

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Державний заклад  
**«Південноукраїнський національний педагогічний університет  
імені К. Д. Ушинського»**  
кафедра фізики

**О. Л. Чепок**

**«Кінематика та динаміка матеріальної точки і  
системи матеріальних точок»**

Практикум з розв'язання завдань

з навчальної дисципліни

**«Загальна фізика»**

для здобувачів вищої освіти  
за ОПП Середня освіта (Фізика)

Одеса – 2021

УДК 534

ББК

*Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу*

*«Південноукраїнський національний педагогічний університет імені*

*К. Д. Ушинського» (протокол №12 від 24 червня 2021 року)*

Чепок О.Л. Кінематика та динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок: практикум з розв'язання задач з навчальної дисципліни «Загальна фізика» [для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 «Освіта / Педагогіка» спеціальності 014.08 «Середня освіта (Фізика)» денної та заочної форм навчання]. Одеса, 2021.

Практикум з розв'язання задач розроблено згідно навчального контенту змістового модуля «Кінематика та динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок» навчальної дисципліни «Загальна фізика», опанування якої у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» передбачено освітньо-професійною програмою «Середня освіта (Фізика)» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014.08 Середня освіта (Фізика) протягом перших шести семестрів навчання.

### **РЕЦЕНЗЕНТИ:**

**Гоцульський В. Я.**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики і фізики теплоенергетичних та хімічних процесів Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

**Тадеуш О.Х.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ВСТУП.....	7
Навчально-тематичний план дисципліни.....	8
§1. Кінематика поступального та обертального рухів матеріальної точки	10
1.1. Основні теоретичні відомості.....	10
1.2. Приклади розв'язання задач.....	14
1.3. Завдання для самостійного розв'язання.....	22
§2. Динаміка матеріальної точки .....	25
2.1. Основні теоретичні відомості	25
2.2. Приклади розв'язання задач.....	26
2.3. Завдання для самостійного розв'язання.....	28
§3. Рух у полі тяжіння .....	31
3.1. Основні теоретичні відомості	31
3.2. Завдання для самостійного розв'язання.....	33
§4. Сили пружності та тертя .....	34
4.1. Основні теоретичні відомості	34
4.2. Приклади розв'язання задач.....	35
4.3. Завдання для самостійного розв'язання.....	37
§5. Сили інерції .....	39
5.1. Основні теоретичні відомості	39
5.2. Завдання для самостійного розв'язання.....	39
Список використаної та рекомендованої літератури.....	42

## ПЕРЕДМОВА

**Практичне заняття** – вид заняття, під час якого студент набуває навички та вміння використовувати теоретичні знання, здобуті ним на лекції; використовувати та закріплювати у пам'яті знання під час пасивного (за допомогою викладача) і активного (самостійного) розв'язування задач.

При розв'язуванні задач необхідно:

- читаючи умову задачі, уявити сутність фізичного явища, про яке йде мова та яким законам воно підпорядковується;

- зробити скорочений (у стовпчик як у таблиці) запис умови задачі у загальноприйнятих позначеннях і в одиницях вимірювання, даних у задачі; якщо одиниці вимірювання, дані в задачі, відрізняються від одиниць Міжнародної системи фізичних величин *SI* хоча б для однієї фізичної величини, обов'язково переписати скорочений запис (рядок проти рядка) в одиницях *SI*, якщо домножити модуль відповідної фізичної величини на кратний чи дольний перехідний коефіцієнт;

- зробити рисунок (схему), який моделює явище, описане в умові задачі;

- вивести формули для обчислення по кожному питанню задачі, використовуючи загальнотеоретичні співвідношення між фізичними величинами, описаних в даній задачі, та зробити Рисунок з доповненнями (якщо це необхідно для розв'язування даної задачі); у виведених формулах не повинно бути фізичних величин, модульні значення котрих невідомі з умови задачі або з довідкових таблиць;

- перевірити правильність виведення кожної формули за одиницями вимірювання фізичних величин, модулі яких треба визначити;

- підставити у кожну виведену формулу числові значення і обчислити; записати відповідь з одиницями вимірювання.

Задачі зі змінними, числові значення котрих мають одиниці вимірювання, розглядаються як фізичні задачі. Символьні імена (позначення) змінних

завжди мають змістовне навантаження тих фізичних величин, одиниці вимірювання котрих вони відображають. Одиниця вимірювання однозначно характеризує ту фізичну величину, якою у даний час переймаються.

Нині діючі одиниці вимірювання фізичних величин встановлені державним стандартом у відповідності до основних одиниць вимірювання *SI*. Запис одиниці вимірювання як основних, так і похідних фізичних величин обов'язково повинен відповідати прийнятому стандарту у всіх галузях техніки, науки та освіти, у тому числі в усіх курсах фізики, математики тощо.

Для розв'язування фізичної задачі, для відповіді на будь-яке питання задачі *необхідно вивести формулу для кожного питання* на підставі загальних теоретичних співвідношень (формул) і для більшості задач зробити обчислення фізичної величини, числове значення якої треба знайти. У задачах з числовими даними у цю формулу підставляють числові значення, обов'язково виражені в одиницях *SI*. Відомо, що числове значення фізичної величини представляє собою добуток модуля фізичної величини і масштабної одиниці цієї фізичної величини у даній задачі. Наприклад, значення швидкості переміщення величиною  $2 \text{ см/с}$  можна записати як  $2 \cdot 1 \text{ см/с}$  або  $2 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ . Тут  $1 \text{ см/с}$  – позасистемна масштабна одиниця швидкості;  $1 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$  – дольна системна одиниця швидкості у *SI*.

Якщо у тексті задачі числові значення фізичних величин представлені у довільній системі одиниць, то короткий (символьний) запис умови задачі теж робиться у тих же довільних одиницях. Потім обов'язково робиться ще один символьний запис умови цієї задачі в одиницях *SI* (бажано, строчка проти строчки, для зручності контролю нового запису) як добуток модуля фізичної величини у довільній системі та множника переводу масштабної одиниці у довільній системі у масштабну одиницю Міжнародної системи. Для зменшення витрат часу виконання нового запису обчислення при цьому не виконуються. Під час підстановки у

формулу для обчислень немає потреби записувати одиниці вимірювання кожної фізичної величини.

Після кожного проміжного чисельного значення одержаного результату (також і після кінцевого) необхідно писати назву одиниці вимірювання, якщо запис обчислення був неперервним. Помилковим є запис одиниці вимірювання тільки біля кінцевого результату, у т.ч. і в дужках. При цьому порушується фізичний принцип рівноваги та математичний принцип рівності. У Міжнародній системі фізичних одиниць *SI* (як і в будь-якій іншій системі одиниць) не визначаються одиниці вимірювання у дужках.

Раціональним є і запис обчислень тільки з модульними значеннями фізичних величин, перед цим приведених до однієї загально визнаної системи одиниць вимірювання *SI*. Тоді одиниця вимірювання кінцевого результату записується тільки у окремо виписаної кінцевої відповіді.

## ВСТУП

Практикум з розв'язання задач розроблено згідно навчального контенту змістового модуля «Кінематика та динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок» навчальної дисципліни «Загальна фізика», опанування якої у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» передбачено освітньо-професійною програмою «Середня освіта (Фізика)» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014.08 Середня освіта (Фізика) протягом перших шести семестрів навчання.

Вищевказаний змістовий модуль є другим серед всіх, передбачених програмою, змістових модулів даної навчальної дисципліни. Згідно навчального плану, опанування його контенту віднесено до другого семестру навчання. Контент практикуму складається з доцільних теоретичних відомостей, прикладів розв'язання задач та умов задач для самостійного розв'язання до тем «Кінематика поступального та обертального рухів матеріальної точки», «Динаміка матеріальної точки», «Поступальний та обертальний рухи системи матеріальних точок», «Рух у полі тяжіння», «Сили пружності та тертя», «Сили інерції». За кожною темою створено логічним чином обґрунтовану систему задач, яка містить і традиційні задачі курсів фізики закладів загальної середньої освіти.

### Очікувані результати навчання

Як результат опанування модуля здобувач освіти повинен

#### **знати:**

- кінематику поступального руху;
- кінематику обертального руху;
- закони класичної механіки;
- поняття про поступальний та обертальний рухи матеріальної точки;
- закон всесвітнього тяжіння;
- поняття про потенціальну, кінетичні та повну енергії матеріальної точки;
- поняття про вагу, невагомість, перевантаження;
- поняття про момент сили, момент імпульсу, момент інерції;

- характеристики сили пружності та сили тертя;

**вміти:**

- розв'язувати задачі з кінематики;
- розв'язувати задачі з динаміки матеріальної точки та законів збереження;
- розв'язувати задачі на визначення параметрів різних типів механічних осциляторів та на суперпозицію коливань;
- визначати найбільш оптимальний спосіб розв'язування задач та застосовувати його на практиці;
- розраховувати параметри руху тіл як Сонячної системи, так і рух тіл у полі будь-яких центральних сил;
- розв'язувати задачі, в яких Земля розглядається як неінерційна система відліку;
- вміти розв'язувати задачі руху двох взаємодіючих тіл;
- визначати моменти інерції твердих тіл різної форми та розв'язувати задачі на обертання твердого тіла;
- розв'язувати задачі на різні види сил у механіці;
- розв'язувати задачі на механічний рух неперервних середовищ.

**Міждисциплінарні зв'язки:** аналітична геометрія, шкільний курс фізики, загальна фізика.

## НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

(згідно робочої програми з дисципліни «Елементи теорії множин і математичної логіки»)

### Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Кінематика поступального руху матеріальної точки.	6
2	Кінематика обертального руху матеріальної точки.	6
3	Закони класичної механіки	6
4	Поступальний та обертальний рухи системи матеріальних точок	6



5	Закон всесвітнього тяжіння	<b>6</b>
6	Потенціальна, кінетична та повна енергії матеріальної точки	<b>6</b>
7	Вага, невагомість, перевантаження	<b>4</b>
8	Момент сили, момент імпульсу, момент інерції	<b>6</b>
9	Обертальний рух твердого тіла	<b>4</b>
10	Внутрішня енергія твердого тіла	<b>2</b>
11	Сили пружності	<b>2</b>
12	Сили сухого тертя	<b>4</b>
13	Важіль	<b>2</b>
14	Зіткнення	<b>4</b>
Усього		<b>60</b>

## §1. Кінематика поступального та обертального рухів матеріальної точки

### 1.1. Основні теоретичні відомості

**Механіка** (від грец. – наука про машини) – а) розділ фізики; б) наука про механічний рух матеріальних об'єктів.

**Механічний рух** – зміна положення матеріального об'єкта відносно інших матеріальних об'єктів (вибраної системи відліку) з урахуванням взаємодії між ними.

**Кінематика** (від грец. – рух) – а) розділ механіки; б) вивчає стан руху матеріального об'єкта (матеріальної точки, системи матеріальних точок) шляхом визначення параметрів руху об'єкта (переміщення (у тому числі і шлях), швидкість, прискорення) в обраній системі відліку (ОСВ) без врахування маси об'єкта та діючих на нього сил.

За формою траєкторія руху матеріального об'єкта може бути: а) прямолінійною, б) криволінійною (як випадок, у вигляді кола).

За швидкістю рух може бути: а) рівномірний (у тому числі і стан спокою в ОСВ), б) рівнозмінний, в) нерівнозмінний.

Швидкість і прискорення матеріального об'єкта у загальному випадку відповідно визначаються як

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

де  $d\vec{r}$  – переміщення тіла за деякий час  $dt$ . Переміщення – вектор, який з'єднує початкове і кінцеве положення матеріального об'єкта. Швидкість характеризує зміну будь-якої фізичної величини за визначений проміжок часу. Швидкості різних явищ можна порівнювати тільки за умови однакових фізичних величин та однакового проміжка часу. Прискорення характеризує зміну швидкості за той же проміжок часу.

Для прямолінійного рівномірного руху  $\vec{a} = \text{const} = \mathbf{0}$ ,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}}{t} = \text{const} = \vec{v}_0, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t,$$

де  $\vec{r}_O$  – переміщення тіла до початку відліку проміжка часу  $t$  даного руху зі швидкістю  $\vec{v}_O$ .

При  $\vec{r}_O = 0$  переміщення тіла за час  $t$ , визначається як  $\vec{r} = \vec{v}_O t$ , а швидкість як  $\vec{v} = \vec{v}_O$ . Шлях  $s$  можна визначити як довжину лінії, яку описало дане фізичне тіло під час переходу з початкової точки системи відліку (СВ) в кінцеву за часом переходу точку СВ. Довжина лінії – кількість масштабних одиниць (цілих, дольних, кратних), укладених у даній лінії:  $s = \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{r}_i|$ . Відстань – величина переміщення між вибраними точками СВ.

**Рівномірний рух** – рух, при якому за будь-які рівні проміжки часу об'єкт проходить однакові шляхи, модуль та напрям швидкості  $\vec{v}$  з часом не змінюється:  $v = const$ ,  $\vec{e}_v = const$ , де  $\vec{e}_v$  – одиничний вектор (орт) вектора швидкості  $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_v$ , прискорення  $a = 0 = const$ ,

При прямолінійному русі фізичного тіла в рухомій інерціальній системі відліку (ІСВ) переміщення  $\vec{r}$ , швидкість  $\vec{v}$  та прискорення  $\vec{a}$  тіла в нерухомій інерціальній системі відліку (НІСВ) згідно принципу відносності Галілея–Ньютона визначаються як

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_O, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_O, \quad \vec{a} = \vec{a}',$$

де  $\vec{r}_O$ ,  $\vec{v}_O$  – переміщення та швидкість ІСВ в НІСВ;  $\vec{r}'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{a}'$  – відповідно переміщення, швидкість та прискорення тіла в НІСВ.

Середня швидкість  $\bar{v} = v_{сер} = \langle v \rangle$  — швидкість такого модельованого рівномірного руху, у якого весь пройдений шлях  $s = \Delta s$  за визначений

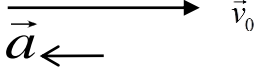
проміжок часу  $t = \Delta t$  такі ж, що і у даного нерівномірного руху:

$$\bar{v} = v_{\text{сеп}} = \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cong \text{const}.$$

**Рівнозмінний рух** – нерівномірний рух, при якому об'єкт за будь-які рівні проміжки часу проходить неоднакові відрізки шляху зі сталим прискоренням  $\vec{a} = a \cdot \vec{e} = \text{const}$ , яке  $|\vec{a}| > 0$ :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

При  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{v}_0$  рух рівноприскорений: 

При  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{v}_0$  рух рівносповільнений: 

Тіло, яке падає в нерухомій по відношенню до Землі системі відліку, починає рух до Землі з нульовою швидкістю  $v_0 = 0$  і прискоренням

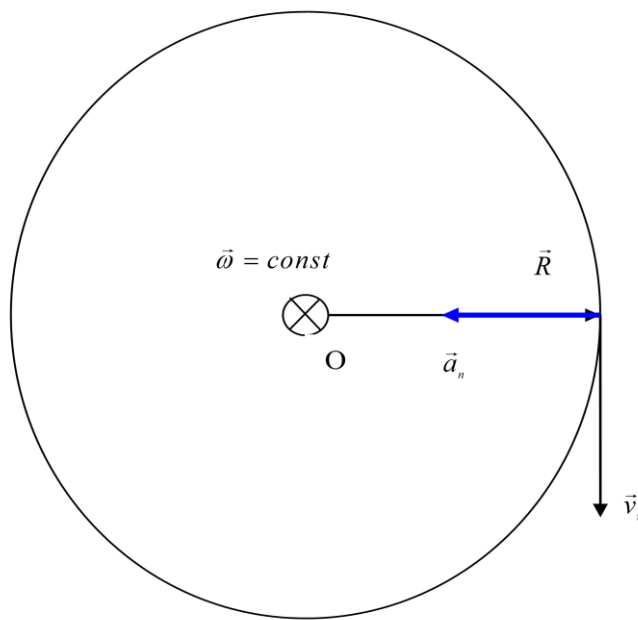
$\vec{g}$ . Тіло, яке кинуто до Землі, починає рух з початковою швидкістю

$v_0 > 0$ , що визначається умовами кидання, і з прискоренням  $\vec{g}$ .

Нерівномірний та рівномірний рухи можна порівняти за допомогою середньої швидкості. Середня швидкість  $\bar{v} = v_{\text{сеп}} = \langle v \rangle$  — швидкість такого модельованого рівномірного руху, у якого весь пройдений шлях  $s = \Delta s$  за визначений проміжок часу  $t = \Delta t$  такі ж, що і у даного

нерівномірного руху:  $\bar{v} = v_{\text{сеп}} = \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cong \text{const}$ .

**Нерівнозмінний рух** – рух, при якому об'єкт за будь-які рівні проміжки часу проходить неоднакові відрізки шляху з несталим (змінним) прискоренням  $\vec{a} \neq \text{const}$  протягом часу руху.



### Обертальний рух

– рух, при якому матеріальний об’єкт протягом деякого часу описує замкнуту криволінійну траєкторію, що окреслює

здебільшого ненульову площину.

Серед безлічі траєкторій обертального руху найбільш простими є коло, еліпс.

При русі по колу матеріальний об’єкт обертається на сталій відстані  $R$  від точки (вісі) обертання.

Під час рівномірного руху матеріального об’єкта по колу лінійна швидкість ( $v_\tau > 0$  і дотична до кола) залишається незмінною за модулем  $v_\tau = \text{const}$ , лінійне дотичне прискорення дорівнює нулю  $a_\tau = 0$ .

Одночасно радіус–вектор цього матеріального об’єкта виконує кутове переміщення  $\vec{\varphi}$  (описує центральний сектор) зі сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , що визначаються як

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \text{const}.$$

При рівномірному русі кутову швидкість знаходимо за виразом

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

де  $T$  — період обертання,  $\nu$  — частота обертання, число обертів за одиницю часу.

Кутова швидкість  $\vec{\omega}$  радіуса-вектора  $\vec{R}$  об’єкта і його лінійна швидкість  $\vec{v}_\tau$  руху по колу зв’язані співвідношенням

$$\vec{v}_\tau = [\vec{\omega} \cdot \vec{R}].$$

**Криволінійний рух** – рух, під час якого матеріальний об’єкт описує криволінійну траєкторію. Криволінійна траєкторія (у загальному випадку) є лінія, утворена у більшості випадків суперпозицією (складанням) дужок кіл з різними радіусами кривизни. У межах цих дуг діють всі закономірності, справедливі для руху по колу даного радіуса.

Рух тіла (матеріального об’єкта) під кутом до горизонту є результат складання двох прямолінійних рухів: рівномірного вздовж горизонту (знехтуючи опором повітря) і прискореного перпендикулярно до горизонту з прискоренням земного тяжіння  $\vec{g}$ .

Траєкторією такого руху є парабола (частина параболи) у площині, перпендикулярній до горизонту.

Вектор швидкості співпадає з дотичним до параболічної траєкторії.

У будь-якій точці траєкторії вектор повного прискорення руху дорівнює векторові  $\vec{g}$ .

Кут, під яким тіло розпочинає рух, визначається кутом, утвореним вектором початкової швидкості тіла з горизонтом.

## 1.2. Приклади розв’язання основних типів завдань

**Приклад 1.** Від пункту А до пункту Б автомобіль рухався першу половину часу свого руху зі швидкістю 80 км/год, а другу половину часу – зі швидкістю 40 км/год. Повертаючись з пункту Б до пункту А, цей автомобіль першу половину свого шляху рухався зі швидкістю 80 км/год, а другу половину шляху – зі швидкістю 40 км/год. В якому випадку автомобіль проїхав цей шлях за менший проміжок часу? Пояснити. Зробити рисунок.

**Розв’язання.**

Відповідь на питання задачі дає відношення  $t_{ab}/t_{ba}$  затраченого часу. Кожний з проміжків часу знаходимо за визначенням середньої швидкості руху

$$\bar{v} = s/t.$$

а) за умов руху  $A \rightarrow B$  (рис.1):

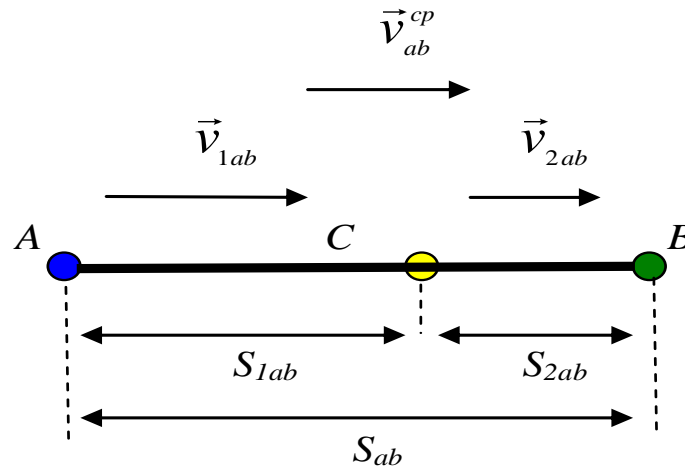


рис.1

$$s = s_{ac} + s_{cb} \rightarrow s = v_{ac} \cdot t_{ac} + v_{cb} \cdot t_{cb},$$

оскільки на кожному з відрізків шляху АС та СВ автомобіль рухався рівномірно і прямолінійно

Середня швидкість автомобіля складає

$$\bar{v}_{ab} = \frac{v_{ac} \cdot t_{ac} / 2 + v_{cb} \cdot t_{cb} / 2}{2 \cdot t_{ac} / 2} = \frac{v_{ac} + v_{cb}}{2} = \frac{80 + 40}{2 \cdot 3,6} \frac{m}{c} = 16,67 \frac{m}{c}$$

б) за умов руху В → А (рис.2):

$$s = s_{bc} + s_{ca} = v_{bc} \cdot t_{bc} + v_{ca} \cdot t_{ca};$$

середня швидкість автомобіля складає

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ba} &= \frac{s_{ac} + s_{ca}}{t_{ac} + t_{ca}} = \frac{s_{bc} + s_{ca}}{\frac{s_{bc}}{v_{bc}} + \frac{s_{ca}}{v_{ca}}} = \frac{2 \cdot v_{bc} v_{ca}}{v_{bc} + v_{ca}} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 40}{(80 + 40) \cdot 3,6} \frac{m}{c} \\ &= 14,81 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

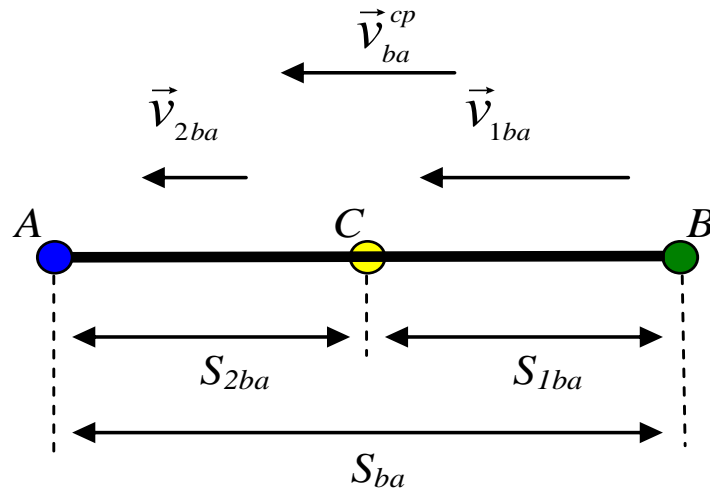


рис.2

$$\text{Отже, } \frac{t_{ab}}{t_{ba}} = \frac{s}{\bar{v}_{ab}} / \frac{s}{\bar{v}_{ba}} = \frac{\bar{v}_{ba}}{\bar{v}_{ab}} = \frac{14,81}{16,67} = 0.888$$

**Відповідь:**

На переїзд  $A \rightarrow B$  автомобіль витратив на 11% менше часу, ніж на переїзд  $B \rightarrow A \Rightarrow$  тактично і економічно вигідно їхати згідно умов  $A \rightarrow B$  незалежно від форми траєкторії.

**Приклад 2.** Човен рухається перпендикулярно до берега зі швидкістю  $7,2 \text{ км/год}$ . Ширина річки  $0,5 \text{ км}$ . Течія річки відносить човен на відстань  $150 \text{ м}$  до гирла річки. Знайти час, затрачений на переправу, і швидкість течії.

$$v = 7,2 \text{ км/год}$$

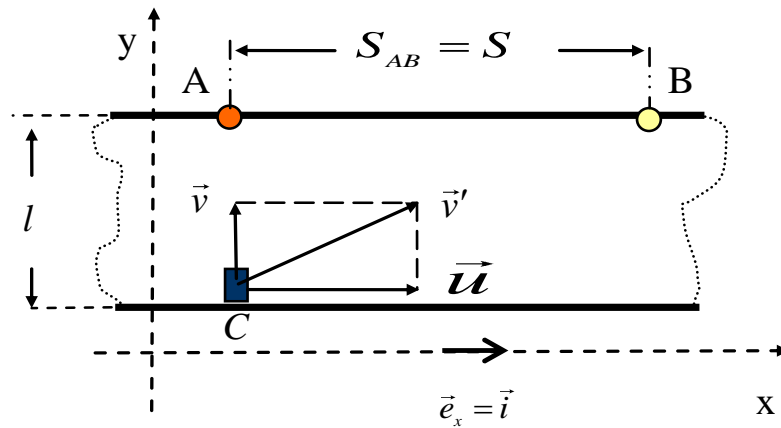
$$l = 0,5 \text{ км}$$

$$\vec{v} \perp \vec{u}$$

$$s = 150 \text{ м}$$

Знайти  $t, u$





За час руху човен одночасно приймає участь у двох рівномірних рухах: зі швидкістю  $\vec{v}$  від одного берега річки (т.С) до другого (т.А) і зі швидкістю течії води  $\vec{u}$  річки вздовж берега (від т.А до т.В). В результаті човен рухається рівномірно зі швидкістю  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$ .

У спокійній воді (в нерухомій СВ) від т.С до т.А човен рухається протягом  $t = \frac{l}{v} = \frac{500}{2} = 250$  с. Швидкість течії води у річці

$$u = \frac{s}{t} = \frac{150}{250} \frac{м}{с} = 0.6 \frac{м}{с}.$$

**Відповідь :** 0.6 м/с; 250 с

**Приклад 3.** Знайти відносно берега річки швидкість човна, який рухається: а) за течією; б) проти течії; в) під кутом  $90^\circ$  до течії. У всіх випадках швидкість човна відносно води 2 м/с. Швидкість течії річки 1 м/с.

$$u = 1 \text{ м/с}$$

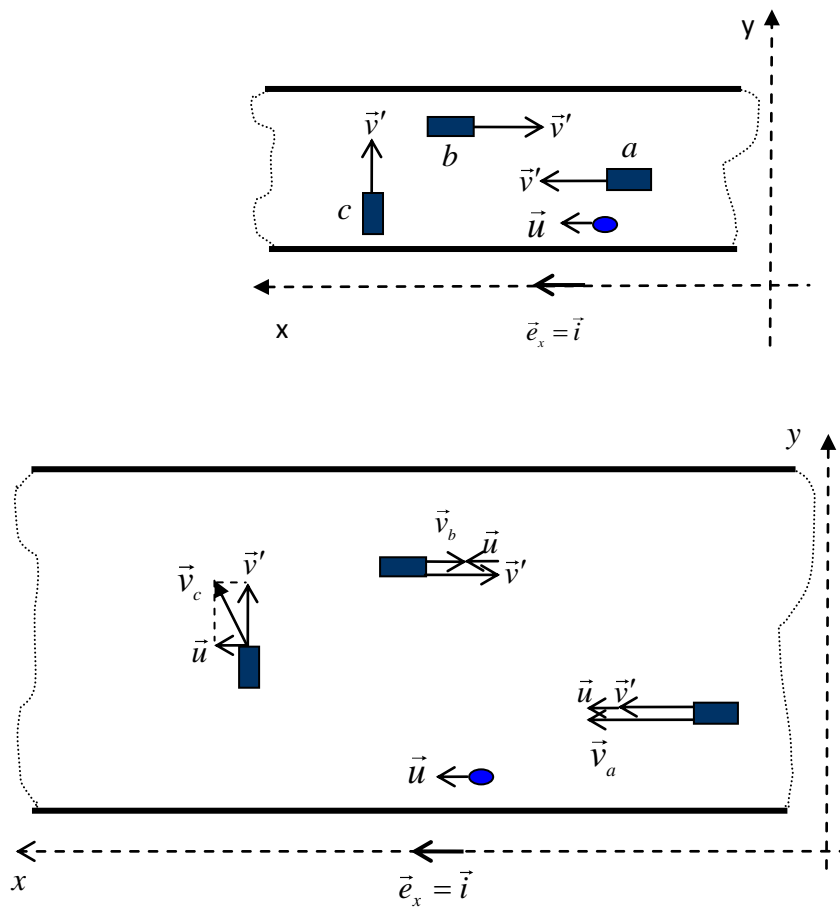
$$v' = 2 \text{ м/с}$$

$$\text{а) } \vec{v}' \uparrow \uparrow \vec{u}$$

$$\text{б) } \vec{v}' \uparrow \downarrow \vec{u}$$

$$\text{в) } \vec{v}' \perp \vec{u}$$

$$\vec{v}_{a,b,c}$$



Човен рухається прямолінійно і рівномірно відносно води, яка у свій час рухається прямолінійно і рівномірно відносно Землі, тобто човен рухається у рухомій інерціальній системі відліку «вода», яка у свій час рухається у нерухомій інерціальній системі відліку «Земля».

Виберемо вісі системи відліку так, щоб позитивний напрям вісі абсцис співпадав з напрямком швидкості течії води у річці:  $\vec{e}_x \uparrow \uparrow \vec{u}$

Згідно з принципом відносності Галілея–Ньютона  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$  знаходимо:

а)  $v_a = v' + u = (2+1) \text{ м/с} = 3 \text{ м/с}$ ; б)  $v_b = v' - u = (2-1) \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}$ ;

$$в) v_c = \sqrt{(v')^2 + u^2} = \sqrt{4 + 1} \text{ м/с} = 2,24 \text{ м/с.}$$

**Відповідь:** а) 3 м/с; б) 1 м/с; в) 2,24 м/с.

**Приклад 4.** Електропотяг рухається зі швидкістю 36 км/год. Після знеструмлення потяг зупинився через 20 с. Знайти прискорення потягу. На якій відстані до зупинки необхідно вимкнути струм?

$$v_0 = 36 \text{ км/год}$$

$$\vec{a} \downarrow \uparrow \vec{v}_0$$

$$t = 20 \text{ с}$$

$$v = 0$$

Знайти  $a, s$

Потяг рухався до зупинки рівносповільнено з ненульовою початковою швидкістю. Рівняння шляху рівнозмінного руху

$$s = v_0 t - at^2/2 \quad (1)$$

і швидкості такого руху  $v = v_0 - at \quad (2)$ .

З (2) маємо  $a = v_0/t = 0,5 \text{ м/с}^2 \quad (3)$ . Підставляючи (3) в (1), знайдемо  $s =$

$$v_0 t/2 = 100 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $0,5 \text{ м/с}^2$ ; 100 м

**Приклад 5.** Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю 9,80 м/с. Через 2 с тіло повернулося на місце кидання. Знехтуючи опором повітря, знайти час  $t'$  підйому тіла і час  $t''$  його падіння. Побудувати графіки швидкості руху і висоти польоту тіла в залежності від часу руху з інтервалом 0,2 с. Зробити аналіз руху тіла за цими графіками.

$$v_{01} = 9,80 \text{ м/с}$$

$$\vec{v}_{01} \uparrow \downarrow \vec{g}$$

$$t = 2 \text{ с}$$

$$k = 0$$

$$h(t), v(t)$$

$$\vec{h}' = \vec{v}_{01} t' + \frac{\vec{g} t'^2}{2}; \quad \vec{v}'_{01} = \vec{v}_{01} + \vec{g} t' \quad (1)$$

$$\vec{h}'' = \frac{\vec{g} t''^2}{2}; \quad \vec{v}'_{02} = \vec{g} t'' \quad (2)$$

За умови задачі  $h' = h''$ ;  $t' + t'' = t$ . Тоді  $v_{01}t' - \frac{gt'^2}{2} = \frac{gt''^2}{2}$ ;  $v_{01} = gt' \Rightarrow$   
 $gt'^2 - \frac{gt'^2}{2} = \frac{gt''^2}{2} \Rightarrow \frac{gt'^2}{2} = \frac{gt''^2}{2} \Rightarrow t'^2 = t''^2 \Rightarrow \pm t' = \pm t'' \Rightarrow t' = t'' = t/2 = 1 \text{ с.}$

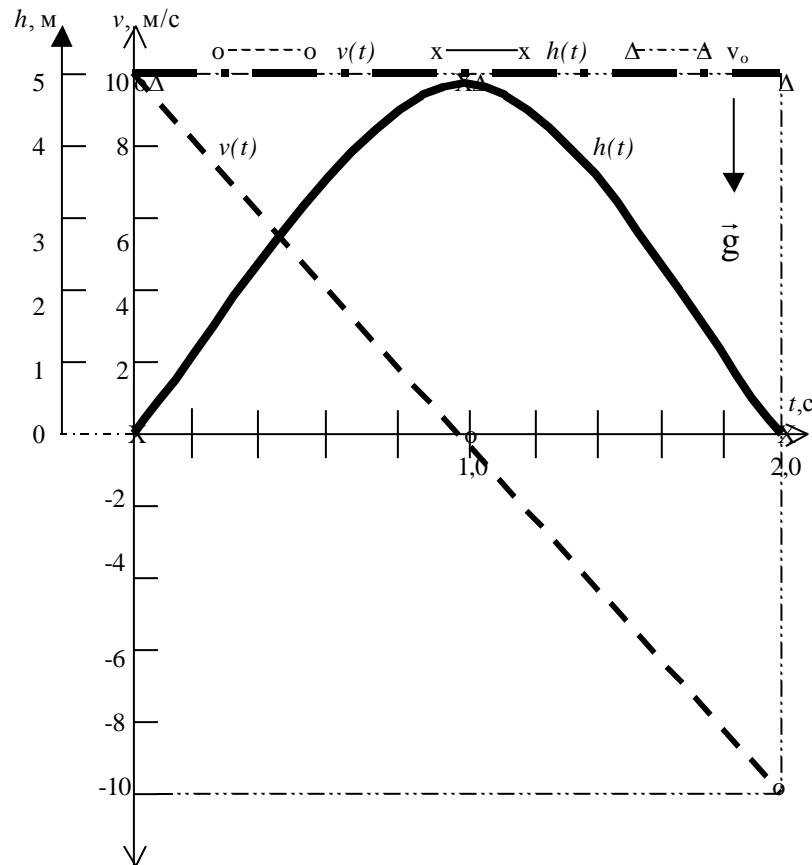
Використаємо рівняння (1) та (2); побудуємо таблицю числових значень аргумента  $t = 2 \text{ с}$ . Вибераємо одне поле для побудови графіків  $h(t)$  та  $v(t)$ , тому що для двох функцій параметр час змінюється в однакових межах і з однаковим інтервалом  $0,2 \text{ с}$ .

$t, \text{ с}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$v, \text{ м/с}$							-	-	-	-	
	9.8	7.62	5.44	3.27	1.09	0	1.0	3.2	5.4	7.6	-9.8
							9	7	4	2	
$h \text{ м}$	0	1.93	3.39	4.35	4.84	4.9	4.84	4.35	3.39	1.93	0

Позитивний напрям осі ординат виберемо протилежно напрямку вектора  $\vec{g}$ . Вісь абсцис проводимо через середину осі ординат, тому що функція  $v(t)$  має і позитивні і негативні числові значення.

Тіло протягом всього часу руху (від моменту кидання до моменту повернення) одночасно приймає участь у двох прямолінійних рухах: 1) рівномірному русі вгору зі сталою швидкістю  $v_{\text{тіло}}$  та 2) рівноприскореному русі вниз зі змінною (рівномірно зростаючою з часом) швидкістю  $(g \cdot t)$ . Сума цих двох швидкостей в кожний момент часу руху згідно виразу (2) і є результуючою швидкістю тіла у обраній системі координат (ОСК).

Про таке свідчить сталий кут нахилу графіка швидкості до осі абсцис, тому що тіло виконує прямолінійний рух зі сталим прискоренням поля тяжіння Землі. Прямолінійна залежність швидкості від часу свідчить про безперервну зміну швидкості протягом всього руху.



Як видно з графіка, через  $1,0$  с після початку руху вгору тіло досягає максимуму висоти польоту  $h_{max} = 4,9$  м над рівнем кидання (поверхні, паралельній горизонту). Відносно ОСК, зв'язаною з Землею, швидкість тіла згідно виразу (2) як результуюча рівномірно зменшується по відношенню до початкової швидкості і при  $h_{max}$  досягає нульового значення. Нульове значення результуючої швидкості складає враження зупинки тіла на висоті  $h_{max}$ , призводить до нульового переміщення тіла на мить (протягом нескінченно малого проміжку часу) та зміни напрямку руху тіла.

У ОСК тіло 'зупиняється', потім падає з висоти  $h_{max}$  з нульовою швидкістю і через  $1,0$  с досягає рівня кидання зі швидкістю, яка дорівнює швидкості кидання тіла за модулем і протилежна їй за напрямком:  $\vec{v}_{кінь} = -\vec{v}_{початк}$ . Час падіння тіла з висоти  $h_{max}$  дорівнює часу підйому цього тіла до  $h_{max}$ :  $t_{вниз} = t_{вверх}$ .

### 1.3. Завдання для самостійного розв'язання

1. Літак летить зі швидкістю 800 км/год відносно повітря. Вітер дме зі швидкістю 15 м/с з заходу на схід. З якою швидкістю відносно Землі повинен рухатися літак і під яким кутом до меридіану треба тримати курс, щоб переміщення літака було направлено 1) на південь, 2) на схід, 3) на північ, 4) на захід?
2. Літак летить зі швидкістю 600 км/год відносно повітря від пункту А до пункту В, розташованого на відстані 300 км на схід. Знайти час польоту, якщо 1) повітря не рухоме, 2) вітер дме зі швидкістю 20 м/с з півдня на північ, 3) вітер дме зі швидкістю 30 м/с з заходу на схід.
3. Тіло 1 рухається рівноприскоренно з початковою швидкістю  $v_{10}$  та прискоренням  $a_1$ . Одночасно з тілом 1 починає рухатись рівносповільнено тіло 2 початковою швидкістю  $v_{20}$  та прискоренням  $a_2$ . Через який проміжок часу після початку руху обидва тіла матимуть однакову швидкість? Визначити цей час при: а)  $v_{10} = 2$  м/с;  $a_1 = 1$  м/с<sup>2</sup>; б)  $v_{20} = 5$  м/с;  $a_2 = 0,5$  м/с<sup>2</sup>
4. Залежність пройденого тілом шляху від часу описана рівнянням  $s = A - Bt + Ct^2$ , де  $A = 6$  м,  $B = 3$  м/с,  $C = 2$  м/с<sup>2</sup>. Знайти середню швидкість та середнє прискорення тіла в інтервалі часу від 1 с до 4 с. Побудувати графіки залежності шляху, швидкості та прискорення тіла від часу в інтервалі  $0 \leq t \leq 5$  с через 1.0 с.
5. З аеростата, який знаходиться на висоті 300 м від Землі, впав камінь. Знайти час польоту цього каменя до Землі, якщо відносно Землі: 1) аеростат нерухомий; 2) аеростат вертикально піднімається зі швидкістю 5 м/с; 3) аеростат вертикально наближається до Землі зі швидкістю 5 м/с. Рисунок до кожного випадку.
6. Тіло падає з деякої висоти  $h$  і за останню одну секунду руху проходить шлях  $s = k \cdot h$ . Знайти цю висоту та час падіння тіла при а)  $k = 1/4$ ; б)  $k = 1/3$ ; в)  $k = 1/2$ .

7. Тіло 1 кинуто вертикально вгору з деякою швидкістю  $v_0$ . Одночасно з висоти  $h$  падає тіло 2. Знайти а) залежність відстані між цими тілами від часу їх руху; б) відстань між тілами через проміжок часу  $t$  після початку руху для 1)  $v_0 = 5$  м/с;  $h = 10$  м;  $t = 1,5$  с; 2)  $v_0 = 6$  м/с;  $h = 9$  м;  $t = 1,5$  с.
8. Тіло падає з висоти 19,6 м. За який час тіло пройде перший і останній 1 м свого шляху? Який шлях тіло пройде за першу і останню 0,1 с часу свого руху?
9. Залежність пройденого тілом шляху від часу описана рівнянням  $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ , де  $C = 0,14$  м/с<sup>2</sup>,  $D = 0,01$  м/с<sup>3</sup>. За який час після початку руху тіло буде мати прискорення 1 м/с<sup>2</sup>? Знайти середнє прискорення тіла за цей проміжок часу.
10. Лінійна швидкість точки на ободі колеса у 2,5 рази більша лінійної швидкості точки, яка лежить на 5 см ближче до осі обертання цього колеса. Знайти радіус колеса.
11. Два диски, розташовані на одній осі на відстані 0,5 м один від одного, обертаються з частотою 1600 об/хв. Куля, яка летить вздовж осі, пробиває обидва диски, причому отвір від кулі у другому диску зміщений на  $12^\circ$  відносно отвору у першому диску. Знайти швидкість кулі.
12. Знайти лінійну швидкість точки поверхні Землі з географічною широтою  $40^\circ$ , якщо точка на екваторі при цьому має лінійну швидкість 463 м/с.
13. Тіло масою 10 г рухається по колу радіусом 6,4 см. Знайти тангенціальне прискорення тіла, якщо відомо, що до кінця другого оберту після початку руху його кінетична енергія складала 0,8 мДж.
14. Точка рухається по колу радіусом 2 см. Залежність шляху точки від часу описується рівнянням  $s = Ct^3$ , де  $C = 0,1$  см/с<sup>3</sup>. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення цієї точки на момент часу, коли лінійна швидкість точки складає 0,3 м/с.

- 15.** Камінь кинуто горизонтально зі швидкістю 15 м/с з башти висотою 25 м. Скільки часу камінь перебуває у польоті? На якій відстані від підніжжя башти камінь впаде на Землю? З якою швидкістю камінь впаде на Землю? Який кут складе траєкторія каменю з горизонтом у точці зустрічі з Землею?
- 16.** Камінь кинуто горизонтально. Він впав на Землю через 0,5 с на відстані 5 м вздовж горизонту від місця кидання. Знайти: 1) висоту над Землею, з якої кинуто камінь, 2) швидкість кидання, 3) швидкість каменя під час його зіткнення з Землею, 4) кут, який складає траєкторія каменя з горизонтом у місці його зіткнення з Землею.
- 17.** Тіло кинуто зі швидкістю 10 м/с (15 м/с) під кутом  $45^\circ$  до горизонту. Знайти радіус кривизни траєкторії тіла через 1 с після кидання.
- 18.** На спортивних змаганнях у Петербурзі спортсмен штовхнув ядро на відстань 16,2 м. На яку відстань полетить таке ж ядро в Ташкенті з такою ж початковою швидкістю й з таким же кутом нахилу її до горизонту? Прискорення вільного падіння у Петербурзі  $9,819 \text{ м/с}^2$ , у Ташкенті –  $9,801 \text{ м/с}^2$ .
- 19.** Тіло кинуто зі швидкістю 15 м/с під кутом  $30^\circ$  до горизонту. Знайти нормальне і тангенці-альне прискорення тіла через 1,5 с після кидання.
- 20.** З башти висотою 40 м кинуто камінь зі швидкістю 20 м/с під кутом  $30^\circ$  до горизонту. Знайти у точці падіння каменя на Землю 1) відстань до підніжжя башти, 2) кут між траєкторією каменя та горизонтом, 3) швидкість каменя.
- 21.** Тіло кинуто зі швидкістю 14,7 м/с під кутом  $30^\circ$  до горизонту. Знайти нормальне і тангенці-альне прискорення тіла через 1,25 с після початку руху.
- 22.** М'яч кинуто зі швидкістю 10 м/с під кутом  $45^\circ$  до горизонту. М'яч зіткнується зі стінкою, розташованою на відстанні 3 м від місця кидання. У який стан руху м'яча відбулося зіткнення (під час підйому чи падіння)? Знайти швидкість м'яча у момент зіткнення.



## §2. Динаміка матеріальної точки

### 2.1. Основні теоретичні відомості

**Динаміка** (від грец. – **сила**) – а) розділ механіки; б) вивчає причини зміни стану руху матеріального об'єкта та зв'язок цих причин з наявними кінематичними параметрами руху даного об'єкта.

*Перший закон* класичної механіки Г. Галілея – І. Ньютона стверджує, що всякий матеріальний об'єкт не змінює свій стан руху – спокій чи рівномірний прямолінійний рух – без дії на нього інших об'єктів (сил).

*Другий закон* класичної механіки І. Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

при  $m = \text{const}$  визначає прискорення  $\vec{a}$  тіла масою  $m$ , з яким дане тіло починає рухатися під дією сили  $\vec{F}$ . Для вибраного тіла ця сила є зовнішньою (можливо, і результуючою декількох сил, що витікає з закону незалежності дії сил).

За другим законом І. Ньютона імпульс сили, що діє на дане тіло, дорівнює імпульсу маси цього тіла

$$\vec{F} \cdot dt = d(m \cdot \vec{v})$$

*Третій закон* класичної механіки І. Ньютона описує одночасність та рівність взаємної дії двох мас

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

Ці сили прикладені до різних взаємодіючих мас і направлені протилежно одна до одної.

Закони класичної механіки перестають бути справедливими а) для матеріальних об'єктів атомарних розмірів (елементарних частинок), б) для руху зі швидкостями, близькими до швидкості світла.

Сили сухого тертя: а) сили зовнішнього тертя; б) виникають як дотичні під час відносного зміщення твердих тіл при безпосередньому взаємному контакті поверхонь цих тіл.

Сили сухого тертя покою  $F_{mn} = k_{mn} \cdot F_{nm}$ , де  $k_{mn}$  – коефіцієнт тертя покою,  $F_{nm}$  – сила нормального тиску, перпендикулярна до поверхні.

Сили сухого тертя ковзання  $F_{mkз} = k_{mkз} \cdot F_{nm}$ , де  $k_{mkз}$  – коефіцієнт тертя ковзання. У більшості випадків  $k_{mkз} \approx k_{mn}$ .

Сили сухого тертя кочення  $F_{mkч} = \frac{k_{mkч} \cdot F_{nm}}{R}$ , де  $k_{mkч}$  – коефіцієнт тертя кочення,  $R$  – радіус кривизни твердого тіла (колеса), яке котиться по поверхні іншого твердого тіла.

Сила інерції – результат взаємодії фізичного тіла маси  $m$  і системи відліку, яка в неінерціальній системі відліку рухається з прискоренням

$$\vec{a}_{св}: \quad \vec{F}_{ін} = m \cdot (-\vec{a}_{св})$$

## 1.2. Приклади розв'язання основних типів завдань

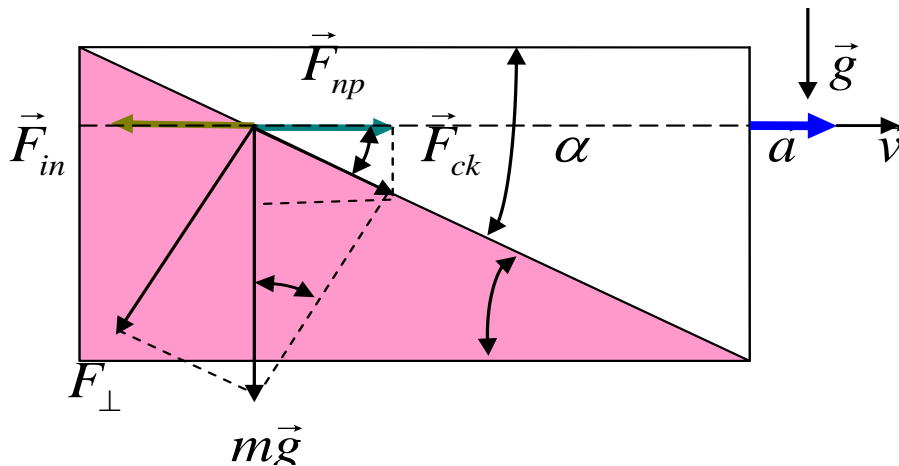
**Приклад 1.** Потяг масою  $500 \text{ т}$  рухається рівносповільнено. За  $1 \text{ хв}$  швидкість потягу зменшилась від  $40 \text{ км/год}$  до  $28 \text{ км/год}$ . Знайти силу гальмування потягу.

$m = 500 \text{ т}$	$m = 500 \cdot 10^3 \text{ кг}$	$F = m \cdot a$ ; $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$ ; $F = m \frac{v_2 - v_1}{t}$ $\vec{F} \downarrow \uparrow \vec{v}$ $F = 500 \cdot 10^3 \cdot \frac{28/3,6 - 40/3,6}{60} \text{ Н}$ $F = -2,77 \cdot 10^4 \text{ Н}$
$v_1 = 40 \text{ км/год}$	$v_1 = 40/3,6 \text{ м/с}$	
$v_2 = 28 \text{ км/год}$	$v_2 = 28/3,6 \text{ м/с}$	
$t = 1 \text{ хв}$	$t = 60 \text{ с}$	
$F$	$F$	

**Приклад 2.** Автомобіль рухається горизонтально з прискоренням  $2,44 \text{ м/с}^2$ .

Який кут з горизонтом скла дає поверхня бензину в бачку автомобіля?

**Розв'язання:**



$$F_{np} = F_{ck} \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = m \cdot a_{in}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha = m \cdot a_{in} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2a_{in}}{g}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2a_{in}}{g} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 \cdot 2.44}{9.8} = 15^\circ$$

**Відповідь:**  $15^\circ$

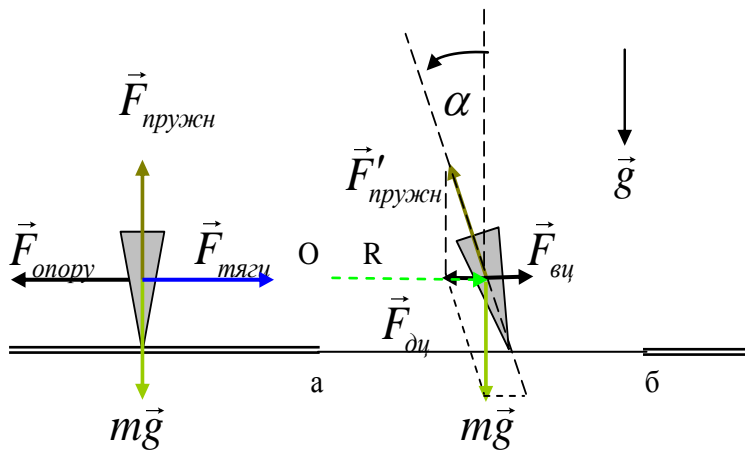
**Приклад 3.** Мотоцикліст їде по горизонтальній дорозі зі швидкістю  $72$

км/год, роблячи поворот на дорозі з радіусом кривизни  $100$  м. На який кут

мотоцикліст повинен відхилитись від вертикалі, щоб не впасти на повороті?

**Розв'язання:**

$$F_{цб} = F_{ин} = ma_{ин} = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{ин}}{g} = \frac{v^2}{gR}$$

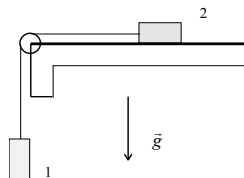


$$\alpha = \arctg \frac{v^2}{gR} = \arctg \frac{400}{9.8 \cdot 100} = \arctg 0.408 \approx 22^\circ$$

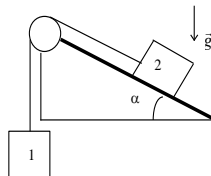
**Відповідь:**  $\approx 22^\circ$

### 2.3. Завдання для самостійного розв'язання

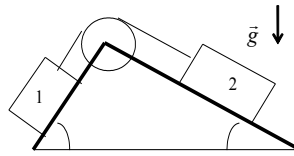
- Трамвай від зупинки рухається з прискоренням  $0,5 \text{ м/с}^2$ . Через  $12 \text{ с}$  після початку руху двигун відключено. Трамвай рухається до зупинки рівносповільнено. Коефіцієнт тертя на всьому шляху  $0,01$ . Знайти найбільшу швидкість і час руху трамваю. Яке прискорення трамваю при рівносповільненню му русі? Яку відстань пройде трамвай за час руху?
- На автомобіль масою  $1 \text{ т}$  під час руху діє сила тертя, яка дорівнює  $0,1$  діючої на нього сили тяжіння. Яка повинна бути сила тяги, що розвиває двигун автомобіля, щоб автомобіль рухався: а) рівномірно; б) з прискоренням  $2 \text{ м/с}^2$ ?
- Невагомий блок закріплено на краю столу. Гирі  $1$  і  $2$  по  $1 \text{ кг}$  кожна з'єднано ниткою, яка не розтягується і перекинуто через блок (рис.). Коефіцієнт тертя гирі з поверхнею столу  $0,1$ . Знайти прискорення системи тіл  $1$  і  $2$  та силу натягу нитки. Тертям у блоці знехтувати.



4. На автомобіль масою  $1\text{ т}$  під час руху діє сила тертя, яка дорівнює  $0,1$  діючої на автомобіль сили тяжіння. Знайти силу тяги, яку розвиває двигун автомобіля, якщо автомобіль рухається з прискоренням  $1\text{ м/с}^2$  в гору з нахилом  $1\text{ м}$  на кожні  $25\text{ м}$  шляху.
5. Тіло ковзає на похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $4^\circ$ . Знайти  
1) прискорення тіла, якщо коефіцієнт тертя складає  $0,03$ ; 2) швидкість цього тіла в кінці шляху в  $100\text{ м}$  на цій похилій площині.
6. Тіло лежить на похилій площині, яка утворює з горизонтом кут  $4^\circ$ . Яким повинен бути значення коефіцієнта тертя покою, при якому тіло почне ковзати на даній похилій площині?
7. Тіло ковзає вздовж похилої площині, яка з горизонтом складає кут  $45^\circ$ . Швидкість тіла досягла  $2\text{ м/с}$  в кінці шляху  $36,4\text{ см}$ . Знайти коефіцієнт тертя тіла з площиною.
8. Тіло ковзає на похилій площині, яка з горизонтом складає кут  $45^\circ$ . Швидкість тіла досягла  $2\text{ м/с}$  в кінці шляху  $36,4\text{ см}$ . Знайти коефіцієнт тертя ковзання тіла з площиною, якщо відома залежність пройденого тілом шляху від часу  $s = 1,73 \cdot t^2$ .
9. Невагомий блок закріплено на вершині похилої площини, яка складає кут  $30^\circ$  з горизонтом. Гирі масою по  $2\text{ кг}$  кожна з'єднано ниткою, яку перекинута через блок. Знайти а) прискорення, з яким рухаються гирі; б) силу натягу нитки. Коефіцієнт тертя гирі з площиною складає  $0,1$ . Тертям у блоці знехтувати.



10. Невагомий блок закріплено на вершині похилих площин, які складають з горизонтом відповідно кути  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . Гирі масою по  $1\text{ кг}$  кожна з'єднано ниткою, яку перекинута через блок. Знайти а) прискорення, з яким рухаються гирі; б) силу натягу нитки. Коефіцієнти тертя гирь з площинами складають по  $0,1$  для кожної. Тертям у блоці знехтувати.

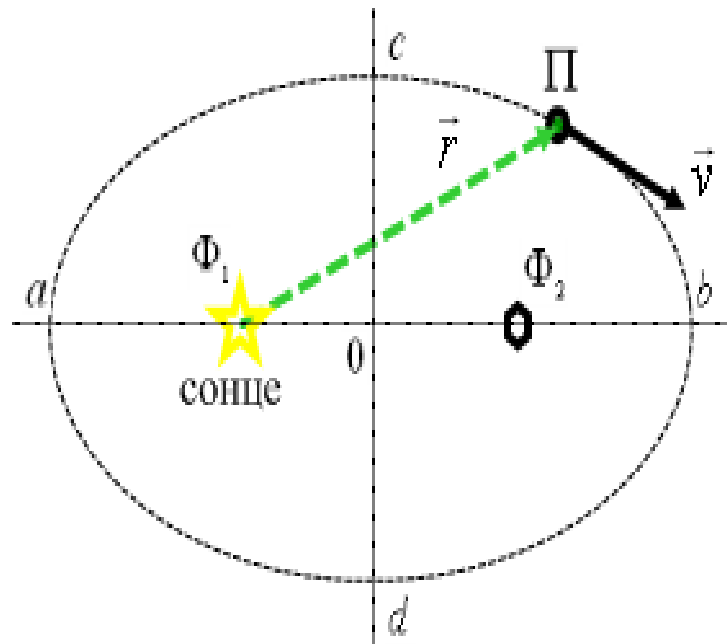


11. Автомобіль масою 1020 кг, рухаючись рівносповільнено, зупиняється через 5 с, пройшовши шлях 25 м. Знайти початкову швидкість автомобіля і силу гальмування.
12. Вагон масою 20 т рухається зі швидкістю 54 км/год. Знайти середню силу гальмування, діючу на вагон, якщо відомо, що вагон зупиняється протягом: а) 1 хв 40 с; б) 10 с; в) 1 с.
13. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, при чому залежність пройденого тілом шляху від часу дано рівнянням  $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ , де  $C = 5 \text{ м/с}^2$  і  $D = 1 \text{ м/с}^3$ . Знайти силу, діючу на тіло в кінці першої секунди руху.
14. Під дією сили 10 Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху від часу дано рівнянням  $s = A - Bt + Ct^2$ , де  $C = 1 \text{ м/с}^2$ . Знайти масу тіла.
15. До нитки підвішено груз масою 1 кг. Знайти силу натягування нитки, якщо нитку з грузом: а) піднімати з прискоренням  $5 \text{ м/с}^2$ ; б) опускати з прискоренням  $5 \text{ м/с}^2$ .
16. Стальний дрот витри має силу натягування 4,4 кН. З яким найбільшим прискоренням можна підняти груз масою 400 кг, підвішений на цьому дроті, щоб він не розірвався?
17. Маса ліфта з пасажирами 800 кг. З яким прискоренням і в якому напрямку рухається ліфт, якщо відомо, що сила натягування троса, який підтримує ліфт, дорівнює: а) 12 кН; б) 6 кН?
18. Гирька прив'язана до нитки довжиною 30 см і описує коло радіусом 15 см у горизонтальній площині. Знайти частоту обертання, при якій швидкість гирьки буде 15 см/с.
19. Тягар масою 1 кг, підвішений на невагомому стержні довжиною 0,5 м, коливається у вертикальній площині. При якому куті відхилення стержня від вертикалі кінетична енергія тягара у його нижньому положенні дорівнює 2,45 Дж? У скільки разів при такому куті відхилення сила натягу стержня у нижньому положенні більше сили натягу стержня у верхньому положенні?

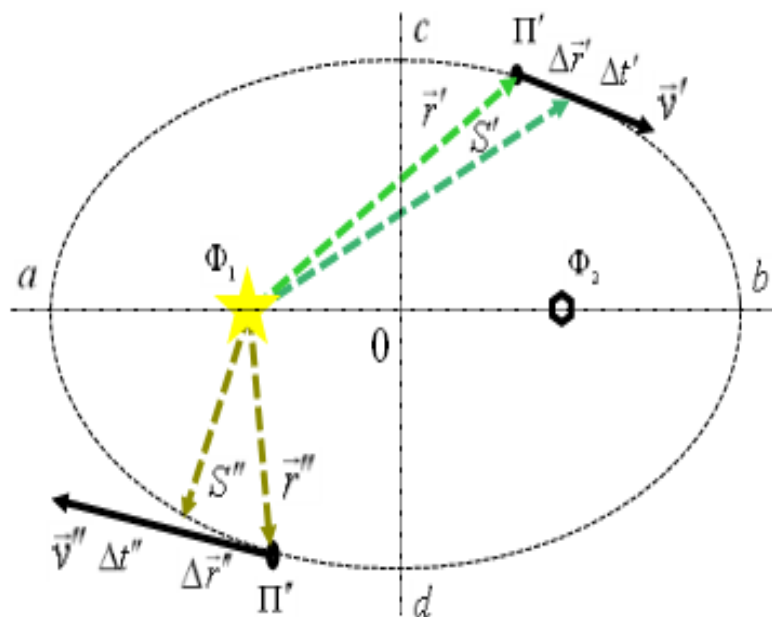
### §3. Рух у полі тяжіння

#### 3.1. Основні теоретичні відомості

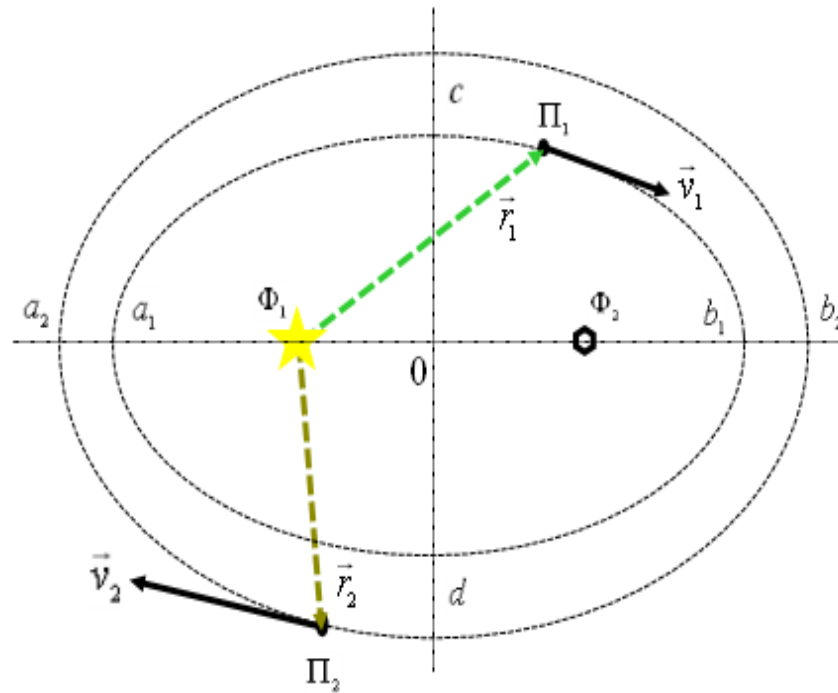
**1-й закон Кеплера:** кожна планета сонячної системи рухається по замкнутій орбіті – еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.



**2-й закон Кеплера:** кожна планета сонячної системи рухається по еліпсу зі сталою секторіальною швидкістю.



**3-й закон Кеплера:** відношення квадрату періода обертання  $T$  планети навколо Сонця до кубу більшої піввісі  $R$  її орбіти є величина стала для всіх планет



$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \dots = \frac{T_n^2}{R_n^3} = \text{const}$$

Сили, що утримують планети (супутники) на орбіті навколо центру тяжіння  $M$ , мають гравітаційне походження, визначаються за законом всесвітнього тяжіння Ньютона

$$\vec{F} = G \frac{m \cdot M}{r^2} (-\vec{e}_r),$$

де  $G$  – всесвітня гравітаційна стала,  $r$  – відстань між центром тяжіння  $M$  і центром планети масою  $m$  як матеріальними точками,  $\vec{e}_r$  – орт радіуса-вектора  $\vec{r}$ .



### 3.2. Завдання для самостійного розв'язання

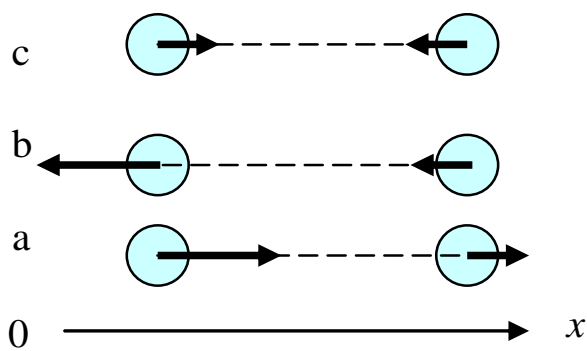
1. Штучний супутник Землі знаходиться на висоті 35800 км над поверхнею Землі і виконує функції ретранслятора телекомунікаційного зв'язку. Супутник рухається по круговій орбіті у площині екватора з заходу на схід і залишається нерухомим відносно спостерігача на Землі. Спостерігач разом з Землею рухається з лінійною швидкістю 463 м/с. Знайти лінійну швидкість ШСЗ.
2. Знайти період обертання навколо Сонця штучної планети, велика піввісь еліптичної орбіти якої перевищує більшу піввісь еліптичної орбіти Землі на  $24 \cdot 10^6$  км.
3. Знайти період обертання супутника навколо планети Марс, якщо а) супутник Фобос знаходиться на відстані 9500 км від центру Марса, б) супутник Деймос знаходиться на відстані 24 000 км від центру Марса
4. Знайти період обертання штучного супутника Місяця, якщо велика піввісь його еліптичної орбіти на  $3 \cdot 10^7$  км менше більшої напівосі земної орбіти.
5. Штучний супутник Землі рухається по круговій орбіті у площині екватора з заходу на схід. На якій відстані від поверхні Землі повинен рухатися цей супутник, щоб він був нерухомий по відношенню до спостерігача, який знаходиться на Землі?
6. Штучний супутник Землі рухається по круговій орбіті з заходу на схід у площині географічної широти  $40^\circ$ . На якій відстані від поверхні Землі повинен рухатися цей супутник, щоб він був нерухомий по відношенню до спостерігача, який знаходиться на Землі?
7. Велика вісь орбіти першого штучного супутника Землі менше великої вісі орбіти другого супутника на 800 км. Період обертання першого ШСЗ на початку його руху склав 96,2 хв. Знайти довжину великої орбіти другого ШСЗ та його період обертання.
8. Штучний супутник Місяця рухається по круговій орбіті на висоті 20 км від поверхні Місяця. Знайти лінійну швидкість цього супутника та період обертання його навколо Місяця.

## §4. Сили пружності та тертя

### 4.1. Основні теоретичні відомості

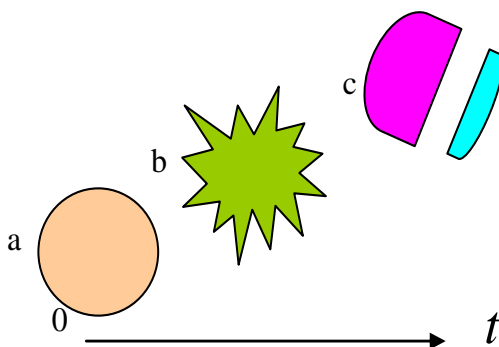
Зіткнення – короткочасна взаємодія двох (і більше) тіл, під час якої змінюються кінетиматичні, динамічні та статичні параметри руху тіл, але не порушуються загальні закони збереження енергії, імпульсу та маси.

Зіткнення може бути центральним (лобовим) і нецентральним. Центральним є зіткнення тіл, вектори швидкості яких лежать на прямій, що з'єднує центри тіл. Зіткнення можливе, коли відносна швидкість тіл направлена до їх центру мас.



Абсолютно пружне зіткнення (АПЗ) як абстракція – зіткнення тіл замкнутої системи, в результаті якого не порушуються закони збереження, а тіла – суб'єкти зіткнення – після зіткнення не змінюють (кожен) своєї індивідуальності.

Абсолютно непружне зіткнення (АНПЗ) як абстракція – зіткнення тіл незамкнутої системи, в результаті якого порушується як виняток закон збереження механічної (кінетичної) енергії, тіла об'єднуються в єдине тіло. Прикладом АНПЗ зворотнього напрямку може бути вибух, в результаті якого єдина маса вибухівки роз'єднується на дві (і більше) частини.



Непружне зіткнення (НПЗ) – зіткнення тіл незамкнутої системи, в результаті якого порушується закон збереження механічної (кінетичної) енергії, тіла після зіткнення залишаються індивідуальностями. Непружне зіткнення статистично є найбільш вірогідним, реальним.

#### 4.2. Приклади розв'язання основних типів завдань

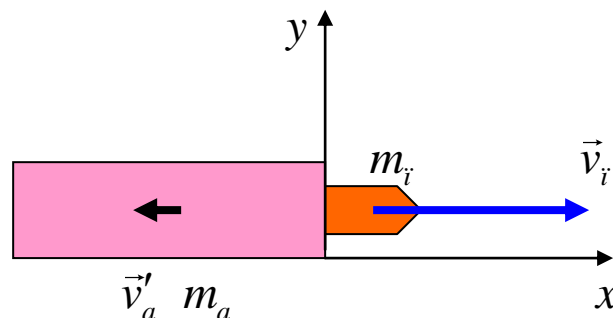
**Приклад 1.** Автомат випускає кулі з частотою  $600 \text{ хв}^{-1}$ . Маса кожної кулі  $4 \text{ г}$ , а початкова швидкість  $500 \text{ м/с}$ . Знайти середню силу віддачі під час стрілянини.

$$\nu = 600 \text{ хв}^{-1}$$

$$m = 4 \text{ г}$$

$$v' = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

**Розв'язання.**



Під час пострілу виконується закон збереження імпульсу. До пострілу куля і автомат знаходилися у стані спокою:

$$0 = m_i v'_i + m_a v'_a \Rightarrow m_i v'_i = -m_a v'_a, \quad -\bar{F}_a = \bar{F}_n.$$

Середня сила віддачі автомата при кожному пострілі визначається як

$$\bar{F}_n = m \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad \text{Тут } \Delta v = v_n, \quad \Delta t = \frac{1}{\nu} = 0,1 \text{ с}.$$

$$\text{Тоді} \quad \bar{F}_n = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{500}{0,1} \text{ Н} = 20 \text{ Н}$$

**Відповідь:** 20 Н

**Приклад 2.** Куля масою  $5 \text{ г}$  летить горизонтально зі швидкістю  $500 \text{ м/с}$ . Вона зіткається з тілом масою  $0,5 \text{ кг}$ , яке висить на невагомому жорсткому стержні. Куля застряє в тілі. Знайти відстань від шарніру, до якого при

кріплено стержень, до центра тіла, якщо об'єднаний центр мас кулі та тіла, утворений в результаті їх непружного зіткнення, піднявся до верхньої точки кола.

$$m_n = 5 \tilde{a}$$

$$\vec{v}_n \perp \vec{g}$$

$$v_n = 500 \frac{M}{c}$$

$$m = 0,5 \text{ кг}$$

$$v_0 = 0$$

$$m_{cm} = 0$$

$$Q \neq 0$$

$$h = 2l$$

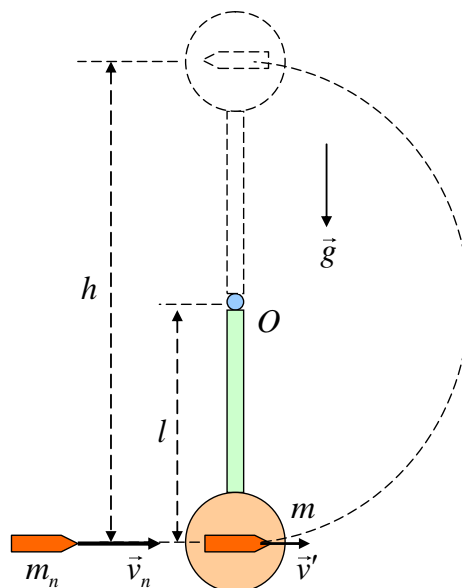
$$v_h = 0$$

**Розв'язання.**

В результаті абсолютно непружного зіткнення утворена об'єднана маса  $m + m_n$  і виконуються закони збереження

$$\text{імпульса: } m_n \vec{v}_n = (m + m_n) \vec{v}' \Rightarrow v' = v_n \frac{1}{1 + \frac{m}{m_n}}$$

$$\text{енергії: } \frac{(m + m_n) v'^2}{2} = (m + m_n) gh.$$



Звідси

$$l = \frac{v'^2}{4g} = \frac{v_n^2}{4g} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{m}{m_n}} \right)^2 =$$

$$= \frac{25 \cdot 10^4}{4 \cdot 9,8} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{0,5}{5 \cdot 10^{-3}}} \right)^2 \text{ м} \approx 0,64 \text{ м}$$

### 4.3. Завдання для самостійного розв'язання

1. Кулька масою 0,1 кг впала з деякої висоти на похилу площину і пружно відскочила від неї без втрати швидкості. Кут нахилу площини до горизонту  $30^\circ$ . За час зіткнення площина отримала імпульс сили  $F \cdot dt = 1,73 \text{ Н} \cdot \text{с}$ . Який час пройде від моменту зіткнення кульки з площиною до моменту, коли кулька буде знаходитися у найвищій точці траєкторії?
2. Струмок води перерізом  $6 \text{ см}^2$  зіткнувся зі стінкою під кутом  $60^\circ$  до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти силу, діючу на стінку, якщо відомо, що швидкість течії води в струмку  $12 \text{ м/с}$ .
3. Тіло масою  $5 \text{ кг}$  зіткнулося з нерухомим тілом масою  $2,5 \text{ кг}$  центрально і абсолютно непружно. Знайти кінетичну енергію першого тіла до зіткнення та кількість теплоти, яка виділилася під час зіткнення. Кінетична енергія тіла, утвореного в результаті зіткнення, складала  $5 \text{ Дж}$ .
4. Два тіла, рухаючись назустріч одне одному зі швидкостями  $2 \text{ м/с}$  і  $4 \text{ м/с}$ , зіткнулися центрально і абсолютно непружно. Утворене під час зіткнення тіло рухається зі швидкістю  $1 \text{ м/с}$  у напрямі першого тіла. Знайти відношення кінетичних енергій тіл до зіткнення.
5. Куля масою  $5 \text{ г}$  летить горизонтально зі швидкістю  $500 \text{ м/с}$ . Вона зіткнулася з тілом масою  $0,5 \text{ кг}$ , яке висить на невагомому жорсткому стержні. Куля застряє в тілі. Знайти відстань від шарніру, до якого при

кріплено стержень, до центра тіла, якщо об'єднаний центр мас кулі та тіла, утворений в результаті їх непружного зіткнення, піднявся до верхньої точки кола.

6. Людина масою 60 кг біжить зі швидкістю 8 км/год. У тому ж напрямі зі швидкістю 2,9 км/год рухався візок масою 80 кг. Людина наздогнала візок і заскочила на нього. З якою швидкістю людина продовжила свій рух?
7. Людина масою 60 кг біжить зі швидкістю 8 км/год. На зустріч людині зі швидкістю 2,9 км/год рухається візок масою 80 кг. Людина заскочила на нього. З якою швидкістю людина продовжила свій рух?
8. Куля, яка летить горизонтально, абсолютно не пружно зіткнулася з тілом, яке підвішено на невагомому жорсткому стержні. Маса кулі в 1000 разів менше маси тіла. Відстань від точки підвісу стержня до центра тіла дорівнює 1 м. Знайти швидкість кулі, якщо після зіткнення стержень відхилився на кут  $10^\circ$ .
9. Тіло масою 1 кг, рухаючись горизонтально зі швидкістю 1 м/с, абсолютно непружно зіткнулося з тілом масою 0,5 кг, яке рухалося зі швидкістю 0,5 м/с у напрямі швидкості першого тіла. Знайти швидкість другого тіла після зіткнення.

## §5. Сили інерції

### 5.1. Основні теоретичні відомості

Для твердого тіла (фізичного тіла, тіла) характерно рівномірний (нерівномірний) розподіл маси по всьому його об'єму.

При наявності вісі обертання тверде тіло обертатися навколо цієї вісі. Зміна стану обертального руху твердого тіла визначається моментом сили відносно вісі обертання

$$\vec{M} = [\vec{F} \cdot \vec{r}] = J \cdot \vec{\epsilon} ,$$

де  $\vec{F}$  – сила, яка прикладена до тіла на відстані  $r$  від цієї вісі обертання;  $J$  – момент інерції тіла відносно вісі обертання,  $\vec{\epsilon}$  – кутове прискорення тіла.

Момент інерції твердого тіла визначається за виразом

$$J = k \cdot mr^2 ,$$

де  $k$  – коефіцієнт, чисельне значення якого залежить від а) форми тіла, б) розподілу маси в тілі, в) відстанні  $d$  між центром тіла і віссю обертання. За формулою Штейнера момент інерції тіла збільшується зі зростанням  $d$  :

$$J = J_0 + md^2 ,$$

де  $J_0$  – момент інерції відносно вісі, яка проходить через центр мас твердого тіла.

### 5.2. Завдання для самостійного розв'язання

1. Людина масою 60 кг біжить зі швидкістю 8 км/год. На переріз людині зі швидкістю 2,9 км/год рухається візок масою 80 кг. Людина заскочила на нього. З якою швидкістю людина продовжить свій рух?

2. До ободу однорідного диска радіусом 0,2 м прикладена дотична сила 98,1 Н. При обертанні на диск діє момент сили тертя 9,81 Нм. Знайти масу диска, якщо диск обертається з кутовим прискоренням  $100 \text{ рад/с}^2$ .
3. Знайти кінетичну енергію велосипедиста, який їде зі швидкістю 9 км/год. Маса велосипеда разом з велосипедом 78 кг, причому на колеса приходить маса 3 кг. Колеса вважати обручами.
4. Однорідний стержень довжиною 1 м і масою 0,5 кг обертається у вертикальній площині навколо горизонтальної вісі, яка проходить через середину стержня. Знайти кутове прискорення стержня під час дії на нього момента сил 98,1 мН·м.
5. Однорідний диск радіусом 0,2 м і масою 5 кг обертається навколо вісі, яка проходить через центр диска перпендикулярно до його площини. Залежність кутової швидкості обертання диску від часу  $\omega = A + Bt$ , де  $B = 8 \text{ рад/с}^2$ . Знайти дотичну силу, яка прикладена до диску. Тертям знехтувати.
6. Однорідний диск з моментом інерції  $63,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  обертається з кутовою швидкістю 31,4 рад/с. Знайти момент сил тертя, під дією котрих диск зупинається через 20 с.
7. Мідна куля радіусом 10 см обертається з частотою 2 об/с навколо вісі, яка проходить через його центр. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб у двічі збільшити кутову швидкість обертання кулі.
8. Хлопчик котить обруч по горизонтальній дорозі зі швидкістю 7,2 км/год. На яку відстань може вкотитись обруч на гірку за рахунок його кінетичної енергії? Уквітін гірки дорівнює 10 м на кожні 100 м шляху.
9. Знайти лінійні швидкості центрів мас однорідної кулі, однорідного диску та обруча, які з нульовою початковою швидкістю кожний скочуються без ковзання з похилої площини висотою 0,5 м.
10. Однорідний диск радіусом 0,2 м і масою 10 кг обертається під дією дотичної сили 14,7 Н. Знайти частоту обертання диска через 10 с після початку руху. Тертям знехтувати. На барабан радіусом 0,5 м намотано мотузку, до кінця якої прив'язано тягар масою 10 кг. Знайти момент



інерції барабана, якщо відомо, що тягар опускається з прискоренням  $2,04 \text{ м/с}^2$ .

11. На барабан радіусом  $0,5 \text{ м}$  намотано мотузку, до кінця якої прив'язано тягар масою  $10 \text{ кг}$ . Знайти момент інерції барабана, якщо відомо, що тягар опускається з прискоренням  $2,04 \text{ м/с}^2$ .
12. На барабан радіусом  $20 \text{ см}$  і моментом інерції  $0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  намотано мотузку, до кінця якої прив'язано тягар масою  $0,5 \text{ кг}$ . До початку обертання барабана висота тягара над підлогою  $1 \text{ м}$ . Знайти час опускання тягара, кінетичну енергію тягара в момент зіткнення його з підлогою і силу натягу мотузки. Тертям знехтувати.
13. Колесо з моментом інерції  $2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  обертається рівносповільнено. За  $1 \text{ хв}$  частота обертання колеса зменшилася від  $300 \text{ об/хв}$  до  $180 \text{ об/хв}$ . Знайти кутове прискорення колеса, момент сил і роботу сил гальмування, кількість обертів, зроблених колесом за  $1 \text{ хв}$ .

## Список використаної та рекомендованої літератури

### Базова

- 1 Гиндикин С. Г. Алгебра и логика в задачах. Москва: Наука, 1972. 288 с.
- 2 Клини С. К. Математическая логика. Москва: И. Л., 1975. 480 с.
- 3 Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику. Москва: Издательство Московского университета, 1982. 120 с.
- 4 Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Москва.: Наука, 1975. 256 с.
- 5 Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Москва: Наука, 1971. 320 с.
- 6 Метакидис Г., Нероуд А. Принципы логики и логического программирования. Москва: Факториал, 1998. 288 с.
- 7 Новиков П. С. Элементы математической логики. Москва: Наука, 1973. 399 с.
- 8 Шенфилд Дж. Математическая логика. Москва: Наука, 1975. 529 с.

### Додаткова література

- 1 Гудстейн Р. Л. Математическая логика. Москва: И. Л., 1973. 162 с.
- 2 Kleene's S. C., "Introduction to Metamathematics. Seattle", Ishi Press, 2009, pp. 1-550
- 3 Кутасов А. Д. Элементы математической логики. Москва: Просвещение, 1977. 63 с.
- 4 Лавров И. А. Логика и алгоритмы. Новосибирск: изд. Новосибирского

гос. ун-та, 1970.

- 5 Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. Москва: Наука, 1970. 394 с.
- 6 Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Москва: Просвещение, 1968. 231 с.

### **Інформаційні ресурси в інтернеті**

1. Бібліотека Університету Ушинського. – URL: <http://library.pdpu.edu.ua/>
  2. Сайт Міністерства освіти і науки України: [www.mon.gov.ua](http://www.mon.gov.ua)
  3. Освітньо-інформаційні ресурси. – URL:  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
-