

Д. С. Калюжний-Вербовецький ¹, В. М. Пивоварчик ²

Скінченновимірні обернені задачі

(Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського,
Одеса, Україна)

E-mail address: ¹ dmitry2k@yahoo.com, ² vpivovarchik@gmail.com

Зміст

1. Вступ	3
2. Початково-крайова задача на інтервалі	4
3. Спектральна задача на інтервалі	6
4. Існування і єдиність розв'язку початково-крайової задачі	8
5. Спектральні задачі з різними крайовими умовами	9
5.1. Крайові задачі з різними крайовими умовами	9
5.2. Крайові умови Діріхле та Ноймана	13
5.2.1. Крайова умова Діріхле на лівому кінці	13
5.2.2. Крайова умова Ноймана на лівому кінці	14
5.2.3. Чергування власних значень	16
5.3. Тотожність Лагранжа та осциляційна теорема Штурма	16
6. Обернені задачі за двома спектрами	20
7. Додаток	24
Література	31

1 Вступ

Дослідження коливань струн почалося у 18-му сторіччі Ойлером, д'Аламбером та Лагранжем. Гелмгольц розглядав струну, навантажену концентрованою масою у середній точці. Релей знайшов власні значення та власні частоти коливань струни з масою, як функції місця маси на струні [5]. Теорія коливань струн пов'язана з теорією струнних музичних інструментів і вивчається у багатьох підручниках. В наш час ця область знань залишається актуальною. Так у статті [4] автори досліджували власні значення та власні функції задачі про коливання струни теоретичними методами та експериментально.

Математики надають перевагу мати справу з ідеалізованим об'єктом котрий М.Г. Крейн назвав стуною Стільтєса. Це невагома нитка, що несе на собі точкові (концентровані) маси, котрі, за М.Г. Крейном, будемо називати намистинами. У своїх працях М.Г. Крейн розглядав малі поперечні коливання стільтєсівських струн, допускаючи можливість існування нескінченної кількості намистин, що накопичуються до одного з кінців струни. Однак, ми обмежимо нашу увагу випадком скінченної кількості намистин. Зазначимо, що такі ж (з точки зору математики) рівняння зустрічаються і у задачі про позовжні коливання точкових мас, поєднаних пружинами (див., наприклад, [14]).

Також виявилось, що ці рівняння (рекурентні співвідношення) відомі в теорії синтезу електричних ланцюгів (див., наприклад, метод Кауера у [1]). Такі струни використовуються у простих моделях фізики (див., наприклад, [13]).

Треба зазначити, що у монографії [8] для випадку скінченної кількості мас були розв'язані наступні спектральні задачі: задача Діріхле-Діріхле, тобто задача з крайовими умовами Діріхле на обох кінцях, та задача Ноймана-Діріхле, тобто задача з умовою Ноймана на лівому кінці та умовою Діріхле на правому кінці інтервалу. З точки зору фізики умова Діріхле означає, що кінець струни закріплений, а умова Ноймана описує кінець струни, що вільно рухається у напрямі, перпендикулярному до стану рівноваги струни. В цій монографії було показано, що власні значення цих задач прості, додатні та чергуються. Була повністю розв'язана відповідна обернена задача відновлення мас намистин та інтервали між ними, виходячи зі спектрів задач Діріхле-Діріхле та Ноймана-Діріхле та загальної довжини струни, тобто було показано, що для того, щоб дві послідовності додатних чисел були спектрами задач Діріхле-Діріхле та Ноймана-Діріхле, відповідно, необхідно та достатньо, щоб вони були прості та чергувались. Крім того, був запропонований алгоритм відновлення мас та інтервалів, який полягає у розвиненні відношення характеристичних многочленів задач Діріхле-Діріхле та Ноймана-Діріхле у ланцюговий дріб, котрий походить з робіт В. Кауера [2] та Фрая [3]. У [8] також було показано, що розв'язок цієї оберненої задачі - єдиний. Порівняння з експериментом можна знайти у [4].

Цей навчальний посібник є вступом до теорії скінченновимірних спектральних задач, яка включає в себе спектральні задачі на графах (див. наприклад [10], [11], [14], [15], [17], [20], [19], [20]). Він призначений для студентів старших курсів університетів та аспірантів. Необхідне попереднє знання курсу лінійної алгебри.

У розділі 2 розглянута початково-крайова задача породжена рекурентними співвідношеннями стільтєсівської струни з умовами Діріхле на обох кінцях струни. Ми не розглядаємо початково-крайові задачі з іншими крайовими умовами тому, що їх розв'язання не відрізняється від випадку умов Діріхле.

У розділі 3 розглянута спектральна задача, що відповідає початково-крайовій

задачі, розглянутій у розділі 2.

У розділі 4, використовуючи результати, отримані при розв'язанні спектральної задачі у розділі 3, доведено існування та єдиність розв'язку початково-крайової задачі розділу 2.

У розділі 5 розглянуті спектральні задачі. У підрозділі 5.1 розглянутий перехід від початково-крайової задачі до спектральної задачі у випадку так званих умов Робена, що узагальнюють умови Діріхле та Ноймана. У цьому ж підрозділі введені многочлени Кауера-Фрая, що є розв'язками відповідних рекурентних співвідношень. У підрозділі 5.2 доведено чергування власних значень різних задач з крайовими умовами Ноймана та Діріхле на кінцях інтервалу. У підрозділі 5.3 доведена тотожність Лагранжа та осциляційна теорема Штурма.

У розділі 6 розв'язані обернені задачі відновлення мас намистин та інтервалів між ними за спектрами двох спектральних задач та ще одним параметром (повною довжиною або повною масою).

Розділ 7 - це додаток, в якому описані основи теорії раціональних стільтьєсівських функцій.

2 Початково-крайова задача на інтервалі

Стільтьєсівською струною будемо називати невагому нитку довжини l , на яку нанизано скінченну кількість n намистин, маси яких - m_1, \dots, m_n . Намистини занумеровані у порядку зростання, починаючи з лівого кінця. Відстань між лівим кінцем та першою намистиною позначимо через l_0 , відстань між j -ою намистиною та $(j + 1)$ -ою через l_j , $j = 1, \dots, n - 1$, а відстань між останньою намистиною та правим кінцем - через l_n , зрозуміло, що $\sum_{k=0}^n l_k = l$.

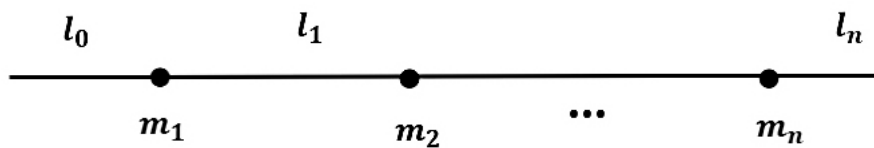


Рис. 1

Розглянемо малі поперечні коливання такої струни. Позначимо через $v_k(t)$ поперечне зміщення k -ої намистини ($k = 1, \dots, n$) у момент часу t , а через $v_0(t)$ та $v_{n+1}(t)$ поперечні зміщення лівого та правого кінців. Струна натягнута з силою, що

дорівнює T . Через α_{k+1} позначимо кут, який утворює інтервал l_k з віссю Ox (див. Рис. 2).

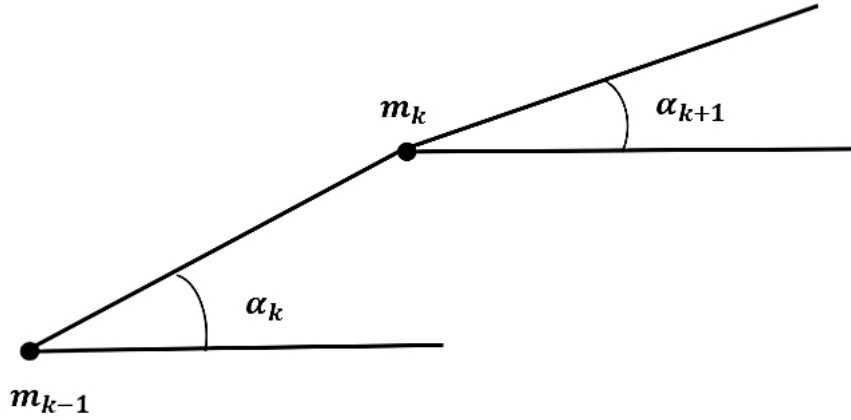


Рис. 2

Тоді за другим законом Ньютона (при цьому нехтуємо силою тяжіння) отримуємо

$$T \sin \alpha_{k+1} - T \sin \alpha_k = m_k v_k''(t), \quad (2.1)$$

де $v_k''(t)$ - друга похідна за часом від зміщення k -ї маси, тобто її прискорення. Далі, не втрачаючи загальності будемо вважати, що $T = 1$ та будемо вважати, що $\sin \alpha_k = \alpha_k = \operatorname{tg} \alpha_k$ та $\cos \alpha_k = 1$ (так зване лінійне наближення). Такі коливання є малими, тобто для всіх k вірно, що $v_{k+1} - v_k$ набагато менше, ніж l_k . Звісно, "набагато менше" - це термін з фізики, а не з математики, але математичний розгляд ми починаємо лише після завершення конструювання фізичної моделі. Тоді

$$\sin \alpha_{k+1} = \operatorname{tg} \alpha_{k+1} = \frac{v_{k+1}(t) - v_k(t)}{l_k}, \quad (2.2)$$

$$\sin \alpha_k = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{v_k(t) - v_{k-1}(t)}{l_k}. \quad (2.3)$$

Підставляючи (2.2) та (2.3) у (2.1), отримуємо наступні тричленні рекурентні співвідношення:

$$\frac{v_k(t) - v_{k-1}(t)}{l_{k-1}} - \frac{v_{k+1}(t) - v_k(t)}{l_k} + m_k \frac{d^2 v_k(t)}{dt^2} = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.4)$$

Розглянемо випадок, коли кінці струни закріплені, що описано рівняннями

$$v_0(t) = 0, \quad (2.5)$$

$$v_{n+1}(t) = 0, \quad (2.6)$$

які будемо називати крайовими умовами Діріхле.

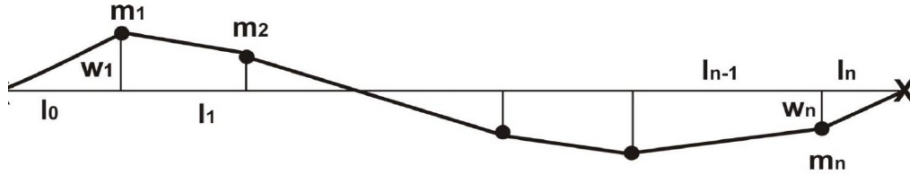


Рис. 3

Щоб повністю описати рух намистин задамо початкові умови

$$v_k(0) = \hat{v}_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{\partial v_k(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{v}_k, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.8)$$

де \hat{v}_k and \tilde{v}_k дійсні числа (початкові зміщення та початкові швидкості намистин).

У розділі 4 ми доведемо, що задача (2.4)–(2.8), яку будемо називати початково-крайовою, має єдиний розв'язок. Для цього нам треба спочатку у розділі 3 розглянути так звану спектральну задачу.

3 Спектральна задача на інтервалі

Знайдемо часткові розв'язки рівняння (2.4). Будемо шукати розв'язки у вигляді $v_k(t) = u_k e^{i\lambda t}$, де u_k амплітуда коливань k -ої маси, а λ - спектральний параметр (з цим терміном читачи зустрічались у курсі лінійної алгебри). Поки що вважаємо, що λ може приймати довільні комплексні значення, а далі з'ясуємо, які конкретно. Підставимо $v_k(t) = u_k e^{i\lambda t}$ у (2.4)–(2.6). Тоді отримаємо так звану спектральну задачу

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} - \frac{u_{k+1} - u_k}{l_k} - \lambda^2 m_k u_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3.1)$$

$$u_0 = 0, \quad (3.2)$$

$$v_{n_j+1} = 0. \quad (3.3)$$

Умови (3.2) та (3.3) також називають умовами Діріхле, а задачу (3.1)–(3.3) (спектральною) задачею Діріхле-Діріхле. Цю задачу можна подати у матричній формі. Для цього розглянемо матрицю (така матриця належить до, так званих, тридіагональних матриць Якобі)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{l_{n-2}} & \frac{1}{l_{n-2}} + \frac{1}{l_{n-1}} & -\frac{1}{l_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{l_{n-1}} & \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \end{pmatrix},$$

діагональну матрицю

$$B = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix},$$

та вектор (стовпець) $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$. Тоді рівняння (3.1) можемо подати у вигляді

$$(A - \lambda^2 B)Y = 0. \quad (3.4)$$

Нас цікавить нетривіальний розв'язок системи рівнянь (3.4), який існує тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю:

$$\det(A - \lambda^2 B) = 0. \quad (3.5)$$

Ліва частина цього рівняння є многочленом степені $2n$. За наслідком основної теореми алгебри (див., наприклад, [7]) цей многочлен має $2n$ коренів. Ці корені є власними значеннями задачі (3.1)–(3.3), або, інакше кажучи, власними значеннями квадратичної операторної в'язки $A - \lambda^2 B$ (матриця-функція $A - \lambda^2 B$ належить до класу квадратичних, бо містить доданок з λ^2).

Означення 3.1. Вираз $\lambda F_1 + F_0$, де λ - спектральний параметр, а F_1 та F_0 - квадратні матриці, називають лінійною операторною (матричною) в'язкою. Вираз $\lambda^2 F_2 + \lambda F_1 + F_0$, де F_2 , F_1 та F_0 - квадратні матриці, називають квадратичною операторною (матричною) в'язкою. Нехай $L(\lambda)$ операторна в'язка (лінійна або квадратична). Значення спектрального параметру λ , за якого існує нетривіальний розв'язок рівняння $L(\lambda)Y = 0$, називається власним значенням, а відповідний нетривіальний розв'язок (або розв'язки) - власним вектором (або власними векторами).

Теорема 3.2. Матриці B та A симетричні та додатні. Власні значення спектральної задачі для лінійної в'язки $A - zB$, тобто спектральної задачі (3.1) –(3.3) зі спектральним параметром $z = \lambda^2$, додатні та прості (тобто геометрично та алгебраїчно однократні).

Доведення. Твердження відносно матриці B очевидні. Симетрія матриці A очевидна. Для векторів $Y = (u_1, \dots, u_n)^T \neq 0$ та $Y^* = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ знаходимо скалярний добуток

$$\begin{aligned} Y^* A Y &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} |u_j|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} |u_{j+1}|^2 + \frac{1}{l_0} |u_1|^2 + \frac{1}{l_n} |u_n|^2 \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} (\bar{u}_j u_{j+1} + u_j \bar{u}_{j+1}) \geq \\ &\quad \frac{1}{l_0} |u_1|^2 + \frac{1}{l_n} |u_n|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} |u_{j+1} - u_j|^2. \end{aligned}$$

Всі доданки в останньому виразі невід'ємні. Їх сума невід'ємна і дорівнює нулю тільки у разі $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$, тобто $Y = 0$. Це означає, що матриця A додатна. Крім того, нижня ліва підматриця розміру $(n-1) \times (n-1)$ матриці $A - zB$ є верхньою трикутною з ненульовими діагональними елементами, що означає, що для кожного $z \in \mathbb{C}$ ранг матриці $A - zB$ не менший ніж $n-1$. Отже, всі власні значення прості. Теорема доведена.

Лема 3.3. Власні вектори в'язки $A - zB$ лінійно незалежні.

Доведення. По перше зазначимо, що оскільки матриця B додатна (будемо писати це так: $B > 0$), то існує матриця $B^{-\frac{1}{2}} > 0$. Тоді, якщо Y - власний вектор, що відповідає власному значенню z в'язки $A - zB$, то $\tilde{Y} := B^{\frac{1}{2}} Y$ є власним вектором матриці $\tilde{A} = B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}$, що відповідає тому ж власному значенню z . Вочевидь, для доведення

твердження леми достатньо довести, що власні вектори матриці \tilde{A} лінійно незалежні. Таке твердження можна знайти у [6] (лема 1.3.8), але ми наведемо доведення.

Будемо доводити методом від протилежного. Нехай \tilde{Y}_j ($j = 1, 2, \dots, n$) - власні вектори матриці \tilde{A} , що відповідають власним значенням λ_j лінійно залежні. Тоді існують лінійні комбінації цих векторів, що дорівнюють нулю. Оберемо серед цих лінійних комбінацій таку, в якій кількість ненульових коефіцієнтів найменша. Позначимо ці коефіцієнти через α_k ($k = 1, 2, \dots, r$, $r \leq n$), тобто

$$\alpha_1 \tilde{Y}_1 + \alpha_2 \tilde{Y}_2 + \dots + \alpha_r \tilde{Y}_r = 0. \quad (3.6)$$

Тут $r > 1$, так як $\tilde{Y}_j \neq 0$ для всіх $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Для зручності ми обрали перші r векторів, чого завжди можна досягти, змінюючи нумерацію. Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha_1 \tilde{Y}_1 + \alpha_2 \tilde{Y}_2 + \dots + \alpha_r \tilde{Y}_r) &= \tilde{A}\alpha_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{A}\alpha_2 \tilde{Y}_2 + \dots + \tilde{A}\alpha_r \tilde{Y}_r = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \tilde{Y}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \tilde{Y}_2 + \dots + \alpha_r \lambda_r \tilde{Y}_r = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тепер рівняння (3.6) помножимо на λ_r , а потім віднімемо його від рівняння (3.7). Тоді отримаємо

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)\tilde{Y}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_r)\tilde{Y}_2 + \dots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)\tilde{Y}_{r-1} = 0.$$

Отже, ми отримали лінійну комбінацію, що дорівнює нулю, яка нетривіальна, так як $\lambda_j \neq \lambda_r$ для $j = 1, 2, \dots, r-1$, в якій кількість ненульових коефіцієнтів менша ніж r , що суперечить припущенню. Лема доведена.

4 Існування і єдиність розв'язку початково-крайової задачі

Позначимо через ν_j^2 ($j = 1, 2, \dots, n$) власні значення в'язки $A - zB$. Так як $z = \lambda^2$, то власні значення в'язки $A - \lambda^2 B$ це ν_j ($j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$). Тут нам було доцільно занумерувати власні значення в'язки $A - \lambda^2 B$ так, що $\nu_{-j} = -\nu_j$. Позначимо через

$$Y_j = \begin{pmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n^{(j)} \end{pmatrix}$$

($j = 1, 2, \dots, n$) власні вектори, що відповідають власним значенням ν_j^2 ($j = 1, 2, \dots, n$) в'язки $A - zB$. В якості власного вектора, що відповідає власному значенню $\lambda_{-j} = -\lambda_j$ в'язки $A - \lambda^2 B$ можна взяти вектор Y_j , який є власним вектором, що відповідає власному значенню λ_j . Тому в якості власних векторів в'язки $A - \lambda^2 B$, що відповідають власним значенням ν_j ($j = -n, -(n-1), \dots, -1, 1, 2, \dots, n$) можна взяти вектори $Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Спробуємо знайти розв'язок початково-крайової задачі (2.4)–(2.8) у вигляді

$$V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=-n, j \neq 0}^n C_j Y_j e^{i\lambda_j t}, \quad (4.1)$$

де C_j - деякі сталі.

За будь-яких значень сталих C_j вектор-функція $V(t)$ задовольняє рівняння (2.4) та крайові умови (2.5) та (2.6). Отже, підставимо (4.1) у (2.7) та (2.8). Тоді отримаємо

$$\sum_{j=-n, j \neq 0}^n C_j Y_j = \hat{V}, \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=-n, j \neq 0}^n i\lambda_j C_j Y_j = \tilde{V}, \quad (4.3)$$

де $\hat{V} := \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n\}^T$ та $\tilde{V} := \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n\}^T$. Матриця системи (4.2), (4.3) має вигляд

$$\begin{pmatrix} Y_n & Y_{n-1} & \dots & Y_1 & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ -i\lambda_n Y_n 0 & -i\lambda_{n-1} Y_{n-1} & \dots & -i\lambda_1 Y_1 & i\lambda_1 Y_1 & i\lambda_2 Y_2 & \dots & i\lambda_n Y_n \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що визначник цієї матриці не дорівнює нулю. Для цього віднімемо від останнього стовпця визначника перший, від передостаннього віднімемо другий і так далі. Тоді отримаємо

$$\begin{vmatrix} Y_n & Y_{n-1} & \dots & Y_1 & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ -i\lambda_n Y_n 0 & -i\lambda_{n-1} Y_{n-1} & \dots & -i\lambda_1 Y_1 & i\lambda_1 Y_1 & i\lambda_2 Y_2 & \dots & i\lambda_n Y_n \end{vmatrix} = \quad (4.4)$$

$$\begin{vmatrix} Y_n & Y_{n-1} & \dots & Y_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -i\lambda_n Y_n 0 & -i\lambda_{n-1} Y_{n-1} & \dots & -i\lambda_1 Y_1 & 2i\lambda_1 Y_1 & 2i\lambda_2 Y_2 & \dots & 2i\lambda_n Y_n \end{vmatrix}.$$

У останньому визначнику лівий верхній мінор має вигляд

$$|Y_n \ Y_{n-1} \ \dots \ Y_1|.$$

Цей мінор не дорівнює нулю, бо згідно з Лемою 3.3 його стовпці лінійно незалежні. З цієї ж причини не дорівнює нулю правий нижній мінор

$$|2i\lambda_1 Y_1 \ 2i\lambda_2 Y_2 \ \dots \ 2i\lambda_n Y_n|.$$

Матриця у правій частині рівняння (4.4) належить до класу нижніх квазітрикутних (див. [9] стр. 53) і, згідно з викладеним там, визначник такої матриці дорівнює добутку визначників діагональних блоків. Отже, у нашому випадку визначник не дорівнює нулю. Це означає, що система (4.2), (4.3) має єдиний розв'язок.

5 Спектральні задачі з різними крайовими умовами

5.1 Крайові задачі з різними крайовими умовами

Наша ціль полягає у знаходженні нетривіального розв'язку $(u_0, u_1, \dots, u_{n+1})$ рівняння (3.1), що задовольняє певні крайові умови, одну на лівому кінці, а другу - на правому. Наприклад, такими умовами можуть бути умови Діріхле (2.5), (2.6), але цілком фізично обгрунтованими є умови Ноймана

$$v_0(t) = v_1(t) \quad (5.1)$$

на лівому кінці та

$$v_n(t) = v_{n+1}(t) \quad (5.2)$$

на правому. Вони означають, що відповідний кінець струни може вільно рухатись у напрямі, перпендикулярному до стану рівноваги струни.

Більш загальна умова Робена

$$v_0(t) = cv_1(t) \quad (5.3)$$

з $c \in [0, 1]$ також має фізичний зміст на якому ми зупинятися не будемо.

Як ми бачили при розв'язанні початково-крайової задачі Діріхле-Діріхле перехід до відповідної спектральної задачі виявився цілком виправданим (див. Розділ 4). Така ж ситуація - у випадку інших крайових умов. Тому далі ми зосередимося на спектральних задачах.

Зауваження. Значення $\lambda \in \mathbb{C}$, для якого існує нетривіальний розв'язок називають *власними значеннями* відповідної спектральної задачі, а множину власних значень - *спектром* спектральної задачі. Оскільки спектральний параметр λ трапляється у квадраті в рівнянні (3.1), має сенс замінити λ^2 на z . Тоді будемо називати число $z \in \mathbb{C}$ *характеристичним значенням* відповідної спектральної задачі, якщо відповідна спектральна задача має нетривіальний розв'язок. Вочевидь, число $\lambda \in \mathbb{C}$ є власним значенням тоді та тільки тоді, коли $z = \lambda^2$ є характеристичним значенням, і в цьому випадку $-\lambda$ також є власним значенням. Тому власні значення однозначно визначаються характеристичними значеннями.

Умова на лівому кінці у спектральних задачах, що відповідає умові (5.3) має вигляд

$$u_0 = cu_1 \quad (c \in \mathbb{R}). \quad (5.4)$$

Тоді з $u_1 = 0$ випливає $u_0 = 0$, і послідовна підстановка у (3.1) дає тривіальний розв'язок

$$0 = u_0 = u_1 = \dots = u_{n+1}.$$

Зазначимо, що тривіальний розв'язок відповідає стану рівноваги струни, тобто відсутності коливань.

Враховуючи вищенаведене, при пошуку нетривіального розв'язку будемо вважати, що $u_1 \neq 0$, шукаючи нетривіальний розв'язок. Тоді для будь-яких $z \in \mathbb{C}$ та $u_1 \neq 0$, рівняння (3.1) з умовою (5.4) має єдиний розв'язок, який може бути поданий у вигляді

$$u_k = R_{2k-2}(z, c)u_1 \quad (k = 0, \dots, n+1). \quad (5.5)$$

Підставляючи (5.5) у (3.1), отримаємо

$$\frac{R_{2k-2}(z, c) - R_{2k-4}(z, c)}{l_{k-1}} - \frac{R_{2k}(z, c) - R_{2k-2}(z, c)}{l_k} = m_k z R_{2k-2}(z, c)$$

для $k = 1, \dots, n$. Запроваджуючи

$$R_{2k-1}(z, c) = \frac{R_{2k}(z, c) - R_{2k-2}(z, c)}{l_k} \quad (k = 0, \dots, n), \quad (5.6)$$

отримуємо

$$R_{2k-1}(z) = R_{2k-3}(z) - m_k z R_{2k-2}(z) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.7)$$

Для розв'язання рекурентних співвідношень (5.6) та (5.7) варто врахувати, що рівняння (5.5) для $k = 1$ дає

$$R_0(z, c) = 1. \quad (5.8)$$

З умов (5.4) і (5.5) випливає

$$R_{-2}(z, c) = c. \quad (5.9)$$

Тоді рекурентні співвідношення (5.6) та (5.7) з умовами (5.8) та (5.9) мають єдиний розв'язок $R_k(z, c)$ ($k = -1, 1, 2, \dots, 2n$). Справді,

$$R_{-1}(z, c) = \frac{1-c}{l_0}, \quad (5.10)$$

та для $R_1(z, c), \dots, R_{2n}(z, c)$, рівняння (5.7) відповідає непарним індексам, а рівняння (5.6) - парним. Легко помітити за індукцією, що $R_{2k-1}(\cdot, c)$ та $R_{2k}(\cdot, c)$ многочлени степені k для $k = 0, \dots, n$. З рівняння (5.7) при $z = 0$ та рівняння (5.10) випливає, що

$$R_{2n-1}(0, c) = R_{2n-3}(0, c) = \dots = R_{-1}(0, c) = \frac{1-c}{l_0}. \quad (5.11)$$

Тоді з (5.7) та (5.10) отримуємо

$$R_{2k}(0, c) = \sum_{j=1}^k l_j R_{2j-1}(0, c) + R_0(0, c) = 1 + \frac{1-c}{l_0} \sum_{j=1}^k l_j. \quad (5.12)$$

Зокрема,

$$R_{2n}(0, c) = c + (1-c) \frac{l}{l_0}. \quad (5.13)$$

Многочлени R_k ($k = -2, \dots, 2n$) будемо називати многочленами Кауера-Фрая для рівнянь (3.1), (5.4).

Рекурентні співвідношення (5.6), (5.7) дають

$$\begin{aligned} \frac{R_{2k}(z, c)}{R_{2k-1}(z, c)} &= l_k + \frac{R_{2k-2}(z, c)}{R_{2k-1}(z, c)} \\ &= l_k + \frac{R_{2k-2}(z, c)}{R_{2k-3}(z, c) - m_k z R_{2k-2}(z, c)} \\ &= l_k + \frac{1}{-m_k z + \frac{R_{2k-3}(z, c)}{R_{2k-2}(z, c)}} \end{aligned}$$

для $k = 1, \dots, n$, що приводить до

$$\frac{R_{2k}(z, c)}{R_{2k-1}(z, c)} = l_k + \frac{1}{-m_k z + \frac{1}{\frac{R_{2k-2}(z, c)}{R_{2k-3}(z, c)}}}$$

для $k = 2, \dots, n$. Послідовна підстановка та використання початкових умов (5.8), (5.9) приводить до наступного ланцюгового дробу

$$\frac{R_{2n}(z, c)}{R_{2n-1}(z, c)} = l_n + \frac{1}{-m_n z + \frac{1}{l_{n-1} + \frac{1}{-m_{n-1} z + \dots + \frac{1}{l_1 + \frac{1}{-m_1 z + \frac{1-c}{l_0}}}}}}. \quad (5.14)$$

Зауваження

1. Зрозуміло, що корені многочлену $R_{2n-1}(z, c)$, тобто полюси ланцюгового дробу, що стоїть у правій частині рівняння (5.14), не залежать від l_n .

2. Якщо $c = 1$, то корені многочлена $R_{2n}(z, 1)$ так само, як і корені многочлена $R_{2n-1}(z, 1)$ не залежать від l_0 , так як права частина (5.14) не залежить від l_0 .

3. Нехай задані $\eta > 0$ та дані струни - $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=0}^n$. Позначимо зверху $\tilde{m}_k = \eta^{-1} m_k$ ($k = 1, \dots, n$) та $\tilde{l}_k = \eta l_k$ ($k = 0, \dots, n$). Позначимо відповідні многочлени Кауера-Фрая через $\tilde{R}_{2n}(z, c)$ та $\tilde{R}_{2n-1}(z, c)$. Тоді очевидно, що

$$\frac{\tilde{R}_{2n}(z, c)}{\tilde{R}_{2n-1}(z, c)} = \eta \frac{R_{2n}(z, c)}{R_{2n-1}(z, c)}.$$

Зокрема, корені многочленів $\tilde{R}_{2n}(z, c)$ та $R_{2n}(z, c)$ співпадають так само, як і корені $\tilde{R}_{2n-1}(\cdot, c)$ та $R_{2n-1}(\cdot, c)$.

4. Для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ тотожність $R_k(z, c) = (1-c)R_k(z, 0) + cR_k(z, 1)$ є вірною при $k = -1, 2$ завдяки (5.8) та (5.10), і тому ця тотожність також вірна при $k = 1, \dots, 2n$ завдяки (5.6) and (5.7).

Лема 5.1. Рекурентні співвідношення для многочленів Кауера-Фрая можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} R_{2k-1}(z, c) \\ R_{2k}(z, c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m_k z \\ l_k & 1 - l_k m_k z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2k-3}(z, c) \\ R_{2k-2}(z, c) \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.15)$$

Доведення. З (5.6) отримуємо

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_{2k-1}(z, c) \\ R_{2k}(z, c) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{2k-1}(z, c) \\ l_k R_{2k-1}(z, c) + R_{2k-2}(z, c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2k-1}(z, c) \\ R_{2k-2}(z, c) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

та (5.7) дає

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_{2k-1}(z, c) \\ R_{2k-2}(z, c) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{2k-3}(z, c) - m_k z, cR_{2k-2}(z, c) \\ R_{2k-2}(z, c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -m_k z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2k-3}(z, c) \\ R_{2k-2}(z, c) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Використовуючи ці рівняння отримуємо (5.15). Теорема доведена.

Розглянемо тридіагональну матрицю

$$A_c^d = \begin{pmatrix} \frac{1-c}{l_0} + \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{l_{n-2}} & \frac{1}{l_{n-2}} + \frac{1}{l_{n-1}} & -\frac{1}{l_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{l_{n-1}} & \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1-d}{l_n} \end{pmatrix},$$

та умову

$$u_{n+1} = du_n. \quad (5.16)$$

Наступний результат легко перевірити.

Лема 5.2. Нехай $c, d \geq 0$, $z \in \mathbb{C}$ та $Y = (u_1, \dots, u_n)^\top \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Визначимо u_0 та u_{n+1} згідно з (5.4) та (5.16) відповідно. Тоді (3.1) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$(A_c^d - zM)Y = 0,$$

де $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$.

Таким чином, задача (3.1), (5.4), (5.16) має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\det(A_c^d - zM) = 0$. Многочлени $z \mapsto \det(A_c^d - zM)$ та $\lambda \mapsto \det(A_c^d - \lambda^2 M)$, а також будь-який їх добуток на ненульову сталу будемо називати характеристичними многочленами задачі (3.1), (5.4), (5.16). Далі завжди буде зрозуміло з тексту, який з цих многочленів мається на увазі. Числа λ , для яких $\det(A_c^d - \lambda^2 M) = 0$, будемо називати власними значеннями задачі (3.1), (5.4), (5.16), в той час як числа z , для яких $\det(A_c^d - zM) = 0$, будемо називати характеристичними значеннями (3.1), (5.4), (5.16). Таким чином, власні та характеристичні значення це комплексні числа (зокрема, це можуть бути дійсні числа) за яких задача (3.1), (5.4), (5.16) має нетривіальний розв'язок. В цьому розділі власні значення виникають парами $(\lambda, -\lambda)$, тому достатньо та зручніше розглядати характеристичні значення $z = \lambda^2$.

Лема 5.3. Нехай $c, d \in [0, 1]$. Матриця A_c^d симетрична та невід'ємна, а власні значення спектральної задачі для $A_c^d - zM$ зі спектральним параметром z прості та невід'ємні. Число 0 є власним значенням тоді та тільки тоді, коли $c = 1$ та $d = 1$.

Доведення Симетрія матриці A_c^d очевидна. Для $Y = (u_1, \dots, u_n)^\top \neq 0$ та $Y^* = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ знаходимо

$$\begin{aligned} Y^* A_c^d Y &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} |u_j|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} |u_{j+1}|^2 + \frac{1-c}{l_0} |u_1|^2 + \frac{1-d}{l_n} |u_n|^2 \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} (\bar{u}_j u_{j+1} + u_j \bar{u}_{j+1}) \geq \\ &\quad \frac{1-c}{l_0} |u_1|^2 + \frac{1-d}{l_n} |u_n|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{l_j} |u_{j+1} - u_j|^2. \end{aligned}$$

Це означає, що A_c^d невідємна та вона є додатною при $c \neq 1$ або $d \neq 1$. Оскільки $A_1^1(1, \dots, 1)^T = 0$, то 0 є власним значенням спектральної задачі, коли $c = 1$ та $d = 1$. Крім того, нижня ліва $(n-1) \times (n-1)$ підматриця матриці $A_c^d - zM$ є верхньою трикутною з ненульовими діагональними елементами. Це означає, що для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ ранг матриці $A_c^d - zM$ не менший, ніж $n - 1$. Тому всі власні значення - прості. Лема доведена.

5.2 Крайові умови Діріхле та Ноймана

5.2.1 Крайова умова Діріхле на лівому кінці

Тепер розглянемо випадок, коли лівий кінець струни закріплений, тобто,

$$v_0(t) = 0. \quad (5.17)$$

Це призводить до умови Діріхле

$$u_0 = 0, \quad (5.18)$$

тобто до умови (5.4) з $c = 0$.

Задача Діріхле-Діріхле. Якщо правий кінець струни також закріплений, то крайова умова Діріхле на правому кінці

$$u_{n+1} = 0 \quad (5.19)$$

завдяки (5.5) еквівалентна

$$R_{2n}(z, 0) = 0. \quad (5.20)$$

Тому $R_{2n}(\lambda^2, 0)$ - характеристичний многочлен задачі (3.1) з умовами Діріхле-Діріхле (5.18), (5.19). Це означає, що характеристичні значення цієї спектральної задачі є коренями многочлена $R_{2n}(z, 0)$.

Лема 5.4. Корені многочлена $R_{2n}(z, 0)$ дійсні, додатні і прості. Позначивши їх ν_k , $k = 1, \dots, n$, з $\nu_k < \nu_{k+1}$ при $k = 1, \dots, n - 1$, отримуємо

$$R_{2n}(z, 0) = \frac{l}{l_0} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\nu_k}\right). \quad (5.21)$$

Доведення. Оскільки умова (5.19) є умовою (5.16) з $d = 0$, розташування коренів миттєво впливає з Лем 5.2 та 5.3 з $c = 0$ та $d = 0$. Нарешті ми помічаємо, що завдяки (5.13) ліва частина та права частина (5.21) співпадають при $z = 0$. Лема доведена.

Задача Діріхле-Ноймана. Тепер правий кінець струни може вільно рухатись у напрямі, перпендикулярному до стану рівноваги струни. Тоді

$$v_{n+1}(t) = v_n(t). \quad (5.22)$$

Це призводить до умови Ноймана

$$u_{n+1} = u_n, \quad (5.23)$$

яка еквівалентна

$$R_{2n-1}(z, 0) = 0 \quad (5.24)$$

завдяки (5.5) та (5.6). Це означає, що $R_{2n-1}(z, 0)$ є характеристичним многочленом задачі (3.1) з умовами Діріхле-Ноймана (5.23), (3.2).

Лема 5.5. Корені многочлена $R_{2n-1}(z, 0)$ дійсні, додатні та прості. Якщо позначити їх через μ_k , $k = 1, \dots, n$ з $\mu_k < \mu_{k+1}$ для $k = 1, \dots, n-1$, то

$$R_{2n-1}(z, 0) = \frac{1}{l_0} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\mu_k}\right). \quad (5.25)$$

Доведення. Оскільки умова (5.23) є умовою (5.16) з $d = 1$, розташування коренів безпосередньо впливає з Лем 5.2 та 5.3 з $c = 0$ та $d = 1$. Нарешті ми бачимо, що ліва та права частини (5.25) співпадають при $z = 0$ завдяки (5.13). Лема доведена.

5.2.2 Умова Ноймана на лівому кінці

Нехай тепер лівий кінець струни може вільно рухатись у напрямі, перпендикулярному до стану рівноваги струни. Тоді маємо умову Ноймана

$$u_0 = u_1, \quad (5.26)$$

тобто умову (5.4) з $c = 1$.

Задача Ноймана-Діріхле. Якщо правий кінець струни закріплений, то умова Діріхле на ньому (5.4) завдяки (5.5) дає нам

$$R_{2n}(z, 1) = 0. \quad (5.27)$$

Таким чином $R_{2n}(z, 1)$ є характеристичним многочленом задачі (3.1) з умовами Ноймана-Діріхле (5.26), (3.2).

Оскільки задача Ноймана-Діріхле - це те ж саме, що й задача Діріхле-Ноймана з оберненим порядком індексування мас та інтервалів, з Лем 5.5 та формули (5.13) впливає наступна лема.

Лема 5.6. Корені многочлена $R_{2n}(z, 1)$ дійсні додатні та прості. Якщо їх позначити через ξ_k , $k = 1, \dots, n$ з $\xi_k < \xi_{k+1}$ для $k = 1, \dots, n-1$, то

$$R_{2n}(z, 1) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\xi_k}\right). \quad (5.28)$$

Задача Ноймана-Ноймана. Якщо правий кінець струни може вільно рухатись у напрямі, перпендикулярному до стану рівноваги струни, то умова Ноймана (5.23) еквівалентна

$$R_{2n-1}(z, 1) = 0 \quad (5.29)$$

завдяки (5.5) та (5.6). Таким чином $R_{2n-1}(\cdot, 1)$ є характеристичним многочленом задачі (3.1) з умовами Ноймана-Ноймана (5.26), (5.23).

Лема 5.7. Корені многочлена $R_{2n-1}(\cdot, 1)$ дійсні, невід'ємні, прості та $R_{2n-1}(0, 1) = 0$. Позначивши їх через ζ_k , $k = 1, \dots, n$ з $\zeta_k < \zeta_{k+1}$ для $k = 1, \dots, n-1$, маємо, що $\zeta_1 = 0$ та

$$R_{2n-1}(z, 1) = - \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) z \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{z}{\zeta_k}\right). \quad (5.30)$$

Доведення. Оскільки умова (5.23) є умовою (5.16) з $d = 1$, розташування коренів безпосередньо впливає з Лем 2.5 та 2.6 з $c = 1$ та $d = 1$. Диференціюючи рівняння (5.7) та враховуючи (5.12), отримуємо

$$R'_{2k-1}(0, 1) = R'_{2k-3}(0, 1) - m_k$$

для $k = 1, \dots, n$. Послідовно використовуючи ці рівняння та враховуючи, що $R'_{-1}(0, 1) = 0$ (див. (5.10)), отримуємо

$$R'_{2n-1}(0, 1) = - \sum_{k=1}^n m_k,$$

з чого випливає (5.30). Лема доведена.

Лема 5.8. Нехай $R_k^-(z, c)$ многочлен Кауера-Фрая для тієї ж струни, але протилежно орієнтованої. Тоді

$$l_n R_{2n}^-(z, 0) = l_0 R_{2n}(z, 0), \quad (5.31)$$

$$l_n R_{2n-1}^-(z, 0) = R_{2n}(z, 1), \quad (5.32)$$

$$R_{2n}^-(z, 1) = l_0 R_{2n-1}(z, 0), \quad (5.33)$$

$$R_{2n-1}^-(z, 1) = R_{2n-1}(z, 1). \quad (5.34)$$

Доведення. Корені многочленів $R_{2n}(z, 0)$ та $R_{2n}^-(z, 0)$ є характеристичними значеннями задачі Діріхле-Діріхле для вихідної та для протилежно спрямованої струни. Отже, один з цих многочленів дорівнює другому, помноженому на ненульову сталу. Тоді (5.31) слідує з (5.13).

Корені многочленів $R_{2n}(z, 1)$ та $R_{2n-1}^-(z, 0)$ є характеристичними значеннями задачі Ноймана-Діріхле для вихідної струни, яка також є задачею Діріхле-Ноймана для струни, протилежної орієнтації. Це значить, що один з цих многочленів дорівнює другому, помноженому на ненульову сталу. Тому (5.32) випливає з (5.11) та (5.13).

Тотожність (5.33) є тотожністю (5.32) для струни протилежної орієнтації.

Корені многочленів $R_{2n-1}(z, 1)$ та $R_{2n-1}^-(z, 1)$ є характеристичними значеннями задачі Ноймана-Ноймана як для вихідної струни, так і для струни протилежної орієнтації. Отже, ці многочлени відрізняються ненульовим сталим множником. Тоді (5.34) випливає з (5.30). Лема доведена.

5.2.3 Чергування власних значень

Лема 5.9. Характеристичні значення чергуються наступним чином:

$$0 < \mu_1 < \nu_1 < \dots < \mu_n < \nu_n; \quad (5.35)$$

$$0 < \xi_1 < \nu_1 < \dots < \xi_n < \nu_n; \quad (5.36)$$

$$0 = \zeta_1 < \mu_1 < \dots < \zeta_n < \mu_n; \quad (5.37)$$

$$0 = \zeta_1 < \xi_1 < \dots < \zeta_n < \xi_n. \quad (5.38)$$

Доведення. Завдяки (5.14) та Лемі 7.18 ми знаємо, що $\frac{R_{2n}(z, c)}{R_{2n-1}(z, c)}$ є раціональною \mathcal{S} -функцією для $c = 0$ та $c = 1$. Отже, властивості (5.35) та (5.36) випливають з Лемі 7.17. Міняючи місцями кінці струни, поміняємо ролі μ_k та ξ_k і отримаємо (5.37) та (5.38). Лема доведена.

5.3 Тотожність Лагранжа та осциляційна теорема Штурма

Наступна теорема є дискретним аналогом тотожності Лагранжа в теорії диференціальних рівнянь.

Теорема 5.10 [Тотожність Лагранжа] Для всіх $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ та $k = 1, \dots, n$,

$$R_{2k-1}(z, c_1)R_{2k}(z, c_2) - R_{2k}(z, c_1)R_{2k-1}(z, c_2) = \frac{c_2 - c_1}{l_0}. \quad (5.39)$$

Доведення Рекурентні співвідношення (5.6) та (5.7) дають

$$\begin{aligned} R_{2k-1}(z, c_1)R_{2k}(z, c_2) - R_{2k}(z, c_1)R_{2k-1}(z, c_2) \\ = R_{2k-1}(z, c_1)R_{2k-2}(z, c_2) - R_{2k-2}(z, c_1)R_{2k-1}(z, c_2) \\ = R_{2k-3}(z, c_1)R_{2k-2}(z, c_2) - R_{2k-2}(z, c_1)R_{2k-3}(z, c_2). \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес та використовуючи (5.8) та (5.9), отримуємо

$$\begin{aligned} R_{2k-1}(z, c_1)R_{2k}(z, c_2) - R_{2k}(z, c_1)R_{2k-1}(z, c_2) \\ = R_{-1}(z, c_1)R_0(z, c_2) - R_0(z, c_1)R_{-1}(z, c_2) = \frac{c_2 - c_1}{l_0}. \end{aligned}$$

В термінах розділу 5.1.1 позначимо розбиття $X = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = l\}$ інтервалу $[0, l]$ через

$$x_k = x_{k-1} + l_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.40)$$

Тоді

$$x_n + l_n = \sum_{j=0}^{n-1} l_j + l_n = l = x_{n+1},$$

та (5.40) виконується також для $k = n + 1$. Тому

$$l_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 0, \dots, n),$$

та (3.1) можна переписати як

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} - \frac{u_{k+1} - u_k}{x_{k+1} - x_k} - m_k z u_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.41)$$

Нехай $z \in \mathbb{C}$ та $u = (u_0, \dots, u_{n+1})$ - вектор зміщень, що задовольняє рекурентні співвідношення (5.41). Бачимо, що будь які два сусідні елементи u_k та u_{k+1} ($k = 0, \dots, n$) однозначно визначають u . Зокрема, якщо $u \neq 0$, то або $u_k \neq 0$, або $u_{k+1} \neq 0$ для всіх $k = 0, \dots, n$. Відповідний рух стільтьєсівської струни після розділення змінних описується дійсною та уявною частинами $\phi(x)e^{i\lambda t}$, коли λ дійсний параметер з $z = \lambda^2$, де x це відстань від точки на струні в стані рівноваги до лівого кінця. Амплітудна функція ϕ є кусково-лінійною та неперервною, її графік складається з сегментів прямої, що з'єднують точки (x_k, u_k) та (x_{k+1}, u_{k+1}) для $k = 0, \dots, n$. Зазначимо, що функція ϕ однозначно визначається розбиттям X та вектором зміщень u , і тому ми позначаємо ϕ через $\phi_{X,u}$.

Точку $x \in [0, l]$ назвемо *вузлом* u , якщо $\phi(x) = 0$. Вузол $x \in (0, l)$ назвемо внутрішнім. Наприклад, на Рис. 3 бачимо один внутрішній вузол.

Зручно розглядати вузли як розбиття стільтьєсівської струни. Для цього узагальнимо поняття стільтьєсівської струни, як такої, що може мати точки розбиття нульової маси. Отже, нехай $m \geq n$ та $\tilde{X} = \{0 = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_n < \tilde{x}_{m+1}\}$ розбиття $[0, l]$ таке, що $X \subset \tilde{X}$. Це означає, що $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{x}_{m+1} = x_{n+1}$ та існує строго зростаюча послідовність $(\tau_k)_{k=0}^{n+1}$ така, що $x_k = \tilde{x}_{\tau_k}$ при $k = 0, \dots, n + 1$. Тоді позначимо $\tilde{m}_{\tau_k} = m_k$ для $k = 1, \dots, n + 1$ та $\tilde{m}_k = 0$, якщо $j \in \{1, \dots, m\}$, але $j \neq \tau_k$ для всіх $k = 1, \dots, n$, та розглянемо рекурентні співвідношення

$$\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}} - \frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k} - \tilde{m}_k z \tilde{u}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, m). \quad (5.42)$$

Рекурентні співвідношення (5.41) та (5.42) мають єдині розв'язки: $u = (u_0, \dots, u_{n+1})$ - перше та $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{n+1})$ - друге, та задовольняють початкові умови для u_0, u_1 та \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 , відповідно. Нагадаємо, що ми позначили відповідні кусково лінійні неперервні функції на $[0, l]$ через $\phi_{X,u}$ та $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ відповідно. Теорема доведена.

Лема 5.11. Нехай X, u та \tilde{X} такі, як описано вище та нехай $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{m+1})$ - розв'язок (5.42) з початковими значеннями $\tilde{u}_0 = u_0$ та

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_0 + \frac{\tilde{x}_1}{x_1}(u_1 - u_0).$$

Тоді $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}} = \phi_{X,u}$.

Доведення. Покажемо за індукцією за $k = 1, \dots, m + 1$, що функції $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ та $\phi_{X,u}$ співпадають на інтервалах $[0, x_k]$ з $k = 1, \dots, n$. Оскільки

$$\frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0}{\tilde{x}_1} = \frac{u_1 - u_0}{x_1},$$

то обидві функції $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ та $\phi_{X,u}$ - лінійні на $[0, \tilde{x}_1]$, з однаковим початковим значенням $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}(0) = u_0 = \phi_{X,u}(0)$ та однаковим нахилом до осі x . З цього випливає вірність базового твердження індукції, якщо $\tilde{x}_1 = x_1$. Інакше, $\tau_1 > 1$ та (5.42) при $j = 1, \dots, \tau_1 - 1$ дає

$$\frac{\tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j}{\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j} = \frac{\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j-1}}{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}},$$

тобто, всі сегменти прямих на графіку $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ між 0 та x_1 мають однаковий нахил, та ми вже знаємо, що цей нахил дорівнює нахилу $\phi_{X,u}$ на $[0, x_1]$. З цього випливає, що $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ співпадає з $\phi_{X,u}$ на $[0, x_1]$ також коли $\tilde{x}_1 \neq x_1$.

Тепер нехай $k \in \{1, \dots, n\}$ та припустимо, що $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ співпадає з $\phi_{X,u}$ на $[0, x_k]$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{\tau_k+1} - \tilde{u}_{\tau_k}}{\tilde{x}_{\tau_k+1} - \tilde{x}_{\tau_k}} &= \frac{\tilde{u}_{\tau_k} - \tilde{u}_{\tau_k-1}}{\tilde{x}_{\tau_k} - \tilde{x}_{\tau_k-1}} - \tilde{m}_{\tau_k} z \tilde{u}_{\tau_k} \\ &= \frac{u_k - u_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} - m_k z u_k \\ &= \frac{u_{k+1} - u_k}{x_{k+1} - x_k}, \end{aligned}$$

де ми використали те, що за індукційною гіпотезою нахили $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ та $\phi_{X,u}$ співпадають на $[x_{k-1}, x_k]$ і тому, і на $[\tilde{x}_{\tau_k-1}, x_k]$. Отже, $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ та $\phi_{X,u}$ мають однаковий нахил на $[x_k, \tilde{x}_{\tau_k+1}]$ та однакове початкове значення $u_k = \tilde{u}_{\tau_k}$ у точці $x_k = \tilde{x}_{\tau_k}$. Діючи як у першій частині доведення, отримуємо, що $\phi_{\tilde{X},\tilde{u}}$ та $\phi_{X,u}$ співпадають на $[x_k, x_{k+1}]$. Лема доведена.

Теорема 5.12. Нехай z_1 та z_2 невід'ємні числа, що задовольняють нерівність $z_2 \geq z_1$ та нехай $u = (u_0, \dots, u_{n+1})$ та $w = (w_0, \dots, w_{n+1})$ - розв'язки рекурентних співвідношень (3.1) з $\lambda^2 = z_1$ та $\lambda^2 = z_2$, відповідно. Якщо $z_1 = z_2$, то нехай ці розв'язки лінійно незалежні. Тоді між кожними двома вузлами u існує принаймні один вузол w .

Доведення. Завдяки Лемі 5.11 можемо вважати, не втрачаючи загальності, що вузли обох u та w включені як точки розбиття. З рівняння (3.1) маємо

$$\frac{(u_k - u_{k-1})w_k}{l_{k-1}} - \frac{(u_{k+1} - u_k)w_k}{l_k} - m_k z_1 u_k w_k = 0$$

та

$$\frac{u_k(w_k - w_{k-1})}{l_{k-1}} - \frac{u_k(w_{k+1} - w_k)}{l_k} - m_k z_2 u_k w_k = 0$$

при $k = 1, \dots, n$ та тому,

$$\frac{(u_k - u_{k-1})w_k}{l_{k-1}} - \frac{(u_{k+1} - u_k)w_k}{l_k} - \frac{u_k(w_k - w_{k-1})}{l_{k-1}} + \frac{u_k(w_{k+1} - w_k)}{l_k} - m_k(z_1 - z_2)u_k w_k = 0,$$

що можна спростити до

$$-\frac{u_{k-1}w_k}{l_{k-1}} - \frac{u_{k+1}w_k}{l_k} + \frac{u_k w_{k-1}}{l_{k-1}} + \frac{u_k w_{k+1}}{l_k} - m_k(z_1 - z_2)u_k w_k = 0. \quad (5.43)$$

Тепер припустимо, що x_{k_1} та x_{k_2} , $0 \leq k_1 < k_2 \leq n + 1$ - сусідні вузли u . Оскільки $u \neq 0$, то маємо $k_2 \neq k_1 + 1$ та, таким чином, $k_1 + 1 \leq k_2 - 1$. Знову за Лемою 5.11 та її доведенням ми можемо видалити безмасові точки розбиття між x_{k_1} та x_{k_2} і ті ж аргументи показують, що існує ціле число k_0 з $k_1 < k_0 < k_2$ таке, що $m_{k_0} > 0$. Додаючи рівняння (5.43) з $k = k_1 + 1, \dots, k_2 - 1$, отримуємо

$$-\frac{u_{k_2} w_{k_2-1}}{l_{k_2-1}} + \frac{u_{k_2-1} w_{k_2}}{l_{k_2-1}} + \frac{u_{k_1+1} w_{k_1}}{l_{k_1}} - \frac{u_{k_1} w_{k_1+1}}{l_{k_1}} = (z_1 - z_2) \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} m_k u_k w_k.$$

Припустимо, що w не має вузлів між x_{k_1} та x_{k_2} . Не втрачаючи загальності, припускаємо, що $u_k > 0$ та $w_k > 0$ при $k = k_1 + 1, \dots, k_2 - 1$, змінюючи знаки перед u та w , якщо необхідно. Тоді $u_{k_1} = 0 = u_{k_2}$ приводить до

$$\frac{u_{k_2-1} w_{k_2}}{l_{k_2-1}} + \frac{u_{k_1+1} w_{k_1}}{l_{k_1}} = (z_1 - z_2) \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} m_k u_k w_k \leq (z_1 - z_2) m_{k_0} u_{k_0} w_{k_0}. \quad (5.44)$$

За побудовою та припущенням ліва частина (5.44) невід'ємна. Однак, права частина від'ємна, якщо $z_1 < z_2$, отже ми дійшли до протиріччя. Нарешті, нехай $z_1 = z_2$. Припустимо, що $w_{k_1} = 0$. Оскільки u та w однозначно визначені величинами u_{k_1}, u_{k_1+1} та w_{k_1}, w_{k_1+1} відповідно через лінійні рекурентні співвідношення (5.44), тоді б ми мали $w = w_{k_1+1} u_{k_1+1}^{-1} u$, що б суперечило лінійній незалежності u та w . Отже, $w_{k_1} > 0$, що значить, що ліва частина (5.44) - додатна, в той час як права дорівнює нулю. Тобто, і в цьому випадку ми прийшли до протиріччя. Теорема доведена.

Наслідок 5.13. Нехай $u = (u_0, \dots, u_{n+1})$ та $w = (w_0, \dots, w_{n+1})$ лінійно незалежні розв'язки рекурентних співвідношень (3.1). Тоді між кожними двома суміжними вузлами u є рівно один вузол w .

Доведення. За Теоремою 5.12 ми знаємо, що між двома суміжними вузлами u , скажімо, у y_1 та y_2 , існує принаймні один вузол w . Якби були б два чи більше таких вузлів, то міняючи ролями u та w отримуємо вузол y_3 графіка u між цими двома вузлами w , отже y_3 має знаходитись між y_1 та y_2 , що суперечить тому, що y_1 та y_2 - суміжні вузли u . Наслідок доведений.

Наслідок 5.14. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для кожної з чотирьох крайових задач, розглянутих у розділі 5.1, власний вектор, що відповідає k -тому власному значенню ($k = 1, \dots, n$), має $k - 1$ внутрішніх вузлів.

Доведення. Розглянемо вектор u нетривіального розв'язку рекурентних співвідношень (3.1) з амплітудною функцією ϕ . Нагадаємо, що графік ϕ складається з $n + 1$ прямолінійних сегментів, жоден з яких не знаходиться у стані рівноваги, тобто не лежить на осі Ox . Отже, кожен прямолінійний сегмент може дати щонайбільше один вузол, що означає, що кількість вузлів u не перевищує $n + 1$.

Далі розглянемо початкові умови $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ та при $z \in [0, \infty)$ позначимо амплітудну функцію відповідного вектора розв'язку $u = u(z)$ через $\phi_D(x, z)$. Нехай $\kappa_D(z)$ - кількість внутрішніх вузлів $u(z)$. Ми вже знаємо, що загальна кількість вузлів не перевищує $n + 1$, та оскільки 0 - вузол в цьому випадку, то $\kappa_D(z) \leq n$ для всіх $z \in [0, \infty)$. Згадуємо, що згідно з Лемою 5.4 характеристичні значення задачі Діріхле позначені через ν_k ($k = 1, \dots, n$) та задовольняють нерівності $0 < \nu_k < \nu_{k+1}$ ($k = 1, \dots, n - 1$). Оскільки 0 та l - вузли $u(\nu_n)$, то $\kappa_D(\nu_n) \leq n - 1$.

Нехай $0 \leq z < y$. Оскільки 0 є вузлом $u(z)$, функція $u(z)$ має принаймні $\kappa_D(z) + 1$ вузлів і тому $u(y)$ має принаймні $\kappa_D(z)$ внутрішніх вузлів згідно з Теоремою 5.12. Це означає, що κ_D - неспадаюча функція на $[0, \infty)$. Крім того, для кожного $k = 1, \dots, n$ обидва кінці інтервалу є вузлами $u(\nu_k)$, і тому $u(\nu_k)$ має $\kappa_D(\nu_k) + 2$ вузлів, і ще раз застосовуючи Теорему 5.12 маємо $\kappa_D(\nu_k) + 1 \leq \kappa_D(z)$ при всіх $z > \nu_k$. Зокрема,

$$0 \leq \kappa_D(\nu_1) < \kappa_D(\nu_2) < \dots < \kappa_D(\nu_n) \leq n - 1.$$

Це відразу дає $\kappa_D(\nu_k) = k - 1$ при $k = 1, \dots, n$, тобто твердження наслідку для задачі Діріхле-Діріхле доведено.

Далі зазначимо, що наведені вище аргументи повністю визначають κ_D на $[0, \infty)$, а саме, $\kappa_D(z) = 0$ при $z \in [0, \nu_1]$, $\kappa_D(z) = k$ при $z \in (\nu_k, \nu_{k+1}]$ ($k = 1, \dots, n$), та $\kappa_D(z) = n$ для $z \in (\nu_n, \infty)$. Тоді з (5.35) випливає твердження наслідку для власних значень задачі Діріхле-Ноймана μ_k ($k = 1, \dots, n$) та, завдяки симетрії, для власних значень задачі Ноймана-Діріхле ξ_k ($k = 1, \dots, n$).

Для власних значень задачі Ноймана-Ноймана ζ_k ($k = 1, \dots, n$), по-перше, зазначимо, що $\zeta_1 = 0$, та у цьому випадку амплітудна функція є ненульовою сталою і тому не має коренів, тобто $\kappa_N(\zeta_1) = 0$, де $\kappa_N(z)$ ($z \in [0, \infty)$) - кількість внутрішніх вузлів розв'язку $u = u(z)$ рівняння (3.1) з $u_0 = u_1 = 1$. Далі за Лемою 5.6 ми знаємо, що функція $u_{n+1} = R_{2n}(z, 1)$ має тільки прості корені і u_{n+1} змінює знак у власних значеннях ξ_k ($k = 1, \dots, n$) задачі Ноймана-Діріхле. Оскільки u - стала при $z = 0$, маємо $R_{2n}(0, 1) = 1 > 0$. Отже, $R_{2n}(z, 1) > 0$ при $z < \xi_1$ та $(-1)^{k-1} R_{2n}(z, 1) > 0$ при $\xi_{k-1} < z < \xi_k$ ($k = 2, \dots, n$). Використовуючи терміни з можливо безмасовими вузлами, нехай \tilde{u}_k - такий вузол, тоді (5.42) дає

$$\frac{\tilde{u}_{k-1}}{\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}} + \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k} = 0,$$

що показує, що \tilde{u}_{k-1} та \tilde{u}_{k+1} мають різні знаки. Інакше кажучи, u змінює знак у кожному вузлі. Тому кількість внутрішніх вузлів парна (непарна), якщо $u_{n+1} > 0$ ($u_{n+1} < 0$). З цих аргументів та рівняння (5.38) отримуємо, що

$$(-1)^{\kappa_N(\zeta_k)} = (-1)^{k-1}. \quad (5.45)$$

З іншого боку, Лема 5.2 показує, що

$$\kappa_D(z) \leq \kappa_N(z) \leq \kappa_D(z) + 1$$

при всіх $z \in [0, \infty)$. Оскільки κ_D неспадаюча, з (5.37) маємо

$$\kappa_D(\mu_{k-1}) \leq \kappa_D(\zeta_k) \leq \kappa_N(\zeta_k) \leq \kappa_D(\zeta_k) + 1 \leq \kappa_D(\mu_k) + 1.$$

Підставляючи $\kappa_D(\mu_j) = j - 1$, приходимо до

$$k - 2 \leq \kappa_N(\zeta_k) \leq k.$$

Це разом з (5.45) призводить до $\kappa_N(\zeta_k) = k - 1$. Наслідок доведено.

6 Обернені задачі за двома спектрами

Розв'язок обернених задач впливає з розвинення у ланцюговий дріб (див. [8], стр. 287).

Теорема 6.1. Нехай задане $l > 0$ разом з двома послідовностями дійсних чисел $(\nu_k)_{k=1}^n$ та $(\mu_k)_{k=1}^n$, які чергуються, як у (5.35).

Тоді існує єдина пара послідовностей додатних чисел $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=0}^n$ з $\sum_{k=0}^n l_k = l$ такі, що характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.19) є ν_k ($k = 1, \dots, n$), а характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.23) є μ_k ($k = 1, \dots, n$).

Доведення. Функція

$$f(z) = l \frac{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\nu_k}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\mu_k}\right)} \quad (6.46)$$

- раціональна \mathcal{S} -функція згідно з Наслідком 7.16. Завдяки Лемі 7.18 існують додатні числа l_0, \dots, l_n та додатні числа m_1, \dots, m_n такі, що

$$f(z) = l_n + \frac{1}{-m_n z + \frac{1}{l_{n-1} + \frac{1}{-m_{n-1} z + \dots + \frac{1}{l_1 + \frac{1}{-m_1 z + \frac{1}{l_0}}}}}}. \quad (6.47)$$

Зрозуміло, що

$$l = f(0) = \sum_{k=0}^n l_k.$$

Визначаючи функції $R_k(z, 0)$ через (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) з $c = 0$ та з вищезазначеними значеннями l_k та m_k , з (5.14) та (6.47) отримуємо

$$f(z) = \frac{R_{2n}(z, 0)}{R_{2n-1}(z, 0)}. \quad (6.48)$$

Але корені $R_{2n}(z, 0)$ - це характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.19), а корені $R_{2n-1}(z, 0)$ - це характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.23). Це показує, що дві побудовані задачі мають потрібні характеристичні значення.

Оскільки раціональна \mathcal{S} -функція f однозначно визначається своїми коренями, полюсами та значенням $f(0)$, які є даними оберненої задачі, частина Лемі 7.18, що описує єдиність, та той факт, що $\frac{R_{2n}(z, 0)}{R_{2n-1}(z, 0)}$ - це \mathcal{S} -функція, показує, що послідовності $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=0}^n$ з $\sum_{k=0}^n l_k = l$ однозначно визначені даними з умов теореми. Теорема доведена.

Теорема 6.2. Нехай $l > 0$ задане разом з двома послідовностями дійсних чисел $(\xi_k)_{k=1}^n$ та $(\nu_k)_{k=1}^n$, які задовольняють (5.36).

Тоді існує єдина пара послідовностей додатних чисел $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=0}^n$ з $\sum_{k=0}^n l_k = l$ таких, що характеристичними значеннями задачі (3.1), (5.18), (5.19) є ν_k ($k = 1, \dots, n$)

та таких, що характеристичними значеннями задачі (3.1), (5.26), (5.19) є ξ_k ($k = 1, \dots, n$).

Доведення. За Теоремою 6.1 існує єдина пара послідовностей додатних чисел $(\hat{m}_k)_{k=1}^n$ та $(\hat{l}_k)_{k=0}^n$ з $\sum_{k=0}^n \hat{l}_k = l$ таких, що задача

$$\frac{\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}}{\hat{l}_{k-1}} - \frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{\hat{l}_k} - \hat{m}_k \lambda^2 \hat{u}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (6.49)$$

$$\hat{u}_0 = 0, \quad \hat{u}_{n+1} = 0$$

має характеристичні значення ν_k ($k = 1, \dots, n$), а задача

$$\frac{\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}}{\hat{l}_{k-1}} - \frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{\hat{l}_k} - \hat{m}_k \lambda^2 \hat{u}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$\hat{u}_0 = 0, \quad \hat{u}_{n+1} = u_n$$

має характеристичні значення ξ_k ($k = 1, \dots, n$).

Підставляючи $m_k = \hat{m}_{n+1-k}$ ($k = 1, \dots, n$), $l_k = \hat{l}_{n-k}$ ($k = 0, \dots, n$), $u_k = \hat{u}_{n+1-k}$ ($k = 0, \dots, n+1$) у (6.49), отримуємо (3.1) і тому, числа ν_k ($k = 1, \dots, n$) - це характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.19), в той час, як числа ξ_k ($k = 1, \dots, n$) - це характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.19).

Єдиність впливає з єдиності, що описана у Теоремі 6.1 та з того факту, що співвідношення між $(m_k)_{k=1}^n$, $(l_k)_{k=0}^n$, $(u_k)_{k=0}^{n+1}$ та $(\hat{m}_k)_{k=1}^n$, $(\hat{l}_k)_{k=0}^n$, $(\hat{u}_k)_{k=0}^{n+1}$ є бієкцією. Теорема доведена.

Теорема 6.3. Нехай $m > 0$ та $l_0 > 0$ задані разом з послідовностями дійсних чисел $(\xi_k)_{k=1}^n$ та $(\zeta_k)_{k=1}^n$, яким властиве чергування (5.38).

Тоді існує пара послідовностей додатних чисел $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=1}^n$ з $\sum_{k=1}^n m_k = m$ такі, що ξ_k ($k = 1, \dots, n$) - характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.19), а ζ_k ($k = 1, \dots, n$) - характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.23).

Доведення. Функція

$$f(z) = -\frac{1}{m} \frac{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\xi_k}\right)}{z \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{z}{\zeta_k}\right)} \quad (6.50)$$

- раціональна \mathcal{S} -функція згідно з Наслідком 7.16. За Лемою 7.18 існують додатні числа l_1, \dots, l_n та додатні числа m_1, \dots, m_n такі, що

$$f(z) = l_n + \frac{1}{-m_n z + \frac{1}{l_{n-1} + \frac{1}{-m_{n-1} z + \dots + \frac{1}{l_1 + \frac{1}{-m_1 z}}}}}. \quad (6.51)$$

Визначаючи функції $R_k(z, 1)$ через (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) з $c = 1$ та з цими значеннями l_k та m_k , з (5.14) та (6.51) отримуємо

$$f(z) = \frac{R_{2n}(z, 1)}{R_{2n-1}(z, 1)}. \quad (6.52)$$

З Лем 5.6 та 5.7 випливає, що $\sum_{k=1}^n m_k = m$. Але корені $R_{2n}(z, 1)$ - це характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.19), в той час як корені $R_{2n-1}(z, 1)$ - характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.23). Звідси випливає, що побудовані задачі мають задані спектри.

Оскільки раціональна \mathcal{S} -функція f однозначно визначена своїми коренями, полюсами та величиною $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z)$, які задані, твердження про єдиність Леми 7.18 і той факт, що $\frac{R_{2n}(z, 1)}{R_{2n-1}(z, 1)}$ - є \mathcal{S} -функція, показують, що послідовності $(m_k)_{k=1}^n$ і $(l_k)_{k=1}^n$ з $\sum_{k=1}^n m_k = m$ однозначно визначені даними задачі. Теорема доведена.

Наступна теорема є варіантом Теорема 6.1 завдяки симетрії.

Теорема 6.4. Нехай $l_0 > 0$ та $l_n > 0$ задані разом з двома послідовностями дійсних чисел $(\xi_k)_{k=1}^n$ та $(\zeta_k)_{k=1}^n$, які мають властивість чергування (5.38).

Тоді існує єдина пара додатних чисел $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=1}^{n-1}$ такі, що характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.19) - це ξ_k ($k = 1, \dots, n$), а характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.23) - це ζ_k ($k = 1, \dots, n$).

Доведення. Функція

$$f(z) = l_n \frac{\prod_{k=1}^n (z - \xi_k)}{z \prod_{k=2}^n (z - \zeta_k)} \quad (6.53)$$

- раціональна \mathcal{S} -функція згідно з Наслідком 7.16 та задовольняє рівняння $\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = l_n$. Згідно з Лемою 7.18 існують додатні числа l_1, \dots, l_{n-1} та додатні числа m_1, \dots, m_n такі, що

$$f(z) = l_n + \frac{1}{-m_n z + \frac{1}{l_{n-1} + \frac{1}{-m_{n-1} z + \dots + \frac{1}{l_1 + \frac{1}{-m_1 z}}}}}. \quad (6.54)$$

Далі продовжуємо як у доведенні Теорема 6.1. Теорема доведена.

Теорема 6.5. Нехай числа $m > 0$ та $l_n > 0$ задані разом з двома послідовностями дійсних чисел $(\mu_k)_{k=1}^n$ та $(\zeta_k)_{k=1}^n$, які чергуються згідно з (5.37).

Тоді існує єдина пара послідовностей додатних чисел $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=1}^n$ з $\sum_{k=1}^n m_k = m$ таких, що характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.23) співпадають з μ_k ($k = 1, \dots, n$), характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.23) співпадають з ζ_k ($k = 1, \dots, n$).

Доведення. Згідно з Теоремою 6.1 існує єдина пара послідовностей додатних чисел $(\hat{m}_k)_{k=1}^n$ та $(\hat{l}_k)_{k=1}^n$ з $\sum_{k=1}^n \hat{m}_k = m$ таких, що задача

$$\frac{\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}}{\hat{l}_{k-1}} - \frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{\hat{l}_k} - \hat{m}_k \lambda^2 \hat{u}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (6.55)$$

$$\hat{u}_0 = \hat{u}_1, \quad \hat{u}_{n+1} = 0$$

має характеристичні значення μ_k ($k = 1, \dots, n$) і таких, що задача

$$\frac{\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}}{\hat{l}_{k-1}} - \frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{\hat{l}_k} - \hat{m}_k \lambda^2 \hat{u}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$\hat{u}_0 = \hat{u}_1, \quad \hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n$$

має характеристичні значення ζ_k ($k = 1, \dots, n$). Відмітимо, що значення \hat{l}_0 тут не потрібне оскільки $\hat{u}_0 = \hat{u}_1$. Поклавши $m_k = \hat{m}_{n+1-k}$ ($k = 1, \dots, n$), $l_k = \hat{l}_{n-k}$ ($k = 0, \dots, n-1$), $u_k = \hat{u}_{n+1-k}$ ($k = 0, \dots, n+1$), у (6.49), отримаємо (3.1) і тому числа μ_k ($k = 1, \dots, n$) - характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.23), в той час як числа ζ_k ($k = 1, \dots, n$) - характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.23).

Єдиність розв'язку впливає з твердження про єдиність в Теоремі 6.5 та того факту, що співвідношення між $(m_k)_{k=1}^n$, $(l_k)_{k=0}^{n-1}$, $(u_k)_{k=0}^{n+1}$ та $(\hat{m}_k)_{k=1}^n$, $(\hat{l}_k)_{k=1}^n$, $(\hat{u}_k)_{k=0}^{n+1}$ - бієкція. Теорема доведена.

Аналогічно, застосовуючи Теорему 6.1 і міняючи місцями значення l_0 та l_n , отримуємо наступну теорему.

Теорема 6.6. Нехай задані $l_0 > 0$ та $l_n > 0$ разом з двома послідовностями дійсних чисел $(\mu_k)_{k=1}^n$ та $(\zeta_k)_{k=1}^n$, які чергуються як у (5.37).

Тоді існує єдина пара послідовностей доданих чисел $(m_k)_{k=1}^n$ та $(l_k)_{k=1}^{n-1}$ такі, що характеристичні значення задачі (3.1), (5.18), (5.23) є μ_k ($k = 1, \dots, n$), а характеристичні значення задачі (3.1), (5.26), (5.23) є ζ_k ($k = 1, \dots, n$).

7 Додаток

Означення 7.1. Раціональна функція - це відношення двох многочленів q та p , де $p \neq 0$ (p не є тотожно нулем):

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}, \quad (z \in \mathbb{C}, p(z) \neq 0).$$

Зауваження 7.2. За основною теоремою алгебри многочлен q , який не є сталою, приймає будь-яке значення, тобто для будь-якого $b \in \mathbb{C}$ існує принаймні одне число $a \in \mathbb{C}$ таке, що $q(a) = b$. З цього випливає, що кожен многочлен q степені $m \in \mathbb{N}$ може бути поданий у вигляді

$$q(z) = C \prod_{j=1}^m (z - \beta_j) \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (7.1)$$

де $\beta_j \in \mathbb{C}$ ($j = 1, \dots, m$) та $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Це зображення поширюється на ненульову сталу, що має степені 0, якщо вважати, що добуток пустої множини множників дорівнює 1.

Корінь многочлена q - це комплексне число z_0 таке, що $q(z_0) = 0$, тобто $z_0 = \beta_{j_0}$ при деякому $j_0 \in \{1, \dots, m\}$. Якщо $z = \beta_{j_0}$ та $\beta_j \neq \beta_{j_0}$ при всіх $j \neq j_0$, то корінь z_0 многочлена q називається простим.

Зауваження 7.3 Нехай f - раціональна функція, що не тотожна нулю, що має вигляд $f = \frac{q}{p}$. Якщо q та p мали б спільні корені, то ми могли б скоротити відповідні множники q та p в зображенні (7.1) для q , та аналогічному для p і, отже, ми можемо вважати, що q та p не мають спільних коренів. Тоді $z_0 \in \mathbb{C}$ називають (простим) коренем функції f , якщо z_0 (простий) корінь q , в той час як $z_0 \in \mathbb{C}$ називають (простим)

полюсом f , якщо z_0 (простий) корінь p . Існують числа $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, комплексні числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ з $\alpha_j \neq \beta_k$ для $j = 1, \dots, n$ та $\beta_k = 1, \dots, m$ та $C \neq 0$ такі, що

$$f(z) = C \prod_{j=1}^m (z - \beta_j) \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j)^{-1} \quad (z \in \mathbb{C}, p(z) \neq 0). \quad (7.2)$$

Многочлени q та p визначені останнім рівнянням с точністю до сталого множника. Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$ корінь f , тоді кількість k індексів j , для яких $\beta_j = z_0$, називається кратністю z_0 як кореня f . Аналогічно, якщо z_0 полюс f , то кількість j , для яких $\alpha_j = z_0$, називається порядком z_0 , як полюса f . Якщо позначити через \bar{f} функцію $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$, то з (7.2) випливає, що

$$\bar{f}(z) = \bar{C} \prod_{j=1}^m (z - \bar{\beta}_j) \prod_{j=1}^n (z - \bar{\alpha}_j)^{-1}.$$

Отже, \bar{f} також раціональна функція.

Означення 7.4. Раціональна функція f називається дійсною раціональною функцією, якщо вона відображає дійсні числа у дійсні, тобто $f(z) \in \mathbb{R}$ для всіх $z \in \mathbb{R}$, що не є полюсами f .

Лема 7.5. Якщо f дійсна раціональна функція, що не є тотожним нулем, то її корені та полюси розташовані симетрично відносно дійсної осі, $\bar{f} = f$, та f може бути записана як $f = \frac{q}{p}$, де q та p дійсні многочлени, що не мають спільних множників.

Доведення. Із зображень функцій f та \bar{f} у Зауваженні 7.3 приходимо до висновку, що $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = f(\bar{z})$ при дійсних z , які не є полюсами \bar{f} або f . Це значить, що раціональна функція $f - \bar{f}$ має нескінченну кількість (дійсних) коренів і, отже, $\bar{f} = f$. Зокрема, якщо β_j - не дійсний корінь функції f , то також і $\bar{\beta}_j$ - це корінь f , а якщо α_j - це не дійсний полюс f , то також і $\bar{\alpha}_j$ - це полюс f . Тоді множники $(z - \beta_j)(z - \bar{\beta}_j)$ та $(z - \alpha_j)(z - \bar{\alpha}_j)$ дійсні при дійсних z . Якщо ж β_j або α_j - дійсне, то множники $z - \beta_j$ та $z - \alpha_j$ - дійсні при дійсних z . Коли всі множники враховані, ми бачимо, що також і C дійсне. Позначаючи

$$q(z) = C \prod_{j=1}^m (z - \beta_j), \quad p(z) = \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j),$$

отримуємо, що q та p дійсні многочлени такі, що $f = \frac{q}{p}$. Лема доведена.

Інколи зручно розглядати раціональну функцію f на \mathbb{C} як функцію, що діє з \mathbb{C} у $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, приймаючи $f(z) = \infty$ у полюсах z функції f .

Лема 7.6. Нехай f раціональна функція, що не є сталою. Тоді $\bar{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{C})$ містить не більше одного елемента.

Доведення. Якщо $\infty \notin f(\mathbb{C})$, то f не має полюсів і, отже, f многочлен, що не є сталою, та $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ випливає з Зауваження 7.2. Тепер нехай $\infty \in f(\mathbb{C})$, але $b \notin f(\mathbb{C})$ при деякому $b \in \mathbb{C}$. Записуючи $f = \frac{q}{p}$ з многочленами q та p , що не мають спільних коренів, маємо $q(z) \neq bp(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Таким чином, многочлен $q - bp$ не має коренів і має бути сталою за основною теоремою алгебри, тобто, існує $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таке, що $q(z) - bp(z) = c$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Тоді для всіх $w \in \mathbb{C}$ з $w \neq b$ маємо

$$q(z) - wp(z) = (b - w)p(z) + c.$$

Оскільки f не є сталою, принаймні один з многочленів q та p має бути не сталою і тому в будь-якому випадку p не є сталою. Таким чином, існує $z_0 \in \mathbb{C}$ таке, що $p(z_0) = \frac{c}{w-b}$, і

тому $q(z_0) - wp(z_0) = 0$. Тому з $p(z_0) \neq 0$ та

$$f(z_0) = \frac{q(z_0)}{p(z_0)} = \frac{q(z_0) - wp(z_0)}{p(z_0)} + w = w$$

бачимо, що $w \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$ належить до $f(\mathbb{C})$. Лема доведена.

Лема 7.7. Нехай f раціональна функція, що не є сталою, нехай $a \in \mathbb{C}$ корінь або полюс f та $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ з $\varphi_1 < \varphi_2$.

У поданні $f(z) = (z - a)^j h(z)$ з $h(a) \neq 0$, як у Лемі 7.3 нехай $\psi_0 = \arg h(a)$. Нехай також $\psi_1 \in \mathbb{R}$ таке, що $j\psi_1 \in (\varphi_1 - \psi_0, \varphi_2 - \psi_0)$. Тоді існує $r_0 > 0$ таке, що для $r \in (0, r_0)$ комплексне число $w = a + re^{i\psi_1}$ не є ані коренем, ані полюсом f та задовольняє $f(w) = |f(w)|e^{i\varphi_0}$ з $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

Доведення. Нагадаємо, що $j \neq 0$ у зображенні функції f , де $j > 0$, якщо a - це корінь f , та $j < 0$, якщо a - це полюс f . Нехай $\eta_0 = \min\{j\psi_1 - \varphi_1 + \psi_0, \varphi_2 - \psi_0 - j\psi_1, \frac{\pi}{6}\}$ та покладемо $\rho = |h(a)| \sin \eta_0$. Завдяки неперервності h у точці a , існує $r_0 > 0$ таке, що $|h(z) - h(a)| < \rho$ та $h(z) = (|h(a)| + \delta(z))e^{i(\psi_0 + \eta(z))}$, якщо $0 < |z - a| < r_0$, де $\delta(z) \in (-\rho, \rho)$ та $\eta(z) \in (-\eta_0, \eta_0)$. Для $r \in (0, r_0)$ та $w = a + re^{i\psi_1}$ маємо

$$f(w) = r^j e^{ij\psi_1} (h(a) + \delta(w)) e^{i(\psi_0 + \eta(w))} = |f(w)| e^{i\varphi_0},$$

де

$$\varphi_0 = j\psi_1 + \psi_0 + \eta(w) \in (j\psi_1 + \psi_0 - \eta_0, j\psi_1 + \psi_0 + \eta_0) \subset (\varphi_1, \varphi_2).$$

Лема доведена.

Означення 7.8. Раціональну функцію f будемо називати неванліннівською, якщо

- (i) f не має полюсів у верхній півплощині \mathbb{C}^+ та у нижній півплощині \mathbb{C}^- ,
- (ii) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ при $\text{Im } z \neq 0$,
- (iii) $\text{Im } z \cdot \text{Im } f(z) \geq 0$ при $\text{Im } z \neq 0$.

Відмітимо, що властивість (ii) еквівалентна тому, що f - раціональна дійсна функція. Слід зазначити, що у [12] неванліннівські функції названі R-функціями.

Лема 7.9. Нехай p та q - дійсні многочлени, що не мають спільних не дійсних коренів. Розглянемо функції

$$\omega = p + iq, \quad f = \frac{q}{p}, \quad g = \frac{\omega}{\bar{\omega}}.$$

1. Наступні твердження еквівалентні:

- (i) $|g(z)| < 1$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$ таких, що $\bar{\omega}(z) \neq 0$;
- (ii) ω не має коренів у відкритій нижній півплощині та $|g(z)| < 1$ при $z \in \mathbb{C}^+$;
- (iii) $p \neq 0$ та $\text{Im } f(z) > 0$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$ з $p(z) \neq 0$;
- (iv) всі корені функцій p та q дійсні, $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$ та $f(\mathbb{C}^-) \subset \mathbb{C}^-$.

2. Нехай $p \neq 0$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

- (i) $|g(z)| \leq 1$ для всіх $z \in \mathbb{C}^+$ таких, що $\bar{\omega}(z) \neq 0$;
- (ii) ω не має коренів у відкритій нижній півплощині і $|g(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{C}^+$;
- (iii) $\text{Im } f(z) \geq 0$ при $z \in \mathbb{C}^+$ з $p(z) \neq 0$;
- (iv) Всі корені функції p дійсні, $q = 0$ або всі корені функції q дійсні, $f(\mathbb{C}^+) \subset \overline{\mathbb{C}^+}$ та $f(\mathbb{C}^-) \subset \overline{\mathbb{C}^-}$.

Доведення. 1. (i) \Rightarrow (ii): З рівняння

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

та припущення, що p та q не мають спільних не дійсних коренів впливає, що також ω та $\bar{\omega}$ не мають спільних не дійсних коренів. Зокрема, $\omega \neq 0$. Оскільки g обмежена у відкритій верхній півплощині, функція g не має полюсів в цій півплощині і тому функція $\bar{\omega}$ не має коренів у відкритій верхній півплощині, що означає що ω не має коренів у відкритій нижній півплощині.

(ii) \Rightarrow (iii): Помічаючи, що p та q дійсні многочлени, приходимо до висновку, що при $z \in \mathbb{C}$ виконується рівність

$$\omega(z) + \bar{\omega}(z) = p(z) + iq(z) + p(z) - iq(z) = 2p(z).$$

Оскільки $|g(z)| < 1$ при $z \in \mathbb{C}^+$ дає $\omega(z) \neq -\bar{\omega}(z)$, то $p(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{C}^+$. Зокрема, $p \neq 0$. Так само $\omega - \bar{\omega} = 2iq$ та отже

$$f = \frac{q}{p} = i \frac{\bar{\omega} - \omega}{\bar{\omega} + \omega} = i \frac{1 - g}{1 + g}. \quad (7.3)$$

Оскільки права частина є перетворення Мьобіуса g , яке відображає внутрішню частину одиничного кола у верхню півплощину, зрозуміло, що з $|g(z)| < 1$ випливає $\text{Im}f(z) > 0$ при $z \in \mathbb{C}^+$ with $p(z) \neq 0$.

(iii) \Rightarrow (iv): Оскільки $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}^+$ з $p(z) \neq 0$ впливає, що q не має коренів у відкритій верхній півплощині. Припустимо, що p має корінь a у \mathbb{C}^+ . Тоді f має полюс (степені k) у a . За Лемою 7.7 з $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = 0$ та ψ_0 знаходимо $0 < r < \text{Re} a$ та $\psi_1 \in ((\psi_0 - \varphi_2)k^{-1}, (\psi_0 - \varphi_1)k^{-1})$ такі, що $f(w) = |f(w)|e^{i\varphi_0} \neq 0$ з $w = a + re^{i\psi_1}$ та $\varphi_0 \in (-\pi, 0)$. Але тоді $w \in \mathbb{C}^+$ та $f(w) \in \mathbb{C}^-$, що суперечить припущенню, що $\text{Im}f(w) > 0$. Тому p не має коренів у \mathbb{C}^+ . З припущення (iii) випливає, що $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$. Оскільки f дійсна раціональна функція, маємо $\bar{f} = f$, що дає $f(\mathbb{C}^-) \subset \mathbb{C}^-$. Зокрема, f має тільки дійсні корені та полюси, якщо такі є, і тому корені многочленів p та q дійсні. (iv) \Rightarrow (i). Це є безпосереднім наслідком (7.3) (див. доведення (ii) \Rightarrow (iii)).

2. Різниця порівняно з частиною 1 полягає в тому, що $|g(z)| = 1$ та $\text{Im}f(z) = 0$ можливі при деякому $z \in \mathbb{C}^+$. В цьому випадку f та, еквівалентно, g - сталі. Дійсно, припустимо, що існує $a \in \mathbb{C}^+$ таке, що $f(a) \in \mathbb{R}$, але f не є сталою. Тоді

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{f(a) - f(z)}$$

визначає раціональну функцію \tilde{f} , яка має полюс у точці a та яка задовольняє $\text{Im}\tilde{f}(z) \geq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}^+$ які не є полюсами \tilde{f} . Як у доведенні частини 1, (iii) \Rightarrow (iv), це призводить до протиріччя. Але якщо f - стала, то також і p та q - дійсні сталі. В цьому випадку, твердження (i)–(iv) виконуються. Лема доведена.

Зауваження 7.10. Нехай f - раціональна неванліннівська функція. Згідно з Означенням 7.8, $\bar{f} = f$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ і тому - всюди. Оскільки кожна раціональна неванліннівська функція є дійсною раціональною функцією і тому характеризується властивістю (iv) в частині 2 Лема 7.9. Дійсно, у доведенні Лема 7.9 ми бачили, що раціональна функція, яка задовольняє умови частини 2, буде задовольняти умови частини 1 тоді та тільки тоді, коли вона є сталою. Рівносильність (iii) та (iv) у частині 1 показує, що раціональна функція, що не є сталою, є неванліннівська, тоді та тільки тоді, якщо вона дійсна раціональна та відображає \mathbb{C}^+ на себе. Зрозуміло, що стала є раціональною неванліннівською тоді та тільки тоді, коли ця стала - дійсна.

Лема 7.11. Якщо $f \neq 0$ - раціональна неванліннівська функція, то функції $-\frac{1}{f}$ та $(\frac{1}{f} + c)^{-1}$ - також раціональні неванліннівські функції за будь-яких дійсних значень c , окрім випадку $f = -\frac{1}{c}$. Лема доведена.

Доведення. Для будь-якого $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ тотожність $\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$ показує, що

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{1}{f(z)} \right) = \frac{\operatorname{Im} f(z)}{|f(z)|^2} \quad \text{та} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{f(z)} + c \right)^{-1} = \frac{\operatorname{Im} \left(-\frac{1}{f(z)} \right)}{\left| \frac{1}{f(z)} + c \right|^2}.$$

Тому твердження леми слідує безпосередньо з Зауваження 7.10. Лема доведена.

Лема 7.12. Нехай f дійсна раціональна функція, що відображає відкриту верхню півплощину на себе. Тоді f має принаймні один корінь або полюс, $\mathbb{C}^+ \setminus f(\mathbb{C}^+)$ є або порожньою множиною, або складається з одного комплексного числа, та всі корені та полюси функції f лежать на дійсній осі, всі вони прості та чергуються, тобто між двома полюсами f лежить один корінь f та між двома коренями f лежить один полюс f . Для кожного $z \in \mathbb{R}$, що не є полюсом f , виконується нерівність $f'(z) > 0$.

Доведення. Оскільки f відображає відкриту верхню півплощину на себе, f не має ні коренів ані полюсів у відкритій верхній півплощині і відкритій нижній півплощині, так як f дійсна. Отже, всі корені та полюси f - дійсні.

Якби f не мала б коренів або полюсів, то f була б сталою (див. Зауваження 7.3). Оскільки f - дійсна на дійсній осі, $f(z)$ була б дійсною при всіх $z \in \mathbb{C}$, що суперечить $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$.

Припустимо, що f має полюс або корінь a , що не є простим. Тоді існує ціле число j , що задовольняє $|j| > 1$, та раціональна функція h з $h(a) \neq 0$ така, що $f(z) = (z-a)^j h(z)$. Оскільки f дійсна на дійсній осі, функція h також дійсна на дійсній осі і, отже, $h(a) = |h(a)|e^{i\psi_0}$ з $\psi_0 = 0$ або $\psi_0 = \pi$. Якщо $j > 1$, покладемо $\psi_1 = \frac{1}{j}(\frac{3\pi}{2} - \psi_0)$. Тоді

$$0 < \frac{\pi}{2j} \leq \psi_1 \leq \frac{3}{2j}\pi \leq \frac{3}{4}\pi < \pi$$

та

$$j\psi_1 = \frac{3}{2}\pi - \psi_0 \in (\pi - \psi_0, 2\pi - \psi_0).$$

Якщо $j < -1$, то покладемо $\psi_1 = \frac{1}{|j|}(\frac{\pi}{2} + \psi_0)$. Тоді

$$0 < \psi_1 \leq \frac{3}{2|j|}\pi \leq \frac{3}{4}\pi < \pi$$

та

$$j\psi_1 = -\frac{\pi}{2} - \psi_0 \in (-\pi - \psi_0, -\psi_0).$$

Застосовуючи Лему 7.7, отримуємо, що в обох випадках існує число $r > 0$ таке, що $w = a + re^{i\psi_1}$ приводить до зображення $f(w) = |f(w)|e^{i\varphi_0}$ з $\varphi_0 \in (\pi, 2\pi)$, якщо $j > 0$, та $\varphi_0 \in (-\pi, 0)$, якщо $j < 0$. Таким чином ми прийшли до протиріччя: $w \in \mathbb{C}^+$ та $f(w) \in \mathbb{C}^-$. Це означає, що корені та полюси функції f прості.

Тепер припустимо, що корені та полюси функції f не чергуються. Якщо існують два суміжні плюси $z_1 < z_2$ функції f , між якими не існує корінь f , то f або додатна, або від'ємна на інтервалі (z_1, z_2) . Отже, або $f(z)$ прямує до ∞ , коли z прямує до z_1 справа та коли z прямує до z_2 зліва, або $f(z)$ прямує до $-\infty$, коли z прямує до z_1 справа та коли z прямує до z_2 зліва. Тому f має досягати локального екстремума при певному $a \in \mathbb{R}$ між цими двома полюсами. Якщо є два суміжних кореня функції f , між якими нема полюса f , тоді f неперервна між цими двома коренями. Тому f має локальний екстремум при певному $a \in \mathbb{R}$ між цими двома коренями. В обох випадках маємо точку $a \in \mathbb{R}$, де $f'(a) = 0$. Оскільки f дійсна на дійсній осі, $f(a) \in \mathbb{R}$, і тому функція $f_1(z) = f(z) - f(a)$

дійсна раціональна функція з $f_1(a) = f_1'(a) = 0$ та з $f_1(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$. Це б означало, що корінь a функції f_1 - не простий. Однак, ми вже довели, що корені функції f_1 - прості. Це протиріччя показує, що корені функції f чергуються з її полюсами.

З Лемми 7.6 ми знаємо, що $\overline{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{C})$ містить здебільшого один елемент, що означає, що також і множина $\mathbb{C}^+ \setminus f(\mathbb{C})$ містить здебільшого один елемент. Однак, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ та $f(\mathbb{C}^-) \subset \mathbb{C}^-$ (див. Лему 7.9, частина 1, (iii) \Rightarrow (iv)), що означає, що множина $\mathbb{C}^+ \setminus f(\mathbb{C}^+) = \mathbb{C}^+ \setminus f(\mathbb{C})$ має не більше, ніж один елемент.

Нарешті, коли $a \in \mathbb{R}$ не є полюсом функції f , то також і функція $f - f(a)$ дійсна раціональна функція, яка відображає \mathbb{C}^+ на себе. Отже, як ми вже довели, a є простим коренем функції $f - f(a)$. Отже,

$$f(z) = f(a) + (z - a)h(z),$$

де h - дійсна раціональна функція та $h(a) \neq 0$. Оскільки

$$\operatorname{Im}f(a + i\varepsilon) > 0, \quad \text{де } \varepsilon > 0,$$

отримуємо

$$\operatorname{Re}h(a + i\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im}f(a + i\varepsilon) > 0.$$

Завдяки неперервності,

$$f'(a) = h(a) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Re}h(a + i\varepsilon) \geq 0,$$

та $f'(a) > 0$ випливає з нерівності $h(a) \neq 0$. Лема доведена.

Теорема 7.13. Дійсна раціональна функція f відображає відкриту верхню півплощину на себе тоді та тільки тоді, коли f можна представити у вигляді

$$f(z) = C \prod_{k=1}^m (z - \beta_k) \prod_{k=1}^n \frac{1}{z - \alpha_k}, \quad (7.4)$$

де $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m + n > 0$, послідовності дійсних чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ чергуються, $C > 0$, якщо f має принаймні один корінь та найбільший корінь функції f більший ніж кожен полюс f , та $C < 0$, якщо f має принаймні один полюс та найбільший полюс функції f більший, ніж кожен корінь f .

Доведення. Якщо f відображає відкриту верхню півплощину на себе, то зображення (7.4) з $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ та властивість чергування коренів та полюсів випливає з рівняння (7.2) та Лемми 7.12. Нехай a найбільше з чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$. Згідно з Лемою 7.12 маємо, що $f'(x) > 0$ при $x \in (a, \infty)$, тобто, f зростає на інтервалі (a, ∞) . Якщо a це корінь функції f , то з цього випливає, що f додатна на інтервалі (a, ∞) . Оскільки всі множники у добутку додатні, стала C має також бути додатною. Якщо, однак, a - це полюс f , то a - корінь функції $-\frac{1}{f}$, де $-\frac{1}{f}$ відображає верхню півплощину на себе за Лемою 7.11. З того, що ми довели, випливає $-\frac{1}{C} > 0$, що означає, що $C < 0$.

Нехай тепер f має форму (7.4). Вочевидь, f раціональна функція. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ та $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m$.

Спочатку розглянемо випадок, в якому найбільший корінь f , якщо вони є, більший, ніж найбільший полюс f , якщо вони є. У разі, коли кількість полюсів співпадає з кількістю коренів, тобто $m = n$, чергування описується нерівностями

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n.$$

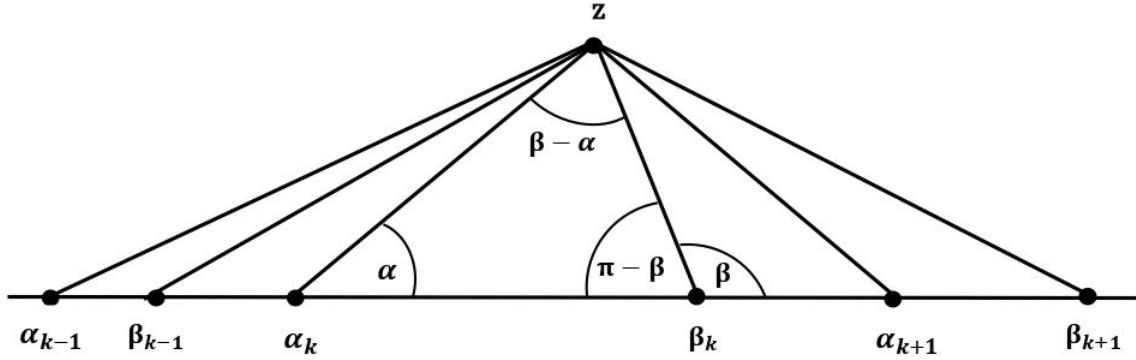


Рис. 4.

Позначаючи через $\alpha = \arg(z - \alpha_k)$ та $\beta = \arg(z - \beta_k)$, з Рис. 4 бачимо, що при $\text{Im}z > 0$ різниця $\alpha - \beta$ є кут, під яким видно сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$ дійсної осі з точки z . Оскільки в цьому випадку $C > 0$, то з

$$\arg f(z) = \sum_{k=1}^n [\arg(z - \beta_k) - \arg(z - \alpha_k)],$$

випливає, що $0 < \arg f(z) < \pi$ при $\text{Im}z > 0$, тобто, $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$.

Якщо тепер кількість полюсів відрізняється від кількості коренів, як у випадку, коли β_m більше ніж кожний з полюсів q , то чергування дає $m = n + 1$. Помічаючи, що $0 < \arg(z - x_1) < \arg(z - x_2) < \pi$ при всіх $z \in \mathbb{C}^+$ та всіх дійсних числах x_1, x_2 з $x_1 < x_2$ отримуємо, що при $z \in \mathbb{C}^+$ виконується

$$\begin{aligned} 0 < \arg(z - \beta_1) &\leq \arg(z - \beta_1) + \sum_{k=1}^n [\arg(z - \beta_{k+1}) - \arg(z - \alpha_k)] \\ &= \arg f(z) = \sum_{k=1}^n [\arg(z - \beta_k) - \arg(z - \alpha_k)] + \arg \beta_m \\ &\leq \arg \beta_m < \pi. \end{aligned}$$

Таким чином, і в цьому випадку також $f(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$.

Залишається розглянути випадок, в якому найбільший полюс функції f більший ніж найбільший корінь f . Тоді $-\frac{1}{f}$ має корені α_k та полюси β_k , що чергуються як описано вище, а сталий множник $-\frac{1}{C} > 0$. Тому функція $-\frac{1}{f}$ відображає верхню півплощину на себе, що вже було показано вище. З урахуванням Зауваження 7.10 та Лема 7.11 приходимо до висновку, що f відображає верхню півплощину на себе. Теорема доведена.

Означення 7.14. Раціональна функція f називається стільтьєсівською або \mathcal{S} -функцією, якщо вона раціональна неванліннівська функція, що задовольняє наступні умови:

- (i) f не має полюсів на $(-\infty, 0)$,
- (ii) $f(z) > 0$ при $z \in (-\infty, 0)$.

Раціональна \mathcal{S} -функція f називається раціональною \mathcal{S}_0 -функцією, якщо

- (iii) 0 не є полюс функції f .

Лема 7.15. Раціональна неванліннівська функція, яка не є сталою, є раціональною \mathcal{S} -функцією тоді та тільки тоді, коли має принаймні один полюс і найменший полюс не є від'ємним і є меншим за всі корені, якщо вони є.

Доведення. Нехай f - раціональна \mathcal{S} -функція, що не є стала. Тоді f має принаймні один корінь або полюс і нехай a - найменший серед коренів та нулів. За припущенням і Лемою 7.12, $f(z) > 0$ при $z \in (-\infty, 0)$ та $f'(z) > 0$ при $z \in (-\infty, a)$, з чого випливає, що $a \geq 0$ та a - полюс.

З іншого боку, якщо f - раціональна неванліннівська функція з принаймні одним полюсом або коренем і така, що найменший полюс не від'ємний і менший за всі корені, то з $f'(z) > 0$ та $f(z) \neq 0$ при всіх $z \in (-\infty, 0)$ випливає $f(z) > 0$ при всіх $z \in (-\infty, 0)$. Лема доведена.

Наслідок 7.16. Раціональна функція f , що не є сталою, є раціональною \mathcal{S} -функцією тоді та тільки тоді, коли f має форму

$$f(z) = C_0 \prod_{k=1}^m (\beta_k - z) \prod_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k - z}, \quad (7.5)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а зростаючі послідовності $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ чергуються $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_1 < \beta_1$, якщо $m > 0$ та $C_0 > 0$.

Доведення. Це твердження випливає безпосередньо з Лемми 7.15 та Теорему 7.13 з $C_0 = (-1)^{m+n}C$, якщо приймемо до уваги, що $m = n$ або $m = n - 1$ та, що $m = n$ тоді та тільки тоді, коли $C > 0$. Наслідок доведено.

Лема 7.17. Нехай $r \in \mathbb{N}$ та f раціональна \mathcal{S} -функція з r полюсами. Тоді

1. Існує єдина пара чисел a та b та єдина раціональна функція g , яка або тотожно дорівнює нулю, або має не більше ніж $r - 1$ нулів, та така, що

$$f(z) = a + \frac{1}{-bz + g(z)}; \quad (7.6)$$

2. $a = \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) \geq 0$, $b > 0$, та кількість коренів функції f дорівнює r , якщо $a > 0$, та $r - 1$, якщо $a = 0$;

3. Полюси α_k та корені β_k функції f прості та чергуються,

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{r-1} < \alpha_r < \beta_r \quad \text{if } a > 0, \quad (7.7)$$

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{r-1} < \alpha_r \quad \text{if } a = 0; \quad (7.8)$$

4. Функція f строго зростаюча між полюсами, тобто, в інтервалах $(-\infty, \alpha_1)$, (α_k, α_{k+1}) , $k = 1, \dots, r - 1$ та (α_r, ∞) .

5. Якщо $r = 1$, то g це невід'ємна стала, а $g = 0$ тоді та тільки тоді, коли 0 є полюс f ;

6. Якщо $r > 1$, то $g \neq 0$ та $h = \frac{1}{g}$ є раціональна \mathcal{S} -функція з $r - 1$ полюсами та $r - 1$ коренями $\beta_{h,k}$, $k = 1, \dots, r - 1$, котрі прості та чергуються, 0 є полюс функції h тоді та тільки тоді, коли 0 полюс функції f , та

$$\beta_k < \beta_{h,k} < \beta_{k+1} \quad \text{for } k = 1, \dots, r - 1 \text{ if } a > 0,$$

$$\beta_k = \beta_{h,k} \quad \text{for } k = 1, \dots, r - 1 \text{ if } a = 0.$$

Доведення. З Лемми 7.12 та Зауваження 7.10 ми знаємо, що корені та полюси функції f прості та чергуються, що разом з Лемою 7.15 призводить до висновку, що f має r або $r - 1$ коренів. Отже, f допускає зображення

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$$

$$p(z) = z^r + \sum_{j=0}^{r-1} c_j z^j,$$

$$q(z) = \sum_{j=0}^r d_j z^j,$$

де p та q не мають спільних коренів, їх коефіцієнти дійсні та $d_r \neq 0$ або $d_{r-1} \neq 0$. Нижче ми покажемо, що $a = d_r$, що завершить доведення частини 3, знову з урахуванням Лема 7.15.

Оскільки функція f не є сталою, рівняння (7.6) рівносильне наступному

$$\begin{aligned} g(z) &= bz + \frac{1}{f(z) - a} \\ &= \frac{bz(q(z) - ap(z)) + p(z)}{q(z) - ap(z)} \\ &= \frac{p_g(z)}{q_g(z)} \end{aligned}$$

3

$$q_g(z) = q(z) - ap(z), \quad p_g(z) = bzq_g(z) + p(z).$$

Більш явно, те, що функція f не є сталою призводить до того, що q_g не є тотожним нулем. Ми бачимо, що q_g та p_g не мають спільних коренів тому, що $q_g(z) = p_g(z) = 0$ призвело б до протиріччя $p(z) = 0$ та $q(z) = ap(z) = 0$.

Для виконання твердження 1 необхідно та достатньо знайти числа a та b такі, що степень многочлена p_g не перевищує $r - 1$. Це означає, що коефіцієнти перед z^{r+1} та z^r у розкладі Тейлора многочлена p_g в околі 0 мають дорівнювати нулю, що означає наступні рівняння

$$b(d_r - a) = 0 \quad \text{та} \quad b(d_{r-1} - ac_{r-1}) + 1 = 0. \quad (7.9)$$

Друге з рівнянь (7.9) дає $b \neq 0$, і тому перше з цих рівнянь має єдиний розв'язок $a = d_r$. Очевидно, що $a = d_r = \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) \geq 0$.

Для того, щоб знайти b з другого з рівнянь (7.9), розглянемо випадок $d_r = 0$. Тоді $d_{r-1} \neq 0$ та $f(z) > 0$ при $z \in (-\infty, 0)$ дає $d_{r-1} < 0$. Таким чином, маємо єдине $b = -d_{r-1}^{-1}$, яке додатне.

Нехай тепер $d_r \neq 0$. Тоді

$$c_{r-1} = - \sum_{j=0}^r \alpha_j, \quad \frac{d_{r-1}}{d_r} = - \sum_{j=0}^r \beta_j,$$

та (7.7) приводить до

$$\frac{d_{r-1}}{d_r} < c_{r-1}.$$

Таким чином, друге з рівнянь (7.9) має єдиний розв'язок b , та $d_r = a > 0$ показує, що

$$b = \frac{1}{a \left(c_{r-1} - \frac{d_{r-1}}{d_r} \right)} > 0.$$

Твердження 1 та 4 доведені.

Зазначимо, що з вищенаведеного доведення бачимо, що степені обох многочленів q_g та p_g не перевищують $r - 1$ та що q_g не є тотожним нулем, оскільки f не є стала. Більш того, $p_g(0) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $p(0) = 0$. Якщо 0 не є полюс функції f , то зростання f на інтервалі $(-\infty, 0]$ призводить до $f(0) > \lim_{x \searrow -\infty} f(x) = a$ і тому

$$g(0) = \frac{1}{f(0) - a} > 0. \quad (7.10)$$

У випадку $r = 1$ обидві функції q_g та p_g є сталими. Вище ми бачили, що ці сталі є нулем, якщо 0 є полюсом f , та додатна величина в іншому випадку, див. (7.10). Твердження 5 доведено.

Тепер займемося твердженням 6 та далі припустимо, що $r > 1$. З $q_g(\alpha_k) = q(\alpha_k)$ та властивості чергування коренів та полюсів функції f випливає, що q_g має протилежні знаки у послідовних точках α_k . Тому q_g має непарну кількість коренів, враховуючи кратність, у кожному з інтервалів (α_k, α_{k+1}) , $k = 1, \dots, r - 1$. Тому q_g має ступінь $r - 1$ та всі її корені дійсні та прості, і тому їх можна занумерувати як $\beta_{h,k}$, $k = 1, \dots, r - 1$ і вони задовольняють нерівності

$$\alpha_k < \beta_{h,k} < \alpha_{k+1}, \quad k = 1, \dots, r - 1. \quad (7.11)$$

Якщо $a = 0$, то $q_g = q$, і, отже, $\beta_{h,k} = \beta_k$ при $j = 1, \dots, r - 1$. Якщо $a > 0$, то $q_g(\beta_k) = -ap(\beta_k)$, так що q_g має протилежні знаки у послідовних точках β_k , що означає, що q_g має непарну кількість коренів, з урахуванням кратностей, у кожному з інтервалів (β_k, β_{k+1}) , $k = 1, \dots, r - 1$. З цього випливає, що $\beta_k < \beta_{h,k} < \beta_{k+1}$ при $k = 1, \dots, r - 1$.

З $p_g(\alpha_k) = b\alpha_k q_g(\alpha_k)$ випливає, що знаки $p_g(\alpha_k)$ чергуються зі зростанням k (виключаючи $\alpha_k = 0$). В кожному випадку, випливає, що p_g має $r - 1$ простих коренів. При $k = 1, \dots, r - 1$ маємо $p_g(\beta_{h,k}) = p(\beta_{h,k})$. Оскільки корені многочлена p прості, p має протилежні знаки на суміжних інтервалах (α_{k-1}, α_k) , (α_k, α_{k+1}) . З урахуванням (7.11), приходимо до висновку, що $p_g(\beta_{h,k})$ приймає значення протилежного знаку при послідовних значеннях k . Отже, між кожними двома сусідніми коренями q_g знаходиться непарна кількість коренів p_g . Оскільки q_g та p_g мають однакову кількість коренів з урахуванням кратностей, приходимо до висновку, що корені q_g чергуються з коренями p_g .

Якщо $\alpha_1 = 0$, то з $p_g(0) = p(0) = 0$ та $0 = \alpha_1 < \beta_{h,1}$ випливає, що найменший корінь многочлена p_g менший, ніж найменший корінь q_g . Якщо $\alpha_1 > 0$, то з нерівностей $0 < \alpha_1 < \beta_{h,1} < \alpha_2$ випливає, що $p_g(0) = p(0)$ та $p_g(\beta_{h,1}) = p(\beta_{h,1})$ мають протилежні знаки, що означає, що p_g має додатний корінь, що менший, ніж найменший корінь $\beta_{h,1}$ многочлену q_g . Отже, в будь-якому разі найменший корінь многочлена p_g невід'ємний і менший ніж найменший корінь многочлена q_g .

Загалом, ми вже показали, що $h = \frac{1}{g}$ має вигляд (7.5) з усіма властивостями, наведеними у Наслідку 7.15, крім, можливо, $C_0 > 0$. Це значить, що h або $-h$ раціональна \mathcal{S} -функція. Тому розглянемо

$$g'(z) = b - \frac{f'(z)}{(f(z) - a)^2}.$$

Полюс $\beta_{h,1}$ функції g є корінь функції $z \mapsto f(z) - a$ і тому $\lim_{x \rightarrow \beta_{h,1}} (f(x) - a)^2 = 0$, тоді як $f'(\beta_{h,1}) > 0$, зважаючи на Лему 7.12. Отже, $\lim_{x \rightarrow \beta_{h,1}} g'(x) = -\infty$, з чого випливає, що $h'(x)$ - додатна при дійсних x в околі $\beta_{h,1}$. Зважаючи на Лему 7.12, приходимо до

висновку, що $-h$ не може бути раціональною неванлінівською функцією і тому, h має бути раціональною \mathcal{S} -функцією. Лема доведена.

Лема 7.18. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та f раціональна \mathcal{S} -функція з n полюсами. Тоді

1. Функцію f можна подати у вигляді ланцюгового дроби

$$f(z) = a_n + \frac{1}{-b_n z + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{-b_{n-1} z + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_1 z + c_0}}}}}, \quad (7.12)$$

де $a_n = \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) \geq 0$, $a_k > 0$ при $k = 1, \dots, n-1$, $b_k > 0$ при $k = 1, \dots, n$, $c_0 \geq 0$, при цьому $c_0 = 0$ тоді і тільки тоді, коли 0 полюс f ;

2. Кількість коренів функції f дорівнює n , якщо $a_n > 0$, та $n-1$, якщо $a_n = 0$;

3. Всі полюси α_k та корені β_k функції f прості та чергуються,

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n \quad \text{якщо } a_n > 0, \quad (7.13)$$

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n \quad \text{якщо } a_n = 0; \quad (7.14)$$

4. Функція f строго зростаюча між своїми полюсами, тобто, в інтервалах $(-\infty, \alpha_1)$, (α_k, α_{k+1}) , $k = 1, \dots, n-1$, та (α_n, ∞) .

5. Якщо позначити через $f_j(z)$ $n-j$ -ий хвіст ланцюгового дроби (7.12) при $j = 1, \dots, n$, тобто

$$f_j(z) = a_j + \frac{1}{-b_j z + \frac{1}{a_{j-1} + \frac{1}{-b_{j-1} z + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{-b_1 z + c_0}}}}}, \quad (7.15)$$

то всі корені f_j дійсні та прості. Занумеруємо їх так $\beta_1^{(j)} < \dots < \beta_{m_j}^{(j)}$ з $m_j = j$, якщо $j < n$ або $j = n$ і $a_n > 0$, та $m_n = n-1$, якщо $a_n = 0$, і тоді:

$$\begin{aligned} \beta_k^{(j)} &< \beta_k^{(j-1)} < \beta_{k+1}^{(j)} \quad \text{при } j = 2, \dots, m_n, \quad k = 1, \dots, j-1, \\ \beta_k^{(n)} &= \beta_k^{(n-1)} \quad \text{при } k = 1, \dots, n-1 \text{ якщо } a_n = 0; \end{aligned}$$

тут ми бачимо $\beta_k = \beta_k^{(n)}$.

Доведення. Твердження 2, 3 та 4 випливають з Лема 7.16 з $a_n = a$.

Доведемо твердження 1 та 5 за індукцією за n . При $n = 1$ Лема 7.16 з $r = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = b$ та $c_0 = g$ показує, що, дійсно, властивості 1 та 5 виконуються з $f_1 = f$.

Нехай тепер $n > 1$. З Лема 7.16 при $r = n$ ми бачимо, що існують $a_n = a \geq 0$, $b_n = b > 0$ та раціональна \mathcal{S} -функція h з $n-1$ коренями та $n-1$ полюсами такі, що

$$f(z) = a_n + \frac{1}{-b_n z + \frac{1}{h(z)}}.$$

За індукційним припущенням h можна подати у вигляді (7.12) з n замість $n - 1$ та $a_{n-1} > 0$. Тому $h = f_{n-1}$, як у (7.15). Цим доведено твердження 1 для n . Решта тверджень частини 5 випливає з індукційного припущення для $j < n$ та Лема 7.17 для $j = n$.

Ми ще маємо довести єдиність зображення (7.12). Для цього помічаємо, що для кожного такого зображення з (комплексними) числами a_j , b_j та c_0 та відповідними зображеннями (7.15) маємо

$$f_j(z) = a_j + \frac{1}{-b_j z + \frac{1}{f_{j-1}(z)}} \quad (7.16)$$

для $j = 2, \dots, n$. Раціональні функції f_j можна подати у вигляді $\frac{q_j}{p_j}$ з многочленами p_j та q_j , що не мають спільних коренів. Тоді рекурсивно для $j = 2, \dots, n$,

$$f_j(z) = a_j + \frac{1}{-b_j z + \frac{p_{j-1}(z)}{q_{j-1}(z)}} = \frac{q_{j-1}(z) - a_j b_j z q_{j-1}(z) + a_j p_{j-1}(z)}{-b_j z q_{j-1}(z) + p_{j-1}(z)}.$$

Помічаючи, що f_1 має один полюс та щонайбільше один корінь, за індукцією отримуємо, що f_j має щонайбільше j полюсів та коренів. Зокрема, при $n > 1$, $f_n = f$ має n коренів та f_{n-1} має як найбільше $n - 1$ коренів. Зважаючи на Лему 7.16, числа a_n та b_n так само, як і раціональна функція f_{n-1} , єдині, а f_{n-1} раціональна \mathcal{S} -функція. За індукцією випливає, що числа $a_{n-1}, \dots, a_2, b_{n-1}, \dots, b_2$ так же як і раціональна \mathcal{S} -функція f_1 єдині. Знову, використовуючи Лему 7.16, отримуємо, що a_1, b_1 та c_0 - єдині. Лема доведена.

Лема 7.19. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та f задана рівнянням (7.12) з $a_n \geq 0$, $a_k > 0$ при $k = 1, \dots, n - 1$, $b_k > 0$ при $k = 1, \dots, n$ та $c_0 \geq 0$. Тоді f - раціональна \mathcal{S} -функція.

Доведення. Для $j = 1, \dots, n$ задамо f_j рівнянням (7.15). Ми хочемо довести за індукцією, що f_j - раціональна \mathcal{S} -функція. Ми знаємо, що згідно з Наслідком 7.16

$$f_1(z) = a_1 + \frac{1}{-b_1 z + c_0}$$

має полюс у $z_0 = \frac{c_0}{b_1} \geq 0$. Тоді

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{b_1} \frac{1}{z_0 - z} & \text{if } a_1 = 0, \\ a_1 \frac{z_0 + \frac{1}{a_1 b_1} - z}{z_0 - z} & \text{if } a_1 > 0, \end{cases}$$

означає, що f_1 - раціональна \mathcal{S} -функція.

Нехай тепер $n > 1$, $2 \leq j \leq n$ та припустимо, що f_{j-1} раціональна \mathcal{S} -функція. Тоді f_j може бути подана у вигляді (7.16). За Лемою 7.11, застосованою до f_{j-1} та з того, що сума неванліннівських функцій є неванліннівська функція, маємо, що

$$-\frac{1}{f_{j-1}}, \quad z \mapsto b_j z - \frac{1}{f_{j-1}(z)}, \quad z \mapsto \frac{1}{-b_j z + \frac{1}{f_{j-1}(z)}}, \quad f_j$$

є раціональними неванліннівськими функціями. Крім того, з $f_{j-1}(z) > 0$ при $z < 0$ випливає, що $f_j(z) > 0$ при $z < 0$. Лема доведена.

References

- [1] Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. Основы теории цепей. "Энергия" Москва, 1973, 752с. (Метод Кауэра с.498, 507)
- [2] W. Cauer, Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit, Arch. Elektrotech. **17**, (1926), no. 4, 355–388.
- [3] T.C. Fry, The use of continued fractions in the design of electrical networks. Bull. Am. Math. Soc., **35** (1929), 153. American Mathematical Society, Providence, RI. [4]
- [4] S.J. Cox, M. Embree, J.M. Hokanson, *One Can Hear the Composition of a String: Experiments with an Inverse Eigenvalue Problem*, SIAM Rev. **54** (2012), no.1, 157–178.
- [5] Дж. В. Стретт (лорд Релей). Теория звука, т. 1, Москва, Гостехиздат, 1955, 504 с.
- [6] Р. Хорн, Ч. Джонсон. Матричный анализ. Москва, "Мир", 1989, 655 с.
- [7] В. М. Тихомиров, В. В. Успенский. Десять доказательств основной теоремы алгебры // Математическое просвещение. — МЦНМО, 1997. — № 1. — С. 50—70.
- [8] Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*. ГИИТЛ, Москва-Ленинград, (1950), German transl. Akademie Verlag, Berlin, 1960, English transl. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2002.
- [9] Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Москва, "Наука", 1988, 548 с.
- [10] G. Gladwell, *Inverse problems in vibration*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [11] G. Gladwell, *Matrix inverse eigenvalue problems*. In: G. Gladwell, A. Morassi, eds., *Dynamical Inverse Problems: Theory and Applications*. CISM Courses and Lectures 529 (2011), 1–29.
- [12] I. S. Kac, M. G. Krein. *R-functions. Analytic functions mapping the upper half plane into itself*. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2 **103** (1974), 1-18
- [13] П.Ф. Курчанов, А.Д. Мышкис А.М. Филимонов. Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера. Прикладная математика и механика, **55**, no. 6, (1991) 989–995.
- [14] В.А. Марченко, *Введение в теорию обратных задач спектрального анализа*. Акта, Харків, 2005.
- [15] M. Möller, V. Pivovarchik. Damped star graphs of Stieltjes strings. Proc. Amer. Math. Soc. **145**, no. 4, (2017) 1717–1728.
- [16] O. Martynyuk, V. Pivovarchik, S. Tretter. Inverse problem for a damped Stieltjes string from parts of spectra. Appl. Anal. **94** (2015), no. 12, 2605–2619.
- [17] V. Pivovarchik, Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a star-shaped graph, Math. Nachr. **280**, (2007), no. 13–14, 1595–1619.
- [18] V. Pivovarchik, Existence of a tree of Stieltjes strings corresponding to two given spectra. J. Phys. A: Math. Theor. **42**, (2009) 375213, 16pp

- [19] V. Pivovarchik, C. Tretter, Location and multiples of eigenvalues for a star graph of Stieltjes strings, *J. Difference Equ. Appl.*, **21** (2015), no. 5, 383–402.
- [20] V. Pivovarchik, N. Rozhenko, C. Tretter, *Dirichlet-Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings*. *Linear Algebra Appl.* **439:8** (2013), 2263-2292 (open access).