

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад

«Південноукраїнський національний педагогічний університет

імені К. Д. Ушинського»

кафедра фізики

О. Л. Чепок

«Механічні коливання і хвилі. Основи акустики»

тексти лекцій

з навчальної дисципліни «Загальна фізика»,

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

галузі знань 01 «Освіта / Педагогіка»

спеціальності 014.08 «Середня освіта (Фізика)»

денної та заочної форм навчання

Одеса – 2021

УДК 534

ББК

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу

«Південноукраїнський національний педагогічний університет імені

К. Д. Ушинського» (протокол №12 від 24 червня 2021 року)

Чепок О.Л. Механічні коливання і хвилі. Основи акустики: тексти лекцій з навчальної дисципліни «Загальна фізика» [для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 «Освіта / Педагогіка» спеціальності 014.08 «Середня освіта (Фізика)» денної та заочної форм навчання]. Одеса, 2021.

Тексти лекцій розроблено відповідно до змістового модуля «Механічні коливання і хвилі. Основи акустики» навчальної дисципліни «Загальна фізика», опанування якої у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» передбачено освітньо-професійною програмою «Середня освіта (Фізика)» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014.08 Середня освіта (Фізика) протягом перших шести семестрів навчання.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гоцунський В. Я., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики і фізики теплоенергетичних та хімічних процесів Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Тадеуш О.Х., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ВСТУП.....	6
Навчально-тематичний план та структура навчальної дисципліни.....	7
Лекція 1. Пружинний маятник.....	8
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 1.....	17
Лекція 2. Математичний маятник.....	18
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 2.....	22
Лекція 3. Фізичний маятник.....	23
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 3.....	27
Лекція 4. Маятник Максвелла та маятник Обербека.....	28
Питання для самоконтролю за змістом лекції 4.....	34
Лекція 5. Затухаючі коливання	35
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 5.....	41
Лекція 6. Вимушені коливання.....	42
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 6.....	48
Лекція 7. Накладання коливань	49
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 7.....	59
Лекція 8. Хвилі, які біжать.....	60
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 8.....	72
Лекція 9. Застиглі хвилі.....	73
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 9.....	80
Лекція 10. Елементи акустики. Звук.....	81
Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 10.....	88
Список використаних і рекомендованих джерел інформації.....	89

ПЕРЕДМОВА

Розвиток вчення про коливання розпочали Галілей і Гюйгенс своїми дослідженнями руху маятників. Довгий час вчення про коливання розвивалося в зв'язку з вивченням приватних видів коливального руху в різних розділах фізики.

Початком вчення про коливання як самостійну галузь фізики у значній мірі послужило відкриття О.С. Поповим способу передачі на відстань електромагнітної енергії в кінці XIX століття. Коливальні рухи лежать в основі цілого ряду явищ – звуку, світла, виникнення і розповсюдження радіохвиль, сейсмічних хвиль, вібрацій різного походження і т.п. Загальні закономірності для всіх цих і багатьох інших явищ є предметом вчення про коливання.

Великий вклад у вивчення коливань у зв'язку з розв'язуванням механічних задач, зокрема, про вібрації, зробив Лагранж; у зв'язку з вивченням електромагнітних явищ – У. Томсон (Кельвін), Максвелл і Герц; у зв'язку з вивченням акустичних явищ – Релей; дослідження Б.Б.Голіцина, М.Є.Жуковського, А.М.Крилова, П.И.Лебедева, Л.І.Мандельштама та інших.

Коливальний рух – нерівнозмінний рух, при якому матеріальний об'єкт в обмеженому просторі вибраної системи відліку (ВСВ) багаторазово описує одну й ту ж замкнуту одно- або двомірну траєкторію з центром симетрії у положенні (фіксованої, стабільної) рівноваги.

Положення рівноваги – положення у ВСВ, в якому тіло знаходиться (може знаходитись) нескінченно довго (що відповідає першому закону Ньютона про стан спокою).

Коливальний рух розповсюджений у природі, у виробництві. Основою закономірностей механічного коливального руху є закони збереження енергії, маси, імпульсу, моменту сили, моменту імпульсу, моменту інерції. Закономірності механічного коливального руху описують за допомогою маятника.

Маятник – це система, до якої входить матеріальний об'єкт (осцилятор – випромінювач), що виконує роль акумулятора ('носія') кінетичної енергії, і поле консервативних (недисипативних) сил, що виконує роль акумулятора ('носія') потенціальної енергії. Такими силами є пружні та квазіпружні сили, наприклад, сили гравітації, сили електростатичні, електромагнітні тощо.

За видами осциляторів та типами полів сил розрізняють маятники: а)пружинний, б)математичний, в)фізичний (оборотний), г)крутильний тощо.

ВСТУП

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: формування уявлення, що створення узагальнюючих теорій базується на величезному експериментальному матеріалі, який здобувається самовідданою працею вчених, інженерів, винахідників; що методи фізики широко застосовуються в астрономії, хімії, біології, метеорології, геології, екології та інших галузях; виховання поваги до науки і до вчених, які створюють фізичну науку; навчання мислити логічно і творчо.

При викладанні матеріалу ураховуються знання з фізики, одержані студентами в середній школі, і знання з вищої математики, одержані в університеті.

Після завершення навчання з розділу «Механіка» студент повинен

знати

- ◆ фізичні явища, ідеї, принципи, що складають основу сучасної фізики;
- ◆ закони коливального руху, хвильових процесів;
- ◆ механіку рідин і газів,
- ◆ хвилі у суцільних середовищах, основи акустики.

уміти

- ◆ вирішувати в інерційних та неінерційних системах відліку пряму та обернену задачі кінематики прямолінійного та обертального рухів матеріальної точки та абсолютно твердого тіла;
- ◆ застосовувати основні рівняння про:
 - ◆ закони коливального руху, хвильових процесів;
 - ◆ механіку рідин і газів,
 - ◆ хвилі у суцільних середовищах, основи акустики.
 - ◆ форми руху, кінематику та динаміку матеріальної точки та системи точок,
 - ◆ деформації і напруження у твердих тілах;
 - ◆ закони збереження в класичній фізиці

◆ застосовувати основні рівняння динаміки точки, рівняння моментів та закони збереження імпульсу, моменти імпульсу та механічної енергії для розв'язання задач в інерціальних системах відліку про:

- рух системи матеріальних точок, зіткнення, реактивний рух, рух матеріальної точки в полі тяжіння;
- обертальний рух абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі, кочення, прецесію у зовнішньому полі.

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ТА СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	денна форма				
	усього	у тому числі			
		лц	лб	пр	срс
1	2	3	4	5	6
Змістовий модуль 5.					
Механічні коливання і хвилі. Основи акустики					
Тема 8: Пружинний маятник.	22	2	4	6	10
Тема 9: Математичний маятник.					
Тема 10: Фізичний маятник.	16	2	-	4	10
Тема 11: Маятник Максвелла та маятник Обербека					
Тема 12: Затухаючі коливання.	22	2	2	8	10
Тема 13: Вимушені коливання.					
Тема 14: Накладання коливань	10	2		2	6
Тема 15: Хвилі, які біжать	12	2		4	6
Тема 16: Застиглі хвилі.					
Тема 17: Елементи акустики. Звук.	14	2	2	4	6
Разом за змістовим модулем 5	96	12	8	28	48

Лекція 1

Тема: Пружинний маятник

План

1. Рівняння коливального гармонійного руху та його відображення в комплексній формі.
2. Власні коливання.
3. Рівняння власних коливань та його роз'язок для різних коливних систем.
4. Рівняння зміщення.
5. Амплітуда, швидкість, прискорення, період, частота, фаза.

Розглянемо закономірності механічного коливального руху на прикладі пружинного маятника, до складу якого входять: а) точковий матеріальний об'єкт (МО) масою m і б) пружина довжини l_0 масою $m_{\text{пруж}} \ll m$ (рис.1,а).

Пружина одним кінцем зв'язана з нерухомою системою відліку (НСВ). На другому (вільному) кінці пружини закріплено матеріальний об'єкт масою m (рис.1,б). Під дією сили $m\vec{g}$ пружина розтягується до довжини l . При видовженні на $+\Delta\vec{x}$ в пружині виникає механічна напруженість поля пружних сил. Рівновага сил настає при $-\vec{F}_{\text{пр}0} = m\vec{g}$ (1.1), що відповідає рівності

$$\vec{F}_{\text{рез}} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}0} = m\vec{a} = 0 .$$

Звідси $\vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \vec{a}t = 0$, тобто МО у ВСВ буде знаходитися у стані спокою доти, доки на МО не подіє зовнішнє тіло.

В стані рівноваги у ВСВ швидкість МО дорівнює нулю $\vec{v} = 0$, що відповідає нульовому значенню кінетичної енергії поступального руху МО:

$E = \frac{mv^2}{2} = 0$. Оскільки пружні сили є консервативними, тоді є

справедливим співвідношення $\vec{F}_{\text{пр}x} = -\frac{dU_{\text{пр}}}{dx} \vec{e}_x$ (1.2), де $U_{\text{пр}}$ – потенціальна

енергія пружно деформованого тіла. Повна механічна енергія пружинного

маятника у стані рівноваги дорівнює $W_{np} = U_{np}^{\max} + 0 = U_{np}^{\max}$ (1.3) і зосереджена в полі пружних сил пружини.

Згідно закону збереження та перетворення енергії потенціальна енергія пружини U_{np}^{\max} у стані рівноваги не може самостійно 'перейти' у кінетичну енергію поступального руху МО (осцилятора), тому що поле сил, яке визвало поле сил пружності при деформації пружини шляхом зміщення МО, стабільне (незмінне).

Для початку коливального руху МО, який має початкову швидкість $\vec{v}_0 = 0$, необхідно надати прискорення МО, порушивши рівність (1) одноразовою дією зовнішньої сили $\vec{F}_{зовн}$ (рис.1,с). Пружина додатково збільшила довжину на $\Delta\vec{x}$, що відповідає зміні (збільшенню, зменшенню) потенціальної енергії сил пружності пружини U_{np}^{\max} на величину ΔU_{np} . У пружині одночасно виникає додаткова сила пружності $\Delta\vec{F}_{np}$ і додаткова

потенціальна енергія $\Delta U_{np} = \frac{k_{жорст} \cdot (\Delta x)_{\max}^2}{2}$ (1.4), причому $\Delta\vec{F}_{np} \uparrow \downarrow \Delta\vec{x}$, що

відповідає рівнянню Гука для малих деформацій:

$$\Delta\vec{F}_{np} = -k_{жорст} \cdot \Delta\vec{x} = -\frac{\Delta U_{np}}{\Delta x} \vec{e}_x \quad (1.5).$$

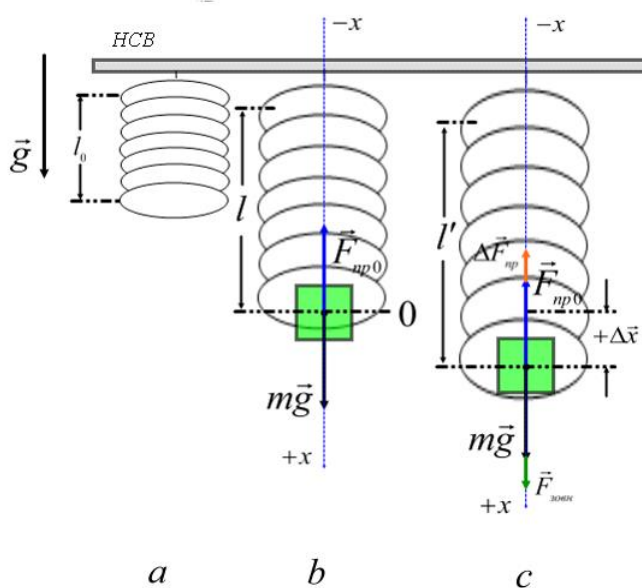


Рис.1. Пружинний маятник.

Додаткова потенціальна енергія пружно деформованої пружини ΔU_{np} стає власністю даного маятника.

Після одноразової і короткочасної дії сили $\vec{F}_{зовн}$ матеріальний об'єкт під дією сили пружності $\Delta \vec{F}_{np}$ змінить стан свого руху згідно виразу $\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ (1.6), де $\vec{v}_0 = 0$, $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{F}_{np}}{m} = \frac{k_{жорст} \cdot (-\Delta \vec{x})}{m}$ (1.7)

за другим законом Ньютона.

Згідно виразу (1.7) прискорення МО прямо пропорційне і протилежно направлене його зміщенню відносно положення рівноваги (рис.2). Графік залежності $a = f(\Delta x)$ складає з абсцисою кут нахилу, який визначається за

виразом $tg \alpha = \frac{k_{жорст}}{m}$ (1.8) і залежить від параметрів маятника. Жорст-

кість пружини $k_{жорст} = 4\pi^2 m/T^2$ чисельно дорівнює силі, яка викликає зміщення осцилятора на одиницю довжини. Як видно з графіка (рис.2), при нульовому зміщенні від положення рівноваги (тобто, у положенні рівноваги) матеріальний об'єкт має нульове прискорення, максимальну

швидкість, максимальну кінетичну енергію $\Delta E_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2}$ (1.9),

$$\Delta U_{np} = 0.$$

Звідси слідує, що у положенні рівноваги пружина перестала бути деформованою, власна потенціальна енергія маятника за час руху вздовж зміщення Δx повністю перетворилася у власну кінетичну енергію цього ж маятника, яка зконцентрована у матеріального об'єкта згідно $\Delta E_{max} = -\Delta U_{np}$.

Матеріальний об'єкт, який має у положенні рівноваги кінетичну енергію ΔE_{max} , рухається 'по інерції', пружно деформує пружину на величину $(-\Delta \vec{x})$, перетворює свою кінетичну енергію ΔE_{max} у потенціальну енергію пружини ΔU_{np} . При цьому прискорення МО досягає максимального

значення, а швидкість – нульового значення, що відображено графічно на рис.2.

На підставі рівняння (1.7) запишемо рівняння коливального руху МО пружинного маятника як однорідне диференціальне рівняння другого ступеня:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{F}_{пр}}{m} = \frac{k_{жорст} \cdot (-\Delta \vec{x})}{m} \quad (1.7) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \frac{k_{жорст}}{m} \vec{x} = 0 \quad (1.10).$$

Для розв'язання рівняння (1.10) введемо позначення $\frac{k_{жорст}}{m} = \omega_0^2$

(1.11), тому що розмірність $\left[\frac{k_{жорст}}{m} \right] = \frac{1}{c^2}$, і отримаємо диференціальне

рівняння $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \vec{x} = 0$ (1.10a). Розмірність $[\omega_0] = \frac{1}{c}$ співпадає з

розмірністю кутової швидкості обертального руху.

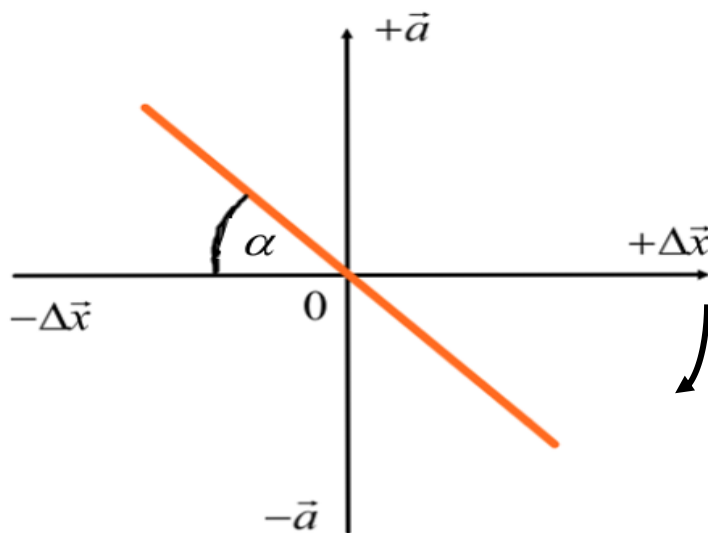


Рис. 2. Залежність прискорення осцилятора маятника від його зміщення від положення рівноваги.

Між обертальним та механічним коливальним рухами є немало спільного. Це підтверджує проекція обертального руху МО на дві площини, взаємно перпендикулярні між собою і в той же час перпендикулярні до

площини обертання МО (Рис.3). Матеріальний об'єкт обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_0 \perp \vec{R}$ у площині рисунку (рис.3,а).

Проекція обертального руху МО як функція часу протягом періоду обертання $T_{оберт}$ 1)на вертикальну площину має форму синусоїди $x_1 = A_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$ з періодом коливання $T_{колив1} = T_{оберт}$ і амплітудою $x_{1max} = R = A_0$ (рис.3,б); 2)на горизонтальну площину має форму косинусоїди $x_2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ з періодом коливання $T_{колив2} = T_{оберт}$ і амплітудою $x_{2max} = R = A_0$ (рис.3,с).

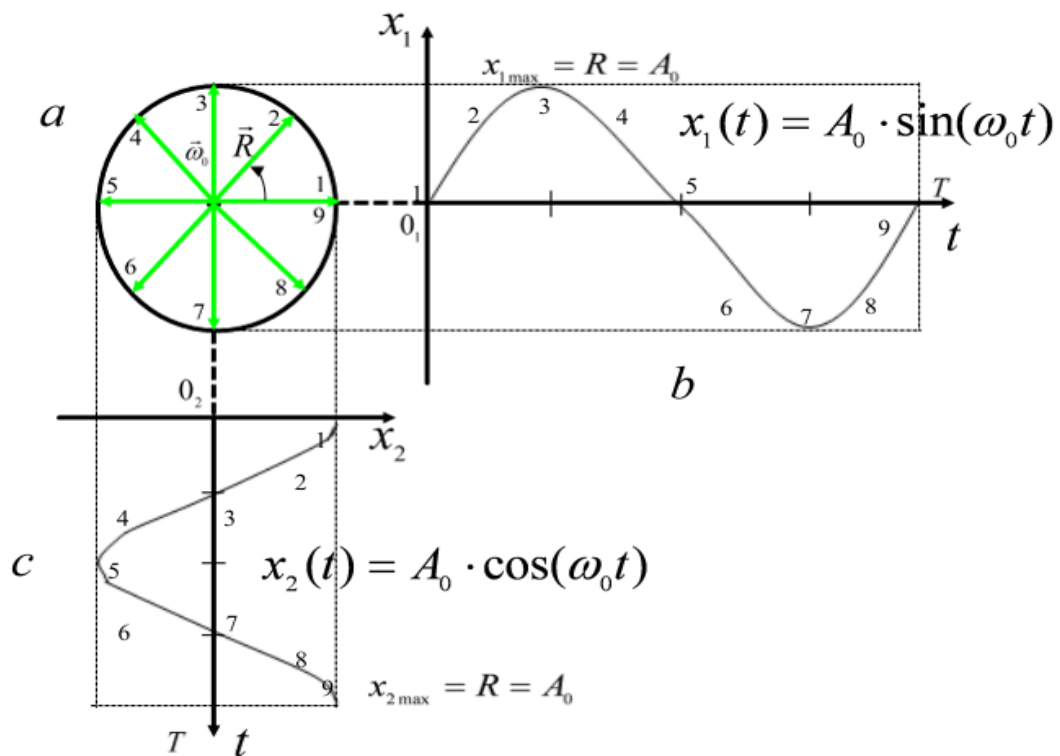


Рис. 3. Зв'язок обертального та коливального руху точки

Таким же є і результат розв'язання рівняння (1.10) коливального руху пружинного маятника:

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ x_2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases} \quad (1.12),$$

де φ_0 – початкова фаза.

Фаза механічного руху – стан руху МО в даний момент часу, що визначається: 1) переміщенням (зміщенням, шляхом) від початку відліку (координат, положення рівноваги), 2) швидкістю (величиною і напрямом); 3) прискоренням (величиною і напрямом). У рівнянні (1.12) фаза коливання $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ (1.13) є аргументом відповідної тригонометричної функції.

Кожне з рівнянь (1.12) відрізняються положенням МО у ВСВ в момент початку відліку часу коливального руху. Рівняння (1.12.1) описує залежність від часу зміщення МО, який набув максимального значення власної енергії у вигляді кінетичної складової, знаходячись у положенні стабільної рівноваги. У цьому випадку складно визначити кількісне значення власної енергії маятника, надане йому.

Рівняння (1.12.2) описує залежність від часу зміщення МО, який набув максимального значення власної енергії у вигляді потенціальної складової, знаходячись у положенні максимального зміщення МО. У цьому випадку зручно задавати кількісне значення власної енергії маятника.

Якщо початок відліку часу не співпадає з визначеними положеннями МО у ВСВ, початкова фаза φ_0 і амплітуда A_0 можуть бути визначені з рівняння (1.12). Початкова фаза коливання φ_0 , як і амплітуда A_0 , визначається початковим відхиленням (зміщенням) $x = x_0$ маятника від положення рівноваги і швидкістю $v = v_0$ МО маятника в початковий момент часу $t = 0$, і є незмінною протягом всього часу даного коливання.

$$\text{Період коливання пружинного маятника} \quad T_{\text{пруж}} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{жорст}}}}$$

(1.14) залежить від маси m матеріального об'єкту як носія кінетичної енергії маятника і від коефіцієнта жорсткості $k_{\text{жорст}}$ пружини як носія потенціальної енергії цього маятника. Завдяки такій залежності періоду коливань перетворення повної енергії маятника з потенціальної енергії в кінетичну та навпаки протягом періоду повністю залежить від його власних

параметрів. Тому $T_{пруж}$ є періодом власних коливань пружинного маятника.

Період коливань – інтервал часу, протягом котрого маятник двічі досягає зміщення даної величини, проходячи його у той же бік, інакше, це час так званого повного коливання. Величина, обернена до періоду, називається частотою коливань $\nu = \frac{1}{T}$ (1.15). Частота визначає кількість

повних коливань за одиницю часу $[\nu] = \frac{1}{c}$. Звідси $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ (1.16)

– кругова (циклічна) частота. Швидкість і прискорення МО визначаються співвідношеннями

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.17),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.18),$$

де $v_{\max} = A_0 \omega_0$ (1.19) – амплітуда швидкості, $a_{\max} = A_0 \omega_0^2$ (1.20) – амплітуда прискорення.

Повну власну енергію маятника $W = U(t) + E(t) = const$ або

$$W = \frac{k_{жорст} [x(t)]^2}{2} + \frac{m[v(t)]^2}{2} = const \quad (1.21)$$

виразити через кінематичні параметри коливального руху маятника. Пружинному маятнику, наприклад, може бути надано додаткову енергію у вигляді потенціальної $\Delta U_{пр}$. В результаті залежність для зміщення МО від часу описується за допомогою рівняння $x = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ (1.22), а для швидкості рівнянням $v = A_0 \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$ (1.23) при нульовій початковій фазі $\varphi_0 = 0$.

Тоді повну енергію маятника виразимо як

$$W = \frac{k_{\text{жорст}} A_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t). \quad (1.24)$$

Використовуючи позначення $\frac{k_{\text{жорст}}}{m} = \omega_0^2$ і рівність

$\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$, вираз (1.24) перепишемо у вигляді

$$W = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2}. \quad (1.25)$$

Вираз (1.25) визначає значення власної енергії маятника

$$W_{\text{max}} = |\Delta U_{\text{max}}| = |\Delta E_{\text{max}}| = U(t) + E(t) = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} = \text{const} \quad (1.25a)$$

З графіка рис.4 видно, що протягом періоду коливань потенціальна і кінетична складові власної енергії маятника двічі приймають відповідно максимальне значення зі зміщенням у часі на чверть періоду один від одного. Якщо маятник ізольовано, то механічна енергія маятника залишається сталою у будь-який час коливання. Середнє значення кінетичної енергії осцилятора $\Delta E_{\text{середн}}$ дорівнює половині повної власної енергії коливальної системи і співпадає з середнім значенням потенціальної енергії (рис.4):

$$\Delta E_{\text{середн}} = \Delta U_{\text{середн}} = \frac{1}{2} W_{\text{max}} = W_{\text{ср}} \quad (1.26)$$

Підставою коливального руху матеріального об'єкту (осцилятора) пружинного маятника є коливальне перетворення його власної механічної енергії, визначене параметрами цього маятника (Рис.4). Тому такий рух маятника можна назвати гармонічним (узгодженим) рухом з параметрами

$$\text{періоду коливань } T_{\text{пруж}} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{жорст}}}} \quad (1.14).$$

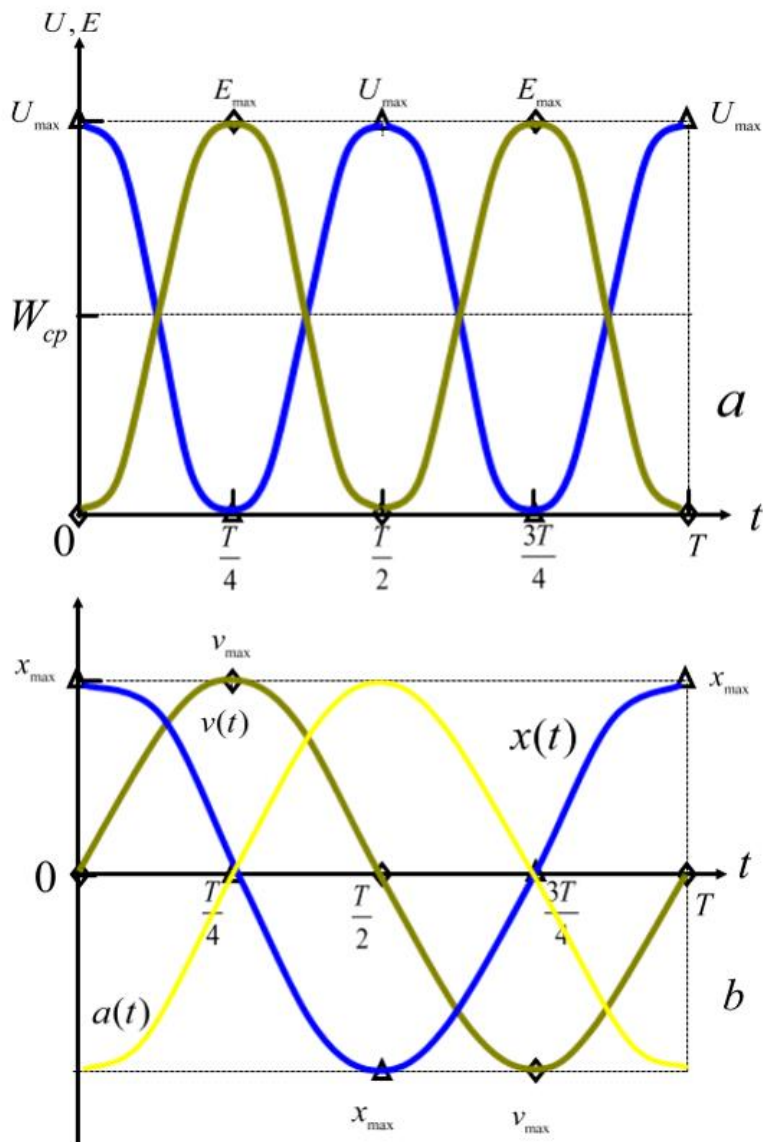


Рис.4. Періодичне коливання власної енергії
коливальної системи

Звідси – періодичний коливальний рух є гармонічним рухом. Для ізолюваної системи при зміні фази $\omega_0 t + \varphi_0$ на величину 2π модулі і напрями зміщення, швидкості і прискорення осцилятора повторюються протягом кожного нового періоду руху.

Пружинний маятник з даними параметрами (13) буде виконувати вільні коливання з однаковим періодом в будь-якій точці поверхні Землі або іншої планети. Така властивість пружинного маятника, наприклад, використовується у космічному польоті для визначення маси космонавта з метою медичної діагностики його здоров'я.

Механічне коливання має характерні властивості: 1) вид траєкторії – траєкторія здебільшого прямолінійна, тоді як при обертанні МО обов'язково описує тільки криволінійну траєкторію; 2) наявність положення рівноваги, якого не існує при обертанні, тому при обертанні МО переміщується, а не зміщується; 3) величина швидкості – швидкість МО щоперіода приймає амплітудне і нульове значення при зміні напрямку на протилежний, а при обертанні швидкість завжди більше нуля; 4) величина прискорення – прискорення протягом періоду обов'язково приймає амплітудне і нульове значення при зміні напрямку на протилежний, а при обертанні модуль прискорення МО може і не змінюватись, 5) нестабільність поля сил є умовою наявності коливального руху.

Серед спільних рис механічного коливання і обертального руху є:

1) локальність руху – обмеженість простору у ВСВ, у якому виконується рух; 2) періодичність руху – повторюваність проміжку часу, протягом якого МО описує замкнуту траєкторію; 3) повторюваність виду траєкторії; 4) сумарне переміщення за період руху дорівнює нулю; 5) наявність прискорення руху; 6) наявність власної енергії, стабільної за умов ізольованої системи.

Закономірності коливального руху, які розглянуті для пружинного маятника, справедливі і для всіх інших маятників як ізольованих систем.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 1

1. Запишіть рівняння коливального гармонійного руху та його відображення в комплексній формі.
2. Розкрийте поняття «власні коливання».
3. Запишіть рівняння власних коливань та його розв'язок для різних коливних систем.
4. Вкажіть характерні властивості механічного коливання.

Лекція 2

Тема: Математичний маятник

План

1. Квазіпружна сила.
2. Рівняння руху математичного маятника
3. Частота, період коливань математичного маятника

Положення і висновки коливального руху пружинного маятника підтверджує і коливальний рух так званого математичного маятника, матеріальний об'єкт якого рухається в полі квазіпружних сил – у гравітаційному полі.

Математичний маятник – точковий матеріальний об'єкт (осцилятор) масою m , закріплений в нерухомій системі відліку поля гравітації за допомогою невагомого стержня (на практиці, невагомої та нерозтяжної нитки) довжиною l (Рис.5,а).

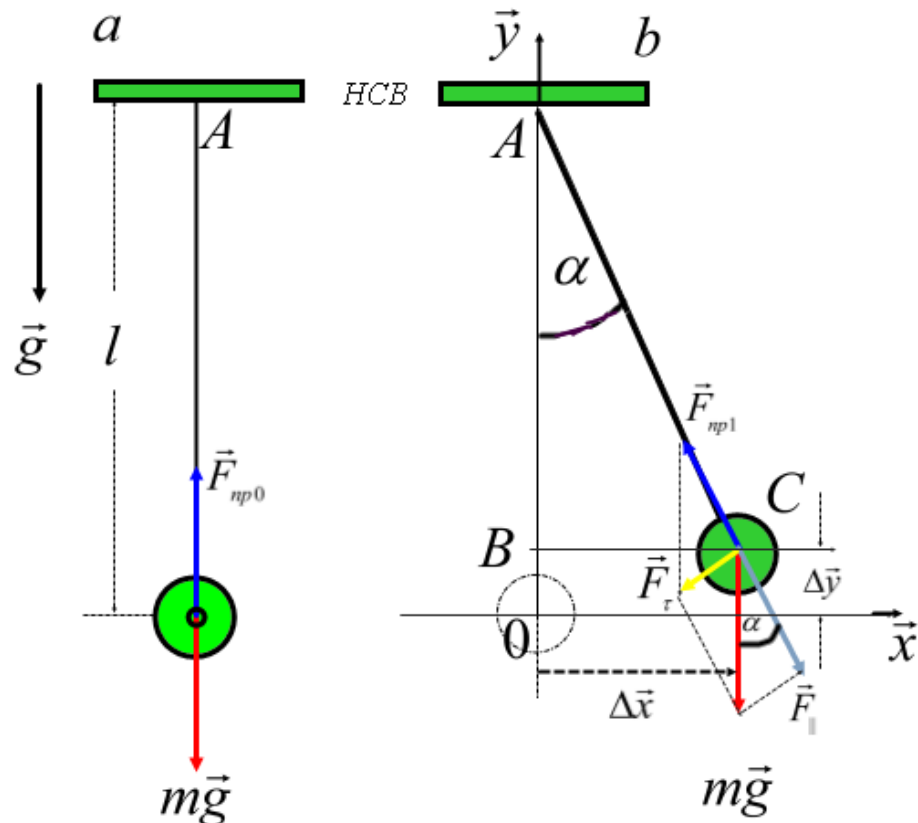


Рис.5. Математичний маятник

У положенні рівноваги сила тяжіння матеріального об'єкту (МО) до Землі зрівноважується силою пружності нитки: $\vec{F}_{рез} = m\vec{g} + \vec{F}_{np0} = m\vec{a} = 0$ (Рис.5,а).

Оскільки нитка нерозтяжна, МО не може рухатися впродовж вектора \vec{g} . У вибраній системі відліку МО може рухатися тільки у верхній напівплощині (над віссю Ox) і описувати сферу (коло, дугу кола) радіуса l з центром у точці A або коло з центром на лінії OA (рис.5,б). Коливальний рух МО можливий у напрямку, перпендикулярному до стержня (нитки) у площині XY (рис.5,б). Коливальний рух математичного маятника є двомірний (плоским) у полі тяжіння (гравітації) Землі при наявності власної потенціальної енергії МО $\Delta U_{спав} = mg \cdot \Delta y$ (2.1), що надається маятнику за рахунок роботи зовнішньої сили при зміщенні МО на $\Delta \vec{x}$ від положення рівноваги у т.0. Нитку деформовано і $\vec{F}_{np1} = -\vec{F}_{\parallel}$ (2.2), де \vec{F}_{np1} – сила пружності нитки, \vec{F}_{\parallel} – складова сили тяжіння $m\vec{g}$: $F_{\parallel} = mg \cdot \cos \alpha$ (2.3).

Друга складова сили тяжіння \vec{F}_r є дотичною до траєкторії (дуги кола радіусом l) і дорівнює $F_r = mg \cdot \sin \alpha$ (2.4). Напрямок сили \vec{F}_r при малих зміщеннях протилежний напрямку $+\Delta \vec{x}$, що відповідає закону Гука для малих деформацій при куту відхилення нитки від положення рівноваги $\alpha < 5^\circ$. Згідно з другим законом Ньютона $mg \cdot \sin \alpha = ma$ (2.5). Кут α можна

визначити з прямокутного трикутника ABC як $\alpha \approx \frac{\Delta x}{l}$ (2.6) (рис.5,б; 5,с),

оскільки при $\alpha < 5^\circ$ справедливе співвідношення $tg \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ (2.7) в радіанній мірі. При кутах α , які відповідають виразу (2.7), вертикальне зміщення МО є функція часу руху: $\Delta y = \Delta x(t) \cdot tg \alpha \approx \Delta x(t) \cdot \alpha$ (2.8).

Вираз (2.5) отримано з майже прямокутного трикутника ΔCFD , у якого $\Delta CFD = \alpha$.

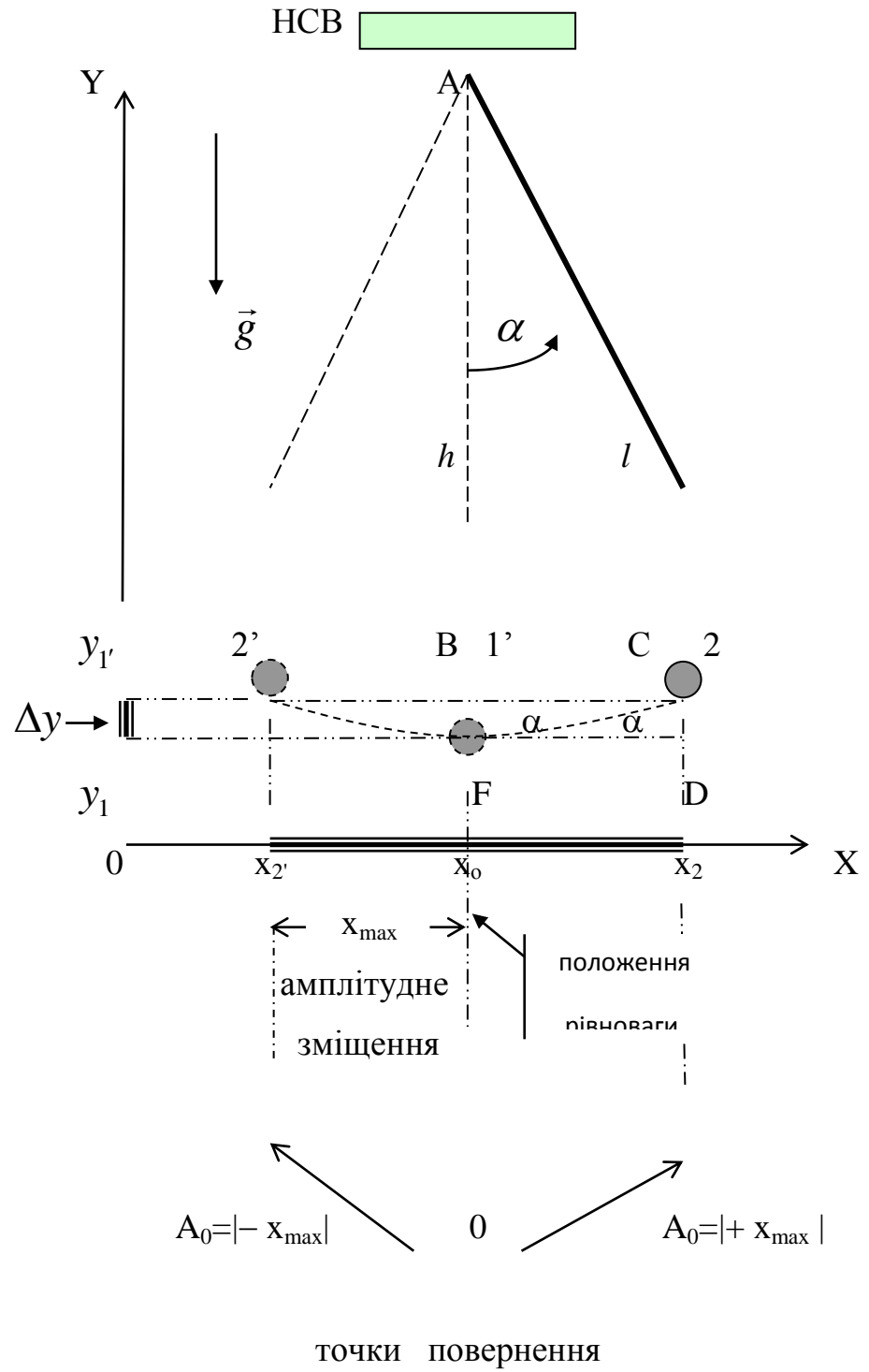


Рис.5с. Математичний маятник

Приймаючи до уваги (2.6), запишемо вираз (2.1) для залежності потенціальної енергії маятника від часу

$$\Delta U(t) = mg \cdot \Delta y(t) = mg \cdot \frac{\Delta x(t)^2}{l} = m \frac{g}{l} \Delta x(t)^2 \quad (2.9).$$

Якщо зміщення осцилятора досягає максимального значення $x_{\max} = A_0$, то потенціальна енергія маятника досягне максимального значення

$$\Delta U_{\max} = m \frac{g}{l} \frac{A_0^2}{2} \quad (2.10).$$

Запишемо вираз (6) у вигляді

$$mg \cdot \frac{\vec{x}}{l} = -m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \vec{x} = 0. \quad (2.5a)$$

Введемо позначення $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ (2.11) і отримаємо рівняння коливального руху математичного маятника в параметричній формі

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \vec{x} = 0 \quad (2.12)$$

Результат розв'язання рівняння (6б) коливального руху маятника:

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ x_2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases} \quad (2.13),$$

де φ_0 – початкова фаза.

Період коливань математичного маятника є періодом власних коливань і визначається як

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.14)$$

де l – довжина стержня (нитки), g – напруженість поля гравітації. У формулі

$$(2.14) \quad \vec{g} = \sum_{i=0}^m \vec{a}_i = \vec{g}_0 + \vec{a}_{cs} + \dots$$

відповідає за потенціальну складову повної енергії маятника. При зменшенні $g \rightarrow 0$ період коливань математичного маятника практично досягає нескінченності: $T_m \rightarrow \infty$, тобто коливальний рух МО зникає. Подібне явище спостерігається при русі математичного маятника в системі відліку, яка рухається поступально з прискоренням, що

дорівнює величині і напрямленню напруженості поля гравітації в даній точці простору, або обертально з прискоренням $g \rightarrow 0$.

Повну власну енергію маятника виразити через кінематичні параметри коливального руху:

$$W_{\max} = |\Delta U_{\max}| = m \frac{g}{l} \frac{A_0^2}{2} = \frac{mA_0^2 \omega_0^2}{2} = |\Delta E_{\max}| = \text{const} \quad (2.15)$$

Протягом періоду коливань потенціальна і кінетична складові власної енергії маятника двічі приймають відповідно максимальне значення зі зміщенням у часі на чверть періоду один від одного. Якщо маятник ізольовано, то механічна енергія маятника залишається сталою у будь-який час коливання.

Підставою коливального руху осцилятора такі ж, що для пружинного маятника. Коливальний рух математичного маятника теж можна назвати гармонічним (узгодженим) рухом з параметрами періоду коливань

$$T_{\text{матем}} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.14a).$$

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 2

1. Запишіть рівняння математичного маятника. Дайте його характеристику.
2. Вкажіть формули для знаходження частоти, періоду коливань математичного маятника

Лекція 3

Тема: Фізичний маятник

План

1. Рівняння руху фізичного маятника
2. Частота, період, приведена довжина.
3. Зворотний маятник

Фізичний маятник – система поля сил гравітації і матеріального об'єкта у вигляді стержня (довільної форми), маса m якого розподілена по всьому об'єму (Рис.6). Стержень одним кінцем A шарнірно закріплено до НСВ вище центра маси стержня $C_{мас}$, що знаходиться між кінцями A і B стержня. Цією ознакою фізичний маятник суттєво відрізняється від математичного маятника. Точка A , навколо якої коливається фізичний маятник, називається **центром обертання**. Стержень може обертатися навколо горизонтальної осі. Відхиленому на кут $\vec{\alpha}$ від вертикалі стержню буде передана у його власність потенціальна енергія $\Delta U_{грав} = mg \cdot \Delta y$ (3.1). Ця енергія виникла за рахунок роботи зовнішньої сили, прикладеної до центра мас C стержня

$$A = \left[\left[\vec{F}_\tau \cdot \vec{l}_c \right] \cdot \vec{\alpha} \right] = mg \cdot \sin \alpha \cdot l_c \cdot \alpha \quad (3.2),$$

де l_c – відстань (плече) центра мас стержня до осі обертання A , причому для фізичного маятника $l_c < l$, α – кутове зміщення плеча l_c від положення

рівноваги. Момент сили $\vec{M} = \left[\vec{F}_\tau \cdot \vec{l}_c \right] = J \cdot \vec{\varepsilon}$ (3.3) спонукає стержень, який

має нульову швидкість, рухатися у бік положення рівноваги з кутовим

прискоренням $\vec{\varepsilon} = \frac{d^2 \vec{\alpha}}{dt^2}$ (3.4).

Рівняння руху фізичного маятника має вигляд

$$\frac{d^2 \vec{\alpha}}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J} \vec{\alpha} = 0 \quad (3.5)$$

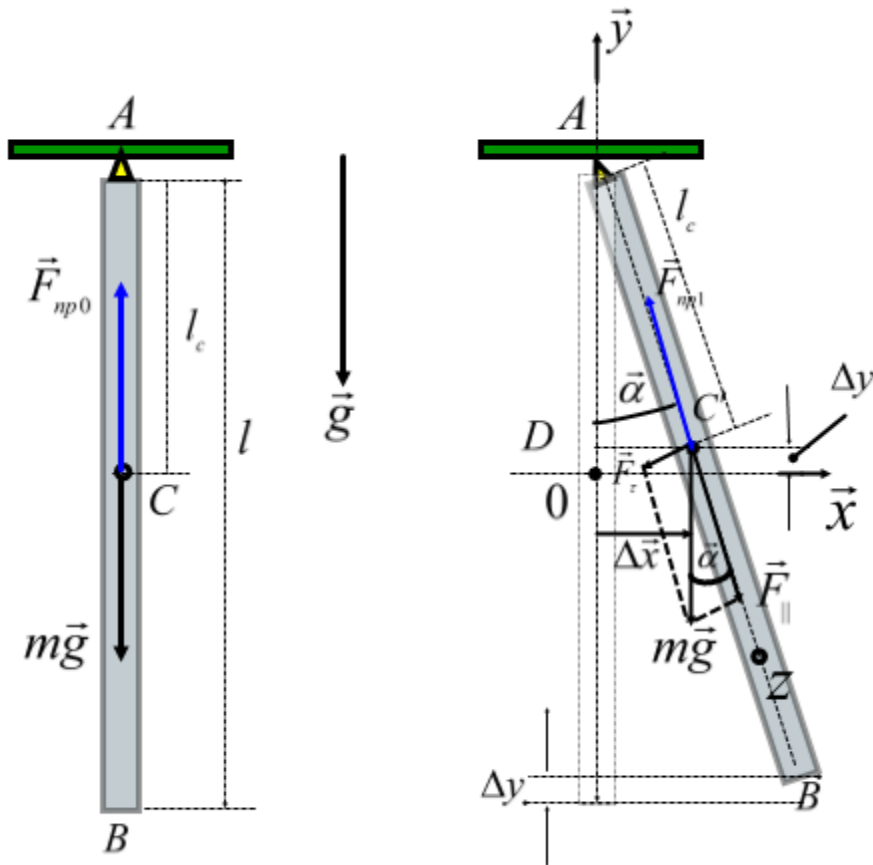


Рис.6. Фізичний маятник

з періодом коливання $T_\phi = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_c}}$ (3.6), що свідчить про наявність у

фізичного маятника, як і у інших маятників, властивості ізотропності – незалежності періоду коливань від амплітуди у межах дії пружних (квазіпружних) сил.

Порівнюючи формули періоду коливання фізичного маятника $T_\phi = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_c}}$ і математичного маятника $T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (2.14), ми бачимо, що ці маятники об'єднує одне і те ж поле квазіпружних сил.

Стержень будь-якого фізичного маятника (рис.6) можна представити як набір (сукупність) багатьох математичних маятників (рис.5) з різними довжинами l ниток (невагомих стержнів). Серед сукупності так званих математичних маятників фізичного маятника можна виділити такий

математичний маятник довжиною $l_{звед}$, період якого $T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l_{звед}}{g}}$ (2.14a)

співпадає з періодом коливання даного фізичного маятника $T_\phi = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_c}}$

при $\frac{J}{ml_c} = l_{звед}$ (3.7). Точка Z на

рис.6 знаходиться на відстані зведеної довжини фізичного маятника $l_{звед}$ від точки A – точки обертання фізичного маятника. Точку Z називають центром коливань фізичного маятника. Точки A і Z є спряженими точками (рис.7).

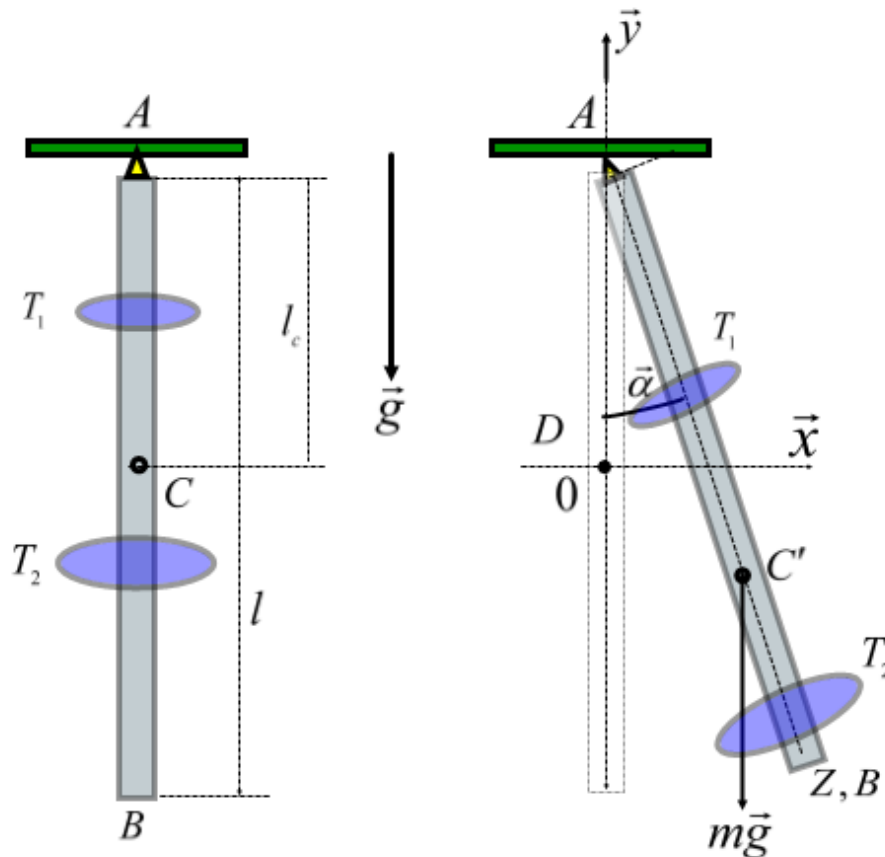


Рис.7. Фізичний маятник

Оборотний маятник

Використовуючи властивість центру мас фізичного тіла $C_{\text{мас}}$ переміщуватися в межах даного тіла, центр мас фізичного маятника можна за допомогою тягарів T_1 і T_2 перемістити так, що точка Z співпаде з точкою B (Рис.7). Якщо перевернути такий стержень (тобто обміняти місцями точки A і Z), ми побачимо, що період коливань даного маятника дійсно не зміниться. Такий фізичний маятник називають **о б о р о т н и м** (Рис.7).

Знаючи зведену довжину $l_{\text{звед}}$, можна, користуючись формулою періоду математичного маятника (2.14а), знайти напруженість поля тяжіння Землі

$$g = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot l_{\text{звед}}. \quad (3.6)$$

Позначимо через l_{c1} і l_{c2} відстань центра мас $C_{\text{мас}}$ до відповідних осей обертання A і Z в обох положеннях маятника (Рис.8). Оскільки зведена довжина фізичного маятника визначається за виразом (3.7), а J визначає момент інерції маятника відносно осі обертання у вибраному положенні, то на підставі формули (3.7) та формули Штейнера $J_{c1,c2} = J_0 + ml_{c1,c2}^2$ (3.9), де J_0 – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас тіла, можна знайти так звані зведені довжини маятника відносно точок A і Z :

$$l_{\text{зв1,зв2}} = \frac{J_{c1,c2}}{ml_{c1,c2}} = \frac{J_0 + ml_{c1,c2}^2}{ml_{c1,c2}}. \quad (3.10)$$

Підставимо значення $l_{\text{зв1}}$ і $l_{\text{зв2}}$ у формулу (7а) одержимо:

$$\frac{4\pi^2 l_{\text{зв1}}}{g} = T_1^2 = \frac{4\pi^2 (J_0 + ml_{c1}^2)}{gml_{c1}} \quad (3.11а)$$

$$\frac{4\pi^2 l_{\text{зв2}}}{g} = T_2^2 = \frac{4\pi^2 (J_0 + ml_{c2}^2)}{gml_{c2}} \quad (3.11б)$$

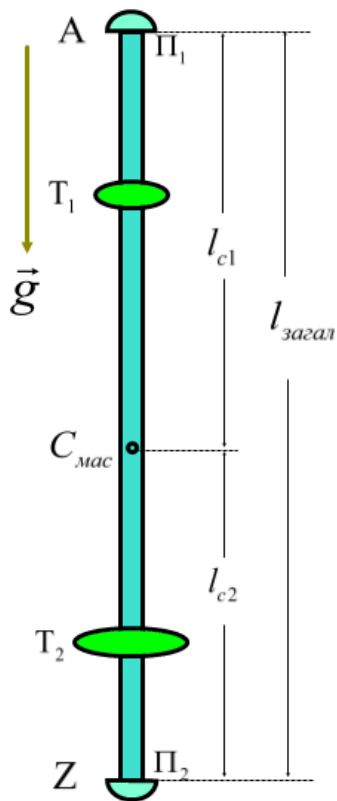


Рис. 8. Оборотний маятник

Звідси отримаємо

$$4\pi^2 J_0 = T_1^2 g m l_{c1} - 4\pi^2 m l_{c1}^2 \quad (3.12a)$$

$$4\pi^2 J_0 = T_2^2 g m l_{c2} - 4\pi^2 m l_{c2}^2 \quad (3.12б)$$

Напруженість поля тяжіння Землі знайдемо за виразом

$$g = \frac{4\pi^2 (l_{c1}^2 - l_{c2}^2)}{l_{c1} T_1^2 - l_{c2} T_2^2} = \frac{4\pi^2 (l_{c1} + l_{c2})(l_{c1} - l_{c2})}{l_{c1} T_1^2 - l_{c2} T_2^2} = \frac{4\pi^2 l_{загал} (l_{c1} - l_{c2})}{l_{c1} T_1^2 - l_{c2} T_2^2} \quad (3.13).$$

Цю властивість фізичного (оборотного) маятника використовують а) для визначення моменту інерції J фізичного тіла, б) для визначення напруженості поля гравітації g в даній точці планети.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 3

1. Запишіть рівняння фізичного маятника. Дайте його характеристику.
2. Вкажіть формули для знаходження частоти, періоду коливань фізичного маятника.

3. Дайте характеристику оборотному маятнику

Лекція 4

Тема: Маятник Максвелла та маятник Обербека

План

1. Маятник Максвелла
2. Маятник Обербека

1. Маятник Максвелла

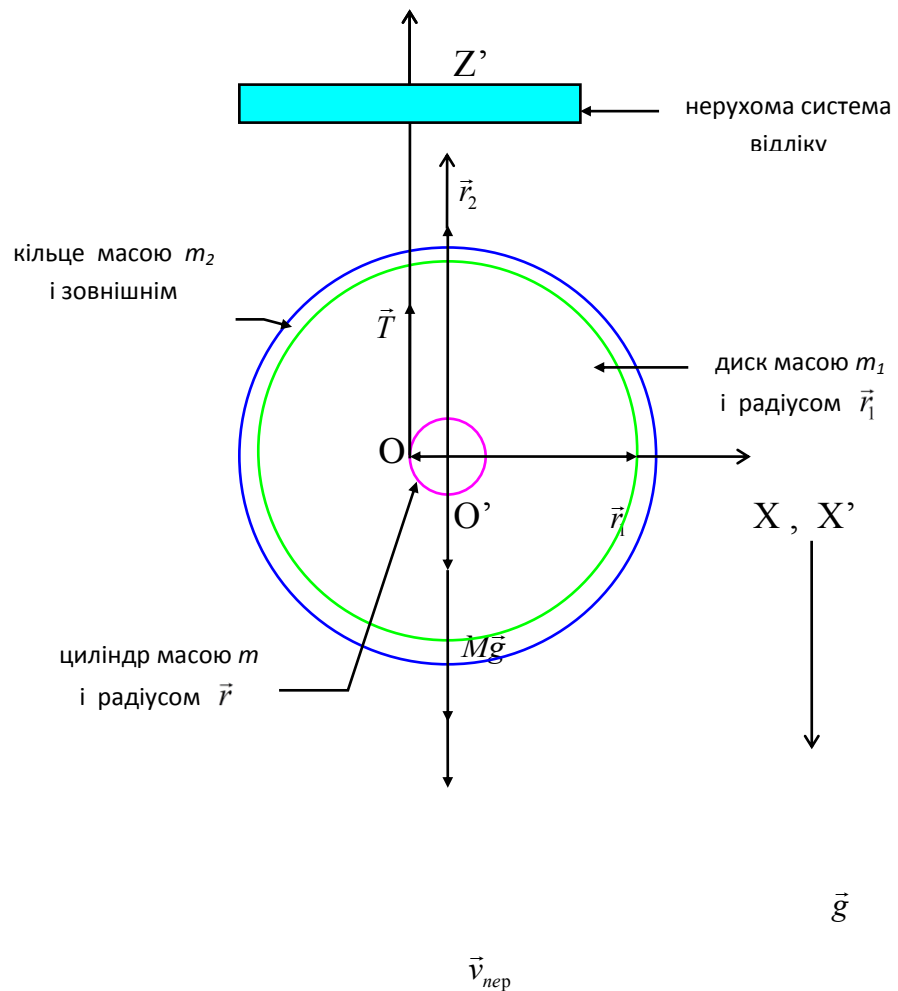


Рис. 9. Маятник Максвелла
(на початку опускання)

Маятник Максвелла — суцільний однорідний диск, насаджений на тонкий суцільний циліндр, який підвішано горизонтально на двох вертикальних нитках однакової довжини (Рис.9). Маса і діаметр диска значно більші відповідно маси та діаметра циліндра. Диск котиться без ковзання з деякої висоти h з прискоренням \vec{a} вздовж дуже легких ниток, які майже не розтягуються і поступово розкручуються.

Після опускання на висоту h (на всю довжину ниток) диск продовжує обертатися по інерції навколо миттєвої осі O . Вісь диска O' — центр рухомої системи відліку — обертається по колу, описуючи дугу довжиною півкола радіуса r зі сталою за модулем дотичною швидкістю v_τ . Ця дотична швидкість є максимальною переносною швидкістю диска в кінці опускання з висоти h і одночасно є початковою переносною швидкістю диска, який піднімається ввєрх по тих же нитках (Рис.9а). Під час підйому нитки будуть намотуватися на циліндр, скорочуючись у довжині. Диск підніметься на деяку висоту $h' < h$ (в реальних умовах при наявності втрат механічної енергії). Після зупинки (переносна швидкість диска зменшиться до нуля) диск знову розпочне свій рух вниз. Так маятник буде рухатися доти, доки він ще матиме лишки механічної енергії, яку маятникові надали на початку руху у вигляді додаткової потенціальної енергії $\Delta U = Mgh$ в полі тяжіння Землі (де $M = m + m_1 + m_2$).

Особливістю маятника Максвелла є те, що він (маятник) одночасно бере участь у трьох рухах твердого тіла: а) у поступальному русі центру мас O' з відносною швидкістю $\vec{v}_{пер}$; б) в обертальному русі центру мас O' навколо миттєвої осі O з дотичною швидкістю $\vec{v}_\tau = \vec{v}_{пер}$ і навколо своєї осі симетрії, проекцією якої є т. O' ; в) у коливальному русі навколо положення рівноваги, що знаходиться в самій нижній точці траєкторії, де маятник має максимальні кутову та лінійну швидкості.

Рухаючись вниз, маятник має швидкість

$$\vec{v}_{пер} = \vec{a}_{пер} \cdot t, \quad (3.14)$$

через деякий час t при нульовій початковій швидкості (тут $a_{неp} < g$).

У найнижчому положенні диск тільки обертається навколо миттєвої осі O , яка стала віссю обертання. Переносна лінійна швидкість диска досягає максимального значення

$$\vec{v}_{неp \max} = \vec{a}_{неp} \cdot t_H = [\vec{\omega}_{\max} \cdot \vec{r}] = \sqrt{2a_{неp} \cdot h} \cdot \vec{e} \quad (3.15)$$

де t_H - час, протягом якого маятник пройде висоту h . Точка O' як центр мас обертається з лінійною швидкістю $v_{\tau} = v_{\max}$ вздовж дуги, довжина якої дорівнює половині кола радіуса r . За час півоберту диска $\Delta t = \pi r / v_{\tau}$ імпульс маятника зміниться на величину $2Mv_{\max}$, яка дорівнює зміні імпульсу сили $2F_{нo} \cdot \Delta t$, яка діє на маятник за цей час. Нитки маятника за час Δt (час поштовху) відчули додаткове зовнішнє зусилля $F_{нo} = Mv_{\max}^2 / \pi r = 4Ma_{неp}h / \pi d$

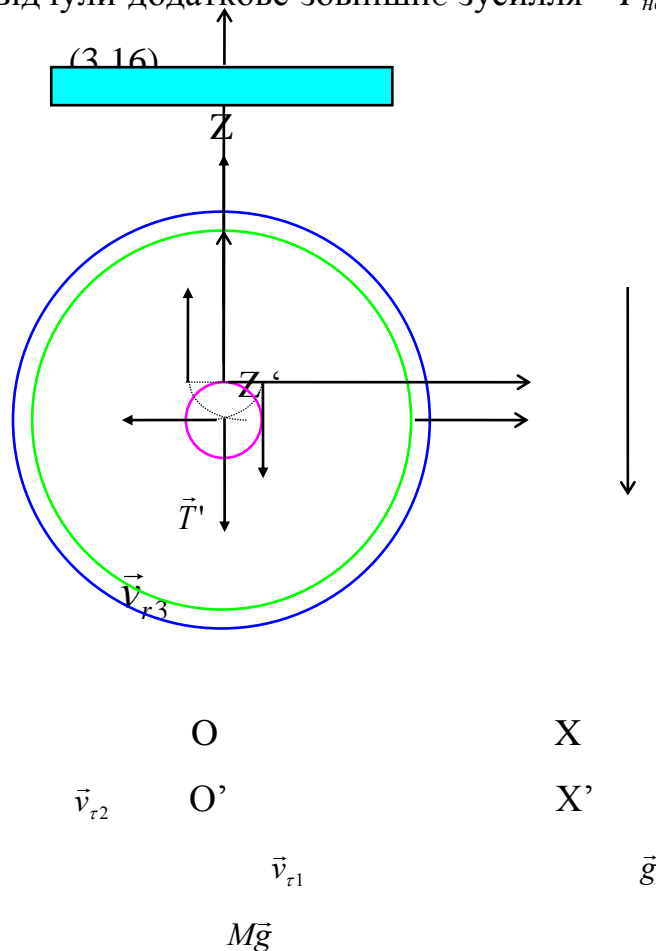


Рис. 9а. Маятник Максвела
(на початку підйому)

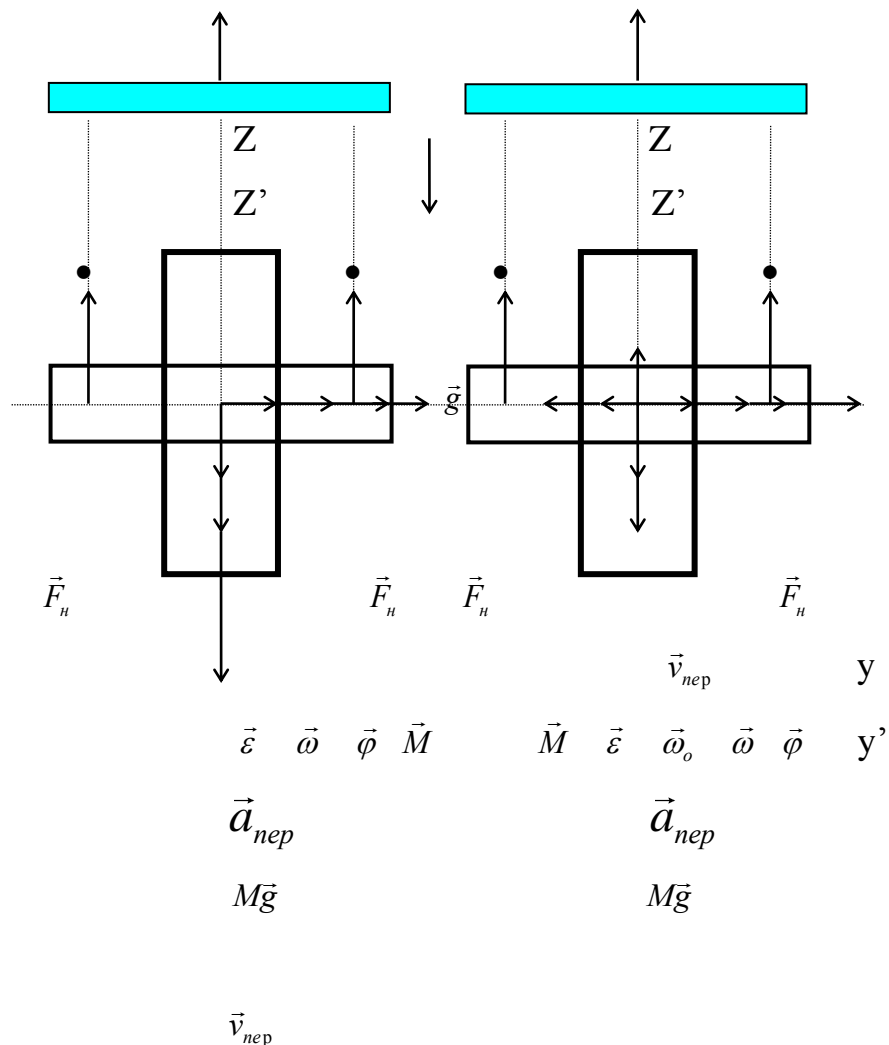
Оскільки нитки маятника не розтягуються, зовнішні сили, які діють на маятник, не змінюються: $M\vec{g} = const$; $\vec{F}_n = const$. Тоді моменти цих сил теж незмінні під час руху маятника як вниз, так і ввєрх:

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = [\vec{r} \cdot M\vec{g}] + \vec{M}_{mp} \quad (3.17)$$

Це відповідає нерівнозмінному руху миттєвої осі O з прискоренням

$$\vec{a}_{nep} = \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}] = 2h\vec{e} / t_n^2 = const \quad (3.18)$$

Момент інерції маятника відносно миттєвої осі O, враховуючи властивість адитивності моменту інерції згідно з теоремою Штейнера, дорівнює



А. Вниз

Б. Ввєрх

Рис. 9б. Протилежні фази руху диска маятника

$$J_{stat} = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)r_2^2 + (m_1 + m_2)r^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\left((2M + m)d^2 + (m_1 + m_2)d_2^2\right) \quad (3.19)$$

При цьому диск без перекосу буде підніматися вгору до електромагніту, який фіксує диск у верхньому положенні.

Частина потенціальної енергії маятника у полі сили тяжіння Землі $\Delta U = Mgh$ під час руху диска вниз перетворюється у кінетичні енергії поступального і обертального рухів диска

$$Mgh = Mv_{max}^2/2 + J_{дин}\omega_{max}^2/2, \quad (3.20)$$

де $J_{дин} = Mr^2 \frac{gt^2}{2h}$ (3.21) – момент інерції маятника, отриманий динамічним способом згідно виразів (3) і (4) при знехтуванні моментом сил опору $M_{тр}$.

Сила натягу ниток під час руху вниз становить

$$F_n = M(g - a_{нер}), \quad (3.22)$$

а вгору – $F_n = M(g + a_{нер})$, що свідчить про наявність сил інерції під час руху маятника Максвелла.

2. Маятник Обербека

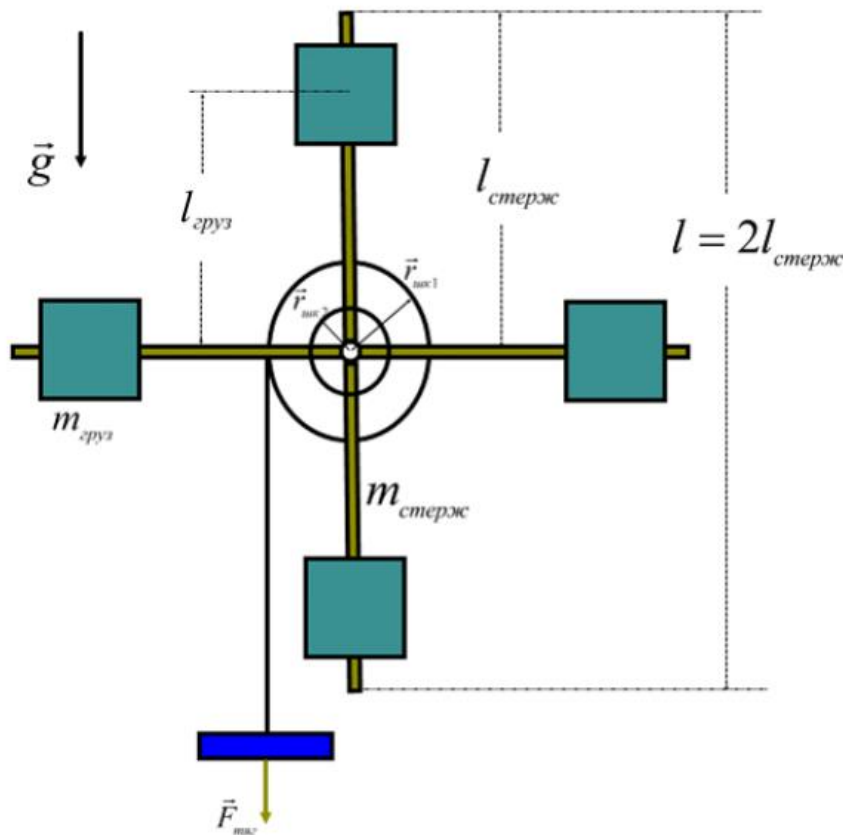


Рис. 10. Маятник Обербека

Маятник Обербека — хрестовина, яка обертається навколо горизонтальної осі. Хрестовина складається з 4-х стержнів кожний масою $m_{\text{стерж}}$ і довжиною $l_{\text{стерж}}$, які за допомогою втулки прикріплені до осі. До кожного стержня приєднують груз масою $m_{\text{груз}}$, який можна закріплювати на вибраній відстані $l_{\text{груз}}$ від осі обертання.

Оскільки нитка не розтягується, зовнішні сили, які діють на маятник, не змінюються: $\vec{F}_\tau = \text{const}$ і маятника обертається рівноприскорено:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r_{\text{шк}} = \frac{2h}{t^2} \quad (3.23)$$

Враховуючи властивість адитивності моменту інерції за теоремою Штейнера, статичний момент інерції маятника відносно осі дорівнює

$$J_{\text{стат}} = 4 \cdot \frac{m_{\text{стерж}} l_{\text{стерж}}^2}{3} + 4 \cdot m_{\text{груз}} l_{\text{груз}}^2 \quad (3.24)$$

Динамічний момент інерції під дією сили $\vec{F}_\tau = m_{\text{тяг}} (\vec{g} - \vec{a}_\tau)$ визначаємо як

$$J_{\text{дин}} \cdot \varepsilon = r_{\text{шк}} \cdot F_\tau \quad (3.25)$$

$$J_{\text{дин}} = \frac{r_{\text{шк}} \cdot F_\tau}{\varepsilon} = \frac{m_{\text{тяг}} (g - \frac{2h}{t^2}) \cdot r_{\text{шк}}}{\frac{2h}{r_{\text{шк}} t^2}} = m_{\text{тяг}} \cdot r_{\text{шк}}^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (3.26)$$

Фізичні маятники використовуються, наприклад, у механічних настінних годинниках, у дитячих розвиваючих іграшках тощо.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 4

1. Запишіть рівняння маятника Максвелла. Дайте його характеристику.
2. Дайте характеристику маятнику Обербека, вкажіть формули статичного та динамічного моментів інерції.

Лекція 5

Тема: Затухаючі коливання

План

1. Рівняння затухаючого коливання.
2. Коефіцієнт затухання, амплітуда, період, частота, декремент коливання, добротність.

У реальних умовах коливальний рух тіла відбувається у в'язкому середовищі з наявністю дисипативних (неконсервативних) сил. при наявності сил опору коливальному рухові. Для неізольованих коливальних систем з часом коливальний рух затухає в результаті розсіяння власної енергії

маятника $W(t) = \frac{mA^2\omega^2}{2} = 2m\pi^2 \left(\frac{A}{T}\right)^2$ (4.1), яку ми надали для початку

коливань, поступово витрачається на роботу проти дисипативних сил (сили тертя, сили лобового опору), що перешкоджають переміщенню осцилятора. Така робота еквівалентна зростанню внутрішньої (теплової) енергії взаємодіючих тіл, особливо в контактуючих поверхнях. Сили тертя досить складно залежать від швидкості осцилятора у ВСВ. При малих амплітудах, швидкостях і прискореннях з достатнім ступенем точності можна вважати, що сили дисипації (сили тертя) пропорційні швидкості руху осцилятора (наприклад, пружинного маятника)

$$\vec{F}_{\text{опору}} = -k_{\text{опору}} \vec{v} = -k_{\text{опору}} \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (4.2)$$

де $k_{\text{опору}}$ – коефіцієнт сил опору руху, стала позитивна величина.

Зовнішньою ознакою затухання коливання є зменшення амплітуди зміщення осцилятора маятника щоперіода: $A_{t+T} < A_t$ (4.3). Коливання маятника, амплітуда зміщення якого з часом зменшується, є **з а т у х а ю ч и м и**. Причинами зменшення амплітуди зміщення A осцилятора можуть

бути: 1) наявність внутрішнього і зовнішнього тертя; 2) взаємодія з зовнішнім середовищем (газом, рідиною, системою відліку).

Тоді рівняння коливального руху (1.10) тіла масою m на пружині з коефіцієнтом жорсткості $k_{жорст}$ буде мати вигляд

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \frac{k_{опору}}{m} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{k_{жорст}}{m} \vec{x} = 0 \quad (4.4).$$

Це рівняння еквівалентне сумі сил, що діють на одиницю маси, тобто є сумою прискорень, яка дорівнює нулю. А це засвідчує про протилежність напрямів дії цих прискорень.

Вводимо позначення: $\frac{k_{жорст}}{m} = \omega_0^2$ і $\frac{k_{опору}}{m} = 2\delta$ (4.5), де δ –

коефіцієнт загасання, ω_0 – циклічна частота власних коливань, і отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (параметрами) коливального руху маятника

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + 2\delta \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} = 0 \quad (4.6),$$

За допомогою підстановки $x(t) = e^{-\lambda t}$ отримано характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$ (4.6a), корені якого $\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ і $\lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. За малого загасання коливань $\delta \prec \omega_0$ підкореневий вираз буде від'ємним,

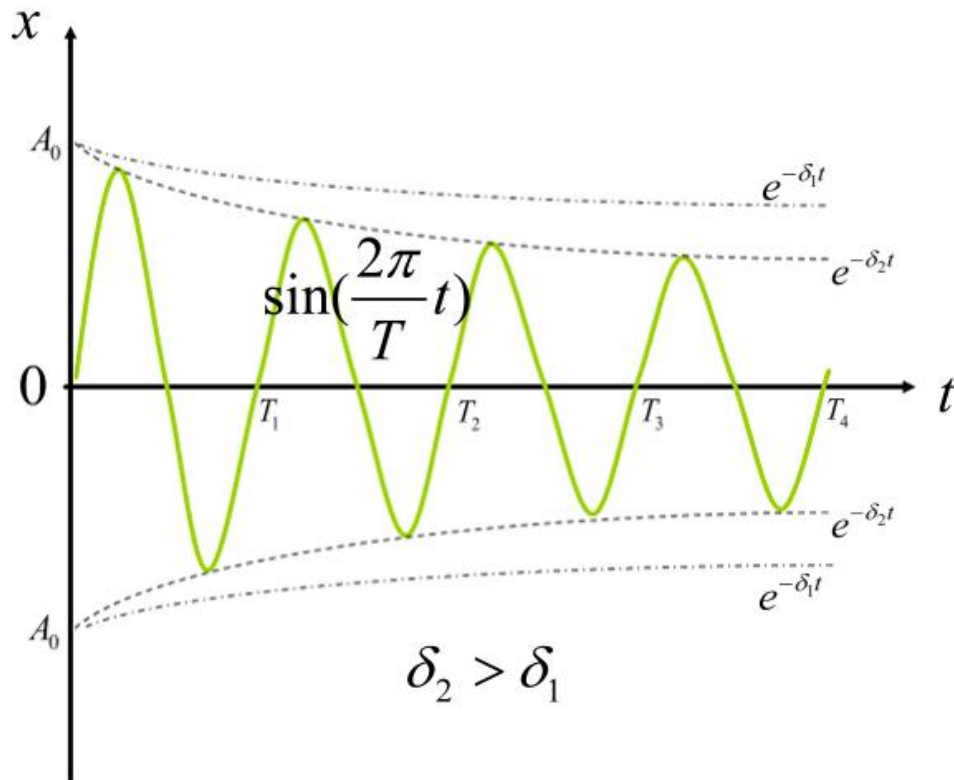


Рис.11. Затухаючі коливання

Представимо його у вигляді $(i\omega)^2$, де ω – дійсна величина, рівна $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Тоді корені приймуть вигляд $\lambda_1 = -\delta + i\omega$ і $\lambda_2 = -\delta - i\omega$.

Загальним рішенням буде функція

$$x_1 = C_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + C_2 e^{(-\delta - i\omega)t} = e^{-\delta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \Rightarrow$$

$$x_1 = A \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (4.7a)$$

$$\text{або } x_2 = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (4.7b).$$

Це рівняння зміщення осцилятора згасаючих коливань (при малих δ), де

$$A = A(t) = A_0 e^{-\delta t} \quad (4.8) \quad - \text{ амплітуда зміщення маятника, яка}$$

експоненціально зменшується і тим швидше, чим більше коефіцієнт

затухання δ ; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (4.9) – умовна циклічна частота при наявності сил опору коливальному рухові.

Оскільки затухаючі коливання не є гармонійними, то до них не застосовні поняття амплітуди та періоду в їх первісному сенсі. Однак при невеликому загасанні ($\delta < 0$), коли сила опору (тертя) багато менше сили пружності, можна затухаючі коливання розглядати як гармонійні. Значення спадної амплітуди через рівні проміжки часу утворюють геометричну

прогресію. Величину $T = \frac{2\pi}{\omega}$ можна назвати умовним періодом

затухаючого коливання. Умовний період – проміжок часу між двома послідовними максимальними відхиленнями осцилятора від положення рівноваги в одну та іншу сторони. Сила тертя має сильний вплив на амплітуду і незначний вплив на період. При наявності сил опору період коливань більший періода власних коливань того ж маятника

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} > T_0$ (4.10) і збільшується зі зростанням сили опору.

При $\delta \ll \omega$ коливання схожі на гармонійні і тривають досить довго. Для оцінки тривалості такого коливання вводиться т.зв. час релаксації

(поновлення стану) $\tau = \frac{1}{\delta} = N_e T$ (4.11) як час, за який амплітуда

коливань зменшується в e разів: $\delta\tau = 1$ і $\exp(-\delta\tau) = e^{-1}$; N_e – кількість коливань, протягом яких амплітуда коливань зменшується в e разів.

Сам по собі коефіцієнт загасання δ (як і τ) не характеризує коливальну систему. Залежно від періоду за один і той же час τ різні системи здійснюють різну кількість коливань. Тому для оцінки загасання системи в залежності від числа коливань користуються т.зв. декрементом (зменшенням) коливань $\theta = \delta T$ (4.12). Експериментально декремент θ можна визначити як логарифм натуральний відношення

$$\theta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{W_t}{W_{t+T}} \right) = \ln \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} \right) = \ln \left(\frac{A_0 e^{-n\delta T}}{A_0 e^{-(n-1)\delta T}} \right) \quad (4.13)$$

Якщо сталося n коливань з початку руху за час t , то

$$\theta = \frac{\delta t}{n} \ln \frac{A_0}{A_n} \quad (4.14).$$

Якщо при коливаннях відбувається ковзання одного тіла по не-змазаній (сухій) поверхні іншого тіла, то суттєво впливає на характер коливань сила сухого тертя. За час повного згасання коливального руху буде здійснено

$$N = \frac{t}{T} = N_e \cdot \ln 10 = 2,3 \cdot N_e \quad (4.15) \quad \text{коливань. Число } N \text{ зростає зі}$$

зменшенням δ , тобто зі зменшенням витрат енергії на сили тертя протягом одного періоду.

Сили опору (тертя) і сили пружності змінні величини, які до того ж синхронно змінюються з часом. Можна порівнювати їх максимальні значення і визначити величину добротності коливань як

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \left(\frac{F_{\text{пруж}}}{F_{\text{опору}}} \right)_{\max} = 2\pi \frac{k_{\text{жорст}} A_0}{k_{\text{опору}} v_{\max}} = 2\pi \frac{m\omega_0^2 A_0}{k_{\text{опору}} \omega_0 A_0} = \\ &= 2\pi \frac{m\omega_0}{k_{\text{опору}}} = 2\pi \frac{\rho}{k_{\text{опору}}}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

де ρ – хвильовий (коливальний) опір системи.

Добротність є мірою відносної дисипації системи. За період коливань T осцилятор проходить шлях $4 \cdot A_0$ і виконує роботу проти сил опору

$$A_{\text{опору}} = F_{\text{опору}} \cdot 4 \cdot A_0 = k_{\text{опору}} v_{\max} \cdot 4 \cdot A_0 = 2k_{\text{опору}} \omega_0 A_0^2 = \Delta W_{\text{дисс}} \quad (4.17)$$

$$\text{За час } t = \frac{W}{P_{\text{серед}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} Q = TQ \quad (4.18) \quad \text{коливальний рух повністю згасає.}$$

Швидкість зменшення енергії визначимо як

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{d(W_0 e^{-2\delta t})}{dt} = 2\delta \cdot W_0 e^{-2\delta t} \quad (4.19).$$

Протягом періоду коливань маятник втрачає енергію у розмірі

$$-W_T = 2\theta \cdot W_0 e^{-2\delta t} \quad (4.20)$$

на роботу проти сил опору.

Добротність Q пропорційна кількості коливань N_e , що система виконала за час τ , протягом якого амплітуда коливань зменшиться в e

разів: $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{\theta} = \pi \cdot N_e$; $N = 2,3/\theta = 0,75 \cdot Q$ і $Q \cdot \theta = \pi$

(4.21). При слабкому затуханні добротність з точністю до множника 2π дорівнює відношенню енергії, наявному у системі у даний момент, до втрат

цієї енергії за один період коливань $\frac{W}{-\Delta W} = \frac{Q}{2\pi}$.

При наявності загасання вільні коливання проходять з меншою частотою $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (4.9), ніж коливання такої ж системи, але без сил опору. Зі збільшенням сил опору зростає δ . Якщо маятник буде знаходитися у дуже в'язкому середовищі $\delta \approx \omega_0$ (4.22), коливання можуть зовсім не виникнути. Виведений з рівноваги осцилятор буде повільно повертатися у положення рівноваги, не переходячи в інший бік за межі положення рівноваги: $\omega \approx 0$

(рис.12). За час $\tau = \frac{1}{\delta} = N_e T$ (4.11) осцилятор буде знаходитися на

відстані $\frac{1}{e}$ частини початкового відхилення від положення рівноваги. Такого

виду коливальний рух називається а п е р і о д и ч н и м .

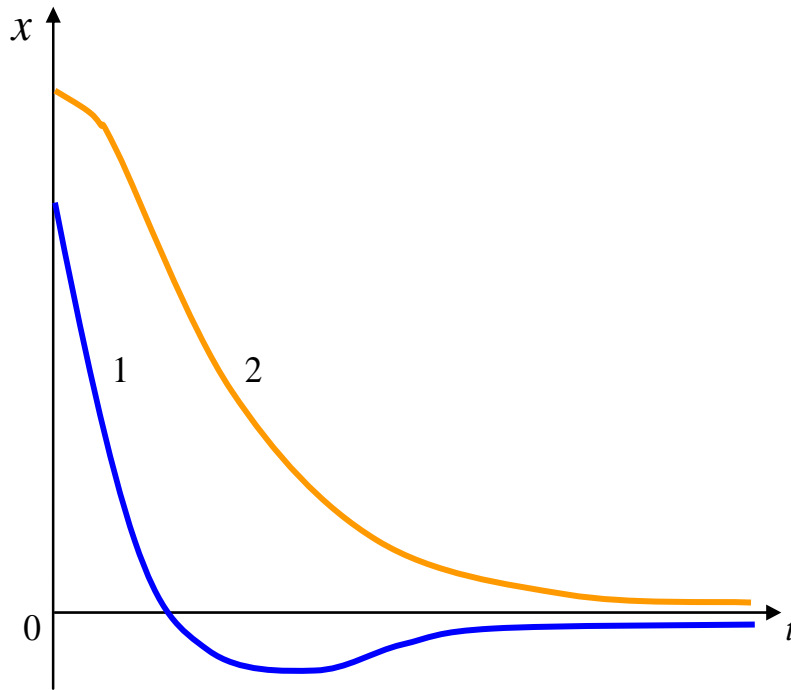


Рис. 12. Неперіодичні коливання

На рис.12 крива 1 відповідає руху осцилятора в бік положення рівноваги з початкового зміщення x_0 з початковою швидкістю v_0 після сильного поштовху; крива 2 відповідає руху осцилятора в бік положення рівноваги з початкового зміщення $x_0 = x_{\max}$ з початковою швидкістю $v_0 = 0$.

Амортизатор (демпфер – заспокоювач) – пристрій з дуже великим коефіцієнтом затухання δ для примусового поглинання (розсіювання) енергії коливальних систем. Основний вузол амортизатора складається з циліндра, заповненого в'язкою рідиною (технічні оливи) і зв'язаного з корпусом у ВСВ, і поршня зі штоком, зв'язаного з рухомою частиною коливальної системи.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 5

1. Запишіть рівняння затухаючого коливання
2. Дайте характеристику маятнику Обербека, вкажіть формули статичного та динамічного моментів інерції.

Лекція 6

Тема: Вимушені коливання

План

1. Рівняння вимушених коливань.
2. Амплітуда, частота, початкова фаза.
3. Механічний резонанс.
4. Резонансна частота і амплітуда.

$$\text{Якщо втрати енергії за кожний період} \quad - W_T = 2\theta \cdot W_0 e^{-2\delta t} \quad (4.20)$$

автоматично поповнювати протягом кожного ж періоду, то осцилятор буде здійснювати незгасаючі (незатухаючі), вимушені коливання, які зовні мають вигляд вільних власних незатухаючих коливань. Такі коливальні системи називаються **а в т о к о л и в а л ь н и м и**. За таким принципом дії працюють годинники, де джерелом постійної сили у формі пружності є пружина, вага гирі, хімічна, електрична або світлова енергія тощо. У годинниках є пристрій, який регулює періодичний доступ енергії для підтримки амплітуди і для компенсації втрат енергії на затухання.

Вимушені коливання можливі під дією зовнішньої періодичної (змушувальної) сили, що змінюється за гармонічним законом $F = F_0 \sin(\omega_{\text{вим}} t)$ (5.1), де F_0 – максимальне значення зовнішньої сили, що змінюється з частотою $\omega_{\text{вим}}$.

При тривалій дії періодичної змушувальної сили маятник буде коливатися так же періодично, як і під час власних коливань.

Запишемо рівняння руху осцилятора, на який одночасно діють пружна (квазіпружна) сила, сила опору середовища та змушувальна сила (5.1):

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + k_{\text{опору}} \frac{d\vec{x}}{dt} + k_{\text{жорст}} \vec{x} = F_0 \sin(\omega_{\text{вим}} t) \quad (5.2).$$

Введемо позначення $\frac{k_{опору}}{m} = 2\delta$ (5.3), $\omega_0^2 = \frac{k_{жорст}}{m}$ (5.4), $\frac{F_0}{m} = f_0$

(5.5) і запишемо параметричне неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку як рівняння вимушеного коливального руху

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + 2\delta \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} = f_0 \sin(\omega_{вим} t) \vec{e}_x. \quad (5.6)$$

Одним з рішень рівняння вимушених коливань є

$$x = A_{вим} \sin(\omega_{вим} t + \psi) \quad (5.7).$$

Розв'язок (5.7) та похідні від нього $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ (5.7a) і $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$ (5.7b)

після підстановки у рівняння (5.6) перетворюють його у тотожність, з якої можна виразити амплітуду $A_{вим}$ і зсув фаз ψ :

$$A_{вим} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{вим}^2)^2 + (2\delta\omega_{вим})^2}} \quad (5.8), \quad \psi = \arctg \frac{2\delta\omega_{вим}}{\omega_0^2 - \omega_{вим}^2} \quad (5.9)$$

Амплітуда вимушених коливань залежить від амплітуди F_0 і частоти $\omega_{вим}$ сили, яка вимушує коливання. Вимушені коливання відстають по фазі від змушувальної сили, причому величина відставання ψ залежить від частоти $\omega_{вим}$. Однією з причин зсуву фази вимушених коливань є сила опору, яка суттєво зменшує швидкість руху при поверненні осцилятора до положення рівноваги і відстає від коливання змушувальної сили.

При $\omega_0 \approx \omega_{вим}$: 1) зміщення відстає від сили, зсув фаз досягає

$$\Delta\psi = -\frac{\pi}{2}; \quad \text{б) змушувальна сила протягом всього зміщення збігається за}$$

напрямом зі зміщенням МО, виконує позитивну роботу по зростанню енергії коливальної системи, що і приводить до резонансного зростання амплітуди.

При $\omega_0 \ll \omega_{вим}$ коливання за фазою майже протилежні $\Delta\psi \approx -\pi$ змушувальній силі.

При $\Delta\psi < \frac{\pi}{2}$ змушувальна сила на деяких ділянках напрямлена проти руху осцилятора, виконує негативну роботу, зменшуючи частково енергію осцилятора.

Максимальна швидкість коливань $v_{\max} = (\omega A)_{\text{вим}}$ визначається як

$$v_{\max} = \frac{F_0}{\frac{m}{\omega_{\text{вим}}} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вим}}^2)^2 + (2\delta\omega_{\text{вим}})^2}} = \frac{F_0}{Z} \quad (5.10),$$

де
$$Z = \frac{m}{\omega_{\text{вим}}} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вим}}^2)^2 + (2\delta\omega_{\text{вим}})^2}$$

$$= \sqrt{k_{\text{опору}}^2 + \left(m\omega_{\text{вим}} - \frac{k_{\text{жорст}}}{\omega_{\text{вим}}}\right)^2} \quad (5.11) \quad \text{— повний механічний опір}$$

(імпеданс) коливальному рухові, $k_{\text{опору}}$ — активний механічний опір,

$$\left(m\omega_{\text{вим}} - \frac{k_{\text{жорст}}}{\omega_{\text{вим}}}\right) \quad (5.12) \quad \text{— реактивний механічний опір, } \frac{k_{\text{жорст}}}{\omega_{\text{вим}}} \quad (5.13) \quad \text{—}$$

пружний опір, $m\omega_{\text{вим}}$ — інерційний опір.

При деякій частоті $\omega_{\text{вим}}$, притаманній даній системі, амплітуда досягає максимального значення. При $\delta \Rightarrow 0$ і $\omega \Rightarrow \omega_0$ амплітуда зростає до нескінченності, що не має фізичного сенсу.

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при $\omega_{\text{вим}} \approx \omega_0$ називається резонансом.

Для визначення $\omega_{\text{рез}}$ знайдемо максимум функції

$$A_{\text{вим}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вим}}^2)^2 + (2\delta\omega_{\text{вим}})^2}} \quad \text{або, що те ж саме, мінімум}$$

підкореневого виразу у знаменнику цієї функції. Продиференціюємо

$(\omega_0^2 - \omega_{вим}^2)^2 + (2\delta\omega_{вим})^2$ по $\omega_{вим}$ і прирівняємо до нуля:
 $4\omega_{вим}(\omega_0^2 - \omega_{вим}^2 + 2\delta^2) = 0$. Два з трьох коренів не мають фізичного змісту. Позитивне рішення $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ (5.14) і є резонансною частотою.

Підставимо (5.14) у (5.8) і знайдемо резонансне значення амплітуди коливань $A_{рез} = \frac{f_0}{2\delta\omega_{рез}}$ (5.15).

При малому опорі середовища, коли $2\delta^2 \ll \omega_0^2$, резонансна частота збігається з частотою власних коливань: $\omega_{рез} \approx \omega_0$ і амплітуда вимушених коливань різко зростає.

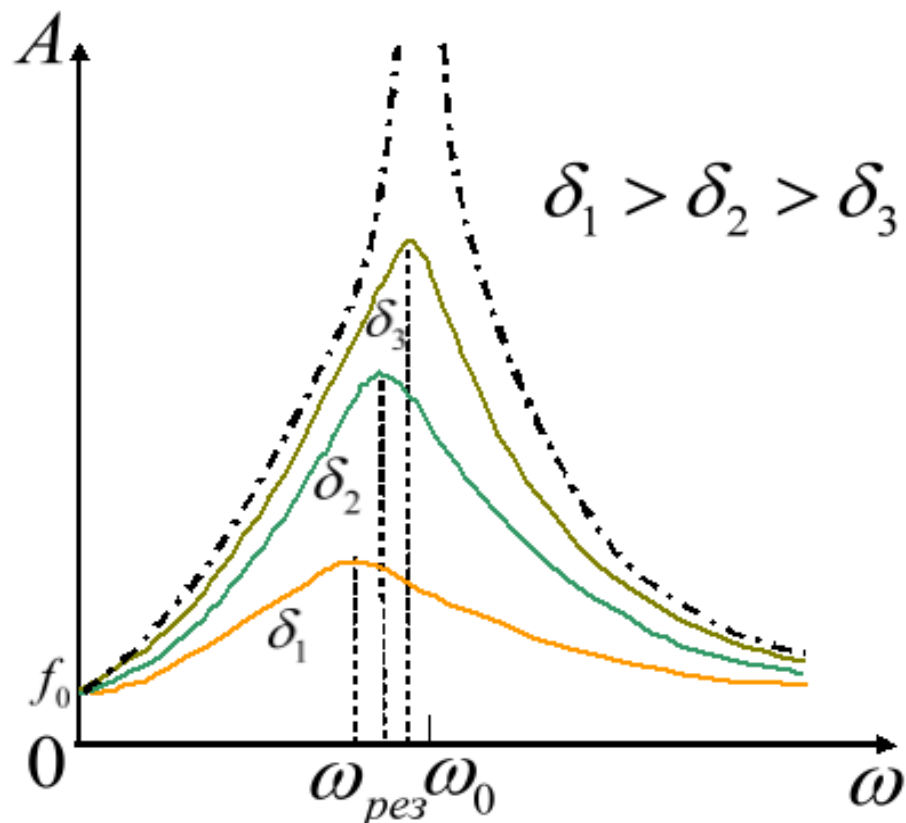


Рис.13а. Резонансні криві амплітуди

На рис. 13 наведені т.зв. р е з о н а н с н і к р и в і, які відображають зміну амплітуди вимушених коливань при зміні частоти зовнішньої сили. Гострота максимумів цих кривих суттєво залежить від величини опору

$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \delta_4$. Великому опору δ_1 відповідає найбільш полого резонансна крива зі слабо вираженим максимумом, малому опору δ_4 – сама 'гостора' крива з високим максимумом; при $\delta_5 = 0$ максимум кривої сягає нескінченності (Рис.13b).

Явище резонансу має велике значення у науці та техніці. Щоб сильно розгойдати маятник (напр., гойдалку) потрібно давати йому ритмічні поштовхи в такт з його власною частотою $\frac{\omega_0}{2\pi}$. За таких умов швидкість і сила співпадають за фазою ($\varphi_0 = 0$), що і приводить до передачі маятнику максимальної енергії та до встановлення великої амплітуди коливань. Під час резонансу достатньо малої сили для підтримки великої амплітуди коливань у системі з малим коефіцієнтом затухання.

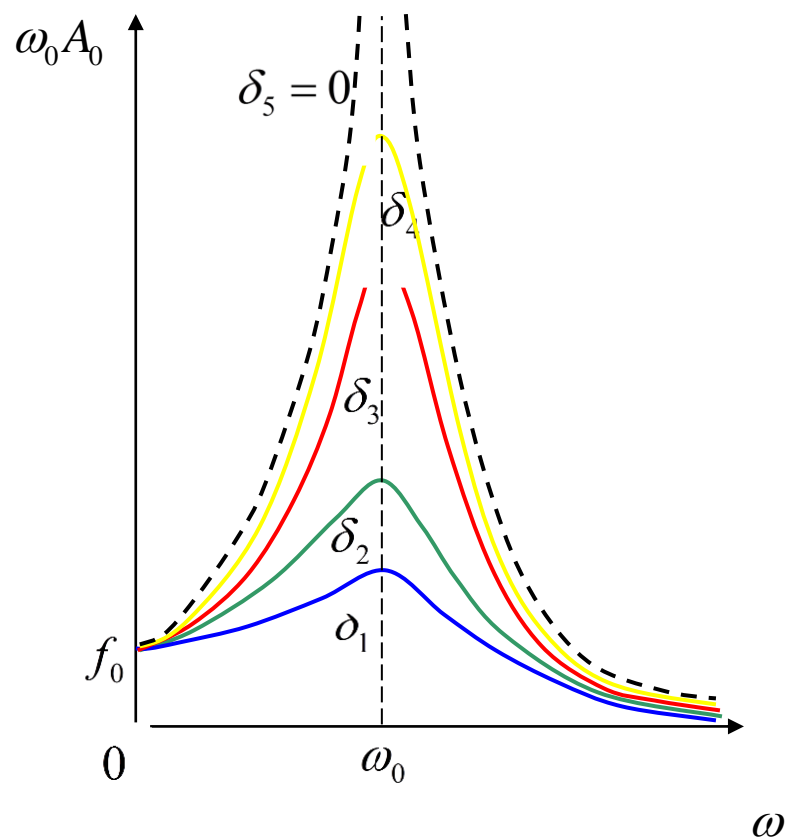


Рис.13b. Резонансні криві амплітуди

Численні прояви резонансу коливальної системи "маса тіла – поле пружних сил" зустрічаються в акустиці, у вимірювальних приладах, на транспорті, в побуті тощо.

На явищі механічного резонансу працює язичковий частотомір. В цьому приладі використовуються тонкі сталеві пластинки – язички, власні частоти яких відрізняються, наприклад, на 0,5 Гц в діапазоні частот від 48 Гц до 52 Гц. Біля кожного язичка встановлюється маленький магніт з намотаною на нього котушкою. Якщо через котушки всіх таких електромагнітів пропустити змінний струм міської мережі, то на язички буде діяти періодична сила з частотою змінного струму, яка може змінюватися навколо 50 Гц. Майже всі язички будуть коливатися, але один з них буде коливатися з найбільшою (резонансною) амплітудою, що можна спостерігати неозброєним оком. Отже, таким способом можна вимірювати частоту струму.

Явище механічного резонансу може бути ніщивним. Наприклад, були випадки, коли балкони спортивних та концертних споруд обрушувалися при одночасних коливальних рухах болільників (фанатів). Такі ж випадки були і на мостах, на яких в ногу йшли колоною солдати. Треба відмітити, що такі споруди мали невелику міцність, про що учасники подій заздалегідь не знали.

Ніщивним є також землетрус, небезпечний руйнуваннями нерухомості – будівель різного соціального призначення. Під розвалинами будівель гинуть люди. Реєстрацію землетрусів ведуть за допомогою сейсмографів – пристроїв, основу яких складають маятники з

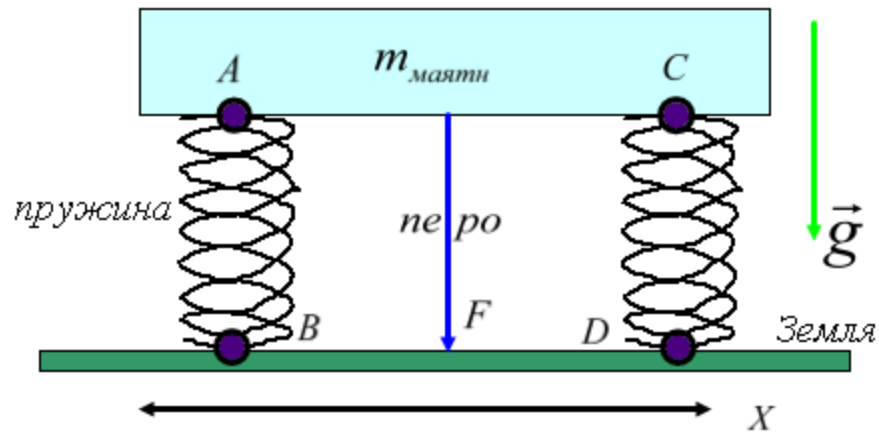


Рис.14. Схема сейсмографа

дуже великою масою, що лежать на тілах (пружинах, гумових балонах з повітрям тощо) з дуже малим $k_{жорст}$. Такі маятники є коливальними системами з дуже малими власними частотами ω_0 , які практично залежать тільки від маси маятника (рис.14).

В точках A і C маса маятника $m_{маятн}$ прикріплена до пружин, які у свою чергу в точках B і D закріплені до Землі. Під час коливань поверхні Землі вздовж осі X перо, прикріплене до практично нерухомої маси $m_{маятн}$, на стрічці, що рухається перпендикулярно до площини рисунка, записує зміну амплітуди коливань з часом.

Будівля на фундаменті подібної конструкції є досить стійкою до землетрусів.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 5

1. Що таке автоколивання?
2. Запишіть рівняння вимушених коливань.
3. Дайте характеристику резонансу. Приклади.

Лекція 7.

Тема: Накладання коливань

План

1. Векторна діаграма
2. Биття
3. Взаємно перпендикулярні коливання.
4. Фігури Ліссажу.

1. Векторна діаграма

Складання гармонічних коливань одного напрямку \vec{x}_1 та \vec{x}_2 ($\vec{x}_1 \uparrow\uparrow \vec{x}_2$ або $\vec{x}_1 \uparrow\downarrow \vec{x}_2$) з однаковими частотами $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ дає теж гармонічне результуюче коливання \vec{x} :

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{A}_{01} \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}) \vec{e}_{x1} \\ \vec{x}_2 &= A_{02} \cos(\omega_{02}t + \varphi_{02}) \vec{e}_{x2} \\ \vec{x} &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \vec{e}_x \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Визначення параметрів результуючого коливання стає досить наглядним і зрозумілим за допомогою графічного способу – способом векторної діаграми (Рис.1).

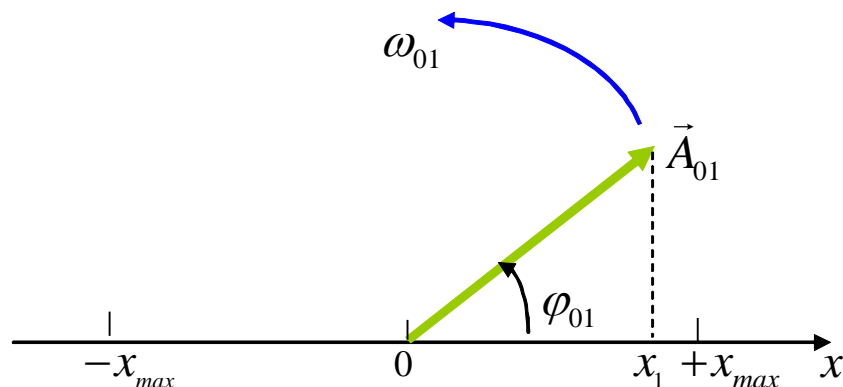


Рис.1. Схема побудови векторної діаграми.

З точки 0 під кутом початкової фази φ_{01} даного коливання на координатній осі X відкладемо вектор амплітудного зміщення \vec{A}_{01} , який навколо точки 0 як осі може обертатися з кутовою швидкістю ω_{01} у напрямі зростання фази коливання $(\omega_{01}t + \varphi_{01})$. Під час обертання вектора \vec{A}_{01} навколо точки 0 проекція кінця цього вектора буде переміщуватися вздовж осі X у межах $\pm x_{\max} = |\vec{A}_{01}|$, причому координата цієї проекції з часом буде змінюватися згідно залежності

$$x_1 = A_{01} \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}). \quad (1.2)$$

Таким чином, проекція кінця вектора \vec{A}_{01} виконує гармонічне коливання з амплітудою $|\vec{A}_{01}|$, з циклічною частотою ω_{01} та початковою фазою φ_{01} .

Побудуємо векторну діаграму результуючого коливання (1.1) за умови рівності частот $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$.

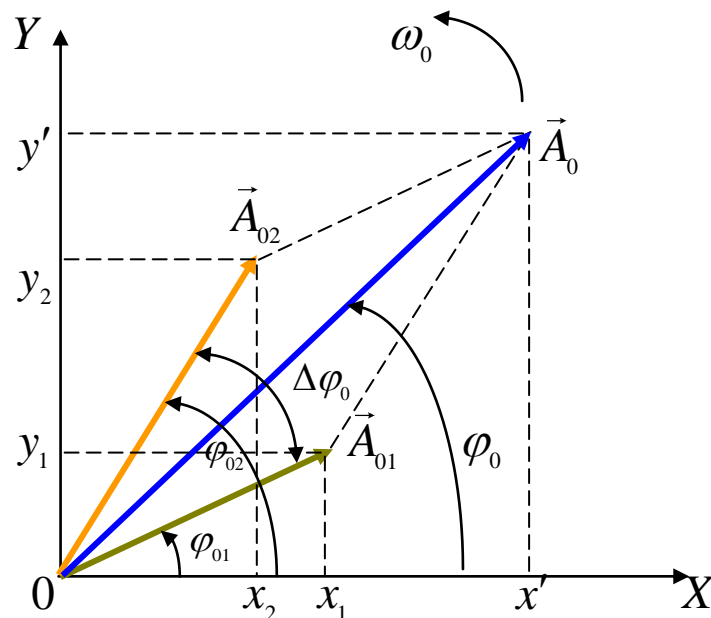


Рис. 2. Векторна діаграма складання коливань одного напрямку з однаковими частотами

Для визначення параметрів рівняння (1.1) результуючого зміщення $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ побудуємо векторну діаграму (рис. 2). Результуючий вектор \vec{A}_0 обертається з кутовою швидкістю ω_0 , що і його складові вектори \vec{A}_{01} та \vec{A}_{02} . З рис. 2 видно, що за теоремою косинусів знайдемо амплітуду результуючого зміщення

$$\begin{aligned} A_0^2 &= A_{01}^2 + A_{02}^2 - 2A_{01}A_{02} \cdot \cos[\pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})] = \\ &= A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02} \cdot \cos \Delta\varphi_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $\Delta\varphi_0 = (\varphi_{02} - \varphi_{01})$ – різниця початкових фаз зміщень складових коливань.

Звідси амплітуда результуючого коливання

$$A_0 = \sqrt{A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02} \cdot \cos \Delta\varphi_0}. \quad (1.4)$$

З виразу (1.4) видно, що A_0 залежить як від амплітуд складових коливань \vec{A}_{01} та \vec{A}_{02} , так і від різниці початкових фаз $\Delta\varphi$.

При $\Delta\varphi_0 = 0$ вираз (1.4) буде мати вигляд $A_0 = A_{01} + A_{02}$ (1.4а).

При $\Delta\varphi_0 = \pm\pi$ вираз (1.4) буде мати вигляд $A_0 = |A_{01} - A_{02}|$ (1.4б).

Якщо $A_{01} = A_{02}$, то амплітуда результуючого коливання $A_0 = 0$, тобто коливання повністю згасне.

При $\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ вираз (1.4) буде мати вигляд $A_0 = \sqrt{A_{01}^2 + A_{02}^2}$ (1.4в).

Початкову фазу φ_0 результуючого коливання знайдемо також за допомогою векторної діаграми (Рис. 2) з прямокутного трикутника $\Delta A_0 O x'$,

у якого кут при вершині O дорівнює φ_0 . Таким чином, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y'}{x'}$ (1.5а), а

$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}$ (1.5б). У свою чергу, катет $A_0 x' = y'$ трикутника

$\Delta A_0 O x'$ дорівнює сумі катета $A_{01} x_1 = y_1 = A_{01} \sin \varphi_{01}$ (1.6) трикутника

$\Delta A_{01} O x_1$ і катета $A_{02} x_2 = y_2 = A_{02} \sin \varphi_{02}$ (1.7) трикутника $\Delta A_{02} O x_2$.

Аналогічно запишемо $x' = x_1 + x_2 = A_{01} \cos \varphi_{01} + A_{02} \cos \varphi_{02}$ (1.8).

Підставимо у вираз (1.6б) знайдені y' та x' :

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{A_{01} \sin \varphi_{01} + A_{02} \sin \varphi_{02}}{A_{01} \cos \varphi_{01} + A_{02} \cos \varphi_{02}} \quad (1.9).$$

Складання коливань одного напрямку з однаковими частотами $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ відбувається при розповсюдженні світлових (наприклад, при використанні збираючої лінзи) та звукових коливаннях.

При однакових частотах складових коливань всі вектори діаграми (Рис.2) будуть обертатися навколо точки 0 як єдине ціле, вільними кінцями описуючи концентричні кола.

2. Биття

Складання гармонічних коливань одного напрямку \vec{x}_1 та \vec{x}_2

($\vec{x}_1 \uparrow \uparrow \vec{x}_2$ або $\vec{x}_1 \uparrow \downarrow \vec{x}_2$) з частотами, які мало відрізняються

$|\omega_{01} - \omega_{02}| = \Delta\omega$ і $\Delta\omega \ll \omega_{01}$ та $\Delta\omega \ll \omega_{02}$ дає теж гармонічне

результуюче коливання \vec{x} :

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}_1 &= A_{01} \cos(\omega_{01} t + \varphi_{01}) \vec{e}_{x1} \\ \vec{x}_2 &= A_{02} \cos(\omega_{02} t + \varphi_{02}) \vec{e}_{x2} \\ \vec{x} &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Якщо частоти складових коливань неоднакові, вектори \vec{A}_{01} і \vec{A}_{02} на векторній діаграмі будуть обертатися з різними кутовими швидкостями. У цьому випадку результуючий вектор \vec{A} буде пульсувати за величиною і обертатися зі змінною швидкістю. При малій різниці частот $|\omega_{01} - \omega_{02}| = \Delta\omega \ll 1$ (1.11) результуючий рух за таких умов можна

вважати як гармонічне коливання з пульсуючою амплітудою. Таке коливання називається **б и т т я м**.

Позначимо $\omega_{01} \approx \omega_{02} = \omega_0$, для простоти розв'язку приймемо однаковими амплітуди складових коливань $A_{01} = A_{02} = A_0$, початкові фази обох коливань рівні нулю $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}_1 &= A_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \vec{e}_{x1} \\ \vec{x}_2 &= A_0 \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t \cdot \vec{e}_{x2} \end{aligned} \right\} \quad (1.10a)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \left(2A_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \vec{e}_x$$

Амплітуда результуючого коливання $2A_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ у виразі (1.10a) є пульсуючою періодичною функцією з частотою биття $\Delta\omega$ (періодом биття $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$) і впливає на фазу коливання.

Явище биття спостерігається і використовується при звукових і електричних коливаннях та хвилях, наприклад, при налагодженні струнних музичних інструментів, в радіотехніці (амплітудна модуляція) тощо.

3. Взаємно перпендикулярні коливання

Матеріальна точка (осцилятор) приймає участь у коливальному русі вздовж однієї координатної осі, наприклад, осі X згідно з рівнянням зміщення

$$x = x_{\max} \cdot \cos \omega_{ox} t \quad (2.1)$$

і одночасно у коливальному русі вздовж другої, перпендикулярної до першої, координатної осі Y згідно з рівнянням зміщення

$$y = y_{\max} \cdot \cos(\omega_{oy} t + \varphi_o), \quad (2.2)$$

де $x_{\max} = A_{0x}$, $y_{\max} = A_{0y}$, ω_{0x}, ω_{0y} – амплітуди та циклічні частоти коливань відповідно вздовж абсциси і ординати декартової системи координат, φ_0 – початкова різниця фаз обох коливань.

Вирази (2.1) і (2.2) є рівняннями траєкторії осцилятора в параметричній формі.

Розв'язання системи рівнянь (2.1)–(2.2) при однакових частотах $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega$, вилучаючи з цих рівнянь час t , дає рівняння кривої у

звичній формі. Рівняння (2.1) перепишемо у вигляді $\cos \omega t = \frac{x}{A_{0x}}$ (2.3),

$$\text{а, отже, } \sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_{0x}^2}} \quad (2.4).$$

Рівняння (2.2) перепишемо у вигляді

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{y}{A_{0y}} = \cos \omega t \cdot \cos \varphi_0 + \sin \omega t \cdot \sin \varphi_0 \quad (2.5)$$

$$\text{або } \frac{y}{A_{0y}} = \frac{x}{A_{0x}} \cdot \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_{0x}^2}}. \quad (2.6)$$

Після перетворень (2.6) запишемо рівняння замкнутої плоскої кривої другого порядку (рівняння еліпса у загальному вигляді)

$$\frac{x^2}{A_{0x}^2} + \frac{y^2}{A_{0y}^2} - 2 \frac{x}{A_{0x}} \frac{y}{A_{0y}} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0. \quad (2.7)$$

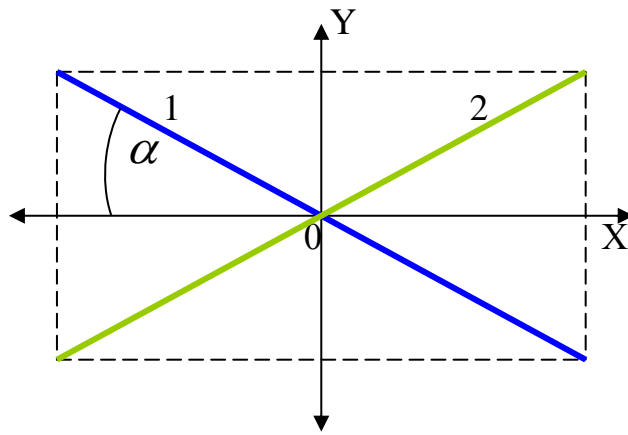


Рис. 4. Відрізок прямої лінії

Форма такої кривої залежить від різниці початкових фаз φ_0 коливань, які складаються. Розглянемо деякі випадки рівняння (2.7), пов'язані з величиною φ_0 .

1. Коливання відбуваються у однакових фазах, тобто коливання розпочинаються і закінчуються одночасно: $\varphi_0 = 0$. У цьому випадку рівняння (2.7) буде мати вигляд:

$$\left(\frac{x}{A_{ox}} - \frac{y}{A_{oy}} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x \cdot \frac{A_{oy}}{A_{ox}} \quad (2.8)$$

Як бачимо з (2.8), еліпс переходить у відрізок прямої лінії, який одержуємо при ортогональній проекції еліпса на площину, перпендикулярну площині еліпса (Рис. 4, лінія 1). Цей відрізок проходить через початок системи координат і лежить у першому і третьому квадрантах координатної системи.

Оскільки частоти коливань однакові, відхилення осцилятора по осях ОХ і ОУ весь час пропорційні між собою і при складанні (за правилом паралелограма) перетинаються в точках, які лежать на прямій лінії.

Відношення амплітуд $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_{0y}}{A_{0x}}$ (тут α – кут нахилу відрізка

прямої до осі абсцис) відображає відношення миттєвих відхилень

осцилятора по осях. Очевидно, що у випадку рівних амплітуд $A_{0y} = A_{0x}$ кут $\alpha = 45^\circ$.

2. Коливання відбуваються у протилежних фазах: $\varphi_0 = \pi$. Коли осцилятор вздовж осі ОУ буде мати відхилення $y = y_{max}$ (по ОУ вверх), вздовж осі ОХ відхилення теж буде максимальним, але в той же час від'ємним (по ОХ ліворуч). У цьому випадку рівняння (2.7) буде мати вигляд:

$$\left(\frac{x}{A_{ox}} + \frac{y}{A_{oy}} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x \cdot \frac{A_{oy}}{A_{ox}} \quad (2.9)$$

Як бачимо з (2.9), еліпс і у цьому випадку переходить у відрізок прямої лінії (Рис. 4, лінія 2), який лежить у другому і четвертому квадрантах і симетричний прямій (2.7).

3. Коливання відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках при різниці фаз $\varphi_0 = \pi/2$. У цьому випадку рівняння (2.7) буде мати вигляд:

$$\left(\frac{x}{A_{ox}} \right)^2 + \left(\frac{y}{A_{oy}} \right)^2 = 1 \quad (2.10)$$

Як бачимо з (2.10), у цьому випадку осі симетрії еліпса співпадають з осями вибраної координатної системи (Рис. 5, лінія 1).

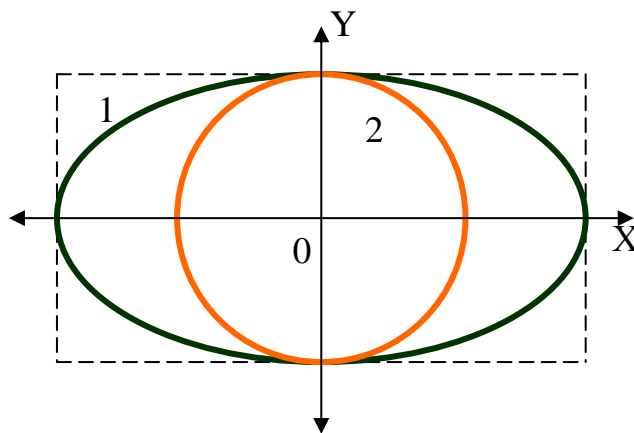


Рис. 5. Еліпс (коло), симетричний відносно системи координат

При рівності амплітуд по осях $A_{ox} = A_{oy} = A_o$ рівняння (2.10)

матиме вигляд

$$x^2 + y^2 = A_o^2, \quad (2.11)$$

де A_o - радіус кола. Коли осцилятор вздовж осі ОУ вже зробить чверть коливання, вздовж осі ОХ осцилятор тільки розпочне коливання. Осцилятор, який буде рухатись по напрямку годинникової стрілки, опише замкнуту криву лінію - коло як окремий випадок еліпса (Рис. 5, лінія 2). Вірне і зворотне, якщо траєкторія осцилятора є коло, то проєкції його на осі ОУ і ОХ гармонічно коливаються вздовж осей з різницею фаз $\pi/2$. В той же час прямолінійне коливання можна розглядати як суму протилежно направлених рухів вздовж двох кіл.

3. Коливання відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках при різниці фаз $\phi_0 = 3\pi/2$. Осцилятор буде рухатися проти годинникової стрілки по еліпсу (або по колу).

4. Фігури Ліссажу.

Якщо частоти коливань, які складаються, близькі одна до одної, різниця їх фаз потроху змінюється і послідовно приймає значення від 0 до 2π . Траєкторія складного коливання теж послідовно буде проходити через усі можливі для неї форми (Рис. 6), які і називають фігурами Ліссажу на честь французького вченого, першого дослідника цих кривих другого порядку.

При інших відношеннях частот гармонічних коливань, які складаються взаємно перпендикулярно, наприклад, при

$$\frac{\omega_{oy}}{\omega_{ox}} = \frac{p}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{9}, \quad \text{де } p, q - \text{ прості цілі числа,}$$

траєкторія руху осцилятора буде приймати досить складні форми в залежності від різниці фаз коливань.

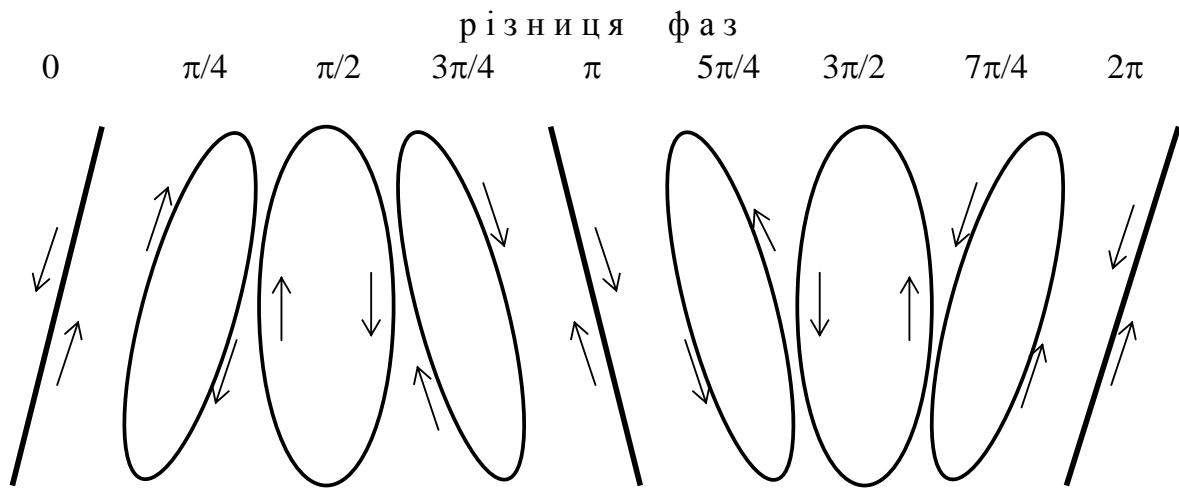


Рис. 6. Вид траєкторії та напрям руху осцилятора
в залежності від різниці фаз коливань при рівних частотах

При складанні взаємно перпендикулярних коливань енергія кожного коливання незалежна від іншого коливання, а тому осцилятор, який описує фігуру Ліссажу, має енергію, що є сумою енергій простих коливань.

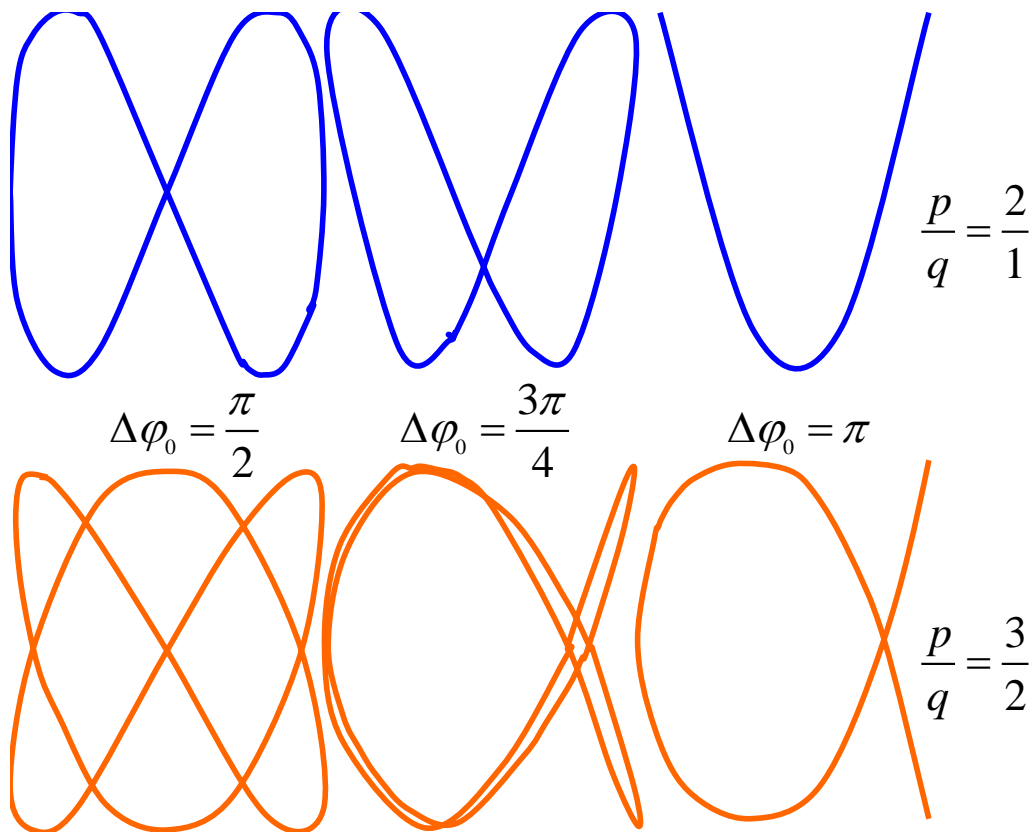


Рис. 7. Фігури Ліссажу в залежності
від співвідношення частот коливань та різниці початкових фаз

Вивчення фігур Ліссажу має практичне значення в тому, що, спостерігаючи форму фігур, можна, маючи відому частоту одного коливання, знайти частоту другого коливання, а також указати різницю фаз і амплітуду коливань.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 7

1. Опишіть алгоритм побудови векторної діаграми.
2. Яке коливання називається биттям? Назвіть його характеристики.
3. Охарактеризуйте взаємно перпендикулярні коливання.
4. Що таке фігури Ліссажу?

Лекція 8

Тема. Хвилі, які біжать

План

1. Поняття пружного однорідного середовища.
2. Хвилі, які біжать. Довжина хвилі. Фронт хвилі.
3. Швидкість поширення хвиль. Фазова швидкість.
4. Хвильове рівняння - рівняння площинної гармонічної хвилі.
5. Миттєвий розподіл зміщень, швидкостей, деформацій у хвилі.
6. Енергія хвилі. Інтенсивність хвилі. Випромінювання.

Хвильовий рух відбувається у пружному середовищі: у речовині, у польовій формі матерії. Середовище приймається нескінченим у просторі. У якості пружного середовища розглянемо ланцюг зі структурних частинок, що розташовані на однаковій відстані одна від одної і взаємодіють між собою пружними силами. Завдяки пружному зв'язку кожна частинка, рухаючись, спонукає сусідню частинку до аналогічного руху (Рис. 1).

Надамо структурній частинці № 1 (ланцюг a на рис.1) прямолінійний коливальний рух у напрямі, перпендикулярному до лінії ланцюга, тобто до координати \vec{x} .

Коливальний рух будь-якої структурної частинки масою m_0 середовища з амплітудою A_0 і частотою ω_0 завдяки її зв'язку з частинками, що її оточують, викликає деформацію прилеглих до даної частинки ділянок пружного середовища. Залежність зміщення частинки перпендикулярно до лінії ланцюга з часом можна виразити як

$$\xi = A_0 \cdot \sin \omega_0 t \quad (1a)$$

або

$$\xi = A_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (1б)$$

Кінетична енергія даної i -ої частинки (i -ої ділянки середовища)

$$E_i = \frac{m_{0i} A_0^2 \omega_0^2}{2} \quad (2)$$

перетвориться в потенціальну енергію

$$U_i^{\text{деф}} = E_i \quad (3)$$

i -ої деформованої ділянки та середовища сферичної симетрії:

$$U^{\text{деф}} = \sum_{i=1}^n U_i^{\text{деф}} \quad (4).$$

Тут i - номер частинки (ділянки середовища). Середовище розсіює енергію даних коливань з коефіцієнтом загасання δ .

У такому ж русі з часом будуть приймати участь всі частинки ланцюга. Частинки прилеглих ділянок середовища, які до цього моменту часу безладно (хаотично) коливалися навколо своїх положень рівноваги з певною амплітудою $A_{\text{хаот}}$ і частотою $\omega_{\text{хаот}}$, починають додаткові, спрямовані коливальні рухи під дією зовнішньої, змушувальної сили $F_{\text{вим}}$ з амплітудою

$$A_{\text{вим}} = \frac{F_{\text{вим}}}{m_0} \text{ і частотою } \omega_0.$$

Розповсюдження коливального прямолінійного руху вздовж ланцюга від частинки до частинки відбувається з кінцевою швидкістю завдяки наявності маси m_0 у кожній частинки. Кожна наступна частинка ланцюга відстає у коливальному русі по фазі від попередньої завдяки властивості інертності.

Коли частинка № 1 (рис.1b) буде мати амплітудне зміщення $x_1 = x_{\text{max}} = A_0$, частинка № 2 у цей час буде мати зміщення $x_2 < x_1$. Ще менше зміщення буде мати частинка № 3 і всі наступні. Починаючи з частинки № 10, всі наступні частинки будуть ще знаходитися у положенні рівноваги, оскільки за цей час до них коливальний рух не встиг розповсюдитися.

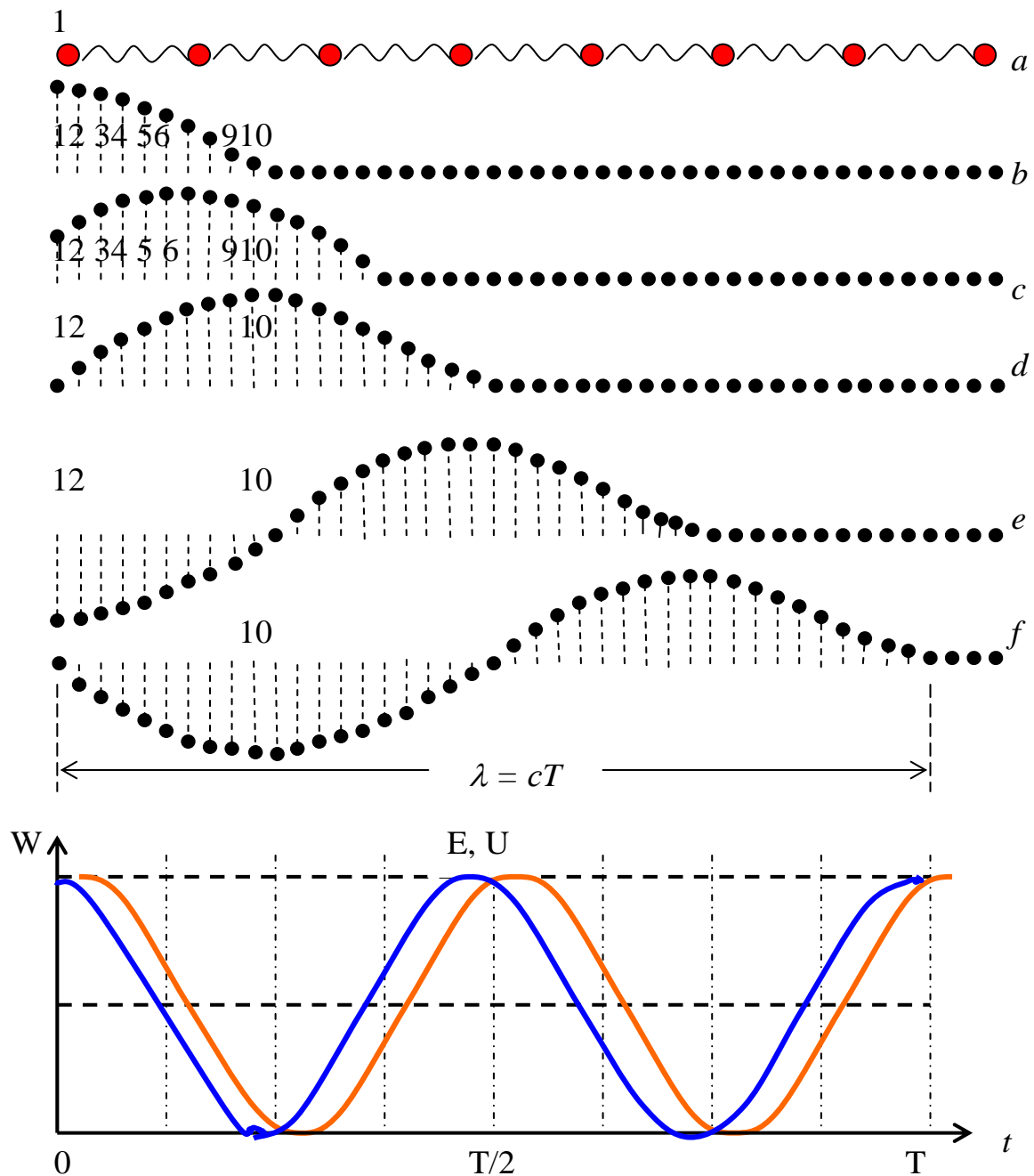


Рис.1. Схема розповсюдження поперечного коливального руху
структурних частинок пружного середовища
вздовж ланцюга частинок

Частинка № 1 з положення $x_1 = x_{\max}$ почне рухатися до положення рівноваги з максимальним прискоренням, а частинка № 2 ще буде продовжувати зміщуватись від положення рівноваги. З часом і частинка № 2 буде мати амплітудне зміщення $x_2 = x_{\max} = A_0$, а потім почне рухатися до положення рівноваги з максимальним прискоренням і стабільним

запізненням по фазі від частинки № 1 (рис.1c). Точно таким (із запізненням по фазі) буде рух усіх наступних частинок ланцюга. Причому запізнення по фазі пропорційне відстані наступної частинки від першої. За півперіода частинка № 1 повернеться в положення рівноваги (рис.1d).

На рис.1e частинка № 1 знаходиться у самому нижньому положенні. Через деякий час частинка № 1 ланцюга повернеться в положення рівноваги, пройшовши шлях $s = 4 \cdot A_0$ протягом періоду коливань $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. (Рис.1f).

Протягом цього часу декілька частинок ланцюга, найближчих до частинки № 1, знаходяться у коливальному русі, утворивши криву лінію у формі синусоїди.

Коловальный рух структурних частинок пружного середовища, який розповсюджується у цьому середовищі від частинки до частинки, називається хвильовим рухом. Напрямок розповсюдження хвилі називають променем.

Вздовж променя x з початком у збуреній частинці (у центрі збуреної ділянки середовища) коливання розповсюджується зі швидкістю

$$c = \frac{dx}{dt} \quad (5).$$

Частинка, що знаходиться на відстані x від початку системи відліку, почне вимушене коливання на

$$\tau = \frac{x}{c} \quad (6)$$

секунд пізніше, ніж частинка, яка знаходиться на початку системи відліку. Зміщення цієї частинки від положення рівноваги дорівнює

$$\xi = A \sin \omega_0(t - \tau) = A \sin \omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \sin\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} x\right), \quad (7)$$

де
$$A = A_0 e^{-2\delta x} = A_0 \cdot \exp(-2\delta x) \quad (8)$$

– амплітуда затухаючого коливання в точці середовища, віддаленої від початку відліку на відстань x ;

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} = k \quad (9)$$

– х в и л ь о в е ч и с л о, яке показує кількість довжин хвиль, що вміщується у відрізьку довжиною 2π з лінійною щільністю хвиль $1/\lambda$ метрів;

λ – д о в ж и н а х в и л і, яка біжить:

$$\lambda = c \cdot T \quad (10);$$

2π – ознака циклічності явища.

Вздовж ланцюга структурних частинок у вибраному напрямі (вздовж променя) пружного середовища обов'язково знаходяться частинки, які у даний момент часу мають однакове зміщення від положення рівноваги як за модулем, так і за напрямом. Такі частинки ланцюга коливаються в однаковій фазі (тобто коливаються с и н ф а з н о). Фази руху частинок, які знаходяться у тотожних станах руху, відрізняються на ціле число повних циклів: $2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$. Частинки пружного середовища, які коливаються синфазно, відстоять одна від одної (рис.1f) на відстанях, кратних довжині хвилі λ .

Рівняння (7) з урахуванням виразів (9) і (10) прийме вигляд

$$\xi = A \sin\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} x\right) = A \sin(\omega_0 t - kx) = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (11).$$

Аргументом синуса у виразі (11) є ф а з а х в и л і

$$\omega_0 t - kx = \omega_0 t - \vec{k}\vec{x} = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (12),$$

оскільки цей аргумент одночасно є функцією двох змінних: часу t , за допомогою якого описується зміщення окремої частинки ланцюга відносно свого положення рівноваги; координати \vec{x} , за допомогою якої описується включення до коливального руху наступної частинки відносно початку

системи відліку даного ланцюга частинок. Фаза хвилі (12) характеризує хвильовий процес частинок ланцюга.

Якщо вибрати сталим час t , а координату \vec{x} змінною, то ми отримаємо миттєвий фотознімок одночасного стану руху всіх частинок ланцюга у вигляді синусоїди, що і показує кожний з ланцюгів b, c, d, e, f на рис.1. Якщо вибрати сталою координату x , а змінним час t , то ми зосередимо увагу на русі однієї, конкретної частинки з абсцисою x . Ми отримаємо рівняння зміщення цієї частинки як функцію часу за синусоїдальним законом (див. вираз (1a)).

При розповсюдженні коливального руху вздовж ланцюга частинок можливо, що одна частинка з координатою x_1 в момент часу t_1 і будь-яка інша частинка з координатою x_2 у другий момент часу t_2 будуть мати однаковий хвильовий стан, тобто однакові фази хвилі

$$\omega_0 t_1 - kx_1 = \omega_0 t_2 - kx_2 \quad (13).$$

Таке можливо, якщо швидкість переміщення даного хвильового стану (фази хвилі) за виразом (13) дорівнює

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = c \quad (14),$$

що співпадає зі швидкістю (5) розповсюдження коливань вздовж ланцюга. Таку швидкість розповсюдження даної фази хвилі у процесі повністю стабільного хвильового руху називають фазовою швидкістю.

Якщо вибрати хвильовий аргумент у вигляді

$$\omega_0 t_1 + kx_1 = \omega_0 t_2 + kx_2 \quad (13a),$$

то швидкість розповсюдження даної фази хвилі буде дорівнювати

$$c' = -\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = -c \quad (14a),$$

тобто хвиля буде розповсюджуватися у напрямі від'ємної осі x з такою ж швидкістю.

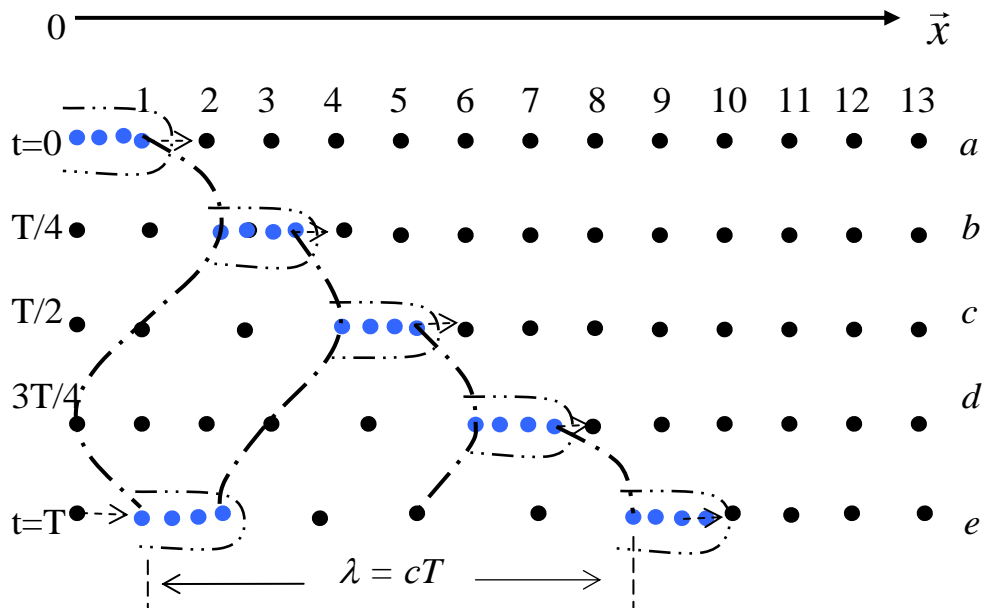


Рис.2. Схема розповсюдження повздовжнього коливального руху структурних частинок пружного середовища вздовж ланцюга частинок

Узагальнене рівняння зміщення частинок у хвилі запишемо як

$$\xi = A \sin(\omega_0 t \mp kx) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right). \quad (15)$$

Поперечні хвилі частіше виникають на границі поверхонь речовин з дуже різною щільністю: вода-повітря, тверде тіло-повітря, сталь-вода тощо. Поперечними хвилями є електромагнітні хвилі – радіохвилі, світло, рентгенівські промені. В об'ємі пружного середовища з майже сталою щільністю (однорідне або майже однорідне середовище) виникають п о в з д о в ж н і хвилі, тобто частинки ланцюга зміщуються відносно свого положення рівноваги в з д о в ж ланцюга. Оскільки пружне середовище має кінцеві розміри у вибраній системі відліку, то одночасно у середовищі виникають хвилі поперечні на його поверхні і повздовжні в об'ємі. Поперечні і повздовжні хвилі мають різні швидкості розповсюдження, оскільки для них діють різні пружні сили (Рис.2).

Для визначення швидкості повздовжньої хвилі прикладемо силу F до поперечного перерізу S пружного стержня (наприклад, вдарити молотком у стержень). Імпульс сили $F \cdot \Delta t$ пошириться вздовж стержня на відстань

$$\Delta x = c \cdot \Delta t \quad (16)$$

від точки прикладання, тим самим змінивши довжину стержня на Δl . Зміщення частинок і деформація передаються далі від шару до шару матеріалу стержня. Згідно закону Гука для малих одноосних деформацій

$$F = ES \frac{\Delta l}{c \cdot \Delta t}, \quad (17)$$

де E – модуль Юнга матеріалу стержня. Зміна імпульсу частинок стержня

(за умов $v_0 = 0$; $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$) дорівнює

$$F = \frac{\rho S \Delta x (\Delta l / \Delta t)}{\Delta t} = \rho S c \frac{\Delta l}{\Delta t}, \quad (18)$$

де ρ – густина речовини стержня. З рівності правих частин рівнянь (17) та (18) знайдемо швидкість розповсюдження у речовині стержня повздовжньої хвилі

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (19).$$

Швидкість розповсюдження поперечної хвилі у речовині цього ж стержня

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (20)$$

$$y \quad \sqrt{\frac{E}{G}} \quad (21)$$

разів менша швидкості повздовжньої хвилі, де G – модуль деформації

зсуву, причому $G < E$. Так для сталі $c_{\parallel} = 6100 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $c_{\perp} = 3300 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

У пружному однорідному середовищі коливальний рух розповсюджується від центра коливань у всіх напрямках згідно сферичної симетрії. Поверхня такої сфери радіусом $r = c \cdot t$ (22) є геометричним місцем точок (структурних частинок), що коливаються в однаковій фазі, і називається хвильовою поверхнею або фронтом хвилі. За принципом Христиана Гюйгенса в даний момент часу всі точки фронту хвилі можна розглядати як самостійні джерела (вже вторинних) хвиль, що через час Δt утворюють новий фронт хвилі як обвідну поверхню вторинних хвиль.

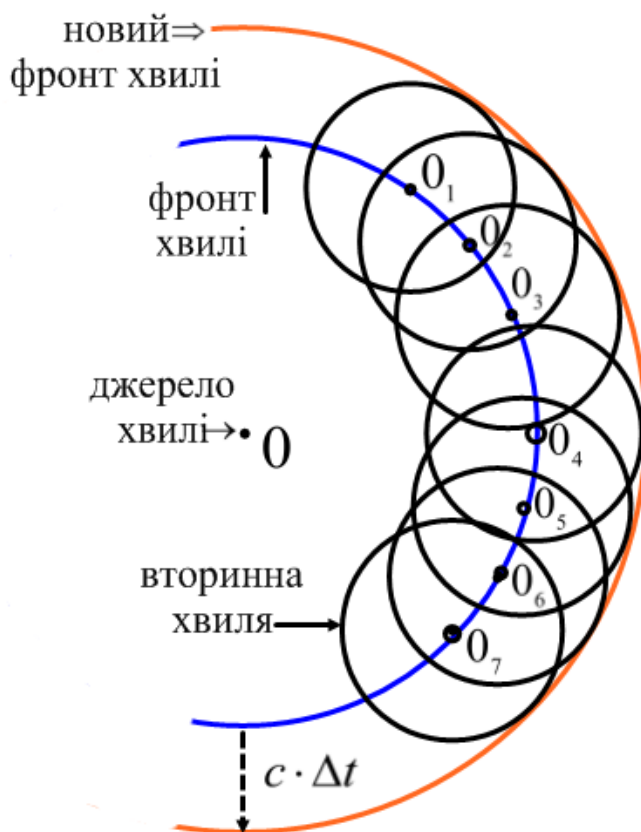


Рис.3. Розповсюдження сферичної хвилі

Крім сферичних хвиль, є плоскі хвилі, циліндричні хвилі. Плоска хвиля утворюється джерелом, яким є нескінченна площина, створена точковими джерелами, розташованими у площині. Циліндрична хвиля утворюється джерелом, яким є нескінченна лінія, створена лінійним ланцюгом точкових джерел. Всі точкові джерела (на площині, на лінії) коливаються синфазно.

Рівняння хвилі, незалежно від форми фронту хвилі, визначає зміщення будь-якої частинки, збудженої хвилею, як функції часу і відстані до джерела хвилі (15).

Інтерференція

Складання (накладання) двох і більше хвиль відбувається в деякій точці пружного середовища, до якої кожна з хвиль незалежно розповсюдилася (наприклад, на воді, у повітрі тощо). Вектор результуючого зміщення частинки середовища знайдемо шляхом геометричного складання зміщень даної частинки під дією кожної хвилі

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2 + \dots + \vec{\xi}_n. \quad (26)$$

Для простоти вивчення виберемо когерентні хвилі з однаковими частотами, різними фазами та напрямками розповсюдження:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1) \\ \xi_2 &= \xi_{02} \sin(\omega t - kr_2) \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

де r_1, r_2 – відстані, які пройшли відповідно перша і друга хвилі до точки накладання у даному пружному середовищі; $k = k_1 = k_2$ – хвильове число. Когерентні хвилі виникають від одного джерела і після відбивання від перешкод (в результаті – зміна фаз та напрямів) накладаються одна з одною. Незалежність поширення хвиль у середовищі називається принципом суперпозиції.

В результаті накладання когерентних хвиль виникає явище інтерференції – в одних строго визначених місцях простору (на поверхні середовища – для поперечних хвиль, в середовищі – для повздовжніх хвиль) підсилюється хвильовий рух, у других – спостерігається послаблення або повне знищення хвильового руху.

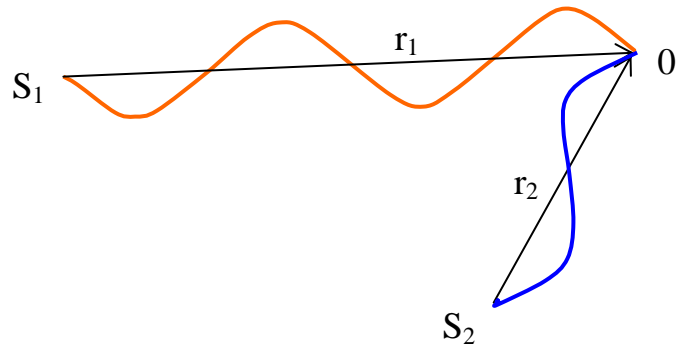


Рис. 3. Накладання когерентних хвиль

Різниця фаз цих хвиль є

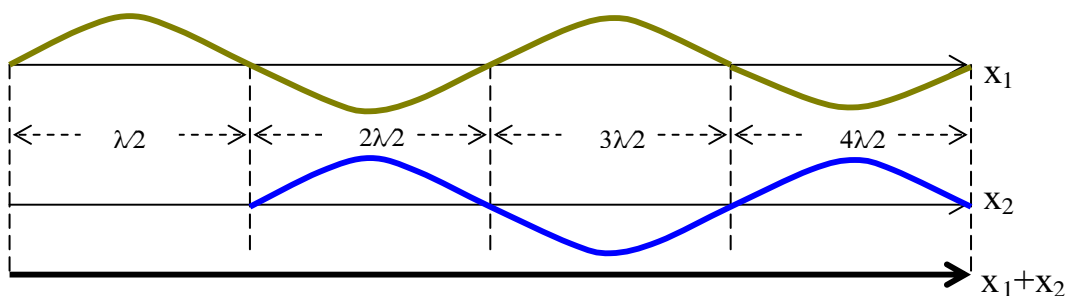
$$\Delta\varphi = -kr_1 - (-kr_2) = k(r_2 - r_1), \quad (28)$$

де $(r_2 - r_1) = \Delta r$ (29) – різниця ходів хвиль.

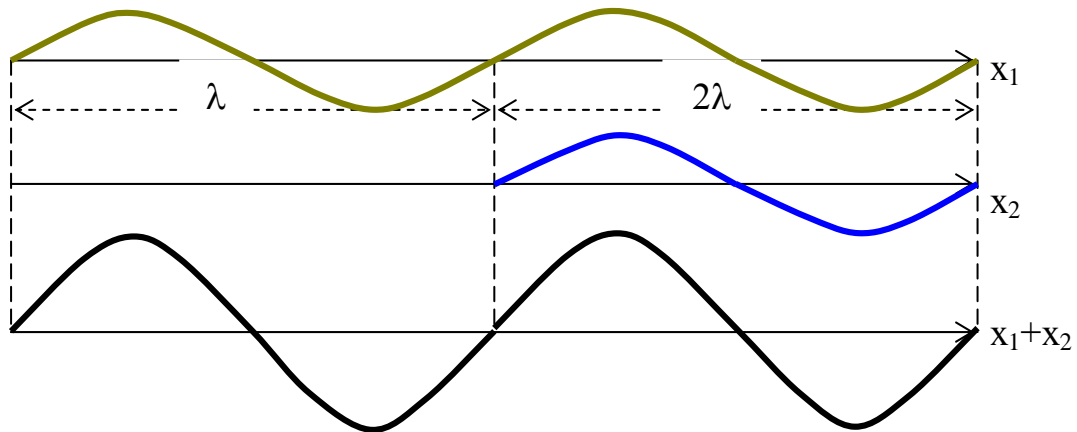
Результат складання хвиль (поперечних або повздовжніх) буде таким же, як і складання коливань окремої частинки одного напрямку та з однаковими частотами. В залежності від різниці фаз хвиль $\Delta r = \Delta\varphi$ амплітуда сумарної хвилі буде різною.

При різниці фаз коливань $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$ або різниці ходів хвиль

$$\Delta r = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \quad (30),$$



при різниці ходу хвиль у непарне число $\lambda/2$ виникає повне згасання хвиль



при різниці ходу хвиль у ціле число довжин хвилі
зміщення частинок у результуючій хвилі зростають

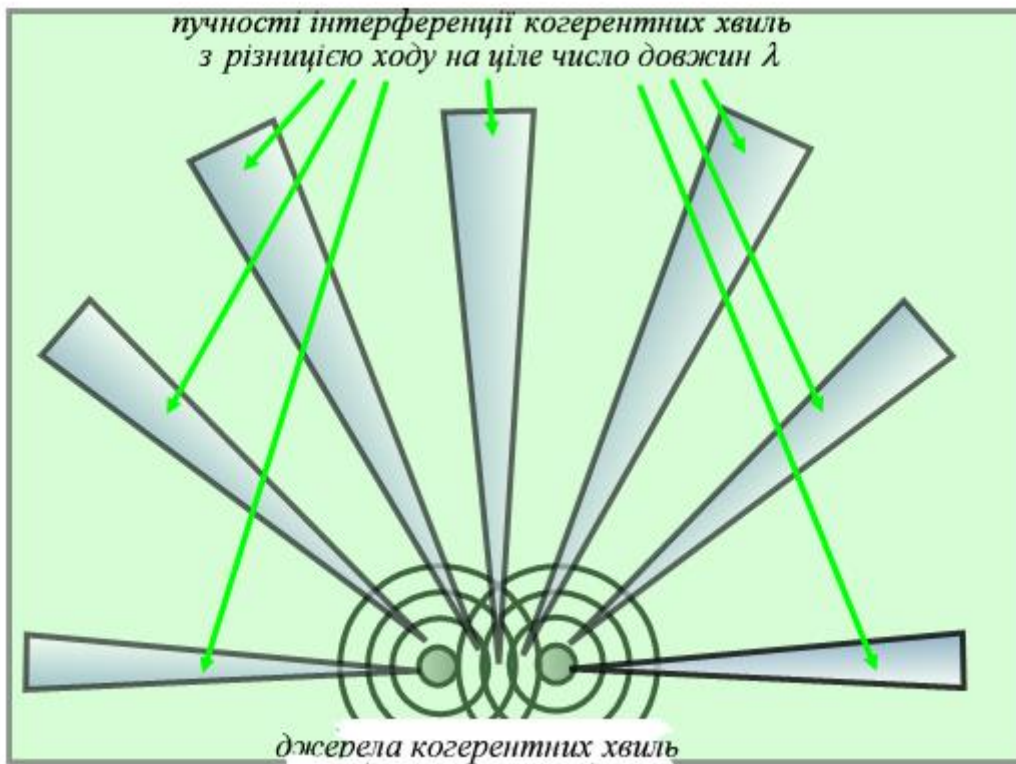


Рис.4. Складання когерентних хвиль одного напрямку

де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (непарне число півхвиль $\frac{\lambda}{2}$), сумарна амплітуда

дорівнює $\xi = \xi_{01} - \xi_{02}$, і при $\xi_{01} = \xi_{02}$ хвилі погасять одна одну.

При різниці фаз коливань $\Delta\varphi = 2n\pi$ або різниці ходів хвиль

$$\Delta r = 2n \frac{\lambda}{2} = n\lambda \quad (31)$$

(ціле число довжин хвиль λ) сумарна амплітуда дорівнює $\xi = \xi_{01} + \xi_{02}$, і при $\xi_{01} = \xi_{02}$ амплітуда сумарної хвилі збільшується вдвічі, а енергія – у чотири рази.

При складанні двох систем плоских поперечних хвиль, направлених (поляризованих) одна до другої взаємно перпендикулярно, з однаковими частотами та різними амплітудами, отримаємо сумарну хвилю, площина поляризації (напрямок) якої буде залежати від різниці фаз (див. фігури Ліссажу при складанні коливань). При різниці фаз коливань $\Delta\varphi = n\pi$ або різниці ходів хвиль

$$\Delta r = n \frac{\lambda}{2} \quad (32)$$

сумарна хвиля (лінійно поляризована) буде рухатись по прямій між складовими хвилями. При різниці фаз коливань $\Delta\varphi = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ або

$$\text{різниці ходів хвиль } \Delta r = (n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (33) \text{ будь-яка частинка буде}$$

виконувати коливання по еліпсу, а сумарна хвиля буде мати еліптичну площину поляризації. При рівності амплітуд складових хвиль $\xi_{01} = \xi_{02}$ сумарна хвиля стане поляризованою по колу. При цьому енергія сумарної хвилі дорівнює сумі енергій складових хвиль, оскільки взаємно перпендикулярні хвилі розповсюджуються незалежно одна від одної.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 8

1. Дайте характеристику пружного однорідного середовища.
2. Що таке хвиля? Які її основні характеристики?
3. Запишіть та охарактеризуйте рівняння площинної гармонічної хвилі.
4. Які хвилі називають когерентними? Опишіть явище інтерференції.

Лекція 9.

Тема: Застиглі хвилі

План

1. Стояча хвиля як особливий випадок інтерференції
2. Енергія хвилі

Стояча хвиля як особливий випадок інтерференції утворюється при накладенні двох плоских поперечних або повздовжніх хвиль з однаковими частотами і амплітудами та однаковими напрямками зміщень структурних частинок, що розповсюджуються вздовж однієї осі у протилежних напрямках

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{01} \sin(\omega_0 t - kx) \\ \xi_2 &= \xi_{02} \sin(\omega_0 t + kx) \end{aligned} \right\} (34)$$

Склавши ці рівняння при $\xi_{01} = \xi_{02} = \xi_0$, отримаємо рівняння зміщення частинок середовища у стоячій хвилі

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \cos kx \cdot \sin \omega_0 t = 2\xi_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \omega_0 t. \quad (35)$$

Множник $\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ у рівнянні (35) свідчить про те, що амплітуда коливань у стоячій хвилі змінюється вздовж осі x по закону косинуса. Множник $\sin \omega_0 t$ показує, що частинки у стоячій хвилі коливаються з тією ж частотою, що й у зустрічних хвилях, тобто в одні півхвилі всі частинки мають фазу φ , а в сусідній $\varphi + \pi$.

В точках, для яких $\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$ і які задовольняють умовам

$$kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ де } n = \pm 0, 1, 2, 3, \dots, \text{ тобто}$$

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (36)$$

– зміщення частинок середовища дорівнює нулю ($\xi = 0$), з часом частинки завжди знаходяться у стані покою. Цілий ряд таких точок середовища називаються **в у з л а м и** стоячої хвилі.

В точках, для яких $\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 1$ і які задовольняють умовам

$$kx = n\pi \text{ або}$$

$$x = n \frac{\lambda}{2} \quad (37),$$

– зміщення частинок середовища максимальне ($\xi = 2\xi_0$) незалежно від часу. Цілий ряд таких точок середовища називаються **п у ч н о с т я м и** стоячої хвилі.

Положення вузлів і пучностей залежить від різниці фаз прямої та оберненої хвиль.

Стоячі хвилі завжди виникають при падінні та відбиванні хвиль на перепонах (плоска тверда поверхня; вільна поверхня тіла, за межами якого тільки вакуум) як результат накладання відбитої та прямої хвиль з однаковими амплітудами. Коливання частинки на межі з перепоною у прямій хвилі запишемо як

$$\xi_{\rightarrow} = \xi_0 \sin(\omega_0 t - kx), \quad (38)$$

у відбитій хвилі як

$$\xi_{\leftarrow} = \xi_0 \sin(\omega_0 t + kx + \varphi), \quad (39)$$

де φ – зсув фаз, що виник при відбитті.

Приймемо за початок координат межу з перепоною: $x_0 = 0$.

Сумарне коливання частинки на межі складає

$$\xi = \xi_0 \sin \omega_0 t + \xi_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = \xi_0 \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (40),$$

де

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (41)$$

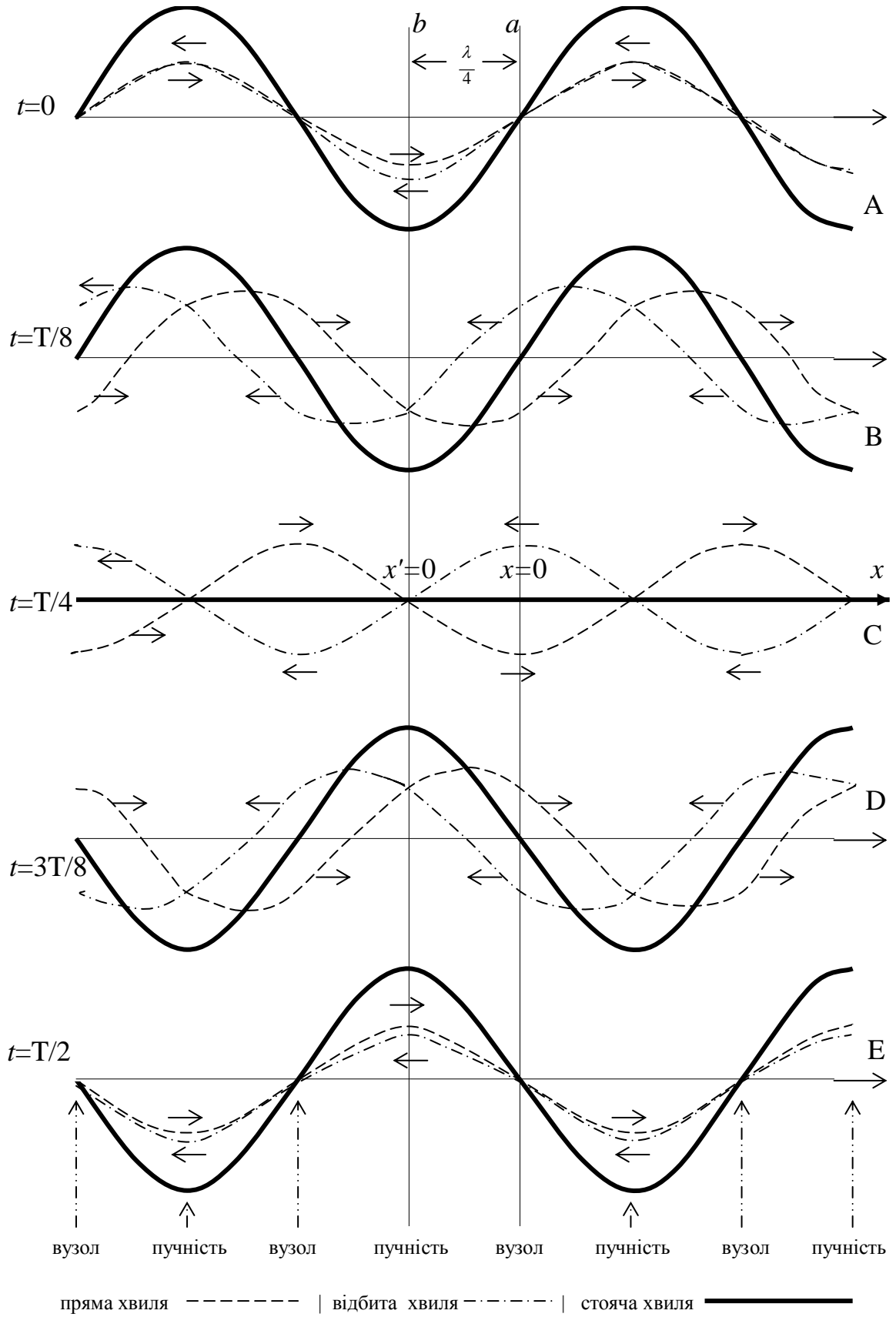


Рис. 5. Утворення стоячої хвилі

При відбитті хвилі від нерухомої стінки гранична частинка не може рухатись відносно стінки, оскільки з боку стінки частинка зустрічає дуже великий опір і залишається весь час у стані покою відносно стінки. Це можливо при умові $(1 + \cos \varphi) = 0$ у виразі (40), звідки $\varphi = \pm\pi$ (42).

Якщо $\varphi = -\pi$, то при відбиванні у цьому випадку хвиля зміщення частинок змінює знак – виникає запізнення по фазі на кут π (на півхвилі) – на межі зі стінкою завжди вузол зміщення. Вузли в стоячій хвилі виникають у тих точках середовища, де додаються коливання у протилежних фазах. На відстані $\frac{\lambda}{4}$ від межі відбивання виникає перша пучність.

При відбитті хвилі від вільної межі частинки зовсім не зустрічають опору, амплітуда зростає при умові $(1 + \cos \varphi) = 2$ у виразі (40) вдвічі, звідки $\varphi = 0$, а рівняння зміщення частинок

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega_0 t - kx) \quad (43),$$

тобто фаза не змінюється, півхвилі не втрачається.

Вузли і пучності являють собою площини, перпендикулярні осі x і зрушені один до одного на $\frac{\lambda}{4}$, а відповідно між собою на $\frac{\lambda}{2}$. Оскільки $2A_0 \cdot \cos(kx)$ при переході через нульове значення змінює знак, фази коливань по різні боки від вузла розрізняються на π , тобто точки середовища по різні боки від вузла коливаються у протифазі, а між вузлами – в однаковій фазі (синфазно).

Після диференціювання рівняння зміщення плоскої хвилі (43) по змінних t і x отримаємо прискорення коливання частинки

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - kx) \quad (44)$$

і за напрямом розповсюдження хвилі

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -A_0 \frac{\omega_0^2}{c^2} \sin(\omega_0 t - kx). \quad (45)$$

Порівнюючи праві частини рівнянь (44) і (45), отримаємо хвильове рівняння

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2}. \quad (46)$$

При розповсюдженні коливального руху кожний елемент об'єму ΔV середовища переносить енергію $\Delta W = \Delta E + \Delta U$, де

$$\Delta E = \frac{m}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho A_0^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t - kx) \Delta V \quad (47)$$

– кінетична складова повної енергії, $\Delta U = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V$ (48) – потенціальна

складова повної енергії елемента хвилі. У виразі (48) $\varepsilon = \frac{d\xi}{dx}$ – відносна

деформація в хвилі, $E = \rho c^2$ – модуль Юнга речовини. Після підстановки вираз (48) запишемо як

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho A_0^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t - kx) \Delta V. \quad (48a)$$

Порівнюючи (47) і (48a), суттєво відмітити, що максимуми і мінімуми потенціальної і кінетичної енергій біжучої хвилі припадають на одні й ті ж області пружного середовища. Повна енергія елемента об'єму середовища в даний момент часу дорівнює

$$\Delta W = \rho A_0^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t - kx) \Delta V. \quad (49)$$

Через фіксовану точку середовища з часом передається енергія пропорційна до квадрата косинуса, а оскільки середнє значення квадрата косинуса

дорівнює $\frac{1}{2}$, то середнє значення густини енергії, яку переносить кожна частинка хвилі за одиницю часу складає

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A_0^2 \omega_0^2 \quad (50)$$

при відсутності втрат (розсіяння) енергії: $\delta = 0$.

Хвильовий рух призводить до переносу енергії у пружному середовищі вздовж променя. В одиниці об'єму ΔV середовища масою Δm , що приймає участь у хвильовому русі, зосереджена енергія хвилі густиною

$$w = \frac{\Delta m \cdot v^2}{2 \cdot \Delta V} = \frac{\rho v_{\max}^2}{2} = \frac{\rho \omega_0^2 A_0^2}{2} \quad (23),$$

де v , ω_0 , A_0 – параметри коливального руху частинок середовища питомою густиною ρ . Інтенсивність хвилі

$$\vec{I} = w \cdot \vec{l} = w \cdot \vec{c} \quad (24)$$

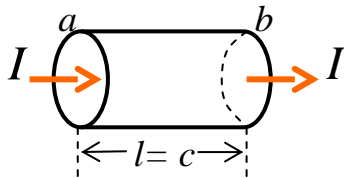


Рис.6. Переміщення енергії

вздовж стержня довжиною $l = c \cdot 1c$

потік хвильової енергії, що протікає за одиницю часу через одиницю перерізу фронту хвилі, нормально до його поверхні, поняття, вперше введене Умовим М.О., професором Одеського державного університету, і носить назву *вектора Умова*.

Для точкового джерела фронтом хвиль є сферична поверхня площею $S = 4\pi R^2$. Інтенсивність сферичної хвилі з ростом радіуса її фронту зменшується обернено пропорційно квадрату радіуса

$$I = \frac{w}{4\pi r^2 \cdot 1c} = \frac{\rho \omega_0^2 A_0^2}{8\pi r^2 \cdot 1c} = \frac{\rho \omega_0^2}{8\pi \cdot 1c} \left(\frac{A_0}{r} \right)^2 \quad (24).$$

Зміщення частинки у фронті сферичної хвилі зі зростанням відстані від джерела визначимо як

$$\xi = \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (25).$$

Для плоскої хвилі амплітуда коливань частинок при $\delta = 0$ від відстані не залежить, тому що площа фронту хвилі з відстанню не змінюється, а значить, не змінюється поверхнева густина енергії. За деякий час через поперечний переріз S середовища вздовж променя хвиля переносить потік енергії Φ . Через одиницю поверхні перпендикулярно променю за одиницю часу вздовж променя ($\vec{e}_x \uparrow \uparrow \vec{e}_c$) переноситься енергія

$$\frac{\Phi l}{St} = \bar{w}c = j \Rightarrow \vec{j} = \bar{w}\vec{c} = \frac{1}{2} \rho A_0^2 \omega_0^2 \vec{c}, \quad (51)$$

що називається густиною потоку енергії, вектором Умова.

В стоячій хвилі вузли і пучності швидкості збігаються з вузлами і пучностями зміщень частинок (хоча, за фазою зміщення і швидкість різняться на $\frac{\pi}{2}$). Вузли ж деформацій припадають на пучності зміщень, а пучності деформацій – на вузли зміщень.

Коли частинки стоячої хвилі досягають амплітудного положення, їх швидкість і кінетична енергія дорівнюють нулю, а їх потенціальна енергія максимальна. Ця потенціальна енергія хвилі в основному зосереджена в області її вузлів (там пучності деформацій).

Коли частинки стоячої хвилі проходять положення рівноваги, їх кінетична енергія стає максимальною; ця енергія хвилі зосереджена в основному в її пучності (там і пучності швидкості). Так двічі за період енергія стоячої хвилі перетворюється з потенціальної в кінетичну, перетікаючи з вузлів у сусідні пучності, і навпаки. Середній потік енергії в будь-якому перерізі стоячої хвилі дорівнює нулю.

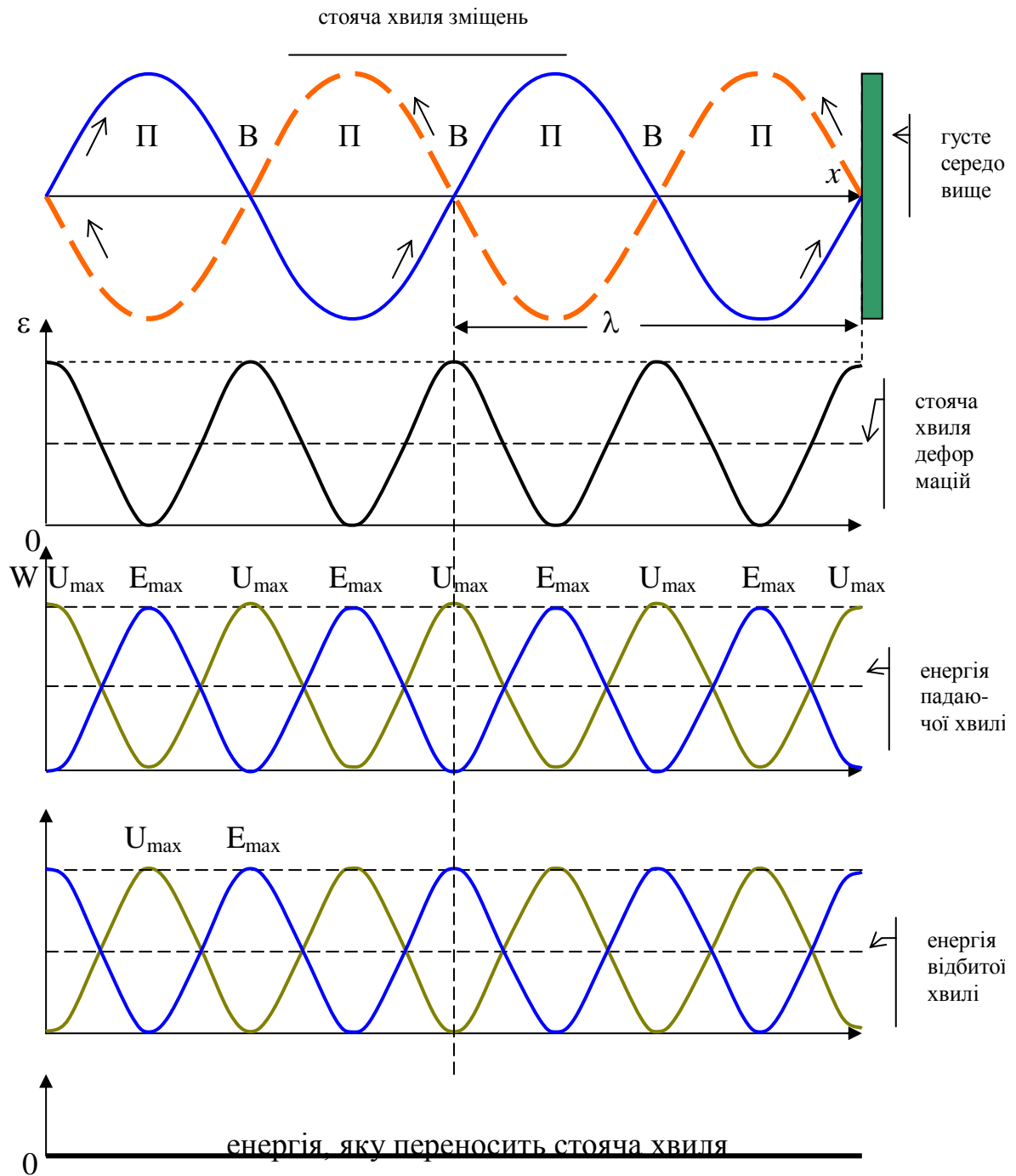


Рис. 7.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 9

1. Дайте характеристику стоячої хвилі.
2. Що таке хвиля? Які її основні характеристики?
3. Запишіть та охарактеризуйте рівняння площинної гармонічної хвилі.
4. Які хвилі називають когерентними? Опишіть явище інтерференції.

Лекція 10

Тема: Елементи акустики. Звук

План

1. Швидкість поширення звуку.
2. Інтенсивність звуку. Звуковий тиск.
3. Об'єктивні та суб'єктивні характеристики звуку.
4. Звукові хвилі в трубах, струнах, мембранах.
5. Акустичний резонанс. Запис та відтворення звуку. Затухання звуку.
6. Ефект Доплера.
7. Інфразвук. Ультразвук та його застосування .

Коливання пружного середовища з частотою від 16 до 20000 Гц людина сприймає своїм слуховим апаратом як звук. Люди під час спілкування збуджують, розповсюджують і сприймають звукові хвилі в повітрі.

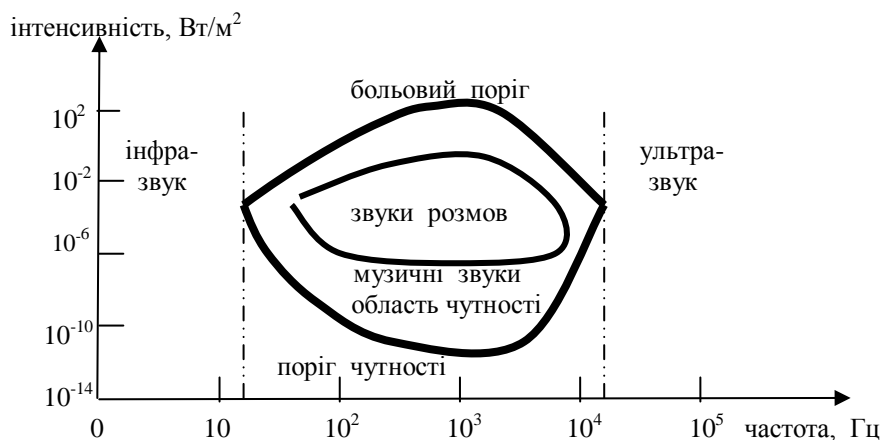


Рис. 1. Звукові хвилі

Акустика – розділ фізики, в якому вивчаються способи виникнення, розповсюдження і властивості звукових хвиль. У газах процес поширення звуку відбувається без теплообміну і описується рівнянням Пуассона

$$pV^\gamma = const \quad (1)$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – стала величина, яка залежить від природи газу. Для повітря

$$\gamma = 1,4.$$

Швидкість розповсюдження звукових хвиль у газах визначимо як

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (2)$$

де R – газа стала, μ – маса моля газу. У повітрі при 293 К швидкість звуку складає 344 м/с. Інтенсивність звуку визначається кількістю енергії, що переноситься за одиницю часу через одиницю площі нормальної поверхні:

$$I = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cdot \frac{v}{V}. \quad (3)$$

При дії звуку на одиницю площі поверхні (наприклад, вуха) виникає імпульс сили, який викликає тиск. Завдяки звуковому тиску є можливість заміряти інтенсивність звуку (рутильні терези Лебедєва П.М., диск Релея, мікрофон тощо). На рис.1 показані границі чутності людини. При великій інтенсивності звук не сприймається з-за болю. Звук частотою 1000-3000 Гц у дуже великому діапазоні інтенсивності є майже оптимальним для сприйняття вухом людини.

Звукові хвилі за відчуттями людини характеризується гучністю, висотою і тембром. Гучність залежить в основному від інтенсивності звуку і визначається виразом

$$L = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (4)$$

де $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ – поріг чутності при частоті 1000 Гц. Одиниця гучності звуку – бел; частіше використовують десятю долю бела – децибел (дБ). Гучність спокійної розмови людей 45-55 дБ, гучність грому на близькій відстані – 110-130 дБ.

Швидкість розповсюдження акустичних коливань у пружному середовищі визначається формулою

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де E — модуль Юнга середовища, ρ — густина середовища.

В газах швидкість розповсюдження

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

де μ — молярна маса газу, T — термодинамічна температура газу, R —

газова стала, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (C_p — теплоємність газу при сталому тиску і C_v -

теплоємність газу при сталому об'єму).

Частота основного тона струни визначається за формулою

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

де l — довжина струни, F — сила її натягування, S — площа її поперечного перерізу.

Рівень звукового тиску L_p (в децибелах), зв'язаний з амплітудою звукового тиску p співвідношенням

$$L_p = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0},$$

де p_0 — амплітуда звукового тиску при нульовому рівні гучності ($p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па).

Рівень гучності L (в фонах) зв'язаний з інтенсивністю звуку співвідношенням

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0},$$

де I_0 — поріг чутності (нульовий рівень гучності) звуку. Умовно приймається, що $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м².

Висота звуку залежить лише від частоти: з ростом частоти звукової хвилі зростає висота звуку. Люди 'з музичним слухом' можуть сприймати звуки як окремі при різниці їх частот до 0,1 Гц.

Джерело звуку генерує і випромінює одночасно цілий набір простих звукових частот майже однакової гучності і висоти, які визначають тембр звуку. Ці звуки розповсюджуються разом з хвилею основної частоти та гучності. Звукова хвиля найменшої частоти є основним тоном (звуком). Звукові хвилі з більшими частотами (кратними основній частоті) визначають додаткові тони – обертони. Кількість обертонів, їх частоти, їх гучність визначають тембр джерела звуку: людини, музичного інструмента тощо. Завдяки наявності тембру звуку люди пізнають по голосу знайому їм людину, наприклад, по телефону.

Людина і більшість видів тварин сприймають звуки на два вуха, маючи парний слуховий орган. Така природна властивість слухового органа дозволяє встановлювати напрям до джерела звуку з помилкою не більше 3°. В цьому проявляється т.зв. бінауральний ефект, який пов'язаний з різницею ходу звукових хвиль, що приходять до кожного вуха.

ЕФЕКТ ДОПЛЕРА

Доплер помітив і описав явище зміни частоти звукової хвилі при відносному русі джерела і приймача. Доплер (1847) встановив, що частота хвиль збільшується при зближенні джерела і приймача і зменшується при їх

відносному віддаленні. При цьому швидкість розповсюдження хвиль c приймається незалежною від швидкості джерела і приймача.

Джерело S генерує звукові хвилі частотою

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}. \quad (1)$$

Джерело і приймач O знаходяться на відстані l один від одного. Розглянемо декілька випадків.

У всіх випадках змін відносного положення джерела і приймача звукових хвиль вважається, що в момент генерації хвиль однакові відповідно: частота генерованих хвиль ν_0 , відстань між джерелом і приймачем l , швидкість розповсюдження хвиль c , швидкість руху джерела або приймача u , кількість генерованих хвиль

$$N = \frac{l}{\lambda} \quad (1a).$$

Швидкість відносного руху джерела або приймача $u \ll c$, що дозволяє використовувати принцип відносності Галілея-Ньютона.

Пружне середовище між джерелом і приймачем деформується – стискається при їх відносному зближенні, розтягується при їх відносному віддаленні (Рис. 1).

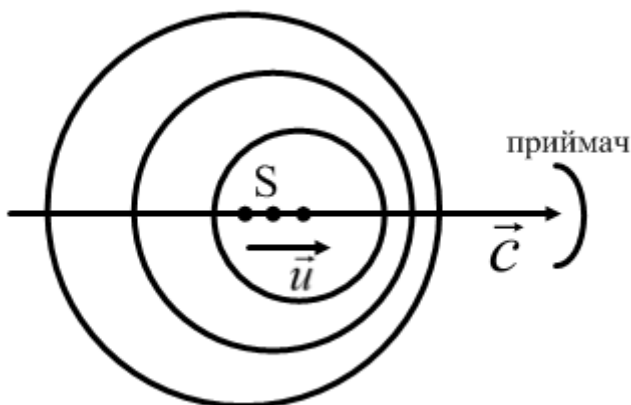


Рис. 1. Відносний рух джерела звуку до приймача.

А. Джерело і приймач нерухомі відносно середовища (рис.2,а).

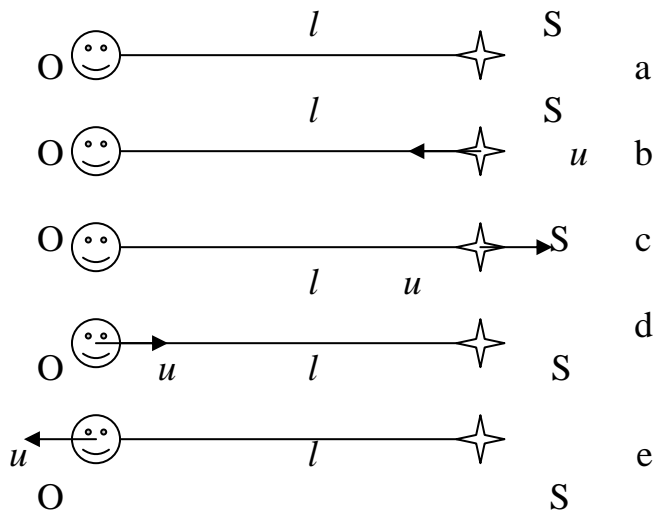


Рис.2. Окремі випадки ефекту Доплера

Весь цуг довжин хвиль λ досягне приймача через час

$$t_a = \frac{l}{c} = N \cdot T = \frac{N}{\nu_a}. \quad (2)$$

$$\text{Приймач сприйме звук частотою } \nu_a = \frac{N \cdot c}{l} = \frac{c}{\lambda}, \quad (3)$$

яка співпадає з частотою звукових хвиль, згенерованих джерелом (1):

$$\nu_a = \nu_0. \quad (4)$$

В. Джерело наближається до приймача зі швидкістю u (рис.2,b). Весь цуг довжин хвиль λ досягне приймача через час

$$t_b = \frac{l}{c+u} = N \cdot T_b = \frac{N}{\nu_b}. \quad (5)$$

Приймач сприйме звук частотою

$$\nu_b = \frac{N \cdot (c+u)}{l} = \frac{c}{\lambda} + \frac{u}{\lambda} = \nu_0 + \frac{u}{c} \nu_0 = \nu_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right) > \nu_0 \quad (6).$$

С. Джерело віддаляється від приймача зі швидкістю u (рис.2,c), генеруючи такий же цуг (1a) і тієї ж частоти (1).

Весь цуг довжин хвиль λ досягне приймача через час

$$t_c = \frac{l}{c-u} = N \cdot T_c = \frac{N}{\nu_c}. \quad (7)$$

Приймач сприйме звук частотою

$$\nu_c = \frac{N \cdot (c-u)}{l} = \frac{c}{\lambda} - \frac{u}{\lambda} = \nu_0 - \frac{u}{c} \nu_0 = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c}\right) < \nu_0. \quad (8)$$

D. Приймач наближається до джерела зі швидкістю u (рис.2,d). Весь цуг довжин хвиль λ досягне приймача через час

$$t_d = \frac{l}{c+u} = N \cdot T_d = \frac{N}{\nu_d} \quad (9)$$

Приймач сприйме звук частотою

$$\nu_d = \frac{N \cdot (c+u)}{l} = \frac{c}{\lambda} + \frac{u}{\lambda} = \nu_0 + \frac{u}{c} \nu_0 = \nu_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right) > \nu_0. \quad (10)$$

E. Приймач віддаляється від джерела зі швидкістю u (рис.2,e). Весь цуг довжин хвиль λ досягне приймача через час

$$t_e = \frac{l}{c-u} = N \cdot T_e = \frac{N}{\nu_e}. \quad (11)$$

Приймач сприйме звук частотою

$$\nu_e = \frac{N \cdot (c-u)}{l} = \frac{c}{\lambda} - \frac{u}{\lambda} = \nu_0 - \frac{u}{c} \nu_0 = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c}\right) < \nu_0 \quad (12)$$

Ефект Доплера спостерігається для будь-якого виду хвильового руху. За принципом Доплера частота звуку, котра сприймається приймачем, визначається формулою

$$\nu = \nu_0 \frac{c+u}{c-u}. \quad (13)$$

Проведемо оцінку зміни частоти при $\nu_0 = 1000$ Гц, $c = 340$ м/с, $u = 20$ м/с для випадків B і D:

$$\nu_b = \nu_d = \nu_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{20}{340}\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{1}{17}\right) = \nu_0 \cdot \frac{18}{17} \approx 1059 \text{ Гц};$$

для випадків С і Е:

$$\nu_c = \nu_e = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c}\right) = \nu_0 \cdot \frac{16}{17} \approx 942 \text{ Гц}.$$

Якщо u за величиною близько до c , як, наприклад, при випромінюванні звуку літаком, що летить зі швидкістю, близькою до швидкості звуку, то ефект Доплера різний для руху джерела відносно приймача і руху приймача щодо джерела.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 10

1. Що таке звук?
2. Назвіть основні характеристики звуку.
3. Назвіть об'єктивні та суб'єктивні характеристики звуку.
4. Охарактеризуйте поширення звукової хвилі в трубах, струнах, мембранах.
5. Що являє собою ефект Доплера?

Список використаних і рекомендованих джерел інформації

Базова література

- 1 Чолпан П.П. **Фізика:** Підручник / П.П. Чолпан. Київ: нац. ун-т ім. Т. Шевченка. 3-тє вид., переробл. і доповн. К. : Знання, 2015. 663 с.
- 2 Е.М.Геншерзон, М.О.Малов. Курс загальної фізики. Механіка. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. 2-е изд., перераб. Москва: Просвещение, 1987. 304 с.: ил.
- 3 М.М.Архангельський. Курс фізики. Механіка. Москва: Просвещение, . 3-е изд., перераб., 1975. 424с
- 4 Д.В. Сивухин. Курс общей физики. Механика. Москва : Наука, 1989. 576 с
- 5 Г.Ф.Бушок, В.В.Левандовський, Г.Ф.Півень. Курс фізики: Навч. посібник: У 2 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Київ: Либідь, 1997. 448 с.

Додаткова література

- 1 Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. Издание 2-е, переработанное. Москва: Высш. шк., 1986. С. 137-138. 320 с
- 2 І.В.Савельєв. Курс загальної фізики. том 1. Механіка. Молекулярная физика. Москва: Наука, 1989. – 352 с.
- 3 Иродов И.Е. Основные законы механики. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: 1985. 248 с.
- 4 Волькенштейн В.С. Збірник задач з загального курсу фізики. Санкт-Петербург: Профессия. 2003
- 5 Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Том 1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны Москва: Наука 6-е изд., переработанное, 1974. 336

Інформаційні ресурси

1. http://bookwu.net/book_zagalna-fizika_1092/
<https://www.lektorium.tv/course/22785>
2. <http://old.pskgu.ru/ebooks/okfizika.html>
https://mipt.ru/education/chair/physics/S_III/
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%89%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0