МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»

Частина ІІІ «Випадкові величини»

Одеса – 2021

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», частина ІІІ «Випадкові величини»

розглянуто на засідання кафедри вищої математики і статистики.

Протокол від 10 червня 2021 № 12

Розробник:

к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики М. Г. Волкова.

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова Білозерова Марія Олександрівна;

кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Г. Д. Урум.

Випадкові величини.

Зміст

Вступ

1. Дискретні випадкові величини, їхні числові характеристики. Приклади дискретних випадкових величин.

1. *Означення дискретної випадкової величини. Закон розподілу ймовірностей.*

Нам вже доводилось зустрічатись з числами, що залежать від випадка, від результату. Такими числами, наприклад, є: число випавших очок при підкиданні навмання грального кубика, число успіхів при n випробуваннях, відносна частота події й т.і. в наведених прикладах число, що залежить від випадка, може прийняти будь-яке значення з певної скінченної множини можливих значень.

Означення. Функція $\xi = \xi(\omega)$ від елементарної події $\omega \in \Omega$ називається дискретною випадковою величиною (ДВВ), якщо множина її можливих значень скінченно або зліченно й для кожного її можливого значення x_i визначена ймовірність p_i того, що випадкова величина ξ приймає значення x_i:

$$p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = P(\xi = x_i). \qquad (45)$$

Означення. Таблиця з двох рядків

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

в першому рядку якої виписано можливі значення x_i дискретної випадкової величини ξ, а в другому рядку – ймовірності p_i відповідних значень x_i, називається законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ.

Зауваження. Графічним зображенням закону розподілу є многокутник розподілу, який будується наступним чином. На осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини $x_1, x_2, \dots, x_n$, а на осі ординат – ймовірності їх значень $p_1, p_2, \dots, p_n$. Для наочності ці точки з'єднують відрізками прямих.

Зауваження. В Excel для побудови графіків, гістограм та діаграм використовується засіб «Мастер диаграмм». Для його використання необхідно натиснути на іконку з такою назвою. Після включення «Мастер диаграмм» обирають той вигляд графічного зображення заданої випадкової величини, який найбільше відповідає задачі, що розв'язується.

Ймовірності p_i мають наступні дві властивості, що випливають з аксіом теорії ймовірностей:

1) $\forall i : \ p_i \geq 0$;
2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад. Нехай ξ- число очків, що випали при киданні навмання правильного грального кубика. Очевидно, що ξ має наступний закон розподілу:

ξ	1	2	3	4	5	6

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тут $x_i = i,\ p_i = \frac{1}{6}$, $1 \le i \le 6$.

Приклад. **Біноміальний закон розподілу.**

Нехай ξ – число успіхів в схемі Бернуллі при n випробуваннях. Тоді ξ – ДВВ х законом розподілу ймовірностей

ξ	0	1	2	...	m	...	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$\dots$	$P_n(m)$	$\dots$	$P_n(n)$

де $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. Такий закон розподілу називається біноміальним.

Приклад. **Гіпергеометричний закон розподілу.**

Нехай ξ – число елементів, що мають властивість S у виборці об’єму k, що береться з генеральної сукупності об’єму n, в якій всього m елементів має́ть властивість S. Тоді ξ – ДВВ із законом розподілу ймовірностей

ξ	0	1	2	...	m
P	$P_{n,m,k}(0)$	$P_{n,m,k}(1)$	$P_{n,m,k}(2)$	$\dots$	$P_{n,m,k}(m)$

де

$$P_{n,m,k}(l) = \begin{cases} \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}, & \text{при } 0 \le l \le m,\ \ 0 \le k-l \le n-m, \\ 0, & \text{при } \qquad k+m-n \le l \le k. \end{cases}$$

Такий закон розподілу називається гіпергеометричним.

Приклад. **Закон розподілу Пуассона.**

Говорять, що ДВВ розподілена за законом Пуассона, якщо вона має наступний закон розподілу. Ймовірностей

ξ	0	1	2	...	n	$\dots$
P	$P(0;a)$	$P(1;a)$	$P(2;a)$	$\dots$	$P(n;a)$	

де $P(n;a) = \frac{a^n}{n!} \cdot e^{-a}$, $a > 0$.

За таким законом, зокрема, розподілено число частинок радіоактивної речовини, що розпалися за фіксований проміжок часу t ; тут $a = \lambda t$, де λ – характерізує інтенсивність потоку частинок за одиницю часу – середнє число частинок, що розпалось за одиницю часу.

2. Дискретний випадковий вектор. Незалежні дискретні випадкові величини.

Впорядкована пара $(\xi;\ \eta)$ двох дискретних випадкових величин ξ та η утворює дискретний випадковий вектор. Якщо x_i та y_j можливі значення ξ та η, то $(x_i;\ y_j)$ – можливі значення для $(\xi;\ \eta)$. Повинно бути визначено ймовірності p_{ij} цих значень:

$$p_{ij} = P\{\omega: \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = P\{\ \xi = x_i, \eta = y_j\}.$$

Нехай

$$p_i = P(\xi = x_i), \qquad q_j = P(\eta = y_j).$$

Числа p_{ij} мають наступні властивості:

1) $p_{ij} \geq 0$, 2) $\sum_j p_{ij} = p_i$, 3) $\sum_i p_{ij} = q_j$, 4)$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Перша властивість очевидна. Доведемо властивість 2):

Нехай $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$, $B_j = \{\omega: \eta(\omega) = y_i\}$, так що $p_{ij} = P(\text{c}), p_i = P(A_i)$, $q_j = P(B_j)$.

Маємо $\bigcup_j B_j = \Omega$ й тому $\bigcup_j A_i \cdot B_j = A_i \bigcup_j B_j = A_i \cdot \Omega = A_i$. Враховуючи, що доданки $A_i \cdot B_j$ при різних j несумісні, отримуємо:

$$p_i = P(A_i) = P\left(\bigcup_j A_i \cdot B_j\right) = \sum_j P(A_i B_j) = \sum_j p_{ij} .$$

Аналогічно доводяться властивості 3), 4).

Означення. Дискретні випадкові величини ξ та η називаються незалежними, якщо для них при будь-яких і та j маємо

$$p_{ij} = p_i \cdot q_j,$$

тобто якщо події $A_i = \{\xi = x_i\}$, та $B_j = \{\eta = y_i\}$ є незалежними.

Приклад. Нехай навмання кидаються два гральних кубика та нехай ξ та η – число випавших очок відповідно на першому та другому гральних кубиках. Очевидно, що при цьому ξ та η – незалежні випадкові величини.

3. Математичне сподівання ДВВ.

Нехай маємо закон розподілу ймовірностей

ξ	x_1	x_2	…	x_s
P	p_1	p_2	…	p_s

й нехай проводиться n випробувань в однакових умовах, в кожному з яких реалізується випадкова величина ξ . Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ значення ξ відповідно при 1-му, 2-му,.., n-му випробуваннях, то

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k - \qquad (46)$$

- середнє арифметичне значень ξ, що спостерігаються. Кожне з доданків тут може може дорівнювати одному з можливих значень ξ: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Якщо x_1 в цій сумі повторюється m_1 разів, x_2 - m_2 разів й т. д., x_s - m_s разів, то очевидно,

$$\xi_{\text{сер}} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \cdots + x_n \cdot m_n}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \cdots + x_s \frac{m_s}{n}.$$

Отримані тут дроби $\frac{m_i}{n}$ – це відносні частоти того, що ξ в проведеній серії випробувань прийняло значення x_i. В силу властивості стійкості відносних частот при достатньо великій кількості випробувань n повинно бути:

$$\frac{m_1}{n} \approx p_1, \qquad \frac{m_2}{n} \approx p_2 , \dots , \frac{m_s}{n} \approx p_s,$$

так що, як правило, при цьому будемо мати:

$$\xi_{\text{сер}} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_s \cdot p_s.$$

Означення. Математичним сподіванням ДВВ ξ називається число $M\xi$, що дорівнює сумі добутків можливих значень випадкової величини на ймовірності їх значень,

$$M\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_s \cdot p_s + \dots = \sum_{k=1} x_k \cdot p_k, \qquad (47)$$

У випадку, коли множина можливих значень є зліченною, $M\xi$ – це сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$, про який припускається, що він збігається абсолютно.

Приклад. Нехай ξ кількість випавших очок при киданні навмання грального кубика. Тоді

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Отже, при достатньо великій кількості кидань правильного грального кубика середнє арифметичне число випавших очок буде, як правило, мало відрізнятися 3,5.

Приклад. **Для біноміального закону** маємо

ξ	0	1	2	…	m	…	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(m)$	…	$P_n(n)$

$$M\xi = 0 \cdot P_n(0) + 1 \cdot P_n(1) + 2 \cdot P_n(2) + \dots + n \cdot P_n(n) =$$

$$= 1 \cdot npq^{n-1} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot p^3 \cdot q^{n-3} + \dots +$$

$$+n \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2}{n!} \cdot p^n \cdot q^{n-n} =$$

$$= np\left(q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} p^2 q^{n-3} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2}{(n-1)!} p^{n-1}\right) = np(p+q)^n = np,$$

$$M\xi = np. \qquad (48)$$

Приклад. **Для закону Пуассона** маємо:

ξ	0	1	2	…	n	…
P	$P(0;a)$	$P(1;a)$	$P(2;a)$	…	$P(n;a)$	

$M\xi=\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}=e^{-a}\cdot a\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=e^{-a}\cdot a\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=e^{-a}\cdot a\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k!}=$
$=e^{-a}\cdot a\cdot e^{a}=\ a.$

Отже,

$$M\xi=a. \tag{49}$$

Таким чином, в законі Пуассона параметр a дорівнює математичному сподіванню даної випадкової величини. Отже, при великій кількості спостережень за цією величиною, як правило, будемо мати $\xi_{\text{сер}}=a$, тобто приблизним значенням параметра a в законі Пуассона може бути середнє арифметичне значень випадкової , що спостерігається та розподілена за цим законом.

4. Властивості математичного сподівання.

А) Якщо $\xi\geq 0$, то $M\xi\geq 0$. При цьому $M\xi=0\ \Leftrightarrow\ \xi=0$.

Доведення. Умова $\xi\geq 0$ означає, що $x_i\geq 0\ (\forall i)$. Оскільки $p_i\geq 0$, то отримуємо, що

$$M\xi=\sum_{i=1} x_i\cdot p_i\geq 0.$$

При цьому $M\xi=0$, якщо усі невід'ємні доданки $x_i\cdot p_i$ дорівнюють нулю, тобто якщо при всіх i або $x_i=0$ або $p_i=0$. Оскільки $\sum_{i=1} p_i=1$, то повинні мати $p_k\neq 0$ при певному k. При цьому $x_k=0$. Для всіх $i\neq k$ будемо мати $x_i\neq 0$ й тому $p_i=0$. Отримуємо, що $p_k=1,\ x_k=0$ й $p_i=0$ при $i\neq k.$ Так що, якщо $\xi\geq 0$ й $M\xi=0$, то у ξ наступний закон розподілу

ξ	x_1	x_2	…	x_{k-1}	$x_k=0$	x_{k+1}	…	x_s
P	0	0	...	0	1	0	…	0

тобто ξ приймає значення x_k з ймовірністю 1. Обернене твердження теж є вірним.

Б) Для довільної сталої c:

$$Mc=c$$

$$M(c\cdot\xi)=c\cdot M\xi.$$

Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання.

Доведення. Якщо ξ має закон розподілу

ξ	x_1	x_2	…	x_s
P	p_1	p_2	…	p_s

то $c\xi$ має закон розподілу

$c \cdot \xi$	cx_1	cx_2	$\ldots$	cx_s
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_s

так що

$$M(c \cdot \xi) = \sum_i (c \cdot x_i) \cdot p_i = c \sum_i x_i \cdot p_i = c \cdot M(\xi).$$

Якщо ДВВ ξ приймає єдине значення c з ймовірністю 1, тобто ДВВ ξ має закон розподілу

ξ	c
P	1

то $M(\xi) = M(c) = c \cdot 1 = c$, тобто $Mc = c$.

В) математичне сподівання суми скінченної кількості випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань (якщо ці математичні сподівання визначені), тобто

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i).$$

Доведення достатньо провести для двох доданків. На довільне число доданків твердження поширюється методом математичної індукції. Нехай $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$. Потрібно показати

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

Якщо $(\xi; \eta)$ – дискретний вектор з можливими значеннями $(x_i; y_j)$ з відповідними ймовірностями p_{ij} , то $\xi + \eta$ – ДВВ з можливими значеннями $x_i + y_j$ й їхніми ймовірностями p_{ij} (серед можливих значень $x_i + y_j$ можуть опинитися рівні). Маємо

$$M(\xi + \eta) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) \cdot p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i \cdot p_{ij} + \sum_i \sum_j y_i \cdot p_{ij} =$$

$$= \sum_i x_i \cdot \sum_j p_{ij} + \sum_j y_i \cdot \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i \cdot p_i + \sum_j y_j \cdot q_j = M\xi + M\eta.$$

Тут ми скористалися раніше доведеними властивостями 2), 3) ймовірностей p_{ij} з п. Дискретний випадковий вектор: 2) $\sum_j p_{ij} = p_i$, 3) $\sum_i p_{ij} = q_j$.

Г) Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань (якщо вони визначені), тобто

$$M(\xi \cdot \eta) = (M\xi) \cdot (M\eta),$$

якщо ξ та η незалежні та $M\xi$ та $M\eta$ визначені.

Доведеня.

$$M(\xi\cdot\eta)=\sum_i\sum_j (x_i\cdot y_j)\cdot p_{ij}=\sum_i\sum_j (x_iy_j)\cdot(p_iq_j)=\sum_i (x_i\cdot p_i)\sum_j (y_j\cdot q_j)=$$

$$=\sum_i (x_i\cdot p_i)M\eta=M\eta\sum_i (x_i\cdot p_i)=(M\eta)\cdot(M\xi).$$

Тут використано, що для невідомих ξ та η згідно означення маємо $p_{ij}=p_i\cdot q_j$.

Д) **Нерівність Чебишова**. Якщо існує $M\xi^2$, то для будь-якого $\varepsilon>0$ справедлива нерівність:

$$P(|\xi|\geq\varepsilon)\leq\frac{M\xi^2}{\varepsilon^2}. \qquad (50)$$

Доведення. Для ξ із законом розподілу

ξ	x_1	x_2	…	x_s
P	p_1	p_2	…	p_s

маємо:

ξ^2	${x_1}^2$	${x_2}^2$	…	${x_s}^2$
P	p_1	p_2	…	p_s

так що $M\xi^2=\sum_i\ {x_i}^2\cdot p_i$. Згрупуємо окремо доданки, в яких $|x_i|\geq\varepsilon$ й окремо ті, де $|x_i|<\varepsilon$. Отримуємо: $M\xi^2=\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}{x_i}^2\cdot p_i+\sum_{|x_i|<\varepsilon}{x_i}^2\cdot p_i$.

Враховуючи, що всі доданки у другій сумі невід'ємні, то отримуємо $M\xi^2\geq\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}{x_i}^2\cdot p_i$. Але при $|x_i|\geq\varepsilon$ маємо ${x_i}^2\geq\varepsilon^2$, ${x_i}^2p_i\geq\varepsilon^2p_i$, так що

$$\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}{x_i}^2\cdot p_i\geq\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}\varepsilon^2\cdot p_i=\varepsilon^2\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}p_i.$$

Залишається відзначити, що $\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}p_i=P(|\xi|\geq\varepsilon)$. Отримали

$$M\xi^2\geq\varepsilon^2\cdot P(|\xi|\geq\varepsilon)\ \Rightarrow P(|\xi|\geq\varepsilon)\leq\frac{M\xi^2}{\varepsilon^2}.$$

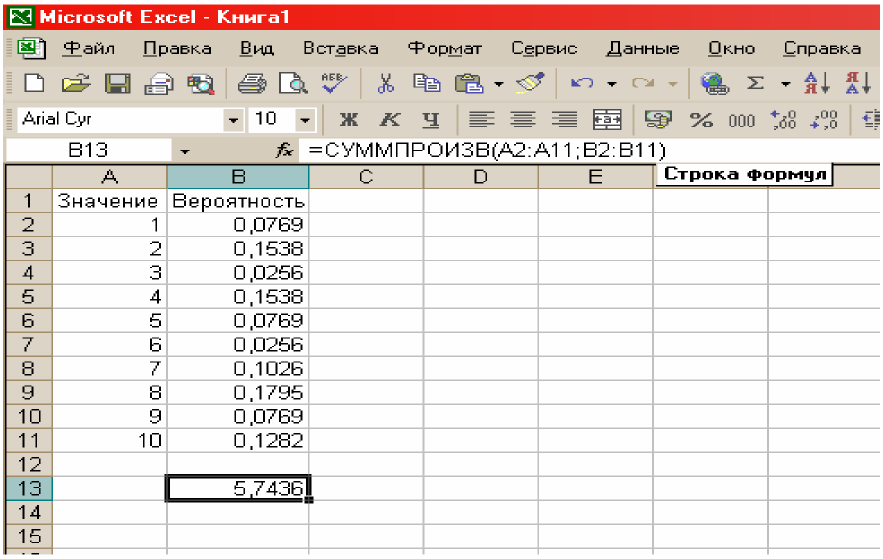
Властивість доведено.

Зауваження.

Розглянемо знаходження математичного сподівання для ДВВ ξ. На рисунку 1 представлено закон розподілу ДВВ, а саме в лівому стовпці представлені значення ДВВ, а в правому – їхні ймовірності. Для знаходження математичного сподівання ДВВ вводимо формулу

= СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11).

Результат обчислення математичного сподівання $M\xi$ поміщено у осередок B13 таблиці.



	A	B	C	D	E
1	Значение	Вероятность			
2	1	0,0769			
3	2	0,1538			
4	3	0,0256			
5	4	0,1538			
6	5	0,0769			
7	6	0,0256			
8	7	0,1026			
9	8	0,1795			
10	9	0,0769			
11	10	0,1282			
12					
13		5,7436			
14					
15					

Рис.1.

5. *Дисперсія ДВВ, її властивості.*

Степінь розкиду можливих значень величини ξ відносно її математичного сподівання $M\xi$ можна охарактеризувати за допомогою визначених різним чином характеристик. Однією з них є так зване середнє квадратичне відхилення, що визначається за формулою

$$\sigma_\xi = \sqrt{M(\xi - M\xi)^2}.$$

Величина, що стоїть під знаком квадратного кореня, називається дисперсією.

Означення. Дисперсією випадкової величини ξ називається математичне сподівання квадрату відхилення ξ від її математичного сподівання.

Позначається дисперсія величини ξ через $D\xi$. Таким чином, згідно з прийнятих означень:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2, \qquad (51)$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}. \qquad (52)$$

Для дисперсії справедлива й інша формула

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \qquad (53)$$

Дійсно, користуючись властивостями 2) й 3) математичного сподівання, отримуємо

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2(M\xi)\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2(M\xi)(M\xi) + (M\xi)^2 = \\ = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Властивості дисперсії:

1) $D\xi \geq 0,\ D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ з ймовірністю 1.

Ця властивість випливає з означення дисперсії й властивості Г) для математичного сподівання.

2) $D(a\xi + b) = a^2 D\xi.$

Дійсно, користуючись властивістю математичного сподівання, отримуємо:

$$M(a\xi + b) = aM\xi + b,$$

$$D(a\xi + b) = M[(a\xi + b) - M(a\xi + b)]^2 = M[a\xi + b - aM\xi - b]^2 = M[a(\xi - M\xi)]^2 = a^2 M(\xi - M\xi)^2 = a^2 D\xi.$$

Таким чином, при обчисленні дисперсії постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату, а постійний доданок не впливає на значення дисперсії та його можна відкинути. Отримуємо, що

$$\sigma_{a\xi+b} = |a| \cdot \sigma_\xi$$

3) Дисперсія суми скінченого числа попарно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i),$$

якщо випадкові величини ξ_k попарно незалежні.

Дійсно, маємо

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - M\xi_i),$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - M\xi_i)\right]^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi_k)\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - M\xi_i)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi_k)^2 + 2\sum_{k}\sum_{j>k} (\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j).$$

Оскільки при $k \neq j$ величини $\xi_i - M\xi_i$ та $\xi_k - M\xi_k$ незалежні, то за властивістю 4) математичного сподівання при $k \neq j$

$$M[(\xi_k - M\xi_k)(\xi_i - M\xi_i)] = M(\xi_k - M\xi_k) \cdot M(\xi_i - M\xi_i),$$

але

$$M(\xi_k - M\xi_k) = M\xi_k - M\xi_k = 0.$$

Отримуємо, що

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = M\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k - M\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)\right]^2 =$$

$$= M\left[\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi_k)^2 + 2\sum_{k}\sum_{j>k} (\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^2 + 2\sum_{k}\sum_{j>k} M[(\xi_k - M\xi_k)(\xi_j - M\xi_j)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^2 + 0 = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k).$$

Властивість доведено.

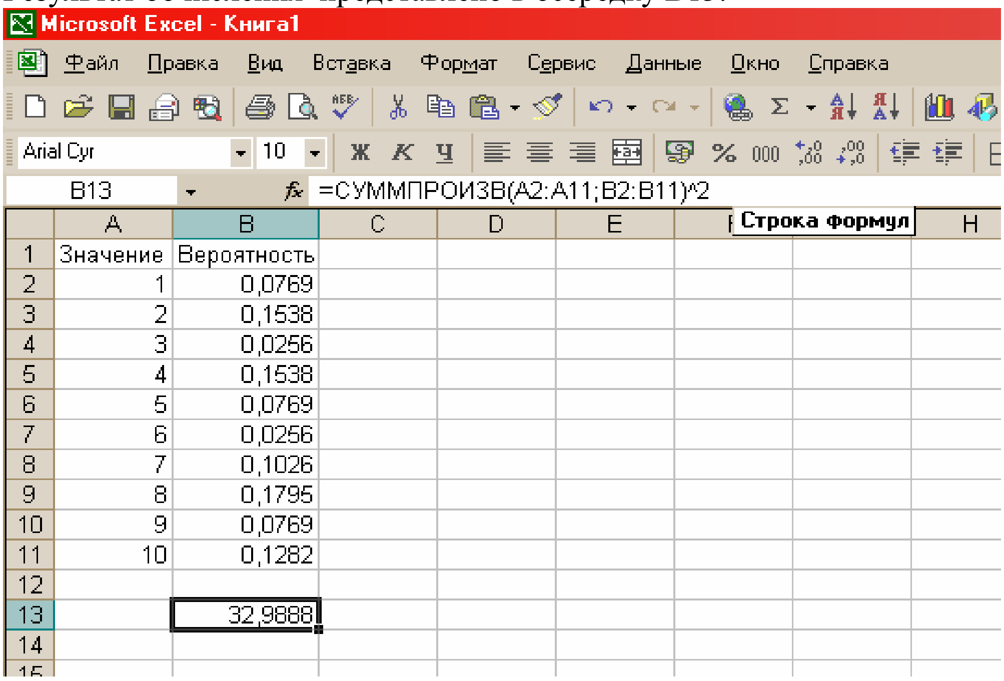
Користуючись поняттям дисперсії та нерівністю Чебишова, отримуємо що

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \qquad (54)$$

Зауваження.

Розглянемо приклад знаходження дисперсії ДВВ ξ за формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Знайдемо математичне сподівання $M\xi$ та піднесемо його до квадрату $(M\xi)^2$ (рис.2). Результат обчислення представлено в осередку B13:



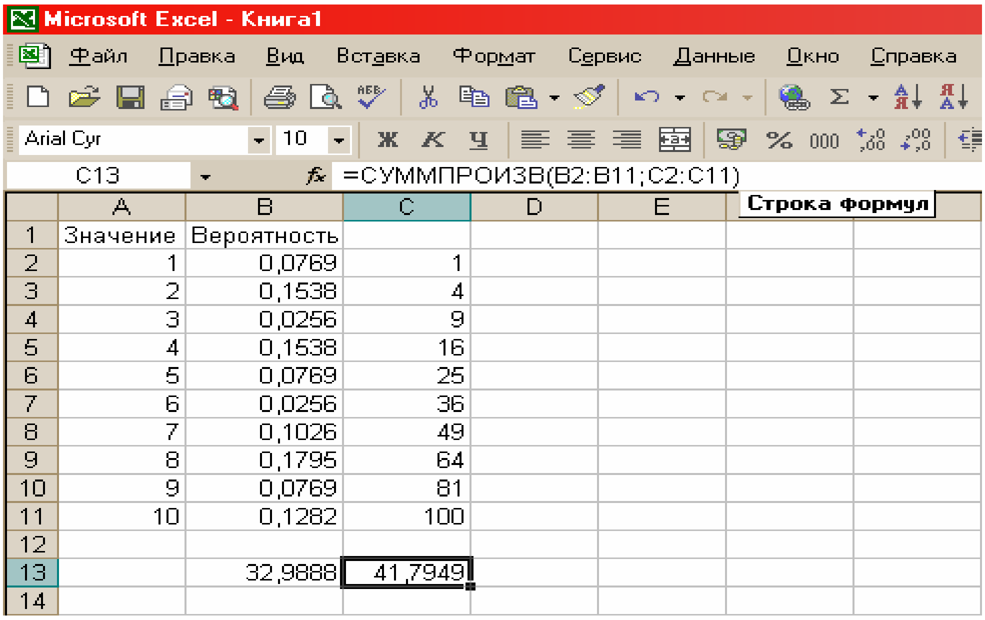
Microsoft Excel - Книга1

B13 =СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11)^2

	A	B
1	Значение	Вероятность
2	1	0,0769
3	2	0,1538
4	3	0,0256
5	4	0,1538
6	5	0,0769
7	6	0,0256
8	7	0,1026
9	8	0,1795
10	9	0,0769
11	10	0,1282
12		
13		32,9888

Рис.2.

Тепер знайдемо $M\xi^2$. Для цього піднесемо до квадрату значення ДВВ ξ й запишемо їх до стовпця С. Потім знайдемо математичне сподівання ДВВ ξ^2, результат обчислень представлено в осередку С13.



	A	B	C	D	E	
1	Значение	Вероятность				
2	1	0,0769	1			
3	2	0,1538	4			
4	3	0,0256	9			
5	4	0,1538	16			
6	5	0,0769	25			
7	6	0,0256	36			
8	7	0,1026	49			
9	8	0,1795	64			
10	9	0,0769	81			
11	10	0,1282	100			
12						
13		32,9888	41,7949			
14						

Після цього згідно з формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$ обчислюємо різницю осередків С13 та В13. В нашому випадку 41,7949-32,9888=8,8069.

6. Приклади обчислення дисперсії.

А. *Біноміальний закон розподілу*. Для біноміального закону розподілу маємо $M\xi = np$.

Знайдемо тепер $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 \cdot P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} m^2 \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \sum_{m=1}^{n} m \cdot \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot p^m \cdot\cdot\, q^{n-m} =$$
$$np \sum_{m=1}^{n} m \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot p^{m-1} \cdot q^{n-m} = np \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-1-k} = \; =$$
$$np \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot P_{n-1}(k) + np \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(k) = np\,(n-1)p + np = (np)^2 - np^2 + np = \; =$$
$$(np)^2 + np(1-p) = (np)^2 + npq.$$

Отже, отримуємо:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = (np)^2 + npq - (np)^2 = npq.$$

7. Нормована випадкова величина.

Нехай ξ має математичне сподівання $M\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_ξ. Розглянемо випадкову величину $\eta = \frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi}$. Для неї вже $M\eta = 0$, $\sigma_\eta = 1$. Дійсно,

$$M\eta = M\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} = \frac{1}{\sigma_\xi}(M\xi - M\xi) = 0,$$

$$D\eta = D\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} = \frac{1}{{\sigma_\xi}^2} D\xi = \frac{D\xi}{D\xi} = 1.$$

Величина η з $M\eta = 0,\ \sigma_\eta = 1$ називається нормованою випадковою величиною.

Так, якщо при розгляді біноміального закону розподілу перейти від величини m до величини $t = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, то дістанемо, що $Mt = 0,\ \sigma_t = 1$.

2. Неперервні випадкові величини та їх ймовірнісні характеристики. Приклади неперервних випадкових величин.

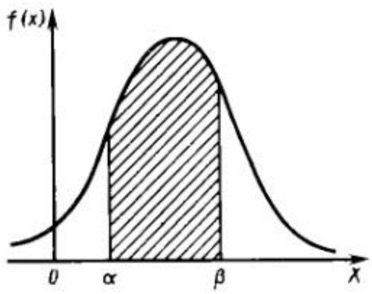
1. Означення неперервної випадкової величини.

Означення. Функція $\xi = \xi(\omega)$ від елементарної події $\omega \in \Omega$ називається неперервною випадковою величиною (НВВ), якщо існує функція $f_\xi(x)$ $(x \in R)$ така, що для будь-чких значень α та β $(\alpha, \beta \in R)$ справедлива рівність

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx. \qquad (55)$$

Достатньо вважати $f_\xi(x)$ неперервною або кусочно-неперервною функцією (це напевно виконується в більшості практично важливих випадків).

Геометрично права частина формули (55) виражає площу заштрихованої криволінійної трапеції (див. мал.).



Функція $f_\xi(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини ξ, оскільки з формули (55) для будь-якого $x \in [\alpha; \beta]$ при малих Δx випливає співвідношення

$$f_\xi(x) \approx \frac{P(x \leq \ \xi \ \leq x + \Delta x)}{\Delta x},$$

тобто значення щільності в точці x дорівнює ймовірності попадання неперервної випадкової величини ξ в малий проміжок $[x; x + \Delta x]$, поділеній на довжину цього проміжку. Тому щільність має розмірність, обернену до розмірності ξ.

Властивості щільності розподілу $f_\xi(x)$:

1) $f_\xi(x) \geq 0$;
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$.

Ці властивості $f_\xi(x)$ є характеристичними в тому сенсі, що будь-яка функція, що визначена на множині всіх дійсних чисел й має властивості 1) та 2) є щільністю розподілу ймовірностей певної неперервної випадкової величини.

Означення. Дві неперервні випадкові величини $\xi(\omega)$ та $\eta(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ називаються незалежними, якщо для будь-яких проміжків $[\alpha;\beta]$ та $[\gamma;\delta]$ виконується рівність

$P(\alpha \le \xi \le \beta;\ \gamma \le \eta \le \delta) = P(\alpha \le \xi \le \beta)\cdot P(\gamma \le \eta \le \delta)$.

Числові характеристики неперервної випадкової величини ξ з щільністю розподілу $f_\xi(x)$ визначаються наступним чином:

1) Математичне сподівання $M\xi$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx. \qquad (56)$$

2) Дисперсія $D\xi$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f_\xi(x)dx - (M\xi)^2 \qquad (57)$$

3) Середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

У припущенні абсолютної збіжності інтегралів (56), (57) доводиться, що математичне сподівання та дисперсія НВВ ξ має всі властивості, що й ДВВ.

2. Приклади неперервних випадкових величин.

А) *Рівномірний закон розподілу.*

Означення. Неперервна випадкова величина ξ з має рівномірний закон розподілу ймовірностей на проміжку $[a;\ b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей постійна на проміжку $[a;\ b]$ та дорівнює 0 поза ним.

Отже, маємо

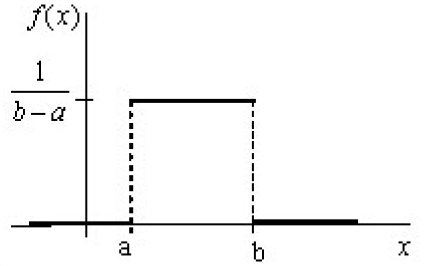
$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a;\ b], \\ c, & \text{якщо } x \in [a;\ b]. \end{cases}$$

Оскільки повинно виконуватись $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$, то отримуємо, що

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f_\xi(x)dx + \int_{a}^{b} f_\xi(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f_\xi(x)dx = c\cdot(b-a),$$

отже, $c = \frac{1}{b-a}$. Тому щільність розподілу рівномірної НВВ має вигляд

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a;\ b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a;\ b]. \end{cases} \qquad (58)$$



Знайдемо числові характеристики $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ рівномірної випадкової величини:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)dx - (M\xi)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Отже, для рівномірної НВВ

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \qquad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \;\; \sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (59)$$

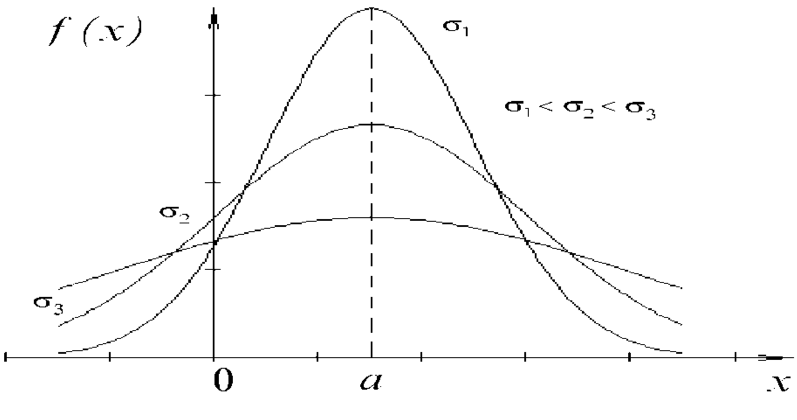
Б) *Нормальний закон розподілу (закон Гаусса).*

Серед законів розподілу ймовірностей, яким підпорядковуються випадкові величини, частіше за все на практиці зустрічаються з нормальним (гаусівським) законом. Нормальний закон було відкрито Муавром у 1733 році, а потім ретельно вивчено Лапласом і Гаусом.

Означення. Неперервна випадкова величина має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо її щільність $f_\xi(x)$ розподілу ймовірностей задається формулою:

$$f_\xi(x) = f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (60)$$

Тут $a \in R$ та $\sigma > 0$ – параметри, фіксовані числа.



Якщо НВВ ξ має нормальний закон розподілу, то цей факт записують $\xi \in N(a;\sigma)$. У випадку, коли $a = 1,\ \sigma = 0$, нормальну випадкову величину ξ називають нормованою й пишуть $\xi \in N(1;0)$.

Нагадаємо, що з окремим випадком нормального розподілу ми вже зустрічались, а саме при розгляді локальної теореми Муавра-Лапласа було розглянуто функцію $\varphi(x) = f_{0,1}(x) =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ та вказано її властивості. Тепер доведемо, що функція $f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ має обидві властивості функції щільності розподілу ймовірностей. Перша властивість $f_\xi(x) \geq 0$ очевидна. Перевіримо другу властивість $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,\sigma}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \begin{bmatrix} u = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ dx = \sigma \cdot du \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 1.$$

Остання рівність випливає з 4) властивості функції $\varphi(x)$ що $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1.$

Знайдемо числові характеристики $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ нормальної випадкової величини:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \begin{bmatrix} u = \dfrac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = a + \sigma u \\ dx = \sigma \cdot du \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma u) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du = a \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du + \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du.$$

Перший з інтегралів дорівнює 1 за зазначеною вище властивістю функції $\varphi(x)$, отже, перший доданок дорівнює a. Залишається обчислити останній інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \left(-e^{-\frac{u^2}{2}}\right)\Bigg|_A^B = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \left(-e^{-\frac{B^2}{2}} - -e^{-\frac{A^2}{2}}\right) =$$
$$= 0 - 0 = 0.$$

Отже, $M\xi = a$.

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = \dfrac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x - a = \sigma u, \\ x = a + \sigma u, \\ dx = \sigma \cdot du \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u)^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du =$$
$$= \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du = \begin{bmatrix} \text{інтегруємо частинами} \\ U = u;\ \ dU = du \\ dV = u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du; \quad V = \displaystyle\int u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du = -e^{-\frac{u^2}{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}} \left(-u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_A^B + \int_A^B e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}} \left(-\frac{u}{e^{\frac{u^2}{2}}} \Bigg|_A^B \right) + \sigma^2 \cdot \lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma^2.$$

Таким чином, $D\xi = \sigma^2$, й отже, $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sigma$.

Отже, для нормально розподіленої випадкової величини

$$M\xi = a, D\xi = \sigma^2, \sigma_\xi = \sigma. \qquad (61)$$

В) *Показниковий закон розподілу.*

Означення. НВВ ξ має показниковий закон розподілу ймовірностей, якщо їх щільність $f_\xi(x)$ розподілу ймовірностей задається формулою:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases} \qquad (62)$$

Неважко довести, що обидві характеристичні умови щільності розподілу ймовірностей $f_\xi(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$ виконуються:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \lim_{A\to+\infty} \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Bigg|_0^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} (-\frac{1}{e^{\lambda A}} + 1) = 0 + 1 = 1.$$

Знайдемо числові характеристики $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ для випадкової величини, що розподілена за показниковим законом.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x)dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} U = x; \quad dU = dx \\ dV = \lambda e^{-\lambda x} dx; \quad V = \int dV = -e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = \lim_{A\to+\infty} \left((-x \cdot e^{-\lambda x}) \Big|_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} dx \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{A}{e^{\lambda A}} + 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left(e^{-\lambda A} - 1\right) = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) (0 - 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Отже, $M\xi = \frac{1}{\lambda}$.

Для обчислення дисперсії скористаємося формулою

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)dx - (M\xi)^2 == \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \begin{bmatrix} U = x^2; \quad dU = 2xdx \\ dV = \lambda e^{-\lambda x}dx; \quad V = \int dV = -e^{-\lambda x} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-x^2 e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^A + 2\int_0^A xe^{-\lambda x}dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{A^2}{e^{\lambda A}} + 2\frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^A x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}_{M\xi = \frac{1}{\lambda}} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Отже, $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$, тому $\sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}$.

Таким чином, для НВВ ξ, що має показниковий закон розподілу ймовірностей будемо мати:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda},\ D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}. \qquad (62)$$

3. **Загальне означення випадкової величини. Функція розподілу ймовірностей.**

I. Означення випадкової величини та її функції розподілу ймоврностей.

Подібно до того, як для розподілу мас на прямій можна розглядати мішаний випадок, коли на окремих ділянках маса розпорошена з певною густиною й до того ж зосереджена в окремих точках, які можуть знаходитися на ділянках з розпорошеною масою, для розподілу ймовірностей випадкової величини може мати місце аналогічна ситуація. Що ж в загальному випадку вважати випадковою величиною, як характеризувати її закон розподілу ймовірностей? Мабуть, випадкова величина повинна бути такою функцією $\xi = \xi(\omega)$ від елементарної події, для якої при будь-яких a та b визначені ймовірності

$$P\{\omega: \xi(\omega) \in [a; b]\} = P(\xi \in [a; b])$$

того, що ξ приймає значення з проміжку $[a; b]$. Виявляється, що всі ці ймовірності можна знайти, якщо при будь-якому дійсному *x* визначена ймовірність $P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$. У зв'язку з цим приймається наступне означення випадкової величини.

Нехай на σ-алгебрі *S* задано розподіл ймовірностей.

Означення. Функція від елементарної події $\xi = \xi(\omega)$ називається випадковою величиною, якщо для будь-якого дійсного числа *x* подія $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ належить σ-алгебрі *S*, тобто визначена ймовірність $P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$.

Означення. Функція

$$F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} \qquad (63)$$

називається функцією розподілу випадкової величини ξ.

Перш за все відзначимо, що

$$P\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a). \qquad (64)$$

Дійсно, для $a < b$

$$\{\omega: \xi(\omega) < b\} = \{\omega: \xi(\omega) < a\} \cup \{\omega:\ a \leq \xi(\omega) < b\},$$

тому за II аксіомою

$$\underbrace{P\{\omega: \xi(\omega) < b\}}_{F_\xi(b)} = \underbrace{P\{\omega: \xi(\omega) < a\}}_{F_\xi(a)} + P\{\omega:\ a \leq \xi(\omega) < b\},$$

$$F_\xi(b) = F_\xi(a) +\ P\{\omega:\ a \leq \xi(\omega) < b\} \Rightarrow P\{\omega:\ a \leq \xi(\omega) < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

II. Функція розподілу дискретної та неперервної випадкових величин.

Розглянемо ДВВ із законом розподілу

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Очевидно, що $\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \bigcup_{x_i<x}\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$.

Доданки в правій частині попарно несумісні, тому

$$P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \sum_{x_i<x} P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\} = \sum_{x_i<x} p_i.$$

Так, для ДВВ ξ визначена функція розподілу

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i<x} p_i. \qquad (65)$$

Якщо множина можливих значень ξ є скінченною, то $F_\xi(x)$ – кусково-постійна функція зі стрибками в точках x_i й величиною стрибків в точках x_i рівною p_i. В точках x_i функція $F_\xi(x)$ неперервна зліва. Для зручності припустимо, що $x_1 < x_2 < x_3 <..< x_s$ й розглянемо окремо випадки, коли $x \leq x_1$, коли $x_1 < x \leq x_2$, й т.д., коли $x > x_s$. Можна показати, що

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо } x \leq x_1, \\ p_1, \quad \text{якщо } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, \quad \text{якщо } x_2 < x \leq x_3, \\ \ldots \\ 1, \quad \text{якщо } x > x_s. \end{cases} \qquad (66)$$

Нехай тепер ξ – НВВ з щільністю розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$. Тоді

$$P\{\omega: a < \xi(\omega) < b\} = \int_a^b f_\xi(x)dx.$$

Покладемо тут $a = -\infty, b = x$, отримаємо $P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt.$

Таким чином,

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt. \qquad (67)$$

Навпаки, якщо $\xi(\omega)$ – випадкова величина, функція розподілу якої може бути представлена у вигляді інтегралу Лебега зі змінною верхньою границею, то ξ – НВВ, бо

$$P\{\omega: a \le \xi(\omega) < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)dx.$$

Майже всюди

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x). \qquad (68)$$

Отже, щільність розподілу ймовірностей – це похідна від функції розподілу для неперервної випадкової величини. З (68) випливає, що $F_\xi(x)$ – неперервна на R величина, тобто

$$P\{\xi = x_0\} = 0.$$

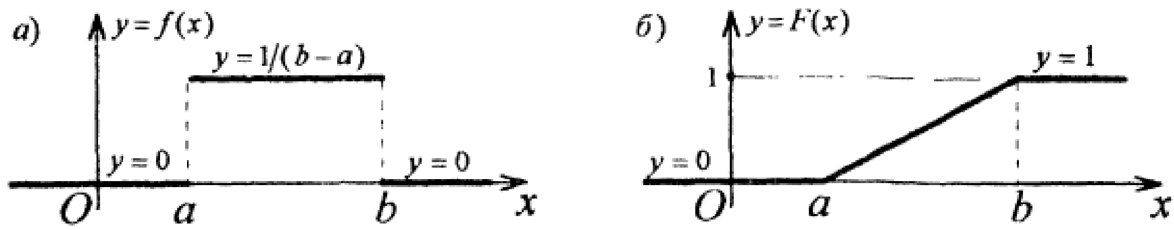
Таким чином, неперервна випадкова величина приймає окремі значення тільки з нульовою ймовірністю.

За формулою (67) знайдемо функцію розподілу деяких неперервних величин:

А) *Рівномірний закон розподілу.*

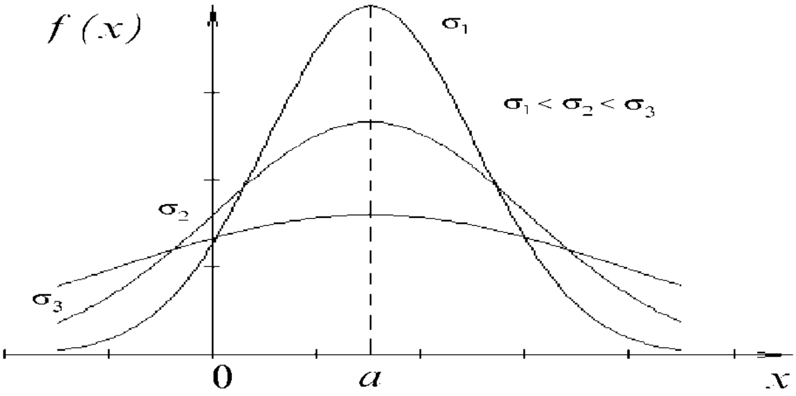
$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a;\ b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a;\ b]. \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a \le x \le b, \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Графіки щільності розподілу та функції розподілу рівномірної випадкової величини представлено на рисунках а) та б) відповідно:



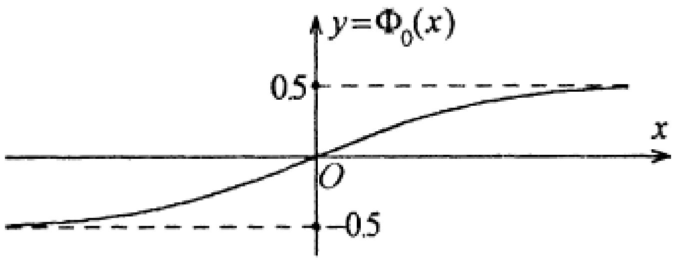
Б) *Нормальний закон розподілу (закон Гаусса).*

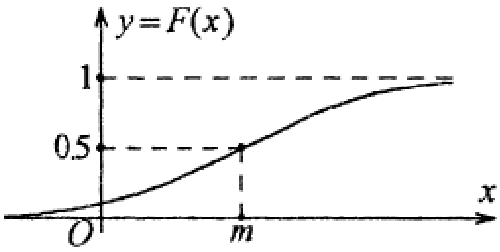
$$f_\xi(x) = f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$



$$F_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=0{,}5+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ − функція Лапласа, $\Phi_0(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ − нормована функція Лапласа. Графік функції $\Phi_0(x)$ та $F_\xi(x)$ показано на рисунку (на рис. *m*=*a*):



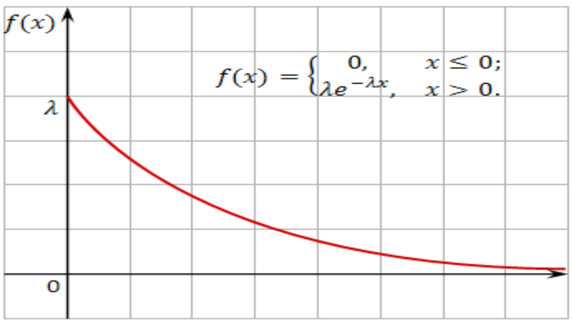


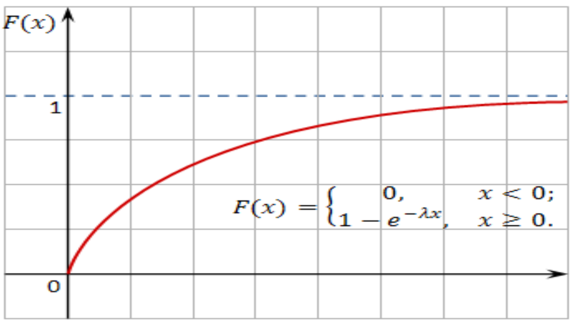
В) *Показниковий закон розподілу.*

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0.\end{cases}$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0.\end{cases}$$

На рисунку нижче представлено ліворуч графік щільності розподілу, праворуч – функції розподілу показникової випадкової величини.





III. Властивості функції розподілу.

Функція розподілу $F_\xi(x)$ довільної випадкової величини має три властивості:

1) $F_\xi(x)$ не спадає на всій числовій осі;

2) $F_\xi(x)$ неперервна зліва в кожній точці x;

3) $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.

Перша властивість доводиться легко: якщо $x_1 < x_2$, то
$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = P\{\omega: x_1 \le \xi(\omega) < x_2\} \ge 0$.

Властивості 2 та 3 залишимо без доведення.

Властивості 1)- 3) є характеристичними властивостями для $F_\xi(x)$, тобто для будь-якої функції $F(x)$, що має властивості 1)- 3) можна побудувати ймовірнісний простір й випадкову величину ξ на ньому так, що $F_\xi(x) = F(x)$.

Для довільної випадкової величини з функцією розподілу ймовірностей $F_\xi(x)$ математичне сподівання та дисперсія визначаються за допомогою інтегралу Стілт'єса

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF_\xi(x). \qquad (69)$$

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot dF_\xi(x). \qquad (70)$$

Відзначимо, що разом з вказаними раніше характеристиками випадкових величин вводять ще начальні та центральні моменти k-порядку випадкової величини ξ, що визначаються відповідно формулами

$$\nu_k = M\xi^k,\ \mu_k = M(\xi - M\xi)^k,\ k = 1, 2, \dots \qquad (71)$$

Очевидно, що ν_1 представляє математичне сподівання, а μ_2- дисперсію ξ.

4. Двовимірні випадкові величини. Коваріація. Коефіцієнт кореляції. Лінія регресії.

I. Двовимірні випадкові величини.

Часто у ймовірносних моделях потрібно розглянути одразу декілька випадкових величин. Наприклад, при пострілі у мішень випадкова точка попадання має дві координати, які є випадковими величинами.

Нехай на одному й тому ж просторі Ω елементарних подій задані дві випадкові величини $\xi = \xi(\omega)$ та $\eta = \eta(\omega)$. Впорядкована пара $\chi = (\xi, \eta)$ називається двовимірним випадковим вектором.

Якщо ξ та η дискретні випадкові величини, то χ називається дискретним випадковим вектором. Закон розподілу χ може бути представлений у вигляді таблиці, в якій містяться ймовірності p_{ij} суміщення двох подій $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$ та $B_j = \{\omega: \xi(\omega) = y_j\}$, при цьому $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ $(i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots)$:

	x_1	x_2	…	x_i	…	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…	q_1
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…	q_2
…	…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…	q_j
…	…	…	…	…	…	…
$\sum$	p_1	p_2	…	p_i	…	1

Верхня й нижня строки таблиці задають розподіл ξ, а крайні лівий та правий стовпці – розподіл η (таким чином, $\sum_i p_i = \sum_j q_j = 1$).Отже, знаючи розподіл випадкового вектора χ, можна відновити розподіл його координат однозначно. Обернене твердження в загальному випадку не є вірним. За допомогою таблиці розподілу знаходимо ймовірність $P = \{\xi = x_i\}$ незалежно від значень, що приймає η, а також ймовірності $P = \{\eta = y_j\}$ незалежно від значень, що приймає ξ. Маємо відповідно

$$p_i = P\,\{\omega: \xi(\omega) = x_i\} = \sum_j p_{ij}, \quad q_j = P = \{\omega: \eta(\omega) = y_j\} = \sum_i p_{ij}. \qquad (72)$$

Умовна ймовірність $P_{\xi=x_i}\{\eta = y_j\}$ того, що випадкова величина η приймає значення y_j при умові $\xi = x_i$, обчислюється за формулою

$$P_{\xi=x_i}\{\eta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_i}. \qquad (73)$$

Аналогічно

$$P_{\eta=y_j}\{\xi = x_i\} = \frac{p_{ij}}{q_j}. \qquad (74)$$

Сукупність значень $\{y_j\}$ й відповідні їм умовні ймовірності (74) називають умовним законом розподілу η при фіксованому $\xi = x_i$. Зрозуміло, що при зміні *x* буде змінюватись й умовний закон розподілу ξ при постійному $\eta = y_j$.

Нагадаємо, що означення незалежності дискретних випадкових величин було введено в п.2.2.1.

Дві незалежні ДВВ завжди є координатами єдиного випадкового вектора.

Приклад. Двовимірна дискретна випадкова величина (ξ, η) задана своєю таблицею розподілу:

	3	8	10
-1	0,17	0,13	0,25
0	0,10	0,30	0,05

Потрібно: а) знайти умовний закон розподілу ξ при $\eta = -1$; б) з'ясувати, чи є величини ξ та η залежними.

Розв'язання. а) ймовірності значень випадкової величини ξ при $\eta = -1$ знаходимо за формулою (74) з урахуванням (72). Маємо:

$P_{\eta=-1}\{\xi = 3\} = \frac{0,17}{0,17+0,13+0,25} = \frac{17}{55}$,

$P_{\eta=-1}\{\xi = 8\} = \frac{0,13}{0,17+0,13+0,25} = \frac{13}{55}$,

$P_{\eta=-1}\{\xi = 10\} = \frac{0,25}{0,17+0,13+0,25} = \frac{25}{55}$.

Отже, при умові $\eta = -1$, величина ξ розподілена за законом:

ξ	3	8	10
$P_{\eta=-1}$	$\frac{17}{55}$	$\frac{13}{55}$	$\frac{25}{55}$

На основі формули (72) безумовний закон розподілу ξ задається таблицею

ξ	3	8	10
P	$\frac{27}{100}$	$\frac{43}{100}$	$\frac{30}{100}$

Очевидна розбіжність умовного та безумовного законів розподілу ξ свідчить про те, що випадкові величини ξ та η залежні.

Перейдемо до загального випадка, задамо ймовірнісний простір $\langle\Omega, S_\sigma, P(A)\rangle$, а на ньому впорядковану пару $\chi = (\xi, \eta)$ випадкових величин. Для будь-яких дійсних чисел x та y розглянемо подію $A = \{\xi < x, \eta < y\} = \{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}$. Звідки випливає, що $A \in S_\sigma$, тобто існує ймовірність $P(A)$.

Означення. Функція

$$F_\chi(x, y) = P\{\omega: \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}, (x \in R,\ y \in R) \tag{75}$$

називається функцією розподілу ймовірностей довільного випадкового вектору $\chi = (\xi, \eta)$ й геометрично визначає ймовірність потрапляння випадкової точки $L(\xi, \eta)$ в нескінченний квадрант з вершиною $Q(x, y)$, що лежить лівіше та нижче її.

Окрім властивостей, аналогічних властивостям функції розподілу ймовірностей в одномірному випадку, функція $F_\chi(x, y)$ має наступні:

$$\lim_{x\to+\infty} F_\chi(x, y) = F_\eta(y), \qquad \lim_{y\to+\infty} F_\chi(x, y) = F_\xi(x) \tag{76}$$

Формули (76) дозволяють знаходити функції розподілу координат випадкового вектора за його функцією розподілу ймовірностей.

Для двовимірної випадкової величини (ξ, η)дискретного типу функція розподілу має вигляд

$$F_\chi(x, y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p_{ij}. \tag{77}$$

Випадковий вектор $\chi = (\xi, \eta)$ називають неперервним, якщо існує функція $f_\chi(x, y)$, що визначена на всій площині , така, що ймовірність потрапляння випадкової точки $L(\xi, \eta)$ в будь-яку область G на площині, що квадрується, обчислюється за формулою:

$$P\{L \in G\} = \iint_G f_\chi(x,y)dxdy. \quad (78)$$

Функція $f_\chi(x,y)$ також називається щільністю розподілу ймовірностей й має властивості:

1) $f_\chi(x,y) \geq 0$;
2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(x,y)dxdy = 1$.

В подальшому функцію $f_\chi(x,y)$ будемо вважати неперервною, виключаючи можливо, скінченну кількість точок та ліній розриву першого роду.

Для неперервного випадкового вектора χ функція розподілу ймовірностей представляється у формі

$$F_\chi(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(u,v)dudv, \quad (79)$$

з якої випливає, що в тих точках площини, де щільність розподілу ймовірностей неперервна, має місце рівність

$$f_\xi(x,y) = \frac{\partial^2 F_\chi(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (80)$$

Можна довести, що координати неперервного випадкового вектора $\chi = (\xi, \eta)$ є неперервними випадковими величинами.

Для точок неперервності функції $f_\chi(x,y)$ справедливими є співвідношення:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(x,v)dv, \;\; f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\chi(u,y)du. \quad (81)$$

Формули (81) дозволяють однозначно відновити щільність розподілу координат неперервного випадкового вектора за заданою щільністю ймовірностей самого випадкового вектора. Відзначимо, що обернена процедура, взагалі кажучи, неоднозначна.

Нехай ξ, η – випадкові величини, що задані на ймовірнісному просторі $\langle\Omega, S_\sigma, P(A)\rangle$, $\chi = (\xi, \eta)$ – випадковий вектор, а $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ – відповідні функції розподілу ймовірностей.

Означення. Випадкові величини ξ та η називаються незалежними, якщо для будь-яких дійсних чисел x та y справедлива рівність

$$F_\chi(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y). \quad (82)$$

Якщо ж $\chi = (\xi, \eta)$ – неперервний випадковий вектор, то незалежність випадкових величин ξ та η рівносильна наступному співвідношенню між відповідними щільностями розподілу ймовірностей:

$$f_\chi(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y). \quad (83)$$

Звідси випливає, що дві незалежні неперервні випадкові величини є координатами єдиного випадкового вектора.

Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення кожної із випадкових величин, що входять до даної двовимірної величини $\chi = (\xi, \eta)$ визначаються формулами (84):

для дискретних ξ та η	для неперервних ξ та η
$M\xi = \sum_i \sum_j x_i \cdot p_{ij}$	$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$M\eta = \sum_i \sum_j y_j \cdot p_{ij}$	$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$D\xi = \sum_i \sum_j (x_i - M\xi)^2 \cdot p_{ij}$	$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$D\eta = \sum_i \sum_j (y_j - M\eta)^2 \cdot p_{ij}$	$D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 \cdot f_\chi(x,y)dxdy,$
$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$	$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$
$\sigma_\eta = \sqrt{D\eta}$	$\sigma_\eta = \sqrt{D\eta}$

ІІ. Коваріація. Коефіцієнт кореляції. Лінія регресії.

Існує всезагальний взаємозв'язок та взаємообумовленість явищ в навколишньому середовищі. Крайнім випадком цієї залежності буде або повна незалежність випадкових величин, або навпаки, функціональна залежність між ними (тобто жорсткий детермінований зв'язок, при якому значення, прийняте однією з випадкових величин, однозначно визначає значення, що приймає інша). В загальному випадку залежності між випадковими величинами значення однієї з них не визначає однозначно (тобто з ймовірністю 1) значення іншої, а лише визначає закон її розподілу. Така залежність називається кореляційною.

Нехай $\xi(\omega)$ та $\eta(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ – дві випадкові величини, що мають математичне сподівання $M\xi, M\eta$ та дисперсії $D\xi$, $D\eta$.

Характеристикою взаємозвязку системи випадкових величин ξ та η є їхня **коваріація** (**кореляційний момент** випадкових величин), що визначається наступним чином:

$$cov_{\xi,\eta} = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta. \qquad (85)$$

Теорема(*Властивість кореляційного моменту)*:

Якщо ξ та η незалежні випадкові величини, що входять в систему, то

$$cov_{\xi,\eta} = 0. \qquad (86)$$

Зауваження 1. Обернене твердження, взагалі кажучи, не є вірним.

Формула (85) описує не тільки звязок між ξ та η, але й їхнє розсіювання. Дійсно, якщо хоча б одна з величин мало відхиляється від свого математичного сподівання, то коваріація буде малою, якби не були зв'язані між собою випадкові величини ξ та η. Тому замість коваріації часто використовують безрозмірну величину

$$r_{\xi,\eta} = \frac{cov_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}, \qquad (87)$$

яка називається нормованим коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ та η.

Властивості $r_{\xi,\eta}$:

1) $-1 \le r_{\xi,\eta} \le 1$.

Залежність між ξ та η тим «сильніша», чим $|r_{\xi,\eta}|$ ближче до 1. Якщо при цьому $r_{\xi,\eta} > 0$, то із зростанням ξ в середньому зростає й η (додатня кореляція між ξ та η); якщо ж $r_{\xi,\eta} < 0$, то при зростанні ξ величина η в середньому спадає (від'ємна кореляція).

2) Якшо $|r_{\xi,\eta}| = 1$ й тільки в цьому випадку η з ймовірністю 1 є лінійна функція від ξ, тобто $\eta = \alpha\xi + \beta$. Відзначимо, що $r_{\xi,\eta} = 1$ при $\alpha > 0$, й $r_{\xi,\eta} = -1$ при $\alpha < 0$ й навпаки.
3) Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то очевидно, що $r_{\xi,\eta} = 0$.

Означення. Випадкові величини ξ та η називають некорельованими, якщо $r_{\xi,\eta} = 0$.

Зауваження 2. З попередньої теореми та властивості 3) випливає, що незалежні випадкові величини завжди некорельовані, але некорельовані випадкові величини необов'язково незалежні.

Зауваження 3. Нехай $\chi = (\xi, \eta)$ – двовимірний нормально розподілений випадковий вектор, тобто його щільність ймовірності має вигляд

$$f_\chi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}}, \qquad (88)$$

де $a_1 = M\xi$, $a_2 = M\eta$, (точку $N(a_1, a_2)$ називають центром нормального розподілу або центром розсіювання), $\sigma_1 = \sigma_\xi$, $\sigma_2 = \sigma_\eta$, а число $r = r_{\xi,\eta}$. Доводиться, що координати ξ та η вектора χ також нормально розподілені:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}, \ f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}.$$

Доводиться, що для випадкових величин ξ та η, що мають сумісний нормальний розподіл (88), некорельованість ($r_{\xi,\eta} = 0$) рівносильна їхній незалежності.

Відзначимо, що значення $r_{\xi,\eta}$ показує відхилення залежності між випадковими величинами від лінійної. При іншому вигляді ймовірнісної залежності між ξ та η нормований коефіцієнт кореляції може статися малим або навіть дорівнювати 0, тобто недостатнім або непридатним для опису цієї залежності.

У випадку лінійної кореляційної залежності між ξ та η на координатній площині *xOy* розглядаються прямі, що визначаються рівняннями:

$$y = r_{\xi,\eta} \cdot \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \cdot (x - M\xi) + M\eta, \qquad (89)$$

$$x = r_{\xi,\eta} \cdot \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \cdot (y - M\xi) + M\xi, \qquad (90)$$

які носять назву (теоретичних ліній регресії) величини η відносно ξ, відповідно величини ξ відносно η.

Нехай при проведенні деякого експерименту спостерігають за двома випадковими величинами ξ та η. Тоді *n* незалежних повторень випробування в однакових умовах дають *n* пар значень $(\xi_1;\eta_1)$, $(\xi_2;\eta_2)$,… $(\xi_n;\eta_n)$, кожна з яких розподілена так само як й $(\xi;\eta)$.

Експериментальний коефіцієнт кореляції величин ξ та η визначається формулою

$$r_{\xi,\eta}^{\text{експ}} = \frac{cov_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi^{\text{експ}} \cdot \sigma_\eta^{\text{експ}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \xi_{\text{сер}})(\eta_i - \eta_{\text{сер}})}{\sigma_\xi^{\text{експ}} \cdot \sigma_\eta^{\text{експ}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \cdot \eta_i - \xi_{\text{сер}} \cdot \eta_{\text{сер}}}{\sigma_\xi^{\text{експ}} \cdot \sigma_\eta^{\text{експ}}}. \qquad (91)$$

Цей коефіцієнт в силу властивості стійкості середнього арифметичного при достатньо великих n, як правило, мало відрізняється від $r_{\xi,\eta}$.

Приблизно вважаючи кореляційну залежність між ξ та η лінійною, записують рівняння експериментальних ліній регресії η відносно ξ, відповідно ξ відносно η у вигляді

$$y = r_{\xi,\eta}^{\text{експ}} \cdot \frac{\sigma_\eta^{\text{експ}}}{\sigma_\xi^{\text{експ}}} \cdot \left(x - \xi_{\text{сер}}\right) + \eta_{\text{сер}}, \qquad (92)$$

$$x = r_{\xi,\eta}^{\text{експ}} \cdot \frac{\sigma_\xi^{\text{експ}}}{\sigma_\eta^{\text{експ}}} \cdot \left(y - \eta_{\text{сер}}\right) + \xi_{\text{сер}}. \qquad (93)$$

При достатньо великих *n* прямі, що задаються рівняннями (92), (93), як правило, мало відрізняються від теоретичних ліній регресії (89), (90).

Відзначимо, що «середня» точка $N(\xi_{\text{сер}}, \eta_{\text{сер}})$ сумісного розподілу величин завжди лежать на лінії регресії.

Зауваження 4. Мірою надійності коефіцієнта кореляції служить величина

$$\rho = \frac{r_{\xi,\eta} \cdot \sqrt{n}}{1 - r_{\xi,\eta}^2}. \qquad (94)$$

В тих випадках, коли $\rho > 3$, а число спостережень $n > 50$ вважається, що знайдений коефіцієнт кореляції вірно відображає справжній стан справ. Така ймовірнісна оцінка лінійного коефіцієнта кореляції необхідна тоді, коли проведенні спостереження є вибіркою з великої кількості числа можливих спостережень.

5. Закон великих чисел. Поняття про граничні теореми теорії ймовірностей.

Законами великих чисел зазвичай називають теореми, що встановлюють достатні умови практично вірогідного наступу певної події, що залежить від числа n (що необмежено збільшується) інших подій, кожне з яких окремо відіграє лише незначну роль. Основоположні результати в цьому напряму належать великому російському вченому – математику й механіку П. Л. Чебишову (1821-1894).

Лема (Чебишова) Якщо випадкова величина $\xi \geq 0$ й існує $M\xi$, то для будь-якого числа $\alpha > 0$

$$P\{\xi < \alpha\} > 1 - \frac{M\xi}{\alpha}. \qquad (95)$$

Якщо випадкова величина ξ має математичне сподівання й скінченну дисперсію, то для кожного $\varepsilon > 0$ справедливо співвідношення

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\,\xi}{\varepsilon^2}, \qquad (96)$$

або

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\,\xi}{\varepsilon^2}, \qquad (97)$$

яке має назву нерівності Чебишова.

Таким чином, при фіксованому ε у випадкової величини ξ із більшою дисперсією ймовірність опинитися поза проміжком $(M\xi - \varepsilon; M\xi + \varepsilon)$ буде більше, тобто її ймовірнісне розсіювання коло свого середньо очікуваного значення більш значне.

Крім того, нерівність Чебишова дозволяє легко довести теорему Бернуллі з п. 2.1.6.

Основною формою закону великих чисел вважається наступна теорема Чебишова, що доведена у 1867 році.

Теорема. Нехай ξ_i $(i = 1, 2, \dots)$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з одним й тим же математичним сподіванням a й обмеженими у сукупності дисперсіями ($D\xi_i \leq C$ при $i = 1, 2, \dots$). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ виконується граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (98)$$

яке є математичною формулировкою властивості стійкості середнього арифметичного.

У процесі доведення співвідношення (98) отримуємо важливу оцінку

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}, \qquad (99)$$

що випливає з нерівності (96).

Нехай, наприклад, потрібно виміряти фізичну величину a. Результат кожного вимірювання є, очевидно, випадкова величина ξ_i. Умова $M\xi_i = a$ означає відсутність систематичних похибок вимірювань, а умова $D\xi_i \leq C$ гарантує деяку мінімальну точність виконаних вимірювань, тобто випадковий розкид результатів вимірювань не може зростати необмежено. Теорема Чебишова стверджує, що при достатньо великому числі незалежних вимірювань з ймовірністю, близькою до 1, середнє арифметичне отриманих результатів буде як завгодно мало відрізнятися від вимірюваної величини. Цим виправданий на практиці спосіб отримання більш точних результатів вимірювань: одна й та ж величина вимірюється багаторазово, й у якості її значень береться середнє арифметичне отриманих результатів вимірювань.

Теореми, що дозволяють при відповідних умовах встановлювати закони розподілу для сум випадкових величин, називають граничними теоремами теорії ймовірностей.

Наведемо умови, при яких закон розподілу суми незалежних величин наближується до нормального розподілу.

Теорема (Центральна гранична теорема). Якщо ξ_i $(i = 1, 2, \dots)$ – незалежні, однаково розподілені ($M\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$) випадкові величини, то при необмеженому зростанні n закон розподілу стандартної суми

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - MS_n}{\sigma_{S_n}},$$

де $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, рівномірно по всім $x \in R$ прямує до стандартного нормального закону:

$$F_{S_n}(x) = P\left\{\frac{S_n - MS_n}{\sigma_{S_n}} < x\right\} = P\left\{\frac{\xi_i + \xi_i + \cdots + \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \to \Phi(x),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Звідси випливає, що при достатньо великих n виконується співвідношення

$$P\{S_n \in \langle\alpha; \beta\rangle\} \approx \Phi_0\left(\frac{\beta - MS_n}{\sigma_{S_n}}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - MS_n}{\sigma_{S_n}}\right), \qquad (100)$$

з якого випливає , що для середнього арифметичного $\xi_{\text{сер}} = \frac{1}{n} S_n$ маємо

$$\left|\xi_{\text{сер}} - a\right| < \delta = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (101)$$

Цим встановлено зв'язок між довжиною довірчого інтервалу, довірчою ймовірністю й числом випробувань n при запису приближення $\xi_{\text{сер}} \approx M\xi_{\text{сер}}$.

Наприкінці цього пункту відзначимо, що найважливіша роль серед граничних теорем теорії ймовірностей належить так званій центральній граничній теоремі, відкритій нашими відомими співвітчизниками А. М. Ляпуновим (1857-1918). Теорема Ляпунова представляє собою достатньо загальне твердження про збіжність розподілу суми випадкових величин при необмеженому зростанні числа доданків до нормального закону розподілу. Цією теоремою, зокрема, пояснюється широке розповсюдження нормального розподілу в природі й техніці.

Висновки

Цей розділ присвячено в основному вивченню дискретних та неперервних величин, їхнім числових характеристикам, таким як: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, початковий та центральний моменти. Також наводиться процедура знаходження числових характеристик випадкової величини за допомогою Excel. Розглядається також двовимірна випадкова величина та вивчається наявність або відсутність залежності між її компонентами. Останньою темою є закон великих чисел та центральна гранична теорема. Цей розділ є дуже важливим, оскільки є підготовчим для вичення такої дисципліни як «Математична статистика».

7. Практичні завдання.

a. Елементи комбінаторики.

Задача. Скількома способами можна скласти чотиризначне число, всі цифри якого різні.

Задача. Скількома способами 7 осіб можуть стати у чергу до каси?

Задача. В хокейному клубі 8 нападників, 5 захисників й 2 воротарі. Скільки різних варіантів команди може скласти тренер, якщо на лід виходить воротар, два захисники й трійка нападників.

Задача. У розіграші першості країни з футболу бере участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

Заадача. Скільки хорд можна провести через n різних точок, що лежать на одному колі.

Задача. У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити у поїзді 4 людини при умові, що вони повинні їхати у різних вагонах?

Задача. У першості школи з шахів беруть участь 15 учнів. Скількома способами можуть бути розподілені призові місця?

Задача. На полиці є 7 книг різних авторів та трьохтомник одного автора. Скількома способами можна розкласти ці книги на полиці так, щоб книги одного автора стояли поруч.

b. Події та їхні ймовірності.

Класичне означення

Задача. З колоди 36 карт навмання виймають поспіль три карти з поверненням кожної після огляду в колоду. Кожного разу колода перемішується. Обчислити ймовірність того, що серед обраних трьох карт будуть дві тузи.

Задача. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадуть на різні місяці року?

Задача. У ліфті 6 пасажирів, ліфт зупиняється на 11 поверхах. Яка ймовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на тому самому поверсі?

Теореми додавання й множення

Задача. Три учасники конкурсу відповідають на питання. Ймовірність того, що перший учасник знає відповідь дорівнює 0,75 , другий - 0,8, третій - 0,9. Визначити ймовірність того, що хоча б один з них відповість на питання.

Задача. Перший студент знає відповідь на 2 питання з 12, другий — на 8 з 12. Кожному навмання задається одне питання. Яка ймовірність того, що одночасно обидва студенти знають відповідь?

Задача. В папці 10 характеристик на службовців. З них 6 характеристик на чоловіків, решта- на жінок. Навмання взято дві характеристики. Яка ймовірність того, що обидві характеристики дано на чоловіків?

Задача. В лотереї 1000 білетів, з них 500 білетів виграшних, а 500 інші - ні. Придбано 2 білети.Яка ймовірність того, що хоча б один білет виграшний? обидва білети виграшні?

Задача. Два стрілка полюють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один із стрілків

Задача. Ймовірність хоча б одного влучення стрільцем у мішень при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність потрапляння при одному пострілі.

Формула повної ймовірності та формула Байєса

Задача. Є 3 урни. В першій урні знаходиться 10 білих кульок, у другій — 5 білих й 5 чорних, в третій — 10 чорних кульок. З навмання обраної урни знов таки навмання вийняли кулю. Знайти ймовірність того, що була витягнута біла кулька.

Задача. На експертизу під схованими назвами потрапляють проекти від трьох конкуруючих фірм. Ймовірність того, що проект першої фірми пройде експертизу з позитивною оцінкою дорівнює 0,8 , другої - 0,6 , третьої - 0,9. Для експертизи обрали навмання тільки один проект. Він її пройшов з позитивною оцінкою. Яка ймовірність того, що це був проект першої фірми ?

Задача. В спеціалізовану лікарню потрапляють в середньому 50% хворих із захворюванням *K*, 30% - із захворюванням *L*, 20% - із захворюванням *M*. Ймовірність повного вилікування хвороби *K* дорівнює 0,7; для хвороби *L* та *M* ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,8 та 0,9. Хворий, що потрапив у лікарню, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що хворий страждав захворюванням *K*.

Схема Бернуллі

Задача. Адвокат веде в суді справи десяти клієнтів. Ймовірність виграшу справи для кожного клієнта одна і та ж і дорівнює 0,4. Яка ймовірність того з десяти справ буде виграно не більше трьох?

Задача. В сім'ї пятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) два хлопчики; б) не більше двох хлопчиків; в) більш двох хлопчиків; г) не менш двох й не більш трьох хлопчиків. Ймовірність народження хлопчика прийняти рівною 0,51.

Задача. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна дорівнює 0,75. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

Задача. Скільки потрібно здійснити незалежних випробувань з ймовірністю появи події в кожному випробуванні рівною 0,4, щоб найімовірніше число появ події в цих випробуваннях було рівним 25?

Граничні теореми для схеми Бернуллі

Задача. Ймовірність ураження мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

Задача. В результаті перевірки якості підготовленого для посіву зерна було встановлено, що 90% зернин проростуть. Визначити:

1) ймовірність того, що серед відібраних і засіяних 1000 зернин проросте: а) від 700 до 740 шт.; б) від 800 до 920 шт. Дати пояснення значній різниці в результатах а) та б), хоч в обидвох випадках різниці між верхньою і нижньою межами однакові.
2) ймовірність того, що серед відібраних1000 зернин число пророслих буде відрізнятись від їх найбільш ймовірного числа не більше, ніж на 30 шт. в ту чи іншу сторону.

Задача. Середня густина хвороботворних мікробів в одному кубічному метрі повітря рівна 100. Береться на пробу 2 дм^2 повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б один мікроб.

c. Випадкові величини

Задача. Стрілок веде вогонь по мішені до першого влучення, або до повного використання патронів, число яких дорівнює 5. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію числа використаних патронів, якщо ймовірність влучення в мішень дорівнює 0.2. Побудувати функцію розподілу. Визначити ймовірність того, що кількість використаних патронів не менша чотирьох.

Задача. Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = \frac{1}{2}x$ в інтервалі (0;2); поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X.

Література

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — 10-е изд., стер.. — М.: Академия, 2005. — 576 с.
2. Волковец А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания по типовому расчету. — Минск БГУИР, 2009. — 65 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. — 12-е изд., перераб. — М.: Высшее образование, 2006. — 479 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. — 11-е изд., перераб. — М.: Высшее образование, 2006. — 404 с.
5. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — 1970.
6. Гнєденко Б. В. Нарис з історії теорії ймовірностей // Курс теорії ймовірностей. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. — 464с. С. 351—428.
7. Гнєденко Б. В. Курс теорії ймовірностей. — К.: ВПЦ Київський університет, 2010. — 464 с.
8. Дороговцев А.Я Збірник задач з теорії ймовірностей. — К.: Вища школа, 1976. — 384 с.
9. *Донченко В. С., Сидоров М. В.-С., Шарапов М. М.* Теорія ймовірностей та математична статистика. — Альма-матер. — Київ : «Академія», 2009. — 288 с.
10. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математичниа статистика. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.
11. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математичниа статистика. У 2 ч. — Ч. ІІ. Математична статистика. — К.: КНЕУ, 2001. — 336 с.
12. Жалдак М.І. , Кузьміна Н. М. та Михалін Г. О.Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. (Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. — Полтава. «Довкілля-К». 2009 р. — 500 с.
13. Жалдак М.І. , Кузьміна Н. М. та Михалін Г. О. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. Навчальний посібник для студентів фізико-

математичних спеціальностей педагогічних університетів. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2009 р. — 610 с.

14. Жалдак М. І. , Кузьміна Н. М. , Берлінська С. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. — Київ. Вища школа. 1996. — 352 с.
15. Жалдак М.И., Квітко А. Н.Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум. - Київ. Вища школа. 1989. 264 с.
16. Ефимов А. В., Поспелов А. Е. и др. 4 часть // Сборник задач по математике для втузов. — 3-е изд., перераб. и дополн.. М.:Физматлит, 2003. — Т. 4. — 432 с.
17. Колмогоров, А. Н. «Основные понятия теории вероятностей», М.: Наука, 1974.
18. Каленюк П. І. та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. — 240 с.
19. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розвязання задач. — К.: Центр учбової літератури, 2007. — 576 с.
20. Колемаев В. А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1991.
21. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. — 2- изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.
22. Лихолетов И. И., Мацкевич И. Е. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. — Мн.: Выш. шк., 1976.
23. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. — Мн.: Выш. шк., 1976.
24. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. 3-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2008. — 288 с.
25. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.
26. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. — М., 1982.
27. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси: навч. посіб. / Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал ; М-во освіти і науки України, Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2015. — 364 с. : іл. — Бібліогр.: с. 351.

28. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. — Київ: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с.

29. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — Изд. 3-е. — М.: Наука, 1984. — 285 с.

30. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. — 752 с.