МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для самостійної роботи

та виконання індивідуального навчального завдання

з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»,

частина ІІ «Схема Бернуллі. Статистичні задачі, що розв'язуються за допомогою граничних теорем для схеми Бернуллі»

Одеса – 2021

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», частина II «Схема Бернуллі. Статистичні задачі, що розв’язуються за допомогою граничних теорем для схеми Бернуллі».

розглянуто на засідання кафедри вищої математики і статистики.

Протокол від 10 червня 2021 № 12

Розробник:

к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики М. Г. Волкова.

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова Білозерова Марія Олександрівна;

кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Г. Д. Урум.

Зміст

Вступ

1. Повторення випробувань. Схема Бернуллі.

Означення схеми Бернуллі.

Раніше неодноразово відзначалось, що теорія ймовірностей застосовується при вивченні явищ, що мають масовий характер. У зв'язку з цим представляє інтерес розгляд не одне випробування, а ціла серія великої кількості випробувань. Найпростішою математичною моделлю послідовності випробувань є схема Бернуллі. Так називається нескінченна послідовність випробувань, що задовольняє наступні три умови:

1) кожне випробування має два результати: виконання певної події A (успіх) та його невиконання, тобто виконання події $\bar{A}$ (невдача). Отже, простір елементарних при кожному випробуванні складається з двох результатів та не залежить від номера випробування.
2) ймовірність успіху не залежить від номера випробування.

Якщо $A^{(i)}$- подія, яка полягає у виникненні успіху при i-му випробуванні, то згідно з 2-ї умови ймовірність $P(A^{(i)})$ не залежить від номеру випробування i. Ця ймовірність позначається через $P(A)$або просто p й називається ймовірністю успіху при одному випробуванні. З умови 2 випливає, що ймовірність невдачі також не належить від номера випробування, оскільки $P\left(\bar{A}^{(i)}\right) = 1 - P\left(A^{(i)}\right) = 1 - P(A) = 1 - p$. Ця ймовірність позначається через $P(\bar{A})$ або через q й називається ймовірності невдачі при одному випробуванні. Отже, для ймовірності успіху p та ймовірності невдачі q маємо

$$p \geq 0,\ q\ \geq 0,\ p + \ q = 1.$$

3) для будь-якої кількості випробувань результати різних випробувань незалежні у сукупності. Ця вимога рівносильна вимозі, що результат кожного випробування, починаючи з другого випробування, не залежить від результатів усіх попередніх випробувань.

Вперше послідовність випробувань, що задовольняє умови 1)-3) була досліджена Яковом Бернуллі (1654-1705), на честь якого вона й названа послідовністю Бернуллі.

Часто представляє інтерес наступна задача.

Задача Бернуллі: яка ймовірність $P_n(m)$ того, що в схемі Бернуллі при n випробуваннях успіх здійснеться рівно m разів, якщо відомо, що ймовірність успіху при одному випробуванні дорівнює p. Відповідь на це запитання дає формула:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (26)$$

Зауваження. Формула Бернуллі представляється функцією

БИНОМРАСП(k, n, p, ЛОЖЬ), –

де k - кількість появ події, n – число незалежних випробувань; p – ймовірність появи події; "ЛОЖЬ" – вказівка на те, що визначається ймовірність появи рівно k подій.
У випадку, коли останній аргумент функції дорівнює «ИСТИНА», функція повертає ймовірність того, що в n випробуваннях подія здійсниться не менш ніж k разів.

Зауваження. Нехай $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі успіх наступає не менш ніж m_1 й не більш ніж m_2 разів ($0 \le m_1 \le m \le m_2 \le n$). Тоді має місце формула

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m),$$

або з урахуванням (26)

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (27)$$

Ця формула випливає з теореми про додавання несумісних подій.

Ймовірність $P_n(1 \le m \le n)$ того, що в результаті n випробувань успіх виникне хоча б один раз, визначається формулою:

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n. \qquad (28)$$

Зауваження. Відзначимо, що ймовірності $P_n(m)$ при фіксованому n спочатку зростають при збільшенні числа m від 0 до певного значення m_0, а потім спадають при зміненні числа m від m_0 до n.

Означення. Число успіхів m_0, якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$, називається **найймовірнішим числом успіхів**.

Знайдемо це число з системи:

$$\begin{cases} P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1); \\ P_n(m_0) \ge P_n(m_0+1); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0-1} \cdot p^{m_0-1} \cdot q^{n-m_0+1}; \\ C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0+1} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0-1} \cdot p^{m_0-1} \cdot q^{n-m_0+1}; \\ C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0+1} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p \ge C_n^{m_0-1} \cdot q \ ; \\ C_n^{m_0} \cdot q \ge C_n^{m_0+1} \cdot p; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0)!} \cdot p \ge \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0+1)!} \cdot q \ ; \\ \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0)!} \cdot q \ge \dfrac{n!}{(m_{0+1})!\,(n-m_0-1)!} \cdot p; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n-m_0+1) \cdot p \ge m_0 \cdot q \ ; \\ (m_0+1) \cdot q \ge (n-m_0) \cdot p; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} np + p \ge m_0 \cdot q + m_0 \cdot p; \\ m_0 q + m_0 p \ge np - q; \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} np + p \ge m_0 \\ m_0 \ge np - q; \end{cases} \Rightarrow np + p \le m_0 \le np - q.$$

Отже, **найймовірніше число успіхів** знаходиться з нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Остання нерівність може мати один розв'язок, якщо $np - q$ неціле числа, та два розв'язки, якщо $np - q$ ціле.

Також з останньої нерівності при достатньо великих n маємо

$$p \approx \frac{m_0}{n},$$

тобто найймовірніша частота успіхів близька до ймовірності успіху в одному випробуванні. Згадуючи, що природньонаукове уявлення про ймовірність потребує близькості до неї відносних частот при довгих серіях випробувань, приходимо до висновку, що схема Бернуллі має цю властивість.

Пояснимо, що ймовірнісна схема Бернуллі – математична модель реального явища (всі її вимоги ніколи не виконуються), й тільки на практиці можна перевірити її придатність до застосування того чи іншого процесу.

Для застосування схеми Бернуллі до розв'язування задач необхідно, щоб:

1) випробування, що проводяться, були незалежними;
2) кожне випробування мало тільки два результати;
3) ймовірність появи події, що нас цікавить, в кожному випробуванні була одна й та ж.

Задача. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у корзину дорівнює 0,6. Виконано 8 кидків. Знайти: а) ймовірність того, що при цьому буде рівно два попадання; б) найймовірніше число попадань та відповідну ймовірність.

Розв'язання. Проводиться серія з восьми випробувань з двома результатами в кожному. Будемо вважати ці випробування незалежними. Ймовірність попадання м'яча в корзину при кожному випробуванні одна й та ж. Отже, у якості моделі можна використати схему Бернуллі. За формулою (26) маємо:

$$P_8(2) = C_8^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^6 \approx 0{,}041.$$

Для найймовірнішого числа попадань m_0 маємо нерівності (29), з яких при $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$ випливає

$$8 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6, \ \Rightarrow 4{,}4 \le m_0 \le 5{,}4 \ \Rightarrow \quad m_0 = 5.$$

Відповідна ймовірність

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 \approx 0{,}28.$$

Відповідь. 0,28.

Задача. Ймовірність того, що покупцю, що зайшов у спеціалізований магазин, знадобиться костюм 60-го розміру, складає 0,25. Яке мінімальне число покупців повинно відвідати магазин, щоб з ймовірністю 0,95 стверджувати, що хоча б один з них придбатиме костюм вказаного розміру.

Розв'язання. Очевидно, знаходимось в умовах застосування схеми Бернуллі. Потрібно, щоб ймовірність виконання успіху (придбання костюму 60-го розміру) хоча б один раз в серії з n випробувань була не менш ніж 0,95. Враховуючи, що тут $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, на основі формули (28) маємо нерівність

$$1 - (0{,}75)^n \geq 0{,}95$$

або

$$n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}.$$

Отже, мінімальне число покупців, що відвідали магазин,

$$n_0 = \left[\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}\right] + 1 = 11.$$

Відповідь. 11.

2. Граничні теореми для схеми Бернуллі. Статистичні задачи, що розвязуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

Граничні теореми для схеми Бернуллі.

I. Теорема Пуассона.

В ряді застосувань виникає необхідність розглянути ймовірність $P_n(m)$ при великій кількості випробувань n й настільки малій ймовірності p успіху при одному випробуванні, що np не є великим. В таких випадках обчислення $P_n(m)$ за формулою (26) важко й застосовується наступна

Гранична теорема Пуассона. Нехай розглядається послідовність схем Бернуллі така, що ймовірності p_n успіху при одному випробуванні в n-й схемі задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = a \qquad (0 \leq a < +\infty).$$

Тоді, якщо $P_n(m)$- ймовірність того, що в в n-й схемі при n випробуваннях здійсниться рівно m успіхів, то для будь-якого фіксованого m

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}\,.$$

Доведення. За формулою (26) маємо: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. За умовою $n \cdot p_n = a + \varepsilon_n$,

$$p_n = \frac{a + \varepsilon_n}{n},$$

де ε_n – нескінченно мала ($n \to \infty$). Отримуємо

$$P_n(m) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} \cdot \left(\frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{m!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-m+1}{n} \cdot (a+\varepsilon_n)^m \cdot \frac{\left(1 - \frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^m} \to \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$

Теорему доведено.

Якщо в схемі Бернуллі p мале й розглядається $P_n(m)$ при великому n, то можна вважати, що $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, $np = a$ та обчислювати $P_n(m)$на основі теореми Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}. \qquad (30)$$

Є таблиці значень величин $P(m; a) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ при різних a та m. Відзначимо, що $\sum_{m=0}^{\infty} P(m; a)$=1 (цей факт можна легко довести, користуючись розкладанням показникової функції в ряд Тейлора).

Зауваження. Має місце формула

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) \approx 1 - e^{-a}. \qquad (31)$$

Зауваження. Значення величини $\frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції

ПУАССОН(m; a; ЛОЖЬ).

Зауваження. Значення величини $\sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції

ПУАССОН(k; a; ИСТИНА).

ІІ. Локальна теорема Муавра- Лапласа.

Для застосувань представляють інтерес ймовірності $P_n(m)$ при великих m та n-m. В цих випадках застосовується наступна теорема.

Теорема Муавра-Лапласа. Нехай в схемі Бернуллі $0 < p < 1$ та через $t_{m,n}$ позначено число

$$t_{m,n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (32)$$

що називається рівномірним ухиленням числа успіхів. Тоді при виконанні умови

$$|t_{m,n}| \leq C$$

рівномірно за m, має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(m)}{\varphi(t_{m,n})} = 1, \qquad (33)$$

де $\varphi(t_{m,n})$ – функція, що визначається формулою

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Перш за все пояснимо, як застосовується ця теорема для обчислення $P_n(m)$. Згідно з (33) :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \, N_\varepsilon \mid \forall n > N_\varepsilon, \forall m \; |t_{m,n}| \le C : \; \left| \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(m)}{\varphi(t_{m,n})} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Позначимо різницю, що стоїть під знаком модуля через $\delta_{m,n}$, будемо мати:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t_{m,n})(1 + \delta_{m,n}), \quad |\delta_{m,n}| < \varepsilon.$$

Це означає, що можна вважати , що

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t_{m,n}), \qquad (34)$$

до цього ж відносна похибка буде малою.

Записана формула (34) для приблизного обчислення $P_n(m)$ застосовується у випадку, коли np та nq великі, m та $n - m$ також великі як й np та nq. Обчислення $P_n(m)$ проводиться у наступному порядку:

1) спочатку обчислюється $\sqrt{npq}$ та $t_{m,n}$ за формулою (32);
2) потім за таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(t_{m,n})$;
3) далі знаходиться приблизне значення $P_n(m)$ за формулою (34).

Слід відзначити властивості функції $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$,
2) $\varphi(x)$ спадає при $x > 0$,
3) $\varphi(x) = 0{,}0000 \ldots$ при $x \ge 4$,
4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$

За умов 1) та 3) таблиця значень $\varphi(x)$ звичайно дається на проміжку $[0; 4]$.

Задача. Знайти ймовірність того, що при киданні 100 разів правильної монети навмання точно 50 разів випаде герб.

Розв'язання. Маємо $n = 100, m = 50, p = q = 0{,}5$. Знаходимо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5,$$

$$t_{m,n} = \frac{50 - 100 \cdot 0{,}5}{5} = 0,$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4,$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{5} \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

Відзначимо, що 50 це є найймовірніше число випадінь герба при 100 підкиданнях, оскільки

$np + p = 100 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 50{,}5$, $np - q = 100 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 49{,}5$, отже, $m_0 = 50$.

Тому $P_{100}(50) > P_{100}(m)$, при $m \neq 50$. Наприклад, при $m = 40$ маємо:

$t_{m,n} = \frac{40 - 100 \cdot 0{,}5}{5} = -2$, $\varphi(-2) = -\varphi(2) \approx 0{,}06$; $P_{100}(40) \approx \frac{1}{5} \cdot 0{,}06 = 0{,}012 < P_{100}(50)$.

Зауваження. Для обчислення значень $t_{m,n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ можна використовувати функцію НОРМАЛИЗАЦИЯ, а саме

$$t_{m,n} = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(m; \mu; \sigma),$$

де $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$.

Зауваження. Для обчислення значення функції $\varphi(x)$ застосовується функція НОРМРАСП з параметрами 0 та 1:

$$\varphi(x) = \text{НОРМРАСП}(x; 0; 1; \text{ЛОЖЬ})$$

ІІІ. Інтегральна теорема Муавра - Лапласа.

Обчислення $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ при великих m_1 та m_2 також викликає труднощі. Тому застосовується наступна теорема.

Інтегральна теорема Муавра- Лапласа. При будь-яких a, b $(a < b)$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} P_n \left(a \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = \int_a^b \varphi(t) dt. \qquad (35)$$

За допомогою співвідношення (35) можна довести, що

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \int_a^b \varphi(t)\, dt,$$

де $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Визначений інтеграл можна знайти, користуючись однією з первісних функції $\varphi(x)$. Є табличні значення первісних $\Phi(x)$ та $\Phi_0(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad (36)$$

$$\Phi_0(x) = \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \qquad (37)$$

Функція $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа, а $\Phi_0(x)$ називається нормованою функцією Лапласа.

При $x > 0$ має місце рівність: $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$.

Корисно знати деякі властивості функції $\Phi(x)$:

1) $\Phi(x)$ зростає;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
3) $\Phi(x) = 0{,}9999 \ldots$ при $x \geq 4$;
4) $\Phi(0) = 0{,}5$;
5) $\Phi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1.$

Таким чином, достатньо мати таблицю значень для проміжка $[0; 4]$.

Отже, ймовірності $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$, що представляють інтерес при великих n, можна обчислити, користуючись таблицею значень функції

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

за формулою

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

або
$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (38)$$

в силу того, що $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$ (значення $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$ та $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ обчислюються заздалегідь).

Зауваження. Функція Лапласа в її стандартному представленні для заданого значення аргументу може бути обчислена за допомогою функції НОРМСТРАСП:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \text{НОРМСТРАСП}(x).$$

3. Статистичні задачи, що розв'язуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

Теорема Бернуллі. Для схеми Бернуллі при будь-якому $\varepsilon > 0$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \qquad (39)$$

тобто практично вірогідно, що при достатньо великому числі випробувань n в схемі Бернуллі відносна частота успіху $\frac{m}{n}$ відрізняється від ймовірності успіху p при одному випробуванні за абсолютною величиною менш ніж на ε.

Статистичне означення ймовірності базується на на властивості стійкості відносної частоти. Теорема Бернуллі стверджує, що в математичній моделі така властивість частоти має місце.

Величина $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ називається відхиленням відносної частоти від теоретичної ймовірності, а число ε з формули (39) допустимою похибкою відхилення. Число

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right), \qquad (40)$$

що називається довірчою ймовірністю, показує ту долю випробувань, в яких відхилення експериментальної величини $\frac{m}{n}$ від теоретичної p не перевищує заданої похибки.

Частіше за всього розглядають довірчі ймовірності, що дорівнюють 0, 95, 0, 997, 0, 9999.

Теорема Бернуллі встановлює залежність між числами n, ε та β. З цією метою застосовують інтегральну теорему Муавра- Лапласа, з якої випливає, що при достатньо великих n

$$\beta = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (41)$$

Співвідношення (41) можна розглядати як рівняння для визначення одного з чисел n, ε та β, коли два інших відомі. Розглянемо основні типи задач на цю тему.

1) Знайти β, якщо задані n та ε.

Підставляємо спочатку в співвідношення (41) ε та n, а потім за таблицею значень знаходимо Φ_0.

2) Знайти ε, якщо задані n та β.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо корінь x_β рівняння

$$\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}, \qquad (42)$$

звідки

$$\varepsilon \approx x_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}. \qquad (43)$$

3) Знайти n, якщо задані ε та β.

З рівняння (42) знаходимо x_β, а потім, враховуючи, що $x_\beta \approx \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, отримуємо

$$n \approx \left(\frac{x_\beta}{\varepsilon}\right)^2 \cdot pq. \qquad (44)$$

В прикладних задачах типу 1) -3) число p часто є невідомим, в цьому випадку використовують очевидну нерівність $pq \le \frac{1}{4}$, що є вірним для будь-яких $p \ge 0$, $q \ge 0$ та $p + q = 1$.

Нехай числа ε, β та n задані. При цьому припущенні можна можна довести, що з ймовірністю не меншою ніж β невідоме число p міститься в проміжку

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}; \frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right), \qquad (45)$$

який називається довірчим інтервалом для ймовірності успіху в одному віпробуванні, а його кінці – довірчими границями. Отже, замінюючи невідому ймовірність p знайденою дослідним шляхом частотою, ми здійснюємо похибку, що не перевищує $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}$.

Задача. Ймовірність того, що навмання відібрана деталь містить дефект, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що при випадковому огляді 600 деталей цієї партії відносна частота появи нестандартної деталі відрізняється від відповідної ймовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,05?

Розв'язання. Випробування, що розглядається, очевидно, задовольняє схему Бернуллі. Довірчу ймовірність β знайдемо за формулою (41), враховуючи, що тут $n = 600$, $p = 0{,}2$ ($q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$), $\varepsilon = 0{,}05$. Маємо

1) $\frac{n}{pq} = \frac{600}{0{,}2\cdot 0{,}8}$;   2) $\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 61{,}2$;   3) $x_\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 0{,}05 \cdot 61{,}2 \approx 3{,}06$; 4) $\Phi_0(3{,}06) \approx 0{,}4989$.

Отже,

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}2\right| \le 0{,}05\right) = 2\Phi_0(x_\beta) = 2 \cdot 0{,}4989 = 0{,}9978.$$

Відповідь: 0,9978.

Задача. Проведено навмання медичне обстеження 625 співробітників деякого підприємства та виявлено, що 40 людей страждають певним видом професійного захворювання. З довірчою ймовірністю 0,997 визначити границі, в яких міститься відсоток професійно хворих всього підприємства.

Розв'язання. Маємо $n = 625, m = 40$, $\beta = 0{,}997$, потрібно визначити границі довірчого інтервалу $\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}; \frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$. Обчислюємо: 1) $\frac{m}{n} = \frac{40}{625} = 0{,}064$; 2) за таблицею значень функції Лапласа знаходимо розвязок рівняння $\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}$, тобто таке значення x_β, при якому

$\Phi_0(x_\beta) = \frac{0,997}{2} = 0,4985$. Маємо $x_\beta = 2,97$; 3) знаходимо $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = \frac{2,97}{2\sqrt{625}} = 0,0594$; визначаємо довірчі границі $\frac{m}{n} \pm \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = 0,064 \pm 0,0594$. Остаточно знаходимо

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right) \cdot 100\% = (0,064 - 0,0594) \cdot 100\% = 0,0046 \cdot 100\% = 0,46\%,$$

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right) \cdot 100\% = (0,064 + 0,0594) \cdot 100\% = 0,1234 \cdot 100\% = 12,34,$$

Тобто відсоток професійно хворих всього підприємства міститься в границях від 0,5% до 12,3%.

Відповідь: 0,5% < p <12,3%.

4. Повторення випробувань. Схема Бернуллі.

Означення схеми Бернуллі.

Раніше неодноразово відзначалось, що теорія ймовірностей застосовується при вивченні явищ, що мають масовий характер. У зв'язку з цим представляє інтерес розгляд не одне випробування, а ціла серія великої кількості випробувань. Найпростішою математичною моделлю послідовності випробувань є схема Бернуллі. Так називається нескінченна послідовність випробувань, що задовольняє наступні три умови:

4) кожне випробування має два результати: виконання певної події А (успіх) та його невиконання, тобто виконання події $\bar{A}$ (невдача). Отже, простір елементарних при кожному випробуванні складається з двох результатів та не залежить від номера випробування.
5) ймовірність успіху не залежить від номера випробування.

Якщо $A^{(i)}$- подія, яка полягає у виникненні успіху при i-му випробуванні, то згідно з 2-ї умови ймовірність $P(A^{(i)})$ не залежить від номеру випробування i. Ця ймовірність позначається через $P(A)$або просто p й називається ймовірністю успіху при одному випробуванні. З умови 2 випливає, що ймовірність невдачі також не належить від номера випробування, оскільки $P\left(\bar{A}^{(i)}\right) = 1 - P\left(A^{(i)}\right) = 1 - P(A) = 1 - p$. Ця ймовірність позначається через $P(\bar{A})$ або через q й називається ймовірності невдачі при одному випробуванні. Отже, для ймовірності успіху p та ймовірності невдачі q маємо

$$p \geq 0,\ q\ \geq 0,\ p +\ q = 1.$$

6) для будь-якої кількості випробувань результати різних випробувань незалежні у сукупності. Ця вимога рівносильна вимозі, що результат кожного випробування, починаючи з другого випробування, не залежить від результатів усіх попередніх випробувань.

Вперше послідовність випробувань, що задовольняє умови 1)-3) була досліджена Яковом Бернуллі (1654-1705), на честь якого вона й названа послідовністю Бернуллі.

Часто представляє інтерес наступна задача.

Задача Бернуллі: яка ймовірність $P_n(m)$ того, що в схемі Бернуллі при n випробуваннях успіх здійсниться рівно m разів, якщо відомо, що ймовірність успіху при одному випробуванні дорівнює p. Відповідь на це запитання дає формула:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (26)$$

Зауваження. Формула Бернуллі представляється функцією

БИНОМРАСП(k, n, p, ЛОЖЬ), –

де k - кількість появ події, n – число незалежних випробувань; p – ймовірність появи події; "ЛОЖЬ" – вказівка на те, що визначається ймовірність появи рівно k подій.
У випадку, коли останній аргумент функції дорівнює «ИСТИНА», функція повертає ймовірність того, що в n випробуваннях подія здійсниться не менш ніж k разів.

Зауваження. Нехай $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі успіх наступає не менш ніж m_1 й не більш ніж m_2 разів ($0 \leq m_1 \leq m \leq m_2 \leq n$). Тоді має місце формула

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m),$$

або з урахуванням (26)

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (27)$$

Ця формула випливає з теореми про додавання несумісних подій.

Ймовірність $P_n(1 \leq m \leq n)$ того, що в результаті n випробувань успіх виникне хоча б один раз, визначається формулою:

$$P_n(1 \leq m \leq n) = 1 - q^n. \qquad (28)$$

Зауваження. Відзначимо, що ймовірності $P_n(m)$ при фіксованому n спочатку зростають при збільшенні числа m від 0 до певного значення m_0, а потім спадають при зміненні числа m від m_0 до n.

Означення. Число успіхів m_0, якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$, називається **найймовірнішим числом успіхів**.

Знайдемо це число з системи:

$$\begin{cases} P_n(m_0) \geq P_n(m_0-1); \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0+1); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0-1} \cdot p^{m_0-1} \cdot q^{n-m_0+1}; \\ C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0+1} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0-1} \cdot p^{m_0-1} \cdot q^{n-m_0+1}; \\ C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0+1} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p \geq C_n^{m_0-1} \cdot q \ ; \\ C_n^{m_0} \cdot q \geq C_n^{m_0+1} \cdot p; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0)!} \cdot p \geq \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0+1)!} \cdot q \ ; \\ \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0)!} \cdot q \geq \dfrac{n!}{(m_{0+1})!\,(n-m_0-1)!} \cdot p; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n-m_0+1) \cdot p \geq m_0 \cdot q \ ; \\ (m_0+1) \cdot q \geq (n-m_0) \cdot p; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} np + p \geq m_0 \cdot q + m_0 \cdot p; \\ m_0 q + m_0 p \geq np - q; \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} np + p \geq m_0 \\ m_0 \geq np - q; \end{cases} \Rightarrow np + p \leq m_0 \leq np - q.$$

Отже, **найймовірніше число успіхів** знаходиться з нерівності

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Остання нерівність може мати один розв'язок, якщо $np - q$ неціле числа, та два розв'язки, якщо $np - q$ ціле.

Також з останньої нерівності при достатньо великих n маємо

$$p \approx \frac{m_0}{n},$$

тобто найймовірніша частота успіхів близька до ймовірності успіху в одному випробуванні. Згадуючи, що природньонаукове уявлення про ймовірність потребує близькості до неї відносних частот при довгих серіях випробувань, приходимо до висновку, що схема Бернуллі має цю властивість.

Пояснимо, що ймовірнісна схема Бернуллі – математична модель реального явища (всі її вимоги ніколи не виконуються), й тільки на практиці можна перевірити її придатність до застосування того чи іншого процесу.

Для застосування схеми Бернуллі до розв'язування задач необхідно, щоб:

4) випробування, що проводяться, були незалежними;
5) кожне випробування мало тільки два результати;
6) ймовірність появи події, що нас цікавить, в кожному випробуванні була одна й та ж.

Задача. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у корзину дорівнює 0,6. Виконано 8 кидків. Знайти: а) ймовірність того, що при цьому буде рівно два попадання; б) найймовірніше число попадань та відповідну ймовірність.

Розв'язання. Проводиться серія з восьми випробувань з двома результатами в кожному. Будемо вважати ці випробування незалежними. Ймовірність попадання м'яча в корзину при кожному випробуванні одна й та ж. Отже, у якості моделі можна використати схему Бернуллі. За формулою (26) маємо:

$$P_8(2) = C_8^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^6 \approx 0{,}041.$$

Для найймовірнішого числа попадань m_0 маємо нерівності (29), з яких при $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$ випливає

$$8 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \leq m_0 \leq 8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6, \Rightarrow 4{,}4 \leq m_0 \leq 5{,}4 \Rightarrow \quad m_0 = 5.$$

Відповідна ймовірність

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 \approx 0{,}28.$$

Відповідь. 0,28.

Задача. Ймовірність того, що покупцю, що зайшов у спеціалізований магазин, знадобиться костюм 60-го розміру, складає 0,25. Яке мінімальне число покупців повинно відвідати магазин, щоб з ймовірністю 0,95 стверджувати, що хоча б один з них придбатиме костюм вказаного розміру.

Розв'язання. Очевидно, знаходимось в умовах застосування схеми Бернуллі. Потрібно, щоб ймовірність виконання успіху (придбання костюму 60-го розміру) хоча б один раз в серії з n випробувань була не менш ніж 0,95. Враховуючи, що тут $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, на основі формули (28) маємо нерівність

$$1 - (0{,}75)^n \geq 0{,}95$$

або

$$n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}.$$

Отже, мінімальне число покупців, що відвідали магазин,

$$n_0 = \left[\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}\right] + 1 = 11.$$

Відповідь. 11.

5. Граничні теореми для схеми Бернуллі. Статистичні задачі, що розвязуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

Граничні теореми для схеми Бернуллі.

I. Теорема Пуассона.

В ряді застосувань виникає необхідність розглянути ймовірність $P_n(m)$ при великій кількості випробувань n й настільки малій ймовірності p успіху при одному випробуванні, що np не є великим. В таких випадках обчислення $P_n(m)$ за формулою (26) важко й застосовується наступна

Гранична теорема Пуассона. Нехай розглядається послідовність схем Бернуллі така, що ймовірності p_n успіху при одному випробуванні в n-й схемі задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = a \qquad (0 \leq a < +\infty).$$

Тоді, якщо $P_n(m)$- ймовірність того, що в в n-й схемі при n випробуваннях здійсниться рівно m успіхів, то для будь-якого фіксованого m

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}.$$

Доведення. За формулою (26) маємо: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. За умовою $n \cdot p_n = a + \varepsilon_n$,

$$p_n = \frac{a + \varepsilon_n}{n},$$

де ε_n – нескінченно мала ($n \to \infty$). Отримуємо

$$P_n(m) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} \cdot \left(\frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{m!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-m+1}{n} \cdot (a+\varepsilon_n)^m \cdot \frac{\left(1 - \frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^m} \to \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$

Теорему доведено.

Якщо в схемі Бернуллі p мале й розглядається $P_n(m)$ при великому n, то можна вважати, що $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, $np = a$ та обчислювати $P_n(m)$на основі теореми Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}\,. \qquad (30)$$

Є таблиці значень величин $P(m;a) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ при різних a та m. Відзначимо, що $\sum_{m=0}^{\infty} P(m;a)$=1 (цей факт можна легко довести, користуючись розкладанням показникової функції в ряд Тейлора).

Зауваження. Має місце формула

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) \approx 1 - e^{-a}. \qquad (31)$$

Зауваження. Значення величини $\frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції

ПУАССОН(m; a; ЛОЖЬ).

Зауваження. Значення величини $\sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції

ПУАССОН(k; a; ИСТИНА).

ІІ. Локальна теорема Муавра- Лапласа.

Для застосувань представляють інтерес ймовірності $P_n(m)$ при великих m та n-m. В цих випадках застосовується наступна теорема.

Теорема Муавра-Лапласа. Нехай в схемі Бернуллі $0 < p < 1$ та через $t_{m,n}$ позначено число

$$t_{m,n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (32)$$

що називається рівномірним ухиленням числа успіхів. Тоді при виконанні умови

$$|t_{m,n}| \leq C$$

рівномірно за m, має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(m)}{\varphi(t_{m,n})} = 1, \qquad (33)$$

де $\varphi(t_{m,n})$ – функція, що визначається формулою

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Перш за все пояснимо, як застосовується ця теорема для обчислення $P_n(m)$. Згідно з (33) :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, N_\varepsilon \mid \forall n > N_\varepsilon, \forall m \ |t_{m,n}| \leq C : \left| \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(m)}{\varphi(t_{m,n})} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Позначимо різницю, що стоїть під знаком модуля через $\delta_{m,n}$, будемо мати:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t_{m,n})(1 + \delta_{m,n}), \quad |\delta_{m,n}| < \varepsilon.$$

Це означає, що можна вважати , що

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t_{m,n}), \qquad (34)$$

до цього ж відносна похибка буде малою.

Записана формула (34) для приблизного обчислення $P_n(m)$ застосовується у випадку, коли np та nq великі, m та $n-m$ також великі як й np та nq. Обчислення $P_n(m)$ проводиться у наступному порядку:

4) спочатку обчислюється $\sqrt{npq}$ та $t_{m,n}$ за формулою (32);
5) потім за таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(t_{m,n})$;
6) далі знаходиться приблизне значення $P_n(m)$ за формулою (34).

Слід відзначити властивості функції $\varphi(x)$:

5) $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$,
6) $\varphi(x)$ спадає при $x > 0$,
7) $\varphi(x) = 0{,}0000 \ldots$ при $x \geq 4$,
8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$

За умов 1) та 3) таблиця значень $\varphi(x)$ звичайно дається на проміжку $[0; 4]$.

Задача. Знайти ймовірність того, що при киданні 100 разів правильної монети навмання точно 50 разів випаде герб.

Розв’язання. Маємо $n = 100, m = 50, p = q = 0{,}5$. Знаходимо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5,$$

$$t_{m,n} = \frac{50 - 100 \cdot 0{,}5}{5} = 0,$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4,$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{5} \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

Відзначимо, що 50 це є найймовірніше число випадінь герба при 100 підкиданнях, оскільки

$np + p = 100 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 50{,}5, np - q = 100 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 49{,}5$, отже, $m_0 = 50$.

Тому $P_{100}(50) > P_{100}(m)$, при $m \neq 50$. Наприклад, при $m = 40$ маємо:

$t_{m,n} = \frac{40-100\cdot 0{,}5}{5} = -2, \quad \varphi(-2) = -\varphi(2) \approx 0{,}06; \;\; P_{100}(40) \approx \frac{1}{5} \cdot 0{,}06 = 0{,}012 < P_{100}(50).$

Зауваження. Для обчислення значень $t_{m,n} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ можна використовувати функцію НОРМАЛИЗАЦИЯ, а саме

$$t_{m,n} = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(m; \mu; \sigma),$$

де $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$.

Зауваження. Для обчислення значення функції $\varphi(x)$ застосовується функція НОРМРАСП з параметрами 0 та 1:

$$\varphi(x) = \text{НОРМРАСП}(x; 0; 1; \text{ЛОЖЬ})$$

III. Інтегральна теорема Муавра - Лапласа.

Обчислення $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ при великих m_1 та m_2 також викликає труднощі. Тому застосовується наступна теорема.

Інтегральна теорема Муавра- Лапласа. При будь-яких a, b $(a < b)$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \int_a^b \varphi(t)dt. \qquad (35)$$

За допомогою співвідношення (35) можна довести, що

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \int_a^b \varphi(t)\, dt,$$

де $a = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}, b = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Визначений інтеграл можна знайти, користуючись однією з первісних функції $\varphi(x)$. Є табличні значення первісних $\Phi(x)$ та $\Phi_0(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (36)$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (37)$$

Функція $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа, а $\Phi_0(x)$ називається нормованою функцією Лапласа.

При $x > 0$ має місце рівність: $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$.

Корисно знати деякі властивості функції $\Phi(x)$:

6) $\Phi(x)$ зростає;

7) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
8) $\Phi(x) = 0{,}9999 \ldots$ при $x \geq 4$;
9) $\Phi(0) = 0{,}5$;
10) $\Phi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$.

Таким чином, достатньо мати таблицю значень для проміжка $[0; 4]$.

Отже, ймовірності $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$, що представляють інтерес при великих n, можна обчислити, користуючись таблицею значень функції

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

за формулою

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

або
$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (38)$$

в силу того, що $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$ (значення $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$ та $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ обчислюються заздалегідь).

Зауваження. Функція Лапласа в її стандартному представленні для заданого значення аргументу може бути обчислена за допомогою функції НОРМСТРАСП:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \text{НОРМСТРАСП}(x).$$

6. Статистичні задачи, що розв'язуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

Теорема Бернуллі. Для схеми Бернуллі при будь-якому $\varepsilon > 0$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \qquad (39)$$

тобто практично вірогідно, що при достатньо великому числі випробувань n в схемі Бернуллі відносна частота успіху $\frac{m}{n}$ відрізняється від ймовірності успіху p при одному випробуванні за абсолютною величиною менш ніж на ε.

Статистичне означення ймовірності базується на на властивості стійкості відносної частоти. Теорема Бернуллі стверджує, що в математичній моделі така властивість частоти має місце.

Величина $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ називається відхиленням відносної частоти від теоретичної ймовірності, а число ε з формули (39) допустимою похибкою відхилення. Число

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right), \qquad (40)$$

що називається довірчою ймовірністю, показує ту долю випробувань, в яких відхилення експериментальної величини $\frac{m}{n}$ від теоретичної p не перевищує заданої похибки.

Частіше за всього розглядають довірчі ймовірності, що дорівнюють 0, 95, 0, 997, 0, 9999.

Теорема Бернуллі встановлює залежність між числами n, ε та β. З цією метою застосовують інтегральну теорему Муавра- Лапласа, з якої випливає, що при достатньо великих n

$$\beta = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (41)$$

Співвідношення (41) можна розглядати як рівняння для визначення одного з чисел n, ε та β, коли два інших відомі. Розглянемо основні типи задач на цю тему.

4) Знайти β, якщо задані n та ε.

Підставляємо спочатку в співвідношення (41) ε та n, а потім за таблицею значень знаходимо Φ_0.

5) Знайти ε, якщо задані n та β.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо корінь x_β рівняння

$$\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}, \qquad (42)$$

звідки

$$\varepsilon \approx x_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}. \qquad (43)$$

6) Знайти n, якщо задані ε та β.

З рівняння (42) знаходимо x_β, а потім, враховуючи, що $x_\beta \approx \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, отримуємо

$$n \approx \left(\frac{x_\beta}{\varepsilon}\right)^2 \cdot pq. \qquad (44)$$

В прикладних задачах типу 1) -3) число p часто є невідомим, в цьому випадку використовують очевидну нерівність $pq \le \frac{1}{4}$, що є вірним для будь-яких $p \ge 0$, $q \ge 0$ та $p + q = 1$.

Нехай числа ε, β та n задані. При цьому припущенні можна можна довести, що з ймовірністю не меншою ніж β невідоме число p міститься в проміжку

$$\left(\frac{m}{n}-\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}};\frac{m}{n}+\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right), \qquad (45)$$

який називається довірчим інтервалом для ймовірності успіху в одному віпробуванні, а його кінці – довірчими границями. Отже, замінюючи невідому ймовірність p знайденою дослідним шляхом частотою, ми здійснюємо похибку, що не перевищує $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}$.

Задача. Ймовірність того, що навмання відібрана деталь містить дефект, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що при випадковому огляді 600 деталей цієї партії відносна частота появи нестандартної деталі відрізняється від відповідної ймовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,05?

Розв'язання. Випробування, що розглядається, очевидно, задовольняє схему Бернуллі. Довірчу ймовірність β знайдемо за формулою (41), враховуючи, що тут $n = 600$, $p = 0{,}2$ ($q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$), $\varepsilon = 0{,}05$. Маємо

1) $\frac{n}{pq} = \frac{600}{0{,}2\cdot 0{,}8}$; 2) $\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 61{,}2$; 3) $x_\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 0{,}05\cdot 61{,}2 \approx 3{,}06$; 4) $\Phi_0(3{,}06) \approx 0{,}4989$.

Отже,

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}2\right| \le 0{,}05\right) = 2\Phi_0(x_\beta) = 2\cdot 0{,}4989 = 0{,}9978.$$

Відповідь: 0,9978.

Задача. Проведено навмання медичне обстеження 625 співробітників деякого підприємства та виявлено, що 40 людей страждають певним видом професійного захворювання. З довірчою ймовірністю 0,997 визначити границі, в яких міститься відсоток професійно хворих всього підприємства.

Розв'язання. Маємо $n = 625, m = 40$, $\beta = 0{,}997$, потрібно визначити границі довірчого інтервалу $\left(\frac{m}{n}-\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}};\frac{m}{n}+\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$. Обчислюємо: 1) $\frac{m}{n} = \frac{40}{625} = 0{,}064$; 2) за таблицею значень функції Лапласа знаходимо розвязок рівняння $\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}$, тобто таке значення x_β, при якому $\Phi_0(x_\beta) = \frac{0{,}997}{2} = 0{,}4985$. Маємо $x_\beta = 2{,}97$; 3) знаходимо $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = \frac{2{,}97}{2\sqrt{625}} = 0{,}0594$; визначаємо довірчі границі $\frac{m}{n} \pm \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = 0{,}064 \pm 0{,}0594$. Остаточно знаходимо

$$\left(\frac{m}{n}-\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)\cdot 100\% = (0{,}064 - 0{,}0594)\cdot 100\% = 0{,}0046\cdot 100\% = 0{,}46\%,$$

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)\cdot 100\% = (0{,}064 + 0{,}0594)\cdot 100\% = 0{,}1234\cdot 100\% = 12{,}34,$$

Тобто відсоток професійно хворих вього підприємства міститься в границях від 0,5% до 12,3%.

Відповідь: 0,5% < p <12,3%.

Висновки

В цьому розділі ми ознайомились з таким важливими поняттями, як подія та ймовірність події. Розглянуто дії над подіями та різні означення ймовірності: статистичне, класичне, геометричне, аксіоматичне. При застосування класичного означення ймовірності події переконались у важливості вивчення формул комбінаторики. При знаходженні ймовірності більш складних подій важливим є застосовування теореми додавання або множення, які дозволяють виразити шукану ймовірність через ймовірності більш простих подій. Також важливим поняттям є апріорна та апостеріорна ймовірності подій, які фігурують у формулі повної ймовірності й у формулі Байеса. Багато уваги приділено схемі Бурнуллі та граничним теоремам для схеми Бернуллі, а також використанню Excel при розв'язанні задач на дану тему. Розглянуто статистичні задачі, що розв'язуються на основі граничних теорем. Цей розділ підготовлює нас до вивчення наступної теми «Випадкові величини».

Література

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — 10-е изд., стер.. — М.: Академия, 2005. — 576 с.
2. Волковец А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания по типовому расчету. — Минск БГУИР, 2009. — 65 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. — 12-е изд., перераб. — М.: Высшее образование, 2006. — 479 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. — 11-е изд., перераб. — М.: Высшее образование, 2006. — 404 с.
5. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — 1970.
6. Гнєденко Б. В. Нарис з історії теорії ймовірностей // Курс теорії ймовірностей. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. — 464с. С. 351—428.
7. Гнєденко Б. В. Курс теорії ймовірностей. — К.: ВПЦ Київський університет, 2010. — 464 с.
8. Дороговцев А.Я Збірник задач з теорії ймовірностей. — К.: Вища школа, 1976. — 384 с.
9. *Донченко В. С., Сидоров М. В.-С., Шарапов М. М.* Теорія ймовірностей та математична статистика. — Альма-матер. — Київ : «Академія», 2009. — 288 с.
10. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математичниа статистика. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.
11. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математичниа статистика. У 2 ч. — Ч. ІІ. Математична статистика. — К.: КНЕУ, 2001. — 336 с.
12. Жалдак М.І. , Кузьміна Н. М. та Михалін Г. О.Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. (Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. — Полтава. «Довкілля-К». 2009 р. — 500 с.
13. Жалдак М.І. , Кузьміна Н. М. та Михалін Г. О. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2009 р. — 610 с.

14. Жалдак М. І. , Кузьміна Н. М. , Берлінська С. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. — Київ. Вища школа. 1996. — 352 с.
15. Жалдак М.И., Квітко А. Н.Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум. - Київ. Вища школа. 1989. 264 с.
16. Ефимов А. В., Поспелов А. Е. и др. 4 часть // Сборник задач по математике для втузов. — 3-е изд., перераб. и дополн.. М.:Физматлит, 2003. — Т. 4. — 432 с.
17. Колмогоров, А. Н. «Основные понятия теории вероятностей», М.: Наука, 1974.
18. Каленюк П. І. та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. — 240 с.
19. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розвязання задач. — К.: Центр учбової літератури, 2007. — 576 с.
20. Колемаев В. А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1991.
21. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. — 2- изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.
22. Лихолетов И. И., Мацкевич И. Е. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. — Мн.: Выш. шк., 1976.
23. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. — Мн.: Выш. шк., 1976.
24. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. 3-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2008. — 288 с.
25. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.
26. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. — М., 1982.
27. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — Изд. 3-е. — М.: Наука, 1984. — 285 с.
28. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. — 752 с.