інтуїцію, аналізуючи ситуацію. Виходячи з незалежності двох подій, ймовірність їхнього добутку знаходять як добуток ймовірностей цих подій.

При розгляданні більш ніж двох поді й важливим є наступне означення:

Означення. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо кожне з них не залежить від добутку будь-якої групи інших події з цієї системи.

Теорема. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – події. Що незалежні у сукупності, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку їхніх ймовірностей, тобто

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (23)$$

Ця теорема безпосередньо випливає з узагальненої теореми про добуток та означення незалежності подій у сукупності.

Зауваження. З попарної незалежності подій не випливає їхня незалежність у сукупності.

Дійсно, нехай навмання кидаються дві правильні монети й A_1 випадіння герба на першій монеті, A_2 – випадіння монети на другій монеті, A_3- випадіння двох монет однією стороною. Події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні; незалежність A_1 та A_2 очевидна, $P(A_3) = \frac{2}{4} == \frac{1}{2}$, $P_{A_1}(A_3) = \frac{1}{2}$ так що A_1 та A_3 незалежні; аналогічно A_2 та A_3 незалежні. Водночас $P_{A_1 A_2}(A_3) = 1 \neq P(A_3)$, отже події A_1, A_2 та A_3 не є незалежними у сукупності.

Схема розв'язування задач на цю тему. Розв'язання задач на цю тему зручно здійснювати за наступною схемою:

1) з'ясувати, в чому полягає випробування;
2) ввести позначення для подій, що вивчаються;
3) за допомогою цих позначень виразити подію, ймовірність виконання якої слід знайти;
4) якщо шукана подія представляється у вигляді суми подій, то визначити чи сумісні або несумісні складові події; якщо шукана подія представляється у вигляді добутку подій, то визначити чи залежні вони, чи незалежні складові події;
5) підібрати відповідні формули та здійснити обчислення.

В. Повна ймовірність. Формула Байеса.

Означення. Говорять, що події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу подій, якщо виконуються наступні дві умови:

1) події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несумісні, тобто $H_i \cdot H_k = \emptyset,\ i \neq k$.
2) події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ єдино можливі, що означає $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$,

тобто при випробуванні обов'язково виконується одна з цих подій H_k.

Нижче події H_k будемо називати гіпотезами. Припускається, що визначені їхні ймовірності ($H_k \in S$).

Нехай подія A може виконатися тільки з однією з гіпотез з певною умовною ймовірністю $P_{H_i}(A)$. Тоді має місце наступна теорема.

Теорема (Формула повної ймовірності). Ймовірність будь-якої події A ($\in S$) дорівнює сумі добутків ймовірності гіпотези на умовну ймовірність події за умови виконання відповідної гіпотези, тобто

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \cdots + P(H_n)P_{H_n}(A). \qquad (24)$$

Формула (23) називається формулою повної ймовірності. Формула (23) у більш компактній формі

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A).$$

Теорема (Формула Байеса). Нехай виконані усі попередні умови та стало відомим, що подія A відбулася. Тоді для знаходження умовних ймовірностей $P_A(H_i)$ має місце формула Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A)}. \qquad (25)$$

Зупинимося на змістовному аспекті застосування формул (24), (25). Нехай подія A виконується при різних умовах, з приводу яких можна висловити гіпотези H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Припустимо, що відомі ймовірності $P(H_i)$ (вони називаються *апріорними*, тобто перед досвідними) й ймовірності $P_{H_i}(A)$. При вказаних припущеннях за формулою (24) $P(A)$ знаходиться у тому випадку, якщо невідомо, яка з гіпотез дійсно виконалася.

Нехай тепер подія A видбулася. Тоді ймовірності гіпотез $P(H_i)$ можна переоцінити, тобто обчислити умовні ймовірності $P_A(H_i)$, спираючись на формулу (25). Ці уточнені ймовірності називають *апостеріорними* (після дослідними).

Схема розв'язування задач. Розв'язуючи задачі на цю тему, слід:

1) з'ясувати в чому полягає випробування;
2) подію, ймовірність якої потрібно знайти, позначити, наприклад буквою A;
3) скласти множину попарно несумісних гіпотез H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
4) обчислити ймовірності $P(H_i)$ та $P_{H_i}(A)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
5) за формулою (24) знайти $P(A)$. Якщо ж відомо, що подія A вже відбулася, то за формулою (25) визначаємо $P_A(H_i)$.

2.4. Повторення випробувань. Схема Бернуллі.

Раніше неодноразово відзначалось, що теорія ймовірностей застосовується при вивченні явищ, що мають масовий характер. У зв'язку з цим представляє інтерес розгляд не одне випробування, а ціла серія великої кількості випробувань. Найпростішою математичною моделлю послідовності випробувань є схема Бернуллі.

Означення. Схема Бернуллі - нескінченна послідовність випробувань, що задовольняє наступні три умови:

1) кожне випробування має два результати: виконання певної події А (успіх) та його невиконання, тобто виконання події $\bar{A}$ (невдача).
2) ймовірність успіху p не залежить від номера випробування.
   Відповідно, ймовірність невдачі $q = 1 - p$ також не залежить від номеру випробування.
3) результат кожного випробування, починаючи з другого випробування, не залежить від результатів усіх попередніх випробувань.

Задача Бернуллі: яка ймовірність $P_n(m)$ того, що в схемі Бернуллі при n випробуваннях успіх здійсниться рівно m разів, якщо відомо, що ймовірність успіху при одному випробуванні дорівнює p. Відповідь на це запитання дає формула:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (26)$$

Зауваження. Формула Бернуллі представляється функцією

БИНОМРАСП(k, n, p, ЛОЖЬ), –

де k - кількість появ події, n – число незалежних випробувань; p – ймовірність появи події; "ЛОЖЬ" – вказівка на те, що визначається ймовірність появи рівно k подій.
У випадку, коли останній аргумент функції дорівнює «ИСТИНА», функція повертає ймовірність того, що в n випробуваннях подія здійсниться не менш ніж k разів.

Зауваження. Нехай $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі успіх наступає не менш ніж m_1 й не більш ніж m_2 разів ($0 \le m_1 \le m \le m_2 \le n$). Тоді має місце формула

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m),$$

або з урахуванням (26)

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (27)$$

Ймовірність $P_n(1 \le m \le n)$ того, що в результаті n випробувань успіх виникне хоча б один раз, визначається формулою:

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n. \qquad (28)$$

Зауваження. Відзначимо, що ймовірності $P_n(m)$ при фіксованому n спочатку зростають при збільшенні числа m від 0 до певного значення m_0, а потім спадають при зміненні числа m від m_0 до n.

Означення. Число успіхів m_0, якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$, називається **найймовірнішим числом успіхів**.

Найймовірніше число успіхів знаходиться з нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p. \qquad (29)$$

Остання нерівність може мати один розв'язок, якщо $np - q$ неціле числа, та два розв'язки, якщо $np - q$ ціле.

Також з останньої нерівності при достатньо великих n маємо

$$p \approx \frac{m_0}{n},$$

тобто найймовірніша частота успіхів близька до ймовірності успіху в одному випробуванні. Згадуючи, що природньо наукове уявлення про ймовірність потребує близькості до неї відносних частот при довгих серіях випробувань, приходимо до висновку, що схема Бернуллі має цю властивість.

Пояснимо, що ймовірнісна схема Бернуллі – математична модель реального явища (всі її вимоги ніколи не виконуються), й тільки на практиці можна перевірити її придатність до застосування того чи іншого процесу.

Для застосування схеми Бернуллі до розв'язування задач необхідно, щоб:

1) випробування, що проводяться, були незалежними;
2) кожне випробування мало тільки два результати;
3) ймовірність появи події, що нас цікавить, в кожному випробуванні була одна й та ж.

Задача. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у корзину дорівнює 0,6. Виконано 8 кидків. Знайти: а) ймовірність того, що при цьому буде рівно два попадання; б) найймовірніше число попадань та відповідну ймовірність.

Розв'язання. Проводиться серія з восьми випробувань з двома результатами в кожному. Будемо вважати ці випробування незалежними. Ймовірність попадання м'яча в корзину при кожному випробуванні одна й та ж. Отже, у якості моделі можна використати схему Бернуллі. За формулою (26) маємо:

$$P_8(2) = C_8^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^6 \approx 0{,}041.$$

Для найймовірнішого числа попадань m_0 маємо нерівності (29), з яких при $n = 8,\ p = 0{,}6,\ q = 0{,}4$ випливає

$$8 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6,\ \Rightarrow\ 4{,}4 \le m_0 \le 5{,}4\ \Rightarrow\quad m_0 = 5.$$

Відповідна ймовірність

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 \approx 0{,}28.$$

Відповідь. 0,28.

Задача. Ймовірність того, що покупцю, що зайшов у спеціалізований магазин, знадобиться костюм 60-го розміру, складає 0,25. Яке мінімальне число покупців повинно відвідати магазин, щоб з ймовірністю 0,95 стверджувати, що хоча б один з них придбатиме костюм вказаного розміру.

Розв'язання. Очевидно, знаходимось в умовах застосування схеми Бернуллі. Потрібно, щоб ймовірність виконання успіху (придбання костюму 60-го розміру) хоча б один раз в серії з

n випробувань була не менш ніж 0,95. Враховуючи, що тут $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, на основі формули (28) маємо нерівність

$$1 - (0{,}75)^n \geq 0{,}95$$

або $n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}$. Отже, мінімальне число покупців, що відвідали магазин, буде

$$n_0 = \left[\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}\right] + 1 = 11.$$

Відповідь. 11.

2.5. Граничні теореми для схеми Бернуллі. Статистичні задачи, що розвязуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

I. Теорема Пуассона.

В ряді застосувань виникає необхідність розглянути ймовірність $P_n(m)$ при великій кількості випробувань n й настільки малій ймовірності p успіху при одному випробуванні, що np не є великим. В таких випадках обчислення $P_n(m)$ за формулою (26) важко й застосовується наступна

Гранична теорема Пуассона. Нехай розглядається послідовність схем Бернуллі така, що ймовірності p_n успіху при одному випробуванні в n-й схемі задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = a \qquad (0 \leq a < +\infty).$$

Тоді, якщо $P_n(m)$- ймовірність того, що в в n-й схемі при n випробуваннях здійсниться рівно m успіхів, то для будь-якого фіксованого m

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}.$$

Якщо в схемі Бернуллі p мале й розглядається $P_n(m)$ при великому n, то можна вважати, що $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, $np = a$ та обчислювати $P_n(m)$на основі теореми Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}. \qquad (30)$$

Є таблиці значень величин $P(m; a) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ при різних a та m. Відзначимо, що $\sum_{m=0}^{\infty} P(m; a)$=1.

Зауваження. Має місце формула

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) \approx 1 - e^{-a}. \qquad (31)$$

Зауваження. Значення величини $\frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції

ПУАССОН(m; a; ЛОЖЬ).

Зауваження. Значення величини $\sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції ПУАССОН(k; a; ИСТИНА).

II. Локальна теорема Муавра- Лапласа.

Для застосувань представляють інтерес ймовірності $P_n(m)$ при великих m та n-m. В цих випадках застосовується наступна теорема.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Нехай в схемі Бернуллі $0 < p < 1$ та через $t_{m,n}$ позначено число

$$t_{m,n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (32)$$

що називається рівномірним ухиленням числа успіхів. Тоді при виконанні умови

$$|t_{m,n}| \leq C$$

рівномірно за m, має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(m)}{\varphi(t_{m,n})} = 1, \qquad (33)$$

де $\varphi(t_{m,n})$ – функція, що визначається формулою

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Ця теорема нам каже, що можна вважати , що

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t_{m,n}). \qquad (34)$$

Записана формула (34) для приблизного обчислення $P_n(m)$ застосовується у випадку, коли np та nq великі, m та $n - m$ також великі як й np та nq. Обчислення $P_n(m)$ проводиться у наступному порядку:

1) спочатку обчислюється $\sqrt{npq}$ та $t_{m,n}$ за формулою (32);
2) потім за таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(t_{m,n})$;
3) далі знаходиться приблизне значення $P_n(m)$ за формулою (34).

Слід відзначити властивості функції $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$,
2) $\varphi(x)$ спадає при $x > 0$,
3) $\varphi(x) = 0{,}0000 \ldots$ при $x \geq 4$,
4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$

За умов 1) та 3) таблиця значень $\varphi(x)$ звичайно дається на проміжку $[0; 4]$.

Задача. Знайти ймовірність того, що при киданні 100 разів правильної монети навмання точно 50 разів випаде герб.

Розв'язання. Маємо $n = 100, m = 50, p = q = 0{,}5$. Знаходимо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5, \quad t_{m,n} = \frac{50-100\cdot 0{,}5}{5} = 0, \quad \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4,$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{5} \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

Зауваження. Для обчислення значень $t_{m,n} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ можна використовувати функцію НОРМАЛИЗАЦИЯ, а саме

$$t_{m,n} = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(m; \mu; \sigma),$$

де $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$.

Зауваження. Для обчислення значення функції $\varphi(x)$ застосовується функція НОРМРАСП з параметрами 0 та 1:

$$\varphi(x) = \text{НОРМРАСП}(x; 0; 1; \text{ЛОЖЬ})$$

ІІІ. Інтегральна теорема Муавра - Лапласа.

Обчислення $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ при великих m_1 та m_2 також викликає труднощі. Тому застосовується наступна теорема.

Інтегральна теорема Муавра- Лапласа. При будь-яких a, b $(a < b)$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(a \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \int_a^b \varphi(t)dt. \qquad (35)$$

За допомогою співвідношення (35) можна довести, що

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \int_a^b \varphi(t)\, dt,$$

де $a = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}, b = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Визначений інтеграл можна знайти, користуючись однією з первісних функції $\varphi(x)$. Є табличні значення первісних $\Phi(x)$ та $\Phi_0(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (36)$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (37)$$

Функція $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа, а $\Phi_0(x)$ називається нормованою функцією Лапласа.

При $x > 0$ має місце рівність: $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$.

Властивості функції $\Phi(x)$:

1) $\Phi(x)$ зростає;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
3) $\Phi(x) = 0{,}9999 \ldots$ при $x \geq 4$;
4) $\Phi(0) = 0{,}5$;
5) $\Phi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1.$

Таким чином, достатньо мати таблицю значень для проміжка $[0; 4]$.

Отже, ймовірності $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$, що представляють інтерес при великих n, можна обчислити, користуючись таблицею значень функції

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

за формулою

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

або
$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (38)$$

в силу того, що $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$.

Зауваження. Функція Лапласа в її стандартному представленні для заданого значення аргументу може бути обчислена за допомогою функції НОРМСТРАСП:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \text{НОРМСТРАСП}(x).$$

Статистичні задачи, що розв'язуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

Теорема Бернуллі. Для схеми Бернуллі при будь-якому $\varepsilon > 0$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \qquad (39)$$

тобто практично вірогідно, що при достатньо великому числі випробувань n в схемі Бернуллі відносна частота успіху $\frac{m}{n}$ відрізняється від ймовірності успіху p при одному випробуванні за абсолютною величиною менш ніж на ε.

Статистичне означення ймовірності базується на на властивості стійкості відносної частоти. Теорема Бернуллі стверджує, що в математичній моделі така властивість частоти має місце.

Величина $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ називається відхиленням відносної частоти від теоретичної ймовірності, а число ε з формули (39) допустимою похибкою відхилення. Число

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| < \varepsilon\right), \tag{40}$$

що називається довірчою ймовірністю, показує ту долю випробувань, в яких відхилення експериментальної величини $\frac{m}{n}$ від теоретичної p не перевищує заданої похибки.

Частіше за всього розглядають довірчі ймовірності, що дорівнюють 0, 95, 0, 997, 0, 9999.

Теорема Бернуллі встановлює залежність між числами n, ε та β. З цією метою застосовують інтегральну теорему Муавра- Лапласа, з якої випливає, що при достатньо великих n

$$\beta = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{41}$$

Співвідношення (41) можна розглядати як рівняння для визначення одного з чисел n, ε та β, коли два інших відомі. Розглянемо основні типи задач на цю тему.

1) Знайти β, якщо задані n та ε.

Підставляємо спочатку в співвідношення (41) ε та n, а потім за таблицею значень знаходимо Φ_0.

2) Знайти ε, якщо задані n та β.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо корінь x_β рівняння

$$\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}, \tag{42}$$

звідки

$$\varepsilon \approx x_\beta \sqrt{\frac{pq}{n}}. \qquad (43)$$

3) Знайти n, якщо задані ε та β.

З рівняння (42) знаходимо x_β, а потім, враховуючи, що $x_\beta \approx \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, отримуємо

$$n \approx \left(\frac{x_\beta}{\varepsilon}\right)^2 \cdot pq. \qquad (44)$$

В прикладних задачах типу 1) -3) число p часто є невідомим, в цьому випадку використовують очевидну нерівність $pq \leq \frac{1}{4}$, що є вірним для будь-яких $p \geq 0$, $q \geq 0$ та $p + q = 1$.

Нехай числа ε, β та n задані. При цьому припущенні можна можна довести, що з ймовірністю не меншою ніж β невідоме число p міститься в проміжку

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}; \frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right), \qquad (45)$$

який називається довірчим інтервалом для ймовірності успіху в одному віпробуванні, а його кінці – довірчими границями. Отже, замінюючи невідому ймовірність p знайденою дослідним шляхом частотою, ми здійснюємо похибку, що не перевищує $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}$.

Задача. Ймовірність того, що навмання відібрана деталь містить дефект, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що при випадковому огляді 600 деталей цієї партії відносна частота появи нестандартної деталі відрізняється від відповідної ймовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,05?

Розв'язання. Випробування, що розглядається, очевидно, задовольняє схему Бернуллі. Довірчу ймовірність β знайдемо за формулою (41), враховуючи, що тут $n = 600$, $p = 0{,}2$ ($q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$), $\varepsilon = 0{,}05$. Маємо

1) $\frac{n}{pq} = \frac{600}{0{,}2 \cdot 0{,}8}$;   2) $\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 61{,}2$;   3) $x_\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 0{,}05 \cdot 61{,}2 \approx 3{,}06$;   4) $\Phi_0(3{,}06) \approx 0{,}4989$.

Отже,

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}2\right| \leq 0{,}05\right) = 2\Phi_0(x_\beta) = 2 \cdot 0{,}4989 = 0{,}9978.$$

Відповідь: 0,9978.

Задача. Проведено навмання медичне обстеження 625 співробітників деякого підприємства та виявлено, що 40 людей страждають певним видом професійного захворювання. З довірчою ймовірністю 0,997 визначити границі, в яких міститься відсоток професійно хворих всього підприємства.

Розв'язання. Маємо $n = 625, m = 40$, $\beta = 0{,}997$, потрібно визначити границі довірчого інтервалу $\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}; \frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$. Обчислюємо: 1) $\frac{m}{n} = \frac{40}{625} = 0{,}064$; 2) за таблицею значень функції Лапласа знаходимо розвязок рівняння $\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}$, тобто таке значення x_β, при якому $\Phi_0(x_\beta) = \frac{0{,}997}{2} = 0{,}4985$. Маємо $x_\beta = 2{,}97$; 3) знаходимо $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = \frac{2{,}97}{2\sqrt{625}} = 0{,}0594$; визначаємо довірчі границі $\frac{m}{n} \pm \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = 0{,}064 \pm 0{,}0594$. Остаточно знаходимо

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right) \cdot 100\% = (0{,}064 - 0{,}0594) \cdot 100\% = 0{,}0046 \cdot 100\% = 0{,}46\%,$$

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right) \cdot 100\% = (0{,}064 + 0{,}0594) \cdot 100\% = 0{,}1234 \cdot 100\% = 12{,}34,$$

Тобто відсоток професійно хворих вього підприємства міститься в границях від 0,5% до 12,3%.

Відповідь: 0,5% < p <12,3%.

3. Випадкові величини.

3.1. Дискретні випадкові величини, їхні числові характеристики. Приклади дискретних випадкових величин.

1. Означення дискретної випадкової величини. Закон розподілу ймовірностей.

Нам вже доводилось зустрічатись з числами, що залежать від випадка, від результату. Такими числами, наприклад, є: число випавших очок при підкиданні навмання грального кубика, число успіхів при n випробуваннях, відносна частота події й т.і. в наведених прикладах число, що залежить від випадка, може прийняти будь-яке значення з певної скінченної множини можливих значень.

Означення. Функція $\xi = \xi(\omega)$ від елементарної події $\omega \in \Omega$ називається дискретною випадковою величиною (ДВВ), якщо множина її можливих значень скінченно або зліченно й для кожного її можливого значення x_i визначена ймовірність p_i того, що випадкова величина ξ приймає значення x_i:

$$p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = P(\xi = x_i). \qquad (45)$$

Означення. Таблиця з двох рядків

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

в першому рядку якої виписано можливі значення x_i дискретної випадкової величини ξ, а в другому рядку – ймовірності p_i відповідних значень x_i, називається законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ.

Зауваження. Графічним зображенням закону розподілу є многокутник розподілу, який будується наступним чином. На осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на осі ординат – ймовірності їх значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Для наочності ці точки з'єднують відрізками прямих.

Зауваження. В Excel для побудови графіків, гістограм та діаграм використовується засіб «Мастер диаграмм». Для його використання необхідно натиснути на іконку з такою назвою. Після включення «Мастер диаграмм» обирають той вигляд графічного зображення заданої випадкової величини, який найбільше відповідає задачі, що розв'язується.

Ймовірності p_i мають наступні дві властивості, що випливають з аксіом теорії ймовірностей:

1) $\forall i : \ p_i \geq 0$;
2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Приклади ДВВ.

Приклад 1. Нехай ξ- число очків, що випали при киданні навмання правильного грального кубика. Очевидно, що ξ має наступний закон розподілу:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тут $x_i = i, \ p_i = \frac{1}{6}, 1 \leq i \leq 6$.

Приклад 2. Біноміальний закон розподілу.

Нехай ξ – число успіхів в схемі Бернуллі при n випробуваннях. Тоді ξ – ДВВ х законом розподілу ймовірностей

ξ	0	1	2	...	m	...	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$\dots$	$P_n(m)$	$\dots$	$P_n(n)$

де $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. Такий закон розподілу називається біноміальним.

Приклад 3. Гіпергеометричний закон розподілу.

Нехай ξ – число елементів, що мають властивість S у виборці об'єму k, що береться з генеральної сукупності об'єму n, в якій всього m елементів має властивість S. Тоді ξ – ДВВ із законом розподілу ймовірностей

ξ	0	1	2	...	m
P	$P_{n,m,k}(0)$	$P_{n,m,k}(1)$	$P_{n,m,k}(2)$	$\dots$	$P_{n,m,k}(m)$

де

$$P_{n,m,k}(l) = \begin{cases} \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}, & \text{при } 0 \le l \le m,\ \ 0 \le k-l \le n-m, \\ 0, & \text{при } \qquad k+m-n \le l \le k. \end{cases}$$

Такий закон розподілу називається гіпергеометричним.

Приклад 4. Закон розподілу Пуассона.

Говорять, що ДВВ розподілена за законом Пуассона, якщо вона має наступний закон розподілу. Ймовірностей

ξ	0	1	2	...	n	$\dots$
P	$P(0;a)$	$P(1;a)$	$P(2;a)$	$\dots$	$P(n;a)$	

де $P(n;a) = \frac{a^n}{n!} \cdot e^{-a}$, $a > 0$.

За таким законом, зокрема, розподілено число частинок радіоактивної речовини, що розпалися за фіксований проміжок часу t; тут $a = \lambda t$, де λ – характерізує інтенсивність потоку частинок за одиницю часу – середнє число частинок, що розпалось за одиницю часу.

2. Дискретний випадковий вектор. Незалежні дискретні випадкові величини.

Впорядкована пара $(\xi;\ \eta)$ двох дискретних випадкових величин ξ та η утворює дискретний випадковий вектор. Якщо x_i та y_j можливі значення ξ та η, то $(x_i;\ y_j)$ – можливі значення для $(\xi;\ \eta)$. Повинно бути визначено ймовірності p_{ij} цих значень:

$$p_{ij} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}.$$

Нехай

$$p_i = P(\xi = x_i), \qquad q_j = P(\eta = y_j).$$

Числа p_{ij} мають наступні властивості:

1) $p_{ij} \geq 0$, 2) $\sum_j p_{ij} = p_i$, 3) $\sum_i p_{ij} = q_j$, 4) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Перша властивість очевидна. Доведемо властивість 2):

Нехай $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$, $B_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_i\}$, так що $p_{ij} = P(\text{c}), p_i = P(A_i)$, $q_j = P(B_j)$.

Маємо $\bigcup_j B_j = \Omega$ й тому $\bigcup_j A_i \cdot B_j = A_i \bigcup_j B_j = A_i \cdot \Omega = A_i$. Враховуючи, що доданки $A_i \cdot B_j$ при різних j несумісні, отримуємо:

$$p_i = P(A_i) = P\left(\bigcup_j A_i \cdot B_j\right) = \sum_j P(A_i B_j) = \sum_j p_{ij} .$$

Аналогічно доводяться властивості 3), 4).

Означення. Дискретні випадкові величини ξ та η називаються незалежними, якщо для них при будь-яких і та j маємо

$$p_{ij} = p_i \cdot q_j,$$

тобто якщо події $A_i = \{\xi = x_i\}$, та $B_j = \{\eta = y_i\}$ є незалежними.

Приклад. Нехай навмання кидаються два гральних кубика та нехай ξ та η – число випавших очок відповідно на першому та другому гральних кубиках. Очевидно, що при цьому ξ та η – незалежні випадкові величини.

3. Математичне сподівання ДВВ.

Нехай маємо закон розподілу ймовірностей

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_s
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_s

Означення. Математичним сподіванням ДВВ ξ називається число $M\xi$, що дорівнює сумі добутків можливих значень випадкової величини на ймовірності їх значень,

$$M\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_s \cdot p_s + \cdots = \sum_{k=1} x_k \cdot p_k, \qquad (47)$$

У випадку, коли множина можливих значень є зліченною, $M\xi$ – це сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$, про який припускається, що він збігається абсолютно.

Приклад. Нехай ξ кількість випавших очок при киданні навмання грального кубика. Тоді

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Отже, при достатньо великій кількості кидань правильного грального кубика середнє арифметичне число випавших очок буде, як правило, мало відрізнятися 3,5.

Приклад. Для біноміального закону маємо

$$M\xi = np. \qquad (48)$$

Приклад. Для закону Пуассона маємо:

$$M\xi = a. \qquad (49)$$

Таким чином, в законі Пуассона параметр a дорівнює математичному сподіванню даної випадкової величини. Отже, при великій кількості спостережень за цією величиною, як правило, будемо мати $\xi_{\text{сер}} = a$, тобто приблизним значенням параметра a в законі Пуассона може бути середнє арифметичне значень випадкової , що спостерігається та розподілена за цим законом.

4. *Властивості математичного сподівання.*

А) Якщо $\xi \geq 0$, то $M\xi \geq 0$. При цьому $M\xi = 0 \iff \xi = 0$.

Обернене твердження теж є вірним.

Б) Для довільної сталої c:

$$Mc = c$$

В) $M(c \cdot \xi) = c \cdot M\xi$.

Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання.

В) математичне сподівання суми скінченної кількості випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань (якщо ці математичні сподівання визначені), тобто

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i).$$

Г) Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань (якщо вони визначені), тобто

$$M(\xi \cdot \eta) = (M\xi) \cdot (M\eta),$$

якщо ξ та η незалежні та $M\xi$ та $M\eta$ визначені.

Д) **Нерівність Чебишова**. Якщо існує $M\xi^2$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність:

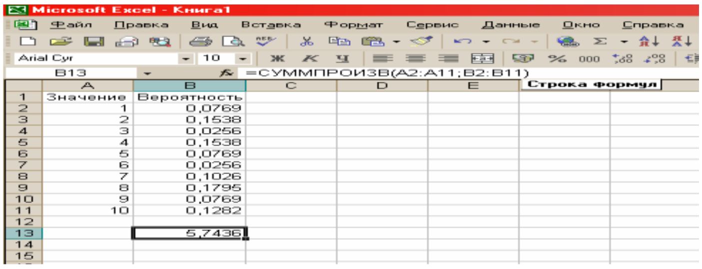
$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M\xi^2}{\varepsilon^2}. \qquad (50)$$

Зауваження.

Розглянемо знаходження математичного сподівання для ДВВ ξ. На рисунку 1 представлено закон розподілу ДВВ, а саме в лівому стовпці представлені значення ДВВ, а в правому – їхні ймовірності. Для знаходження математичного сподівання ДВВ вводимо формулу

= СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11).

Результат обчислення математичного сподівання $M\xi$ поміщено у осередок B13 таблиці.



B13 =СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11)

	A	B
1	Значение	Вероятность
2	1	0,0769
3	2	0,1538
4	3	0,0256
5	4	0,1538
6	5	0,0769
7	6	0,0256
8	7	0,1026
9	8	0,1795
10	9	0,0769
11	10	0,1282
12		
13		5,7436

Рис.1.

5. *Дисперсія ДВВ, її властивості*.

Степінь розкиду можливих значень величини ξ відносно її математичного сподівання $M\xi$ можна охарактеризувати за допомогою визначених різним чином характеристик. Однією з них є так зване середнє квадратичне відхилення, що визначається за формулою

$$\sigma_\xi = \sqrt{M(\xi - M\xi)^2}.$$

Величина, що стоїть під знаком квадратного кореня, називається дисперсією.

Означення. Дисперсією випадкової величини ξ називається математичне сподівання квадрату відхилення ξ від її математичного сподівання.

Позначається дисперсія величини ξ через $D\xi$. Таким чином, згідно з прийнятих означень:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2, \qquad (51)$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}. \qquad (52)$$

Для дисперсії справедлива й інша формула

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \qquad (53)$$

Дійсно, користуючись властивостями 2) й 3) математичного сподівання, отримуємо

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2(M\xi)\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2(M\xi)(M\xi) + (M\xi)^2 =$$
$$= M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Властивості дисперсії:

1) $D\xi \geq 0,\ D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ з ймовірністю 1.

2) $D(a\xi + b) = a^2 D\xi$.

3) Дисперсія суми скінченого числа попарно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i),$$

якщо випадкові величини ξ_k попарно незалежні.

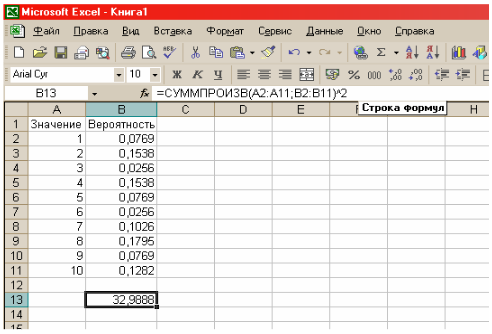
Користуючись поняттям дисперсії та нерівністю Чебишова, отримуємо що

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \qquad (54)$$

Зауваження.

Розглянемо приклад знаходження дисперсії ДВВ ξ за формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

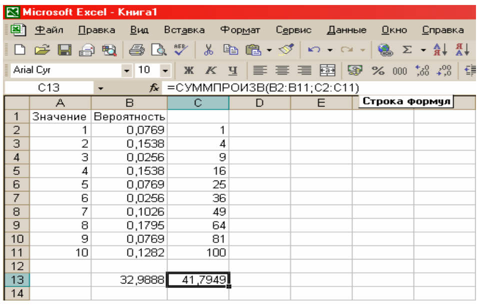
Знайдемо математичне сподівання $M\xi$ та піднесемо його до квадрату $(M\xi)^2$ (рис.2). Результат обчислення представлено в осередку B13:


B13 =СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11)^2

	A	B
1	Значение	Вероятность
2	1	0,0769
3	2	0,1538
4	3	0,0256
5	4	0,1538
6	5	0,0769
7	6	0,0256
8	7	0,1026
9	8	0,1795
10	9	0,0769
11	10	0,1282
12		
13		32,9888

Рис.2.

Тепер знайдемо $M\xi^2$. Для цього піднесемо до квадрату значення ДВВ ξ й запишемо їх до стовпця C. Потім знайдемо математичне сподівання ДВВ ξ^2, результат обчислень представлено в осередку C13.


C13 =СУММПРОИЗВ(B2:B11;C2:C11)

	A	B	C
1	Значение	Вероятность	
2	1	0,0769	1
3	2	0,1538	4
4	3	0,0256	9
5	4	0,1538	16
6	5	0,0769	25
7	6	0,0256	36
8	7	0,1026	49
9	8	0,1795	64
10	9	0,0769	81
11	10	0,1282	100
12			
13		32,9888	41,7949

Після цього згідно з формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$ обчислюємо різницю осередків C13 та B13. В нашому випадку 41,7949-32,9888=8,8069.

Для біноміального закону розподілу. $D\xi = npq$.

6. Нормована випадкова величина.

Нехай ξ має математичне сподівання $M\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_ξ. Розглянемо випадкову величину $\eta = \frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi}$. Для неї вже $M\eta = 0,\ \sigma_\eta = 1$. Дійсно,

$$M\eta = M\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} = \frac{1}{\sigma_\xi}(M\xi - M\xi) = 0,$$

$$D\eta = D\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} = \frac{1}{{\sigma_\xi}^2}D\xi = \frac{D\xi}{D\xi} = 1.$$

Величина η з $M\eta = 0,\ \sigma_\eta = 1$ називається нормованою випадковою величиною.

Так, якщо при розгляді біноміального закону розподілу перейти від величини m до величини $t = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, то дістанемо, що $Mt = 0,\ \sigma_t = 1$.

3.2. Неперервні випадкові величини та їх ймовірнісні характеристики. Приклади неперервних випадкових величин.

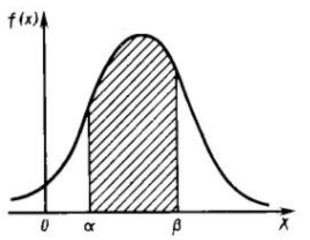
1. Означення неперервної випадкової величини.

Означення. Функція $\xi = \xi(\omega)$ від елементарної події $\omega \in \Omega$ називається неперервною випадковою величиною (НВВ), якщо існує функція $f_\xi(x)$ $(x \in R)$ така, що для будь-яких значень α та β $(\alpha, \beta \in R)$ справедлива рівність

$$P(\alpha \le \xi \le \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx. \qquad (55)$$

Достатньо вважати $f_\xi(x)$ неперервною або кусочно-неперервною функцією (це напевно виконується в більшості практично важливих випадків).

Геометрично права частина формули (55) виражає площу заштрихованої криволінійної трапеції (див. мал.).



Функція $f_\xi(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини ξ, оскільки з формули (55) для будь-якого $x \in [\alpha; \beta]$ при малих Δx випливає співвідношення

$$f_\xi(x) \approx \frac{P(x \le \ \xi \ \le x + \Delta x)}{\Delta x},$$

тобто значення щільності в точці x дорівнює ймовірності попадання неперервної випадкової величини ξ в малий проміжок $[x; x + \Delta x]$, поділеній на довжину цього проміжку. Тому щільність має розмірність, обернену до розмірності ξ.

Властивості щільності розподілу $f_\xi(x)$:

1) $f_\xi(x) \ge 0$;
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$.

Ці властивості $f_\xi(x)$ є характеристичними в тому сенсі, що будь-яка функція, що визначена на множині всіх дійсних чисел й має властивості 1) та 2) є щільністю розподілу ймовірностей певної неперервної випадкової величини.

Означення. Дві неперервні випадкові величини $\xi(\omega)$ та $\eta(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ називаються незалежними, якщо для будь-яких проміжків $[\alpha; \beta]$ та $[\gamma; \delta]$ виконується рівність

$P(\alpha \le \xi \le \beta;\ \gamma \le \eta \le \delta\,)= P(\alpha \le \xi \le \beta) \cdot\ P(\gamma \le \eta \le \delta)$.

Числові характеристики неперервної випадкової величини ξ з щільністю розподілу $f_\xi(x)$ визначаються наступним чином:

1) Математичне сподівання $M\xi$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x)dx. \qquad (56)$$

2) Дисперсія $D\xi$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)dx - (M\xi)^2 \qquad (57)$$

3) Середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

У припущенні абсолютної збіжності інтегралів (56), (57) доводиться, що математичне сподівання та дисперсія НВВ ξ має всі властивості, що й ДВВ.

Приклади НВВ.

Приклад 1. Рівномірний закон розподілу.

Означення. Неперервна випадкова величина ξ з має рівномірний закон розподілу ймовірностей на проміжку $[a;\ b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей постійна на проміжку $[a;\ b]$ та дорівнює 0 поза ним.

Отже, маємо

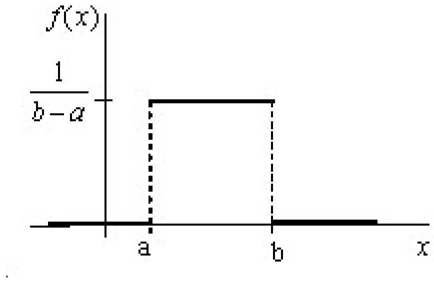
$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a;\ b], \\ c, & \text{якщо } x \in [a;\ b]. \end{cases}$$

Оскільки повинно виконуватись $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$, то отримуємо, що

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f_\xi(x)dx + \int_{a}^{b} f_\xi(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f_\xi(x)dx = c \cdot (b-a),$$

отже, $c = \frac{1}{b-a}$. Тому щільність розподілу рівномірної НВВ має вигляд

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \notin [a;\ b], \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ якщо } x \in [a;\ b]. \end{cases} \qquad (58)$$



Для рівномірної НВВ

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \qquad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \ \sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (59)$$

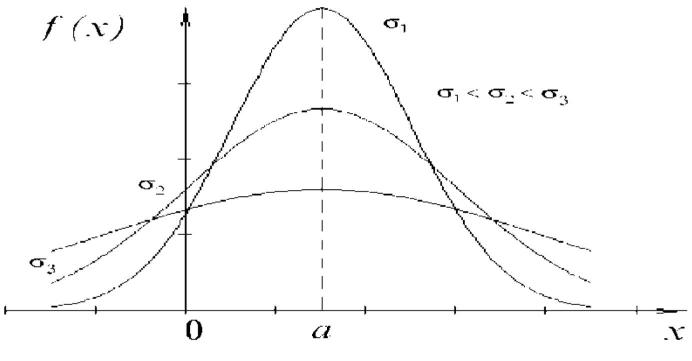
Приклад 2. Нормальний закон розподілу (закон Гаусса).

Серед законів розподілу ймовірностей, яким підпорядковуються випадкові величини, частіше за все на практиці зустрічаються з нормальним (гаусівським) законом. Нормальний закон було відкрито Муавром у 1733 році, а потім ретельно вивчено Лапласом і Гаусом.

Означення. Неперервна випадкова величина має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо її щільність $f_\xi(x)$ розподілу ймовірностей задається формулою:

$$f_\xi(x) = f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (60)$$

Тут $a \in R$ та $\sigma > 0$ – параметри, фіксовані числа.



Якщо НВВ ξ має нормальний закон розподілу, то цей факт записують $\xi \in N(a;\sigma)$. У випадку, коли $a = 1,\ \sigma = 0$, нормальну випадкову величину ξ називають нормованою й пишуть $\xi \in N(1;0)$.

Для нормально розподіленої випадкової величини

$$M\xi = a, D\xi = \sigma^2, \sigma_\xi = \sigma. \qquad (61)$$

Приклад 3. Показниковий закон розподілу.

Означення. НВВ ξ має показниковий закон розподілу ймовірностей, якщо її щільність $f_\xi(x)$ розподілу ймовірностей задається формулою:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases} \qquad (62)$$

Для НВВ ξ, що має показниковий закон розподілу ймовірностей, будемо мати:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda},\ D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}. \qquad (62)$$

3.3. Функція розподілу ймовірностей.

I. **Означення.** Функція

$$F_\xi(x) = P\{\ \xi < x\}, \qquad (63)$$

яка кожному значенню x ставить у відповідність ймовірність того, що випадкова величина ξ приймає значення, менше x, називається функцією розподілу випадкової величини ξ.

Перш за все відзначимо, що

$$P\{\ a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a). \qquad (64)$$

II. Функція розподілу дискретної та неперервної випадкових величин.

Розглянемо ДВВ із законом розподілу

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$P\{\xi < x\} = \sum_{x_i < x} P\{\ \xi = x_i\} = \sum_{x_i < x} p_i.$$

Так, для ДВВ ξ визначена функція розподілу

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i<x} p_i. \qquad (65)$$

Можна показати, що

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо} \ x \le x_1, \\ p_1, \ \text{якщо} \ x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, \ \text{якщо} \ x_2 < x \le x_3, \\ \dots \\ 1, \ \text{якщо} \ x > x_s. \end{cases} \qquad (66)$$

Нехай тепер ξ – НВВ з щільністю розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$. Тоді

$$P\{\, a < \xi < b\} = \int_a^b f_\xi(x)dx.$$

Покладемо тут $a = -\infty$, $b = x$, отримаємо $P\{\, \xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt.$

Таким чином,

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt. \qquad (67)$$

Має місце формула

$$P\{\, a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)dx.$$

Майже всюди

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x). \qquad (68)$$

Отже, щільність розподілу ймовірностей – це похідна від функції розподілу для неперервної випадкової величини. З (68) випливає, що $F_\xi(x)$ – неперервна на R величина, тобто

$$P\{\xi = x_0\} = 0.$$

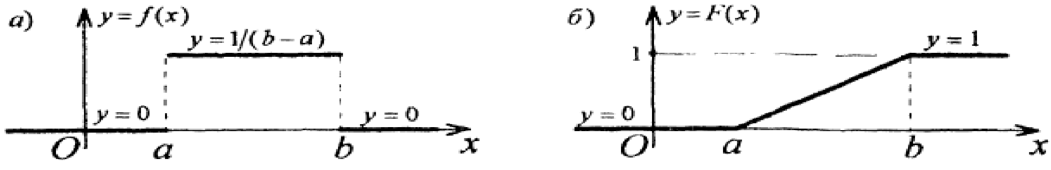
Таким чином, неперервна випадкова величина приймає окремі значення тільки з нульовою ймовірністю.

За формулою (67) знайдемо функцію розподілу деяких неперервних величин:

А) *Рівномірний закон розподілу.*

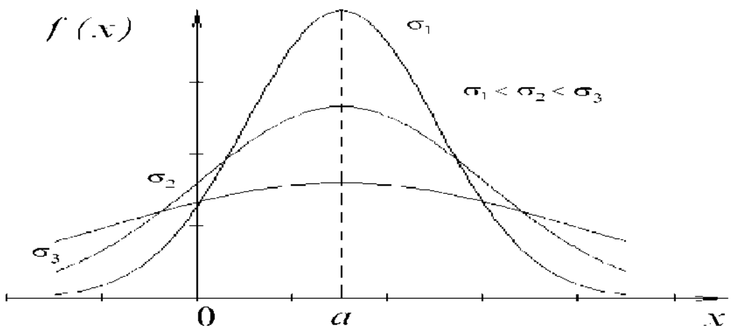
$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо} \ x \notin [a;\ b], \\ \dfrac{1}{b-a}, \ \text{якщо} \ x \in [a;\ b]. \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо} \ x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ \text{якщо} \ a \le x \le b, \\ 1, \ \text{якщо} \ x > 1. \end{cases}$$

Графіки щільності розподілу та функції розподілу рівномірної випадкової величини представлено на рисунках а) та б) відповідно:



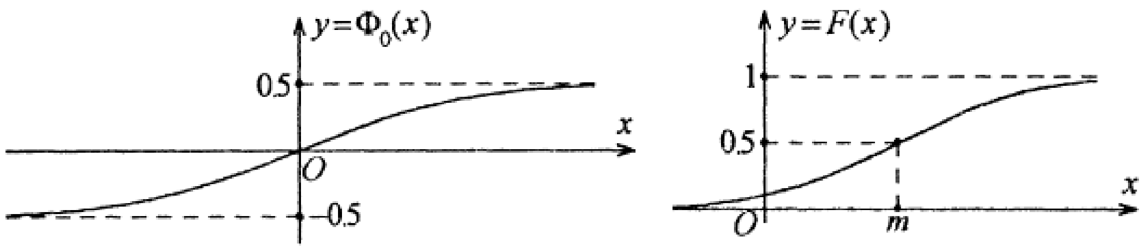
Б) *Нормальний закон розподілу (закон Гаусса).*

$$f_\xi(x)=f_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$



$$F_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=0{,}5+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-$ функція Лапласа, $\Phi_0(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-$ нормована функція Лапласа. Графік функції $\Phi_0(x)$ та $F_\xi(x)$ показано на рисунку (на рис. *m*=*a*):

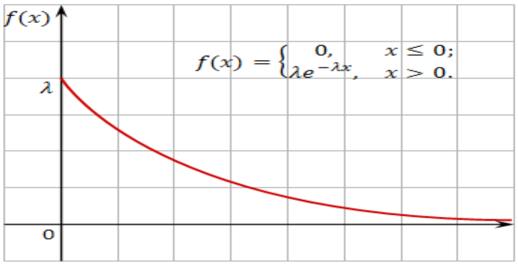


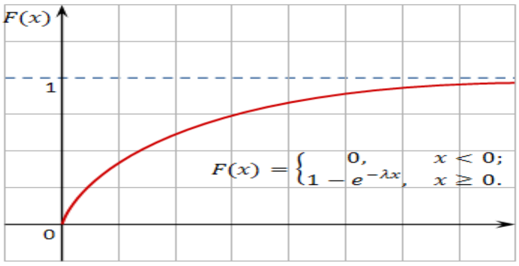
В) *Показниковий закон розподілу.*

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\geq 0.\end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

На рисунку нижче представлено ліворуч графік щільності розподілу, праворуч – функції розподілу показникової випадкової величини.





III. Властивості функції розподілу.

Функція розподілу $F_\xi(x)$ довільної випадкової величини має три властивості:

1) $F_\xi(x)$ не спадає на всій числовій осі;

2) $F_\xi(x)$ неперервна зліва в кожній точці x;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.

Властивості 1)- 3) є характеристичними властивостями для $F_\xi(x)$.

4. Двовимірні випадкові величини. Коваріація. Коефіцієнт кореляції. Лінія регресії.

4.1. Двовимірні випадкові величини.

Часто у ймовірносних моделях потрібно розглянути одразу декілька випадкових величин. Наприклад, при пострілі у мішень випадкова точка попадання має дві координати, які є випадковими величинами.

Нехай на одному й тому ж просторі Ω елементарних подій задані дві випадкові величини ξта η. Впорядкована пара $\chi = (\xi, \eta)$ називається двовимірним випадковим вектором.

Якщо ξ та η дискретні випадкові величини, то χ називається дискретним випадковим вектором. Закон розподілу χ може бути представлений у вигляді таблиці, в якій містяться ймовірності p_{ij} суміщення двох подій $A_i = \{\xi = x_i\}$ та $B_j = \{\omega: \xi = y_j\}$, при цьому $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ $(i = 1, 2, ..; j = 1, 2, ...)$:

	x_1	x_2	…	x_i	…	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…	q_1
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…	q_2
…	…	…	…	…	…	…

y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	q_j
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sum$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	1

Верхня й нижня строки таблиці задають розподіл ξ, а крайні лівий та правий стовпці – розподіл η (таким чином, $\sum_i p_i = \sum_j q_j = 1$).Отже, знаючи розподіл випадкового вектора χ, можна відновити розподіл його координат однозначно. Обернене твердження в загальному випадку не є вірним. За допомогою таблиці розподілу знаходимо ймовірність $P = \{\xi = x_i\}$ незалежно від значень, що приймає η, а також ймовірності $P = \{\eta = y_j\}$ незалежно від значень, що приймає ξ. Маємо відповідно

$$p_i = P\,\{\,\xi = x_i\} = \sum_j p_{ij}, \quad q_j = P = \{\,\eta = y_j\} = \sum_i p_{ij}. \qquad (72)$$

Умовна ймовірність $P_{\xi=x_i}\{\eta = y_j\}$ того, що випадкова величина η приймає значення y_j при умові $\xi = x_i$, обчислюється за формулою

$$P_{\xi=x_i}\{\eta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_i}\,. \qquad (73)$$

Аналогічно

$$P_{\eta=y_j}\{\xi = x_i\} = \frac{p_{ij}}{q_j}\,. \qquad (74)$$

Сукупність значень $\{y_j\}$ й відповідні їм умовні ймовірності (74) називають умовним законом розподілу η при фіксованому $\xi = x_i$. Зрозуміло, що при зміні *x* буде змінюватись й умовний закон розподілу ξ при постійному $\eta = y_j$.

Нагадаємо, що означення незалежності дискретних випадкових величин було введено в п.2.2.1.

Дві незалежні ДВВ завжди є координатами єдиного випадкового вектора.

Приклад. Двовимірна дискретна випадкова величина (ξ, η) задана своєю таблицею розподілу:

	3	8	10
-1	0,17	0,13	0,25
0	0,10	0,30	0,05

Потрібно: а) знайти умовний закон розподілу ξ при $\eta = -1$; б) з’ясувати, чи є величини ξ та η залежними.

Розв'язання. а) ймовірності значень випадкової величини ξ при $\eta = -1$ знаходимо за формулою (74) з урахуванням (72). Маємо:

$P_{\eta=-1}\,\{\xi = 3\} = \frac{0{,}17}{0{,}17+0{,}13+0{,}25} = \frac{17}{55}$,

$P_{\eta=-1}\,\{\xi = 8\} = \frac{0{,}13}{0{,}17+0{,}13+0{,}25} = \frac{13}{55}$,

$P_{\eta=-1}\,\{\xi = 10\} = \frac{0{,}25}{0{,}17+0{,}13+0{,}25} = \frac{25}{55}$.

Отже, при умові $\eta = -1$, величина ξ розподілена за законом:

ξ	3	8	10
$P_{\eta=-1}$	$\frac{17}{55}$	$\frac{13}{55}$	$\frac{25}{55}$

На основі формули (72) безумовний закон розподілу ξ задається таблицею

ξ	3	8	10
P	$\frac{27}{100}$	$\frac{43}{100}$	$\frac{30}{100}$

Очевидна розбіжність умовного та безумовного законів розподілу ξ свідчить про те, що випадкові величини ξ та η залежні.

Перейдемо до загального випадка, задамо ймовірнісний простір $\langle \Omega, S_\sigma, P(A) \rangle$, а на ньому впорядковану пару $\chi = (\xi, \eta)$ випадкових величин. Для будь-яких дійсних чисел x та y розглянемо подію $A = \{\xi < x, \eta < y\} = \{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}$. Звідки випливає, що $A \in S_\sigma$, тобто існує ймовірність $P(A)$.

Означення. Функція

$$F_\chi(x,y) = P\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}, \ (x \in R,\ y \in R) \qquad (75)$$

називається функцією розподілу ймовірностей довільного випадкового вектору $\chi = (\xi, \eta)$ й геометрично визначає ймовірність потрапляння випадкової точки $L(\xi, \eta)$ в нескінченний квадрант з вершиною $Q(x, y)$, що лежить лівіше та нижче її.

Окрім властивостей, аналогічних властивостям функції розподілу ймовірностей в одномірному випадку, функція $F_\chi(x, y)$ має наступні:

$$\lim_{x\to+\infty} F_\chi(x,y) = F_\eta(y), \qquad \lim_{y\to+\infty} F_\chi(x,y) = F_\xi(x) \qquad (76)$$

Формули (76) дозволяють знаходити функції розподілу координат випадкового вектора за його функцією розподілу ймовірностей.

Для двовимірної випадкової величини (ξ, η)дискретного типу функція розподілу має вигляд

$$F_\chi(x,y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p_{ij}. \qquad (77)$$

Випадковий вектор $\chi = (\xi, \eta)$ називають неперервним, якщо існує функція $f_\chi(x, y)$, що визначена на всій площині , така, що ймовірність потрапляння випадкової точки $L(\xi, \eta)$ в будь-яку область G на площині, що квадрується, обчислюється за формулою:

$$P\{L \in G\} = \iint_G f_\chi(x, y)dxdy. \qquad (78)$$

Функція $f_\chi(x, y)$ також називається щільністю розподілу ймовірностей й має властивості:

1) $f_\chi(x, y) \geq 0$;
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(x, y)dxdy = 1$.

В подальшому функцію $f_\chi(x, y)$ будемо вважати неперервною, виключаючи можливо, скінченну кількість точок та ліній розриву першого роду.

Для неперервного випадкового вектора χ функція розподілу ймовірностей представляється у формі

$$F_\chi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(u, v)dudv, \qquad (79)$$

з якої випливає, що в тих точках площини, де щільність розподілу ймовірностей неперервна, має місце рівність

$$f_\xi(x, y) = \frac{\partial^2 F_\chi(x, y)}{\partial x \partial y}. \qquad (80)$$

Можна довести, що координати неперервного випадкового вектора $\chi = (\xi, \eta)$ є неперервними випадковими величинами.

Для точок неперервності функції $f_\chi(x, y)$ справедливими є співвідношення:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(x, v)dv, \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(u, y)du. \qquad (81)$$

Формули (81) дозволяють однозначно відновити щільність розподілу координат неперервного випадкового вектора за заданою щільністю ймовірностей самого випадкового вектора. Відзначимо, що обернена процедура, взагалі кажучи, неоднозначна.

Нехай ξ, η – випадкові величини, що задані на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, S_\sigma, P(A) \rangle$, $\chi = (\xi, \eta)$ – випадковий вектор, а $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ – відповідні функції розподілу ймовірностей.

Означення. Випадкові величини ξ та η називаються незалежними, якщо для будь-яких дійсних чисел x та y справедлива рівність

$$F_\chi(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y). \qquad (82)$$

Якщо ж $\chi = (\xi, \eta)$ – неперервний випадковий вектор, то незалежність випадкових величин ξ та η рівносильна наступному співвідношенню між відповідними щільностями розподілу ймовірностей:

$$f_\chi(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y). \qquad (83)$$

Звідси випливає, що дві незалежні неперервні випадкові величини є координатами єдиного випадкового вектора.

Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення кожної із випадкових величин, що входять до даної двовимірної величини $\chi = (\xi, \eta)$ визначаються формулами (84):

для дискретних ξ та η	для неперервних ξ та η
$M\xi = \sum_i \sum_j x_i \cdot p_{ij}$	$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$M\eta = \sum_i \sum_j y_j \cdot p_{ij}$	$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$D\xi = \sum_i \sum_j (x_i - M\xi)^2 \cdot p_{ij}$	$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$D\eta = \sum_i \sum_j (y_j - M\eta)^2 \cdot p_{ij}$	$D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$	$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$
$\sigma_\eta = \sqrt{D\eta}$	$\sigma_\eta = \sqrt{D\eta}$

4.2. Коваріація. Коефіцієнт кореляції. Лінія регресії.

Існує всезагальний взаємозв'язок та взаємообумовленість явищ в навколишньому середовищі. Крайнім випадком цієї залежності буде або повна незалежність випадкових величин, або навпаки, функціональна залежність між ними (тобто жорсткий детермінований зв'язок, при якому значення, прийняте однією з випадкових величин, однозначно визначає значення, що приймає інша). В загальному випадку залежності між випадковими величинами значення однієї з них не визначає однозначно (тобто з ймовірністю 1) значення іншої, а лише визначає закон її розподілу. Така залежність називається кореляційною.

Нехай $\xi(\omega)$ та $\eta(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ – дві випадкові величини, що мають математичне сподівання $M\xi, M\eta$ та дисперсії $D\xi$, $D\eta$.

Характеристикою взаємозвязку системи випадкових величин ξ та η є їхня **коваріація** (**кореляційний момент** випадкових величин), що визначається наступним чином:

$$cov_{\xi,\eta} = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta. \qquad (85)$$

Теорема(*Властивість кореляційного моменту)*:

Якщо ξ та η незалежні випадкові величини, що входять в систему, то

$$cov_{\xi,\eta} = 0. \qquad (86)$$

Зауваження 1. Обернене твердження, взагалі кажучи, не є вірним.

Формула (85) описує не тільки звязок між ξ та η, але й їхнє розсіювання. Дійсно, якщо хоча б одна з величин мало відхиляється від свого математичного сподівання, то коваріація буде малою, якби не були зв'язані між собою випадкові величини ξ та η. Тому замість коваріації часто використовують безрозмірну величину

$$r_{\xi,\eta} = \frac{cov_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}, \qquad (87)$$

яка називається нормованим коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ та η.

Властивості $r_{\xi,\eta}$:

1) $-1 \le r_{\xi,\eta} \le 1$.

Залежність між ξ та η тим «сильніша», чим $|r_{\xi,\eta}|$ ближче до 1. Якщо при цьому $r_{\xi,\eta} > 0$, то із зростанням ξ в середньому зростає й η (додатня кореляція між ξ та η); якщо ж $r_{\xi,\eta} < 0$, то при зростанні ξ величина η в середньому спадає (від'ємна кореляція).

2) Якшо $|r_{\xi,\eta}| = 1$ й тільки в цьому випадку η з ймовірністю 1 є лінійна функція від ξ, тобто $\eta = \alpha\xi + \beta$. Відзначимо, що $r_{\xi,\eta} = 1$ при $\alpha > 0$, й $r_{\xi,\eta} = -1$ при $\alpha < 0$ й навпаки.

3) Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то очевидно, що $r_{\xi,\eta} = 0$.

Означення. Випадкові величини ξ та η називають некорельованими, якщо $r_{\xi,\eta} = 0$.

Зауваження 2. З попередньої теореми та властивості 3) випливає, що незалежні випадкові величини завжди некорельовані, але некорельовані випадкові величини необов'язково незалежні.

Зауваження 3. Нехай $\chi = (\xi, \eta)$ – двовимірний нормально розподілений випадковий вектор, тобто його щільність ймовірності має вигляд

$$f_\chi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}}, \qquad (88)$$

де $a_1 = M\xi$, $a_2 = M\eta$, (точку $N(a_1, a_2)$ називають центром нормального розподілу або центром розсіювання), $\sigma_1 = \sigma_\xi$, $\sigma_2 = \sigma_\eta$, а число $r = r_{\xi,\eta}$. Доводиться, що координати ξ та η вектора χ також нормально розподілені:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}, \; f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}.$$

Доводиться, що для випадкових величин ξ та η, що мають сумісний нормальний розподіл (88), некорельованість ($r_{\xi,\eta} = 0$) рівносильна їхній незалежності.

Відзначимо, що значення $r_{\xi,\eta}$ показує відхилення залежності між випадковими величинами від лінійної. При іншому вигляді ймовірнісної залежності між ξ та η нормований коефіцієнт кореляції може статися малим або навіть дорівнювати 0, тобто недостатнім або непридатним для опису цієї залежності.

У випадку лінійної кореляційної залежності між ξ та η на координатній площині *xOy* розглядаються прямі, що визначаються рівняннями:

$$y = r_{\xi,\eta} \cdot \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \cdot (x - M\xi) + M\eta, \qquad (89)$$

$$x = r_{\xi,\eta} \cdot \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \cdot (y - M\xi) + M\xi, \qquad (90)$$

які носять назву (теоретичних ліній регресії) величини η відносно ξ, відповідно величини ξ відносно η.

Нехай при проведенні деякого експерименту спостерігають за двома випадковими величинами ξ та η. Тоді *n* незалежних повторень випробування в однакових умовах дають *n* пар значень $(\xi_1; \eta_1)$, $(\xi_2; \eta_2)$,… $(\xi_n; \eta_n)$, кожна з яких розподілена так само як й $(\xi; \eta)$.

Експериментальний коефіцієнт кореляції величин ξ та η визначається формулою

$$r_{\xi,\eta}^{\text{експ}} = \frac{cov_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi^{\text{експ}} \cdot \sigma_\eta^{\text{експ}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \xi_{\text{сер}})(\eta_i - \eta_{\text{сер}})}{\sigma_\xi^{\text{експ}} \cdot \sigma_\eta^{\text{експ}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \cdot \eta_i - \xi_{\text{сер}} \cdot \eta_{\text{сер}}}{\sigma_\xi^{\text{експ}} \cdot \sigma_\eta^{\text{експ}}}. \qquad (91)$$

Цей коефіцієнт в силу властивості стійкості середнього арифметичного при достатньо великих n, як правило, мало відрізняється від $r_{\xi,\eta}$.

Приблизно вважаючи кореляційну залежність між ξ та η лінійною, записують рівняння експериментальних ліній регресії η відносно ξ, відповідно ξ відносно η у вигляді

$$y = r_{\xi,\eta}^{\text{експ}} \cdot \frac{\sigma_\eta^{\text{експ}}}{\sigma_\xi^{\text{експ}}} \cdot \left(x - \xi_{\text{сер}}\right) + \eta_{\text{сер}}, \qquad (92)$$

$$x = r_{\xi,\eta}^{\text{експ}} \cdot \frac{\sigma_\xi^{\text{експ}}}{\sigma_\eta^{\text{експ}}} \cdot \left(y - \eta_{\text{сер}}\right) + \xi_{\text{сер}}. \qquad (93)$$

При достатньо великих *n* прямі, що задаються рівняннями (92), (93), як правило, мало відрізняються від теоретичних ліній регресії (89), (90).

Відзначимо, що «середня» точка $N(\xi_{\text{сер}}, \eta_{\text{сер}})$ сумісного розподілу величин завжди лежать на лінії регресії.

Зауваження 4. Мірою надійності коефіцієнта кореляції служить величина

$$\rho = \frac{r_{\xi,\eta} \cdot \sqrt{n}}{1 - r_{\xi,\eta}^2}. \qquad (94)$$

В тих випадках, коли $\rho > 3$, а число спостережень $n > 50$ вважається, що знайдений коефіцієнт кореляції вірно відображає справжній стан справ. Така ймовірнісна оцінка лінійного коефіцієнта кореляції необхідна тоді, коли проведенні спостереження є вибіркою з великої кількості числа можливих спостережень.

4.3. Закон великих чисел. Поняття про граничні теореми теорії ймовірностей.

Законами великих чисел зазвичай називають теореми, що встановлюють достатні умови практично вірогідного наступу певної події, що залежить від числа n (що необмежено збільшується) інших подій, кожне з яких окремо відіграє лише незначну роль. Основоположні результати в цьому напряму належать великому російському вченому – математику й механіку П. Л. Чебишову (1821-1894).

Лема (Чебишова) Якщо випадкова величина $\xi \geq 0$ й існує $M\xi$, то для будь-якого числа $\alpha > 0$

$$P\{\xi < \alpha\} > 1 - \frac{M\xi}{\alpha}. \qquad (95)$$

Якщо випадкова величина ξ має математичне сподівання й скінченну дисперсію, то для кожного $\varepsilon > 0$ справедливо співвідношення

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\,\xi}{\varepsilon^2}, \qquad (96)$$

або

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\,\xi}{\varepsilon^2}, \qquad (97)$$

яке має назву нерівності Чебишова.

Таким чином, при фіксованому ε у випадкової величини ξ із більшою дисперсією ймовірність опинитися поза проміжком $(M\xi - \varepsilon; M\xi + \varepsilon)$ буде більше, тобто її ймовірнісне розсіювання коло свого середньо очікуваного значення більш значне.

Крім того, нерівність Чебишова дозволяє легко довести теорему Бернуллі з п. 2.1.6. Основною формою закону великих чисел вважається наступна теорема Чебишова, що доведена у 1867 році.

Теорема. Нехай ξ_i $(i = 1, 2, \dots)$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з одним й тим же математичним сподіванням a й обмеженими у сукупності дисперсіями ($D\xi_i \leq C$ при $i = 1, 2, \dots$). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ виконується граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (98)$$

яке є математичною формулировкою властивості стійкості середнього арифметичного.

У процесі доведення співвідношення (98) отримуємо важливу оцінку

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}, \qquad (99)$$

що випливає з нерівності (96).

Нехай, наприклад, потрібно виміряти фізичну величину a. Результат кожного вимірювання є, очевидно, випадкова величина ξ_i. Умова $M\xi_i = a$ означає відсутність систематичних похибок вимірювань, а умова $D\xi_i \leq C$ гарантує деяку мінімальну точність виконаних вимірювань, тобто випадковий розкид результатів вимірювань не може зростати необмежено. Теорема Чебишова стверджує, що при достатньо великому числі незалежних вимірювань з ймовірністю, близькою до 1, середнє арифметичне отриманих результатів буде як завгодно мало відрізнятися від вимірюваної величини. Цим виправданий на практиці спосіб отримання більш точних результатів вимірювань: одна й та ж величина вимірюється багаторазово, й у якості її значень береться середнє арифметичне отриманих результатів вимірювань.

Теореми, що дозволяють при відповідних умовах встановлювати закони розподілу для сум випадкових величин, називають граничними теоремами теорії ймовірностей.

Наведемо умови, при яких закон розподілу суми незалежних величин наближується до нормального розподілу.

Теорема (Центральна гранична теорема). Якщо ξ_i $(i = 1, 2, \dots)$ – незалежні, однаково розподілені ($M\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$) випадкові величини, то при необмеженому зростанні n закон розподілу стандартної суми

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - MS_n}{\sigma_{S_n}},$$

де $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, рівномірно по всім $x \in R$ прямує до стандартного нормального закону:

$$F_{S_n}(x) = P\left\{\frac{S_n - MS_n}{\sigma_{S_n}} < x\right\} = P\left\{\frac{\xi_i + \xi_i + \cdots + \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \to \Phi(x),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

Звідси випливає, що при достатньо великих n виконується співвідношення

$$P\{S_n \in \langle \alpha; \beta \rangle\} \approx \Phi_0\left(\frac{\beta - MS_n}{\sigma_{S_n}}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - MS_n}{\sigma_{S_n}}\right), \qquad (100)$$

з якого випливає , що для середнього арифметичного $\xi_{\text{сер}} = \frac{1}{n} S_n$ маємо

$$\left|\xi_{\text{сер}} - a\right| < \delta = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (101)$$

Цим встановлено зв'язок між довжиною довірчого інтервалу, довірчою ймовірністю й числом випробувань n при запису приближення $\xi_{\text{сер}} \approx M\xi_{\text{сер}}$.

Наприкінці цього пункту відзначимо, що найважливіша роль серед граничних теорем теорії ймовірностей належить так званій центральній граничній теоремі, відкритій нашими відомими співвітчизниками А. М. Ляпуновим (1857-1918). Теорема Ляпунова представляє собою достатньо загальне твердження про збіжність розподілу суми випадкових величин при необмеженому зростанні числа доданків до нормального закону розподілу. Цією теоремою, зокрема, пояснюється широке розповсюдження нормального розподілу в природі й техніці.

5. Індивідуальні розрахункові завдання

Номер варіанту – номер за журналом

Задача 1. *Елементи комбінаторики.*

1. Скількома способами можна скласти чотиризначне число, всі цифри якого різні.

2. Скількома способами 7 осіб можуть стати у чергу до каси?

3. В хокейному клубі 8 нападників, 5 захисників й 2 воротарі. Скільки різних варіантів команди може скласти тренер, якщо на лід виходить воротар, два захисники й трійка нападників.

4. У розіграші першості країни з футболу бере участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

5. Скільки хорд можна провести через *n* різних точок, що лежать на одному колі.

6. У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити у поїзді 4 людини при умові, що вони повинні їхати у різних вагонах?

7. У першості школи з шахів беруть участь 15 учнів. Скількома способами можуть бути розподілені призові місця?

8. На полиці є 7 книг різних авторів та трьохтомник одного автора. Скількома способами можна розкласти ці книги на полиці так, щоб книги одного автора стояли поруч.

9. В групі є 30 студентів. Потрібно обрати трьох студентів для того, щоб дати їм білети в театр. Скількома способами можна це зробити.

10. В збірній команді 12 спортсменів. Скільки існує способів розподілити комплект медалей (золото, срібло, бронза) серед членів збірної.

Задача 2. ***Класичне означення ймовірності.***

1. З колоди 36 карт навмання виймають поспіль три карти з поверненням кожної після огляду в колоду. Кожного разу колода перемішується. Обчислити ймовірність того, що серед обраних трьох карт будуть дві тузи.

2. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадуть на різні місяці року?

3. У ліфті 6 пасажирів, ліфт зупиняється на 11 поверхах. Яка ймовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на тому самому поверсі?

4. В ящику 5 апельсинів та 4 яблука. Навмання обираються 3 фрукти. Яка ймовірність того, що всі три фрукти – апельсини.

5. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри, але пам'ятає, що одна з них 0, а друга – непарна. Знайти ймовірність того, що він набере вірний номер.

6. Кидають дві гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок не перевищує 5.

7. Десять книг на одній полиці розташовують навмання. Визначте ймовірність того, що при цьому три певні книги будуть стояти поруч.

8. В класі навчаються 10 хлопців та 12 дівчат. Знайти ймовірність того, що навмання обраний учень хлопець.

9. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде парна кількість очок.

10. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде кількість очок, більша за 4.

Задача 3. Теореми додавання й множення

1. Три учасники конкурсу відповідають на питання. Ймовірність того, що перший учасник знає відповідь дорівнює 0,75 , другий - 0,8, третій - 0,9. Визначити ймовірність того, що хоча б один з них відповість на питання.

2. Перший студент знає відповідь на 2 питання з 12, другий — на 8 з 12. Кожному навмання задається одне питання. Яка ймовірність того, що одночасно обидва студенти знають відповідь?

3. В папці 10 характеристик на службовців. З них 6 характеристик на чоловіків, решта - на жінок. Навмання взято дві характеристики. Яка ймовірність того, що обидві характеристики дано на чоловіків?

4. В лотереї 1000 білетів, з них 500 білетів виграшних, а 500 інші - ні. Придбано 2 білети.Яка ймовірність того, що хоча б один білет виграшний? обидва білети виграшні?

5. Два стрілка полюють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один із стрілків.

6. Два стрілка полюють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність хоча б одного влучення.

7. В урні є 3 білих і 4 чорних шари. З урни навмання витягують 3 шари. Знайти ймовірність того, що хоча б один з них виявиться білим.

8. Знайти ймовірність того, що навмання обране двозначне число ділиться або на 2 або на 3.

9. Знайти ймовірність того, що навмання обране двозначне число ділиться і на 2, і на 3.

10. Два стрілка полюють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що жоден із стрілків не влучить в ціль.

Задача 4. *Формула повної ймовірності. Формула Байєса*

1. Є 3 урни. В першій урні знаходиться 10 білих кульок, у другій — 5 білих й 5 чорних, в третій — 10 чорних кульок. З навмання обраної урни знов таки навмання вийняли кулю. Знайти ймовірність того, що була витягнута біла кулька.

2. На експертизу під схованими назвами потрапляють проекти від трьох конкуруючих фірм. Ймовірність того, що проект першої фірми пройде експертизу з позитивною оцінкою дорівнює 0,8 , другої - 0,6 , третьої - 0,9. Для експертизи обрали навмання тільки один проект. Він її пройшов з позитивною оцінкою. Яка ймовірність того, що це був проект першої фірми ?

3. В спеціалізовану лікарню потрапляють в середньому 50% хворих із захворюванням K, 30% - із захворюванням L, 20% - із захворюванням M. Ймовірність повного вилікування хвороби K дорівнює 0,7; для хвороби L та M ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,8 та 0,9. Хворий, що потрапив у лікарню, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що хворий страждав захворюванням K.

4. Два стрілка незалежно один від одного стріляють по одній мішені, виконуючи по одному пострілу. Ймовірність влучення в ціль для першого стрілка складає 0,7, для другого 0,6. Після стрільби в мішені виявлено пробоїну . Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілок.

5. В тирі є 5 гвинтівок, ймовірність влучення з яких, відповідно дорівнюють 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 та 0,9. Визначити ймовірність влучення в ціль при одному пострілі, якщо стрілок бере одну гвинтівку навмання.

6. На двох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі: на першій – 30% , на другій – 70%. Ймовірність виготовлення стандартної деталі на першій лінії дорівнює 0,9, на другій – 0,5. Всі виготовлені на цих лініях деталі попадають на склад. Знайти ймовірність того, що навмання обрана деталь є стандартною.

7. На двох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі: на першій – 30% , на другій – 70%. Ймовірність виготовлення стандартної деталі на першій лінії дорівнює 0,9, на другій – 0,5. Всі виготовлені на цих лініях деталі попадають на склад. Навманння обрана деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на першій лінії.
8. На двох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі: на першій – 30% , на другій – 70%. Ймовірність виготовлення стандартної деталі на першій лінії дорівнює 0,9, на другій – 0,5. Всі виготовлені на цих лініях деталі попадають на склад. Навмання обрана деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на другій лінії.
9. В одному класі 5 відмінників, в другому – 3 відмінники, в третьому класі відмінників немає. З навмання обраного класу обрали учня. Знайти ймовірність того, що він є відмінником, якщо в кожному класі по 30 учнів.
10. Два економісти заповнюють документи, які складають в спільну папку. Ймовірність допустити помилку для першого економіста дорівнює 0,1, для другого- 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий - 60. Під час перевірки навмання взятий документ виявився з помилкою. Знайти ймовірність того, що його заповнив перший економіст.

Задача 5. ***Схема Бернуллі***

1. Адвокат веде в суді справи десяти клієнтів. Ймовірність виграшу справи для кожного клієнта одна і та ж і дорівнює 0,4. Яка ймовірність того з десяти справ буде виграно не більше трьох?
2. В сім'ї пятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) два хлопчики; б) не більше двох хлопчиків; в) більш двох хлопчиків; г) не менш двох й не більш трьох хлопчиків. Ймовірність народження хлопчика прийняти рівною 0,51.
3. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна дорівнює 0,75. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.
4. Скільки потрібно здійснити незалежних випробувань з ймовірністю появи події в кожному випробуванні рівною 0,4, щоб найімовірніше число появ події в цих випробуваннях було рівним 25?
5. Родина має десять дітей. Вважаючи ймовірність появи хлопчика і дівчинки рівною 0,5, визначити ймовірність того, що в даній сім'ї п'ять хлопчиків.
6. Родина має вісім дітей. Вважаючи ймовірність появи хлопчика і дівчинки рівною 0,5, визначити ймовірність того, що в даній сім'ї не менш ніж п'ять та не більш ніж сім хлопчиків.
7. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч в корзину при одному кидку дорівнює 0,4. Проведено 10 кидків. Знайти найймовірніше число підкидань й відповідну ймовірність.

8. У магазин зайшло вісім покупців. Ймовірність того, що будь-який з них не вийде з магазина без купівлі, дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що троє з них щось куплять.

9. У магазин зайшло десять покупців. Ймовірність того, що будь-який з них не вийде з магазина без купівлі, дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що жоден з них нічого не купить.

10. Серед п'яти студентів проводиться соціологічне опитування на визначення типу характеру людини. Ймовірність того, що для кожного з них буде правильно визначено тип характеру за результатами тестування дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що тільки для трьох протестованих студентів буде правильно визначено тип характеру.

Задача 6. ***Граничні теореми для схеми Бернуллі***

1. Ймовірність ураження мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

2. В результаті перевірки якості підготовленого для посіву зерна було встановлено, що 90% зернин проростуть. Визначити: ймовірність того, що серед відібраних і засіяних 1000 зернин проросте від 700 до 740 шт.;

3. В результаті перевірки якості підготовленого для посіву зерна було встановлено, що 90% зернин проростуть. Визначити: ймовірність того, що серед відібраних і засіяних 1000 зернин проросте від 800 до 920 шт.

4. Магазин отримав 10000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0, 0004. Знайти ймовірність того, що розбитих пляшок буде не більше трьох.

5. Магазин отримав 10000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0, 0004. Знайти ймовірність того, що розбитих пляшок буде більше трьох.

6. Підручник надруковано тиражом 90000 екземплярів. Ймовірність неправильного брошування підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить 5 бракованих підручників.

7. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна 3, з'явиться 267 разів.

8. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна 3, з'явиться не менш 260 разів і не більше 274 рази.

9. Зі статистичних даних відомо, що ймовірність захворіти на грип під час епідемії для кожного індивіда дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що із 100 перевірених осіб хворими будуть від 20 до 50 осіб?

10. Знайти ймовірність, що серед 1000 новонароджених будуть 480 дівчат, якщо ймовірність народження хлопця дорівнює 0,515.

Задача 7. ***Дискретна випадкова величина***

1. Стрілок веде вогонь по мішені до першого влучення, або до повного використання патронів, число яких дорівнює 5. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію числа використаних патронів, якщо ймовірність влучення в мішень дорівнює 0.2. Побудувати функцію розподілу. Визначити ймовірність того, що кількість використаних патронів не менша чотирьох.

2. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості хлопців в сім'ї з трьома дітьми. Вважаючи народження хлопця та дівчинки рівноймовірними подіями, знайти ряд розподілу й ймовірність того, що в сім'ї буде більше хлопців, ніж дівчат. Побудувати функцію розподілу. Знайти числові характеристики випадкової величини X.

3. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості випадінь грані «6» при двох підкиданнях кубика. Знайти ряд розподілу, числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X, і побудувати її графік.

4. Стрілок виконує по одному пострілу по чотирьох мішенях. Випадкова величина X – кількість влучень. Вважаючи, що ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7, знайти ряд розподілу випадкової величини X та ймовірність того, що влучень буде більше ніж промахів. Знайти числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X, і побудувати її графік.

5. Два стрілки виконують по одному незалежному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучення для першого стрілка дорівнює 0,8, а для другого – 0,5. Знайти ряд розподілу випадкової величини X – кількість влучень в мішень, а також ймовірність того, що кількість влучень дорівнює кількості промахів. Знайти числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X, і побудувати її графік.

6. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості випадінь грані «4» при двох підкиданнях кубика. Знайти ряд розподілу, числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X, і побудувати її графік.

7. Студент знає 20 відповідей з 25 запитань. Навмання виймається 5 питань. Випадкова величина X - кількість питань, на які студент знає відповідь. Знайти ряд розподілу випадкової величини X та ймовірність здачі екзамену (екзамен здано, якщо студент відповідає більш ніж на половину запитань). Знайти числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X, і побудувати її графік.

8. В партії 10 деталей, з яких 2 браковані. Навмання обираються 3 деталі. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості бракованих деталей серед обраних. Знайти ряд розподілу, числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X та побудувати її графік.
9. Після тестування виявилось, що серед 15 студентів – один меланхолік, 5 флегматиків, 6 сангвініків та 3 холерики. З цієї групи навмання обирають чотирьох студентів. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості сангвініків серед обраних студентів. Побудувати ряд розподілу цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X, і побудувати її графік.
10. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості випадінь грані «5» при двох підкиданнях кубика. Знайти ряд розподілу, числові характеристики, функцію розподілу випадкової величини X, і побудувати її графік.

Задача 8. *Неперервна випадкова величина*

1. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{a(x+4)^2}{16}, & -4<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Знайти параметр a, знайти аналітичний вираз для щільності розподілу та ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (-2; 5).

2. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ a\sqrt{2x}, & 0<x\le 8;\\ 1, & x>8.\end{cases}$$

Знайти параметр a, знайти аналітичний вираз для щільності розподілу та ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (1; 6).

3. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ a, & -2<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Знайти параметр a, функцію розподілу $F(x)$ та ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (0; 3].

4. Випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відрізку [2; 5]. Знайти аналітичний вираз для щільності та функції розподілу цієї випадкової величини. Побудувати їхні графіки. Знайти ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (0; 3]. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X.
5. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 3$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з проміжка [-2;-1]. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X.
6. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 0,\ \sigma = 1$. Записати вираз для щільності та функції розподілу випадкової величини X і знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з проміжка [0;5].
7. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 3$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з проміжка [2; 3]. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X.
8. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 5,\ \sigma = 3$. Записати вираз для щільності та функції розподілу випадкової величини X і знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з проміжка [2;8].
9. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 3$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з проміжка [-2; 3]. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X.
10. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 9,\ \sigma = 2$. Записати вираз для щільності та функції розподілу випадкової величини X і знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з проміжка [3;15].

Література

1. Дороговцев А.Я Збірник задач з теорії ймовірностей. — К.: Вища школа, 1976. — 384 с.
2. *Донченко В. С., Сидоров М. В.-С., Шарапов М. М.* Теорія ймовірностей та математична статистика. — Альма-матер. — Київ : «Академія», 2009. — 288 с.
3. Жалдак М. І. , Кузьміна Н. М. , Берлінська С. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. — Київ. Вища школа. 1996. — 352 с
4. Жалдак М.И., Квітко А. Н.Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум. - Київ. Вища школа. 1989. 264 с.

5. Каленюк П. І. та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. — 240 с.
6. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розвязання задач. — К.: Центр учбової літератури, 2007. — 576 с.
7. Колемаев В. А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1991.
8. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. — 2- изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.
9. Лихолетов И. И., Мацкевич И. Е. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. — Мн.: Выш. шк., 1976.
10. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. — Мн.: Выш. шк., 1976.
11. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. 3-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2008. — 288 с.
12. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси: навч. посіб. / Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал ; М-во освіти і науки України, Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2015. — 364 с. : іл. — Бібліогр.: с. 351.
13. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. — Київ: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с.