Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації
з дисципліни «Математичний аналіз»,
розділ « Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

уклад.: Г. Д. Урум, О. І. Олефір

Одеса 2021 р.

Зміст

ВСТУП

При застосуванні модульної системи навчання запропоновані методичні рекомендації є модулем, який входить до системи модулів, в яких закладені основні розділи з дисципліни «Математичний аналіз». Ці розділи (модулі) об'єднані за змістом із урахуванням відведених кредитів на вивчення усього курсу з математичного аналізу. З метою контролю вивчення та опанування основ математичного аналізу кожен модуль є заліковим з обов'язковимо цінюванням якості засвоєння матеріалу студентами згідно прийнятої в університеті бальної системи.

Містить основний теоретичний матеріал із розділу « Диференціальне числення функцій багатьох змінних», велику кількість розв'язаних прикладів, варіанти індивідуальних завдань. Призначені для студентів І-гокурсуденної, заочної форми навчання усіх спеціальностей.

1. Функції багатьох незалежних змінних. Область існування. Частинні похідні. Повний диференціал.

Основні відомості з теорії

1. Змінні$x, y, z, \dots t$називаються незалежними між собою, якщо кожна з них можена буватибудь-яких значень в своїй областізміни, незалежно від того, які значеннянабувають при цьому інші змінні.

2. Змінна величина u називається функцією незалежнихзмінних $x, y, z, \dots t$, якщо кожній системі значеньцих змінних в областіїх змінивідповідаєединевизначене значення u^*.

Символічно функція u незалежних змінних $x, y, z, \dots t$ записується так:

$$u = f(x, y, z, \dots t)$$

3. Областюіснування функції$f(x, y, z, \dots t)$ називається сукупність значень незалежнихзмінних$x, y, z, \dots t$, при яких функція визначена (тобтонабуває дійсних значень). Область існування функції називається також областю визначення функції.

4.Частинний приріст функції. Якщо$u = f(x,y,z,\ldots t)$і одна із незалежних змінних, наприкладx, одержала прирістΔx, то частинним приростом$\Delta_x u$функції називається різниця$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)$. Відповідно,

$$\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z), \quad \Delta_z u = f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

5. Часинні похідні. Складемо відношення$\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$. Якщо при прямуванні$\Delta x$до нуляцевідношеннязбігаєтьсядопевної границі, ця границя називається частинною похідною функції $u = f(x,y,z)$ по незалежнійзміннійxі позначається одним з символів $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, u'_x, f'_x$

Таким чином,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x},$$

Аналогічно визначаються частинні похідні функції$u = f(x,y,z)$по незлежнимзміннимyіz.Частинна похідна по y позначається одним з символів $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, u'_y, f'_y$, по z- одним з $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z}, u'_z, f'_z$ символів: .

Обчислення частинних похідних функціїдекількох незалежних змінних виконуєтьсяза тими ж правилами, заякими обчислюються похідні функції однієї незалежної змінної, тільки слідмати на увазі, що при визначені частинної похідної треба вважати постійними всі незалежні змінні, крім тієї, по якій обчислюється частинна похідна.

Приклад 1. Знайти область існування функції$u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Представимо функцію в виигляді$u = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$. Функція визначена для тих значеньx іy, які задовольняють нерівність$x^2 + y^2 \le 4$. Функція визначена в точках, що лежать всередині кола $x^2 + y^2 = 4$і на його межі, оскільки для всіх точок, що лежать зовні, має місце нерівність $x^2 + y^2 > 4$ Приклад 2. Знайти область існування функції $z = ln(x - y)$

Розв’язання. Оскількивід’ємні числа и нуль логарифмів не мають, то має виконуватися нерівність $x - y > 0$,тобто$y < x$.

Точки площиниxOy, координати яких задовольняють цю нерівність, розташовані під прямою,причому точки, що лежать на цій прямій, розглядатися не можуть. Область визначення функції – півплощина, розташована під прямою$y = x$.причому сама пряма $y = x$.при розгляданні не враховується.

<u>Приклад 3.</u>Знайти область існування функції$u = \frac{z}{x+y}$.

Розв’язання. Функція визначена у всіх точках простору, крім точок площини$x + y = 0$, оскільки в точках цієї площини знаменник дробувзаданній функціїперетворюється в нуль.

<u>Приклад 4.</u> Знайти область існування функції $z = arcsin(3 - x^2 - y^2)$.

Розв’язання.Оскільки функція $u = arcsint$ визначена для значень аргументуtз відрізку $[-1,1]$, то шукана область існування знайдеться з умови$-1 \leq 3 - x^2 - y^2 < 1$, звідки випливає, що $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$і область існування функції знаходиться між двома концентричнимиколами: $x^2 + y^2 = 2$і $x^2 + y^2 = 4$, причому можуть розглядатися і точки, що належатьдо цих кіл.

<u>Приклад 5.</u> Знайти область існування функції$u = ln\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Розв’язання.Має виконуватися вимога: $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} > 0$. Цей дрібдодатний, колидодатний його знаменник, тобто, коли$x^2 - y^2 > 0$, чи$y^2 < x^2$, а цетягне за собою нерівність $|y| < |x|$.

Розглянемо два випадки: 1) $x > 0$, 2) $x < 0$.

1) Якщо$x > 0$, то $|x| = x$, і тоді $|y| < x$, чи$-x < y < x$. Область визначенняє частина правої півплощини (оскільки розглядаються значення $x > 0$), обмежена прямими $y = x$і$y = -x$, причому точки, що лежать на цих прямих, розглядатися не можуть.

2) Якщо$x < 0$, то $|x| = -x$, і тоді$|y| < -x$, чи $x < y < -x$.

Останні нерівності визначають ту частину лівої півплощини, яказзнаходиться між прямими $y = -x$і$y = x$, причому знову – таки точки, що належатьцим прямим, не повинні розглядатися.

Приклад 6. Знайти частинні похідні функцій: 1) $u = x^2 + 3xy + 4y^2$;

2)$u = sin(3x + 5y - 4z)$; 3) $u = e^{\frac{x}{y}}$.

Розв'язання. 1) Функція u- функція двох незалежних змінних$-x$, y. При визначенні частинної похідної функціїu по незалежній змінній друга незалежна змінна має розглядатися як величина постійна. Тому$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$, оскільки похідна по от $4y^2$дорівнює нулю, як похідна від постійної величини.

При відшуканні$\frac{\partial u}{\partial y}$ незалежна змінна x розглядається як величина постійна, а тому $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y + 8y$.

2) Функція u- функція трьох незалежнихзмінних: x, y, z. При визначенні частинної похідної по кожній з цихзмінних двіінші слідвважати величинами постійними. Тому$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\cos(3x + 5y - 4z)$;$\frac{\partial u}{\partial y} = 5\,cos(3x + 5y - 4z)$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = -4\cos(3x + 5y - 4z)$.

3) Задана функція є функція двох незалежних змінних. При диференціюванні по кожній з них друга змінна має розглядатися як величина постійна.

Тому$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$, оскільки$\left[\frac{x}{y}\right]'_x = \frac{1}{y}$, тому щопохіднавід дробуз постійним знаменником дорівнює похідній числівника, поділеній на той же знаменник, а похідна по yвід дробу$\frac{x}{y}$є похідноювід дробуз постійним числівником із змінним знаменником y. $\left\{\frac{x}{y}\right\}'_y = -\frac{x}{y^2}$.

Приклад7. Знайти частинні похідні функцій: 1) $u = ax = by + cz$;

2) $u = y\sin x + \sin y$; 3) $u = x^{\sin y} x > 0$; 4) $u = z^{xy}$ $(z > 0)$; 5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Розв’язання. 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = a$; $\frac{\partial u}{\partial y} = b$; $\frac{\partial u}{\partial z} = c$ (при диференціюванні по x двіінші незалежні змінні вважаються постійними, а отже, похідна по xвідbyівідcz, як похідна від константи, доівнює нулю. Аналогічно при диференціюванні по y незалежні змінніx іz вважаються константами, і тому похідна по y відaxіczдорівнює нулю і т.д.)

2) $\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$;

3) $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \cdot x^{\sin y - 1} \cdot \ln x$ (тут при диференціюванні по xзаданну функцію слідрозглядати як степеневу. Основа степеняx- величина змінна, а показник степеня $\sin y -$ величина постійна.

При диференціюванні по y величину x слід розглядати як константу, а $\sin y$- как величину змінну, а тому в цьому випадку функцію $x^{\sin y}$слід розглядати як показникову).

4) $\frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$;$\frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z$;$\frac{\partial u}{\partial y} = yz^{xy}\ln z$;

5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

<u>Приклад 8.</u> Довести, що функція $z = y^2\sin(x^2 - y^2)$задовольняє рівняння $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

Розв’язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2\cos(x^2 - y^2) \cdot 2x. \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\sin(x^2 - y^2) + y^2 .\cdot \cos(x^2 - y^2) \cdot (-2y).$$

Помноживши обидві частини першої рівності на y^2, а другої– на xyіпочленнододаючи, одержимо

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy^2\sin(x^2 - y^2).$$

Але, оскільки $z = y^2\sin(x^2 - y^2)$, то права частинаостанньої рівностіє $2xz$, и тим самим потрібне доведено.

Задачі для самостійної роботи.

1. Знайти область визначення даних функцій:

1) $z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$; 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

3) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$;4) $z = arccos\frac{x+y}{x^2+y^2}$;

5) $z = arcsin\frac{x}{y}$; 6) $z = \sqrt{1 + y - x^2} - \sqrt{1 - y - x^2}$.

2. Знайти частинні похідні даних функцій:

1) $z = e^{x^2+y^2}$;2) $z = t^5 \sin^3 z$; …3) $v = x^4 \cos^2 y - y^4 \sin^3 x^5$;

4) $u = x^y = (xy)^z + z^{xy}$;….5) $z = x^2 \cos 2xy - y^2 \sin(x + y)$;

6) $z = ln\frac{\sqrt{x^2+y^2-x}}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$; 7) $z = ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$;

8) $u = xy + yz + zx$; $z = xye^{\sin \pi xy}$; 10)$z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$.

2. Повний диференціал и повний приріст функції. Зв'язок між повним диференціалом функціїі її повним приростом.

Повний приріст функції $u = f(x, y, z)$визначається за формулою

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \tag{2.1}$$

де $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ - прирости незалежних змінних.

За означенням прирости незалежнихзмінних$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$та їх диференціали$dx,\ dy,\ dz$ - числа, між собою рівні:

$$\Delta x = dx; \Delta y = dy; \Delta z = dz$$

Повний диференціал функції $u = f(x, y, z)$позначається символом duіобчислюєтьсяза формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{2.2}$$

Повний диференціал du функціїє головною частиноюї приростуΔu, лінійноювідносно$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$, тобто. $\Delta u \approx du$, причому при нескінчено малих $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ різниця$\Delta u - du$ –величина нескінченно мала вищого порядку малості, ніж $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Наближена рівність $\Delta u \approx du$за формулою (3) може бути записаною так:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (2.3)$$

<u>Приклад 1.</u> Знайти повний приріст Δu и повний диференціал du функції$u(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$.

Розв'язання.

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 + 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1); \Delta u = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + xy + y(\Delta x) + x(\Delta y) + \Delta x \cdot \Delta y - y^2 - 2y(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 1 - 3x^2 - xy + y^2 - 1;$$

$$\Delta u = (6x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y + 3(\Delta x)^2 + \Delta x\Delta y - (\Delta y)^2 \qquad (2.4)$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$, то за формулою (2.2)

$$du = (6x + y)dx + (x - 2y)dy;\ (\Delta x = dx;\ \Delta y = dy) \qquad (2.5)$$

Різниця

$$\Delta u - du = 3(\Delta x)^2 + \Delta x \cdot \Delta y - (\Delta y)^2$$

являєсобой погрішність, котра виникає від заміни приросту Δuфункціїїї диференціалом du.

Знайти для заданої функціїїї повний приріст и повний диференціал в точціякщо:

1) $\Delta x = 1; \Delta y = 2$;2)$\Delta x = 0{,}1; \Delta y = 0{,}2$; 3)$\Delta x = 0{,}01; \Delta y = 0{,}02$;

1) Підставляючи в (2.5) значення $x = 1, y = 2, \Delta x = 1; \Delta y = 2$;

знаходимо, що$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2) \cdot 1 + (1 - 2 \cdot 2) \cdot 2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 - 2^2 = 3$;

Підставляючиці ж значення в (2.2), одержимо, що

$$du = (6 \cdot 1 + 2) \cdot 1 + (1 - 2 \cdot 2) \cdot 2 = 2;$$

а різниця

$$\Delta u - du = 3 - 2 = 1.$$

2) Підставимо тепер в (2.4),(2.5) значення

$x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}1; \Delta y = 0{,}2$;одержимо:

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2) \cdot 0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2) \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 - 0{,}2^2 = 0{,}21;$$

а

$$du = (6 \cdot 1 + 2) \cdot 0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2) \cdot 0{,}2 = 0{,}2;$$

3) Підставимо тепер в (2.4) и (2.5) значення одержимо

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2) \cdot 0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2) \cdot 0{,}02 + 3 \cdot 0{,}01^2 + 0{,}01 \cdot 0{,}02 - 0{,}02^2 = 0{,}0201;$$

$$du = (6 \cdot 1 + 2) \cdot 0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2) \cdot 0{,}02 = 0{,}02;$$

а

$$\Delta u - du = 0{,}0201 - 0{,}02 = 0{,}0001.$$

Порівнюючи різниці між повним приростом функціїі її повним диференціалом, одержимо, щовони зменшуються разом зі зменшенням приростів ΔxіΔy незалежнихзмінних.

Приклад 2. Знайти повний диференціал функціїї$z = ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Розв'язання. Повний диференціал функції знаходиться за формулою (2.2). Знайдемо$\frac{\partial z}{\partial x}$і$\frac{\partial z}{\partial y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Тому

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

Приклад 3. Обчислити наближено величину $(1.03)^{3{,}001}$.

Розв'язання. Відомо, що$1^3 = 1$. Слід провестиобчислення для того випадку, коли основа степеня1 одержить приріст$0{,}03$, а показник степеня3 - приріст$0{,}001$. Розглянемо функцію $f(x, y) = x^y$і скористаємося формулою (2.3).

Враховуючи, що в нашомувипадку$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$, одержимо

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \, \Delta y.$$

Тут $x = 1,\ y = 3,\ \Delta x = 0{,}03;\quad \Delta y = 0{,}001;$ а тому $(1.03)^{3.001} = 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}03 + 1^3\, ln\, 1 \cdot 0{,}001 = 1{,}09$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти частинні диференціали даних функцій по кожній з незалежнихзмінних:

1. $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$; 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; 3) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$;

4) $u = ln(x^3 + 2y^3 - z^2)$;

5) $z = \sqrt[3]{x + y}$.Знайти $d_y z$ при $x = 2,\quad y = 5,\quad \Delta y = 0{,}01$;

6) $z = \sqrt{ln\, x\, y}$.Знайти $d_x z$ при $x = 1,\quad y = 2,\quad \Delta x = 0{,}016$;

2. Знайти повні диференціали даних функцій:

1. $z = \frac{1}{2} ln(x^2 + y^2)$; 2) $z = arcsin\frac{x}{y}$; 3) $z = sin(xy)$;

4) $z = ln\, t\, g\frac{x}{y}$; …..5) $z = sin\frac{x}{y} \cdot cos\frac{y}{x}$; 6) $z = atc\, cos\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

7) $u = x^{y^z}$; 8) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

3. Обчислити приблизно:

1. $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$; 2) $sin\, 29^0\, sin\, 46^0$; 3) $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$;4) $1{,}04^{2{,}03}$;

5) $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$; 6) $\sqrt{(sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5}$; 7) $z = ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$

3. Диференціювання складної функції від однієї незалежної змінної.

Формула повної похідної. Якщо $z = f(u, v)$, а uіv є функціями незалежної змінноїx: $u = \phi(x)\quad v = \psi(x)$, то і$z$є функцією.

В такомуразі говорять, що zє складною функцією аргументуx. Похіднавід функціїzпо незалежній змінній xобчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{3.1}$$

Обчисленаза цією формулою похідна називається повною похідною від функціїzпо незалежній зміннійx.

Аналогічно, якщо$z = f(u, v, w)$, а $u = \phi(x)$ $v = \psi(x)$ $w = \omega(x)$, то повна похіднавід функції z по незалежній змінній x обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx} \tag{3.2}$$

Окремий випадок. Якщо $z = f(u, v, w)$, а uіv в свою чергу, також є функціями незалежної змінноїx: $u = \phi(x)$ $v = \psi(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{3.3}$$

Приклад 1.Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = sin(3u + 2v - 4w)$, $u = 3x^3$; $v = 3x^2$; $w = x^4$.

Розв'язання. Тут слід скористатися формулою (3.2). Визначемо похідні, що входять в цю формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3\cos(3u + 2v - 4w); \frac{\partial z}{\partial w} = -4\,cos(3u + 2v - 4w);$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2;\ \frac{dv}{dx} = 6x;\ \frac{dw}{dx} = 4x^3.$$

Підставляючиці величини в (3.2) одержуємо

$$\frac{dz}{dx} = [3\,cos(3u + 2v - 4w]6x^2 + [2\,cos(3u - 3v - 4w]6x - [4\,cos(3u - 2v - 4w]4x^3.$$

Виносячи в правій частині за скобку $cos(3u + 2v - 4w)$і замінюючи під знаком косинусуu, v, w їхніми виразами через x, одержимо остаточно

$$\frac{dz}{dx} = (18x^2 + 12x - 16x^3)\,cos(6x^3 + 6x^2 - 4x^4).$$

Приклад 2. Знайти повну похідну$\frac{du}{dt}$ функції$u = sin\frac{x}{y}$, де $x = e^t$; $y = t^2$.

Розв'язання. Формулу (3.1) слід переписатиу вигляді$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right); \frac{dx}{dt} = e^t;\quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

$$\frac{du}{dt} = (t-2)\frac{e^t}{t^3}cos\frac{e^t}{t^2}.$$

Приклад 3. Визначити повну похідну функції$u = e^{\alpha x}(y - x)$; $y = a\sin x$; $z = cos\,x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (3.3), оскільки функція u залежитьвідxяк безпосередньо, так іза допомогою функційyіz. Визначемо похідні, що входять в праву частинуцієї формули:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{\alpha x}(y - x); \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\alpha x}; \ \frac{\partial u}{\partial z} = -e^{\alpha x}; \frac{dy}{dx} = a\cos x \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} = ae^{\alpha x}(y - x) + e^{\alpha x}a\cos x - e^{\alpha x}9 - \sin x)$$
$$= e^{\alpha x}(a^2 + 1)\sin x.$$

Приклад 4. Рух точки заданийрівнянням$x = 3t^2; y = 2t^4; z = 4t^6$.

З якою швидкістю зростаєїївідстаньвідпочатку координат?

Розв'язання. Відстаньr точки відпочатку координат визначається формулою$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, де $x,\ y,\ z -$ координати точки.

Для розв'язання задачі слід знайти $\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t; \frac{dy}{dt} = 8t^3; \quad \frac{dz}{dt} = 24t^5; \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{18t + 16t^5 + 96t^9}{\sqrt{9 + 4t^2 + 16t^8}}$$

4. Диференціювання складної функціївід декількох незалежних змінних

Якщо$z = f(u, v)$ - функціявід двох змінних u, v, а кожназ них є, в свою чергу, функція двох незалежних змінних xіy, то і є функція незалежних змінних xіy, а її частинні похідні по цимзмінним обчислюються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.1}$$

Окремий випадок. Якщо функція z залежить від xіy не тільки за допомогоюu іv, алеі явно, тобто$z = f(x, y, u, v)$, то мають місце формули:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{4.2}$$

Причому похідні$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$і$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$від функції z обчислюються в припущенні, що u іv - величини постійні.

Приклад1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$і$\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо$z = ln(u^2 + v^2)$, а $u = x\cos y$; $v = y\sin x$

Розв'язання. Слідскористатися формулами (4.1). Визначимо частинні похідні, що входять в ці формули:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2u; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2v; \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x; \frac{\partial uv}{\partial y} = -x\sin y; \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x$$

Підстановка цих похідних в (4.1) дає

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cos y + \frac{2v}{u^2+v^2}y\cos x = \frac{2}{u^2+v^2}(u\cos y + vy\cos x) = \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}$$

$$(x\cos^2 y + y^2\sin x\cos x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2u}{u^2+v^2}x\sin y + \frac{2v}{u^2+v^2}\sin x = \frac{2}{u^2+v^2}(v\sin x - ux\sin y) = \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}$$

$$(y\sin^2 x - x^2\sin y\cos y);$$

Приклад 2. Довести, що функція $z = y\varphi(x^2 - y^2)$задовольняє диференціальне рівняння.

Розв'язання. Позначимо$x^2 - y^2 = u$. Тоді заданнафункція

$$z = y\varphi(u) \qquad (*)$$

Функція z залежить від x тількиза допомогою u, а відy – як безпосередньо, так іза допомогою u. Тому $\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = y\varphi'(u)2x = 2xy\varphi'(u)$.

Похідна$\frac{\partial z}{\partial y}$має бути визначена за другою з формул (4.2). Похідна, що входить в цю формулу $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \varphi(u)$, а тому, враховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(u) - 2y^2\varphi'(u)$$

Підставляючизнайдені вирази в ліву частину заданого рівняння, одержимо

$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}2xy\varphi'(u)+\frac{1}{y}[\varphi(u)-2y^2\varphi'(u)]=2y\varphi'(u)+\frac{1}{y}\varphi(u)-2y\varphi'(u)=\frac{1}{y}\varphi(u)=\frac{z}{y^2}$

,

оскільки на підставі (*) $\varphi(u)=\frac{z}{y}$.

<u>Приклад 3</u>. Довести, що функція $z=xy+x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$задовольняє диференціальнерівняння$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

Розв’язання. Позначимо$\frac{y}{x}=u$.Тоді задана функція перепишеться у вигляді

$$z=xy+x\varphi(u) \tag{**}$$

і очевидно, що z залежить від x і y як безпосередньо, так і за допомогою u. Тому частинні похіднíслідвідшукатиза формулами (4.1). Враховуючи, що $\frac{\partial z}{\partial x}=y=\varphi(u)$, а$\frac{\partial z}{\partial y}=x$і, крім того, $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\varphi(u)+x\varphi'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+\varphi(u)-\frac{y}{x^2}\varphi'(u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+x\varphi'(u)\frac{1}{x}=x+\varphi(u);$$

Підставляючи значення $\frac{\partial z}{\partial x}$и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в ліву частину заданого рівняння, одержимо

Задачі для самостійної роботи.

1. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо$z=z(x,y), x=x(t), y=y(t)$:

1. $z=x^2+y^2+xy,\ \ x=a\sin t,\ \ y=a\cos t$;

2) $z=\cos(2t+4x^2-y),\ \ x=\frac{1}{t}, y=\frac{\sqrt{t}}{\ln t}$;

3. $z=x^2y^3u,\ x=t, y=t^2, u=\sin t$;

4) $z=xyarctg(xy),\ x=t^2+1, y=t^3$.

2. Для даних $z=f(u,v), x=x(u,v), y=y(u,v)$знайти $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$і$dz$:

1. $z=x^3+y^3$, где $x=uv, y=\frac{u}{v}$; 2) $z=\sqrt{x^2-y^2}$, *где* $x=u^v, y=u\ln v$;

3) $z=arctgxy$, где $x=\sqrt{u^2+v^2}, y=u-v$;

4)$z=\sqrt{x+y},\ \text{где} x=u\cdot tgv, y=u\cdot ctgv.$

5.*Похідні і диференціали вищих порядків функцій декількох змінних.*

1. Похідні вищих порядків. Якщо задана функция двох незалежних змінних$z=f(x,y)$іобчислено її частинні похідні$\frac{\partial z}{\partial x}$і , то вони, також є функціями незалежнихзміннихxіy, а тому від кожної з них можнаобчислити похідніяк поx, так і по y.

Якщо обчислити частинну похідну по x від , то одержимо частинну похіднудругого порядкувід функції z, взяту два рази по x. Ця похідна позначається символом. Якщообчислити частинну похідну по y від$\frac{\partial z}{\partial x}$, то одержимо частинну похідну другого порядку функціїz , взяту спочатку по x, а потім поy. Ця похіднапозначається символом$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Приклад 1. Знайти частинні похідні третього порядку функції $z=x^4+3x^3y-4x^2y^2+5xy^3-y^4$.

Розв'язання.$\frac{\partial z}{\partial x}=4x+9x^2y-8xy^2+5y^3$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^3-8x^2y+15xy^2-4x^3.$$

Якщо взятипохідну по x від$\frac{\partial z}{\partial x}$, то одержимо, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2+18xy-8y^2$;якщо ж вираз $\frac{\partial z}{\partial x}$ продиференціювати по y, то одержимо$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=9x^2-16xy+15y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-8x^2+30xy-12y^2$.

Продиференціюємо тепер по x похідну$\frac{\partial z}{\partial y}$іодержимо, що $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=9x^2-16xy+15y^2$. Якщо про диференціювати по y похідну, то одержимо третю похідну$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=18x-16y$. Про диференціювавши по x похідну$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, одержимо

$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y$. Похідна по x від $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ дасть $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 18x - 16y$. Якщо взяти похідну по x від $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то одержимо $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$, а якщо взяти похідну по y від $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, то одержимо $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 30x - 24y$.

Має місце така важлива теорема: якщо частинні похідні неперервні, то їх значення не залежать від порядку диференціювання.

Приклад2. Визначити похідну $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ функції $u = sin(xyz)$.

Розв'язання.

$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\,cos(xyz)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z\,cos(xyz) - xyz^2\,sin(xyz)$;

$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = cos(xyz) - xyz\,sin(xyz) - 2xyz\,sin(xyz) - x^2y^2z^2\,cos(xyz)$

$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 - x^2y^2z^2)\,cos\,x\,yz - 3xyz\,sin(xyz)$.

2. *Диференціали вищих порядків.* Аргументи x і y функції $z = f(x, y)$ - незалежні змінні.

Диференціалом другого порядку функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від диференціалу першого порядку; він позначається через d^2z. Таким чином, $d^2z = d(dz)$.

Диференціал другого порядку обчислюється за формулою

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (5.1)$$

Диференціал третього порядку функції $z = f(x, y)$ є диференціал її диференціалу другого порядку; позначається він символом d^3z т.е. $d^3z = d(d^2z)$.

Диференціал третього порядку обчислюється за формулою

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3 \qquad (5.2)$$

Формули (5.1) и (5.2) можна переписати

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z; \quad d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z$$

Приклад 4.Знайти d^2z функції $z = x^2y^2$.

Розв’язання. Скористаємося формулою (5.1), для чого визначемо всі частинні похідні, що входятьдо неї:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2;$$

Підставляючидругі похідні в (5.1), знаходимо, що

$$d^2z=2y^2dx^2+8xydxdy+2x^2dy^2.$$

Приклад 5. Знайти диференціал третього порядкуd^3z функції $z=cos(x+2y^2)$.

Розв’язання.Скористаємось формулою (5.2), для чого,перш за все,визначимо частинні похідні третього порядку, що входять в цю формулу.

Похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-sin(x+2y^2);\frac{\partial z}{\partial y}=-4y\,sin(x+2y^2);$$

Похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos(x+2y^2);\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4y\,cos(x+2y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4\,sin\,s\,(x+2y^2)-16y^2cos(x+2y^2).$$

Похідні третього порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=sin(x+2y^2);\frac{\partial^2 z}{\partial x^2\partial y}=4y\sin(x+2y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y^2}=-4\,cos(x+2y^2)+16y^2\,sin(x+2y^2);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-16\,cos(x+2y^2)-326y\,cos(x+2y^2)+64y^3\,sin(x+2y^2)$$
$$--48y\,cos(x+2y^2)64y^2\,sin(x+2y^2).$$

Підставляючи значення третіх частиних похідних в (4.3) одержимо, що

$$d^3z=sin(x+2y^2)dx^3+3\cdot 4y\,sin(x+2y^2)dx^2dy+$$
$$+3[-4cos(x+2y^2)+16y^2\,sin(x+2y^2)]dxdy^2+$$
$$+[-48y\,cos(x+2y^2)+64y^3\,sin(x+2y^2)]dy^3.$$

Задачі для самостіної роботи.

1. Знайти всі частинні похідні першого, другого і третього порядку для функції $z = x^3 - x^2 y - y^3$.

2. Знайти $d^2 z$, якщо $z = arctg\frac{y}{x}$.

3. Для даних функцій знайти необхідну частинну похідну чи диференціал:

а) $z = sin\,x\,sin\,y, d^2 z$; б) $z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

в) $z = xy + \sin(x + y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;г) $z = x\,sin\,x\,y + y\,cos\,x\,y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

д) $z = \ln tg(x + y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; е) $z = \sin(x + \cos y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}$.

6. Лінії поверхнірівня. Похідна функції за заданим напрямком. Градієнт функції.

1.Скалярне поле. Фізичне поле називаеться скалярним, якщо фізичне явище, характеризуеться функцією, що залежить тільківід координат точок простору, в якомуце явище проходить. Скалярне поле повністю визначене заданням однієї функції$f(x, y, z)$трьох незалежних змінних.

Якщо фізичне явиществорило скалярне поле, то кожній точці$P(x_1, y_1, z_1)$простору, в якомувідбувається це явище, ставиться у відповідністьпевне число, що характеризує це явище в точці, яка розглядається. Це число єокреме значення функції$f(x, y, z)$, обчислене в точці$P(x_1, y_1, z_1)$.

*2. Поверхнярівня.*Якщо однозначна функція $f(x, y, z)$відповідає скалярному полю, утвореному фізичним явищем, то поверхнею рівняцього поля називаєтся поверхня, у всіх точках якої функція $f(x, y, z)$ зберігає одне і те ж значення.

Поверхні рівнямають рівняння$f(x, y, z) = c$, де $c - const$

3. Похідназа направленням. Похід навід функції$f(x,y,z)$за направленням $(\bar{l})$характеризує швидкість зміни функції$f(x,y,z)$за цим направленням.

Ця похіднаобчислюєтьсяза формулою

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}cos(l,x)+\frac{\partial f}{\partial y}cos(l,y)+\frac{\partial f}{\partial z}cos(l,z) \qquad (6.1)$$

Похідна$\frac{\partial f}{\partial l}$дорівнює нулю забудь-яким направленням, дотичнимдо поверхні рівня. Вона досягає свого найбільшого значення за направленням нормалідо поверхні рівня.

*4.Градієнт функції.*Градиєнтом скалярної функції$f(x,y,z)$називається вектор, проєкції якого на координатні осі$Ox,\ Oy,\ Oz$відповіднодорівнюють$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$, тобто

$$grad\ f=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} \qquad (6.2)$$

На основі цього означення проєкції вектора $grad\ f$на координатні осі записуються так:

$$(grad\ f)_x=\frac{\partial f}{\partial x};\ \ (grad\ f)_y=\frac{\partial f}{\partial y};\ \ (grad\ f)_z=\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (6.3)$$

Модуль вектора$grad\ f$обчислюєтьсяза формулою

$$|grad\ f|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \qquad (6.4)$$

Якщо$\bar{\tau}$ $-$одиничний вектор направлення$(\bar{l})$,

$$\bar{\tau}=cos(l,x)\bar{i}+cos(l,y)\bar{j}+cos(l,z)\bar{k}$$

тоді формула(6.1) запишеться так:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(grad\ f\cdot\tau) \qquad (6.5)$$

Вектор $grad\ f$в кожній точці направлений по нормалідо поверхнірівня, яка проходить через цю точку, в сторону зроситання функції. Швидкістьзміни скалярної функціїfзадеяким направленням $(\bar{l})$ дорівнює проєкції вектора $grad\ f$на це направлення, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(grad\ f)_l \qquad (6.6)$$

В цьому полягає основна властивість градієнта функції.

Приклад 1. Скалярне поле утворено функцією $V = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. Знайти поверхніцьогорівня поля.

Розв'язання. На основі формули (4.1) рівняння сімейства поверхоньрівнязнайдемоу вигляді $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = c$чи$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - c^2$. Поверхнями рівня є сімейство концентричних сфер.

Приклад 2. Знайти поверхні для скалярного поля $v = arctg\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Розв'язання. За формулою (6.1) рівняння сімейства поверхонь рівня має вигляд $arctg\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = c$. Звідси$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = tgc$і, остаточно$z^2 = tg^2c(x^2 + y^2)$. Церівняння сімейства кругових конусів із загальною вершиною в початку координат.

Приклад 3. Знайти похідну функції$f(x, y) = x^3 - y^3$ в точці$M(1,1)$в направленні$(\bar{l})$, що утворюєкут$\alpha = 60^0$ с додатним направленням осіOx.

Розв'язання. В формулі (6.1) $cos(l, x) = cos\,\alpha = \frac{1}{2}$; $cos(l, y) = cos(90 - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos(l, z) = 0$.Крім того,$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$;$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2$.

Підстановка в (6.1) дає$\frac{\partial f}{\partial l} = 3x^2 \cdot \frac{1}{3} - 3y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В точці$M(1,1)$маємо$x = 1,\ y = 1$. Підставляючиці значення xіyв останнє рівняння, будемомати

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ в точці$A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ в направленні$(\bar{l})$, що утворює кутαз додатнім направленням осіOx. В якому направленніця похідна має: а) найбільше значення; б) найменше значення; в) значення, що дорівнює нулю?

Розв'язання.

За умовою задачі $\cos(l,x) = \cos\alpha$ і $\cos(l,y) = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$. Тоді $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6x$.

Підстановка в формулу (6.1) дає $\frac{\partial f}{\partial l} = (6x-6y)\cos\alpha + (2y-6x)\sin\alpha$;

в точці $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial l} = (6\left(-\frac{1}{3}\right) - 6\left(-\frac{1}{2}\right))\cos\alpha + (2\left(-\frac{1}{2}\right)y - 6\left(-\frac{1}{3}\right))\sin\alpha$ тобто

$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$.

Требазнайти ті значення, при яких $\frac{\partial f}{\partial l}$ має значення: а) наибільше; б) найменше; в) дорівнює нулю.

Знайдемо екстремум цієї функції $u' = -\sin\alpha + \cos\alpha$.

Зрівняння $-\sin\alpha + \cos\alpha = 0$ випливає, що $tg\alpha = 1$, а $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Вважаючи, що α можезмінюватися від 0 до 2π, з останньої формулиодержуємопри $k = 0 \;\; \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$; $k = 1 \;\; \alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$, $u'' = -\cos\alpha - \sin\alpha$

і,оскільки $u''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, то при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ функція u досягає максимуму, а разомз тим і найбільшого значення.

Таким чином, похідна $\frac{\partial f}{\partial l}$ нашої функціїмає найбільше значенняза направленням, що утворює з додатним направленням осі Ox кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

При $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$ маємо $u''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0$. Похідна $\frac{\partial f}{\partial l}$ має найменше значенняза направленням, що утворює з додатним направленням осі Ox кут $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

Знайдемо те значення α, при якому $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$, тобто $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$. Розв'язуючи це рівняння, маємо $tg\alpha = -1$ і для α, що містититься між 0 і 2π, одержуємо $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ і $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

Направлення найшвидшого росту функції складає з додатним направленням осі Ox кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Відомо, що *направлення найшвидшого росту функції в данній точці співпадає с направленнямвектора, що є градієнтом цієї функції*, якийвизначається формулою (6.1), а довжинайого знаходиться за формулою (4.6).

$gradf=(6x-6y)\cdot i+(2y-6x)\cdot j$, в точці$A\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$ $(gradf)_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}}=i+j$

Довжина вектора $grad\ f$ в цій точці$|gradf|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

а його проєкції на осі координат дорівнюють$(grad\ f)_x=1$; $(gradf)_y=1$ направляючі косинуси вектора $\bar{a}$ знаходяться за формулами

$$cos\,\alpha=\frac{a_x}{|a|},cos\,\beta=\frac{a_y}{|a|}$$

в нашому випадку $grad\ f$в точці$A\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$має направляючі

косинусу$cos\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2};cos\,\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значить, вектор $grad\ f$утворює в точці$A\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$ з додатнім направленням осікут $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

<u>Приклад 5. </u>Визначити$|gradu|$і направляючу косинусу градієнта в точці$A(x_0;y_0;z_0)$, якщо функція $u=\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Розв'язання. Щоб скористатися формулою (6.3) для визначення$grad\ u$, требазнайти$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$і$\frac{\partial u}{\partial z}$. Проєкція градієнта цієї функції на вісьOx, але

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,а тому$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$,

і тоді$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$,

Аналогічно $\left(grad\frac{1}{r}\right)_y=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}\left(grad\frac{1}{r}\right)_z=\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$

Користуючись формулою (6.3), одержуємо, що

$$|grad u| = \sqrt{\frac{x^2}{r^6}+\frac{y^2}{r^6}+\frac{z^2}{r^6}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^6}} = \frac{1}{r^2}$$

В точціA $|grad u| = \frac{1}{r_0^2}$, де $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$. Направляючі косинусивектора$\bar{a} = grad\frac{1}{r}$ знайдемоза формулами

$$cos(\bar{a}, y) = \frac{a_x}{|a|} = \frac{\left(grad\frac{1}{r}\right)_x}{\left|grad\frac{1}{r}\right|};\ cos(\bar{a}, y) = \frac{a_y}{|a|} = \frac{\left(grad\frac{1}{r}\right)_y}{\left|grad\frac{1}{r}\right|};\ cos(\bar{a}, z) = \frac{a_z}{|a|} = \frac{\left(grad\frac{1}{r}\right)_z}{\left|grad\frac{1}{r}\right|}.$$

Підставляючи в ці формули знайдені значення $\left|grad\frac{1}{r}\right|$, $\left(grad\frac{1}{r}\right)_x$,$\left(grad\frac{1}{r}\right)_y$, $\left(grad\frac{1}{r}\right)_z$, одержимо

$$cos(\bar{a}, x) = -\frac{x}{r^5};\ cos(\bar{a}, y) = -\frac{y}{r^5};\ \ cos(\bar{a}, z) = -\frac{z}{r^5}.$$

Задачі для самостійної роботи.

1. Знайти похідну функції $z = 3x^4 + xy + y^3$ в точці$M(1,2)$ за направленням, що утворює з додатним направленням осіOxкут в 135^0.

2. Знайти похідну функції$z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точці$M(3,1)$за направленням, яке йде від цієї точки до точки$(6;5)$.

3. Знайти похідну функції$u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точці$M(1,1,2)$за направленням, що утворює з осями координат кути відповідно в $60^0, 45^0, 60^0$.

4. Знайти найбільшезростання поверхні$z = xy$ в точці$(4;2)$

5. Знайти похідну функції$z = 2{,}5x^2 - 5xy + 3y^2 + 5y$ в точці$A(1;2)$за направленням, що утворює звісьюOx кут30^0. Визначити направлення максимального зростання даної функції в даній точці.

7. Диференціювання неявних функцій

1. Незалежна змінна x і функція пов'язані рівнянням

$$f(x,y)=0 \qquad (7.1)$$

Для того щоб, не розв'язуючирівняння (7.1) відносно y, знайти похідну від y по x, користуються формулою

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (7.2)$$

Щоб визначити другу похідну від y по x, треба переписати (7.2) в вигляді$\frac{\partial f}{\alpha x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$, продиференціюватийого по xі в одержаному виразі замінитиy'вже знайденим значенням (7.2).

<u>Приклад 1.</u> Визначитиy' і y'', якщо функція y від x задана неявно рівняння $x^3+y^3-3axy=0$, де $a-const$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину цього рівняння через $f(x,y)$. Щоб скористатися формулою (7.2), знайдемо$\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3ay; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3ax.$$

Підставляючи ці вирази в (7.2), одержимо після скорочення на 3

$$y' = -\frac{x^2-ay}{y^2-ax} \qquad (7.3)$$

Щоб визначити y'', перепишемо рівняння (7.3) в такому вигляді

$$x^2-ay+(y^2-ax)y'=0 \qquad (7.4)$$

Продиференціюємойого по x, пам'ятаючи, щоyє функція від x.

$$2x-2ay'+2yy'^2+(y^2-ax)y''=0$$

Підставляючи сюди замість y'його значення (7.3), одержимо

$$2x-2a\cdot\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)+2y\cdot\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)^2+(y^2-ax)y''=0$$

$$y''=-\frac{2x(y^2-ax)^2+2a(x^2-ay)(y^2-ax)+2y(x^2-ay)^2}{(y^2-ax)^3}$$

Якщо в чисельнику дробу розкрити дужки і зробити зведення подібних членів, то одержимо вираз$2xy^4+2x^4y-6ax^2y^2+2a^3xy$, який вигідно переписатиу вигляді. Оскільки за умовою$x^3+y^3-3axy=0$, то остаточно чисельник дробу дорівнює$2a^3xy$, а

$$y" = -\frac{2a^3xy}{(y^3-ax)^3}.$$

2. Якщо функція z від двох змінних x і y задається рівнянням $f(x,y,z)=0$, яке не розв'язується відносно z, то z є неявна функція змінних x и y. В цьому випадку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \tag{7.5}$$

<u>Приклад 2</u>. Функція z незалежних змінних x і y задана рівнянням $x^2+y^2+z^2=a^2$. Визначити $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Розв'язання. Перенесемо a^2 в ліву частину даного рівнянняіпозначимо її через $f(x,y,z)$. Тоді $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$;

$$; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y; \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

Підставляючиці значення в (7.5), будемо мати:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1\cdot z-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot x}{z^2}.$$

Підставляючи значення $\frac{\partial z}{\partial x}$л держимо, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z-\left(-\frac{x}{z}\right)\cdot x}{z^2} = -\frac{z^2+x^2}{z^3}$.

Диференціюючи по y вираз $\frac{\partial f}{\partial x}$ і враховуючи, що при диференціюванні по y змінна x, що стоїть в чисельнику, розглядається як величина постійна, одержуємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{xy}{z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z-\left(-\frac{y}{z}\right)\cdot x}{z^2} = -\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

<u>Приклад 3.</u> Функція z незалежних змінних x і y задана неявно рівнянням $4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0$. Визначити $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial x}$ при $x=1, y=1, z=1$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівняння через $f(x,y,z)$. Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x+y+1; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y+x-z; \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -6z-y.$$

За формулами (7.5) одержуємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x+4y+1}{6z+y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x+4y-z}{6z+y}$$

Підставляючи сюди значення $x = 1; y = 1; z = 1$, одержимо, що

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{13}{7}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{7}$.

Задачі для самостійної роботи.

1. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно вказаними рівняннями:

1) $x^3y - y^3x = a^4$; 2) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$; 3) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$;

4) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$; 5) $sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$;

6) $arctg\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$

2. Функція z незалежних змінних x і y задана неявно рівнянням $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$. Визначити $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x = 1; y = 1; z = 1$.

8. Екстремум функції. Найбільшеі найменше значення функції двох змінних.

Правило визначенняекстремуму функції двох незалежних змінних.

Щоб визначити екстремум функції $z = f(x, y)$ слід:

1) Визначити стаціонарні точки, в яких функція може досягати екстремуму, для чого требарозв'язати систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

2) Визначитидругі частинні похідні: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

3) Обчислити значення других частинних похідних в кожній стаціонарній точці, а одержані числа позначити відповідно через $A,\ B,\ C$.

4) Скласти вираз $\varDelta = AC - B^2$. При цьому,

а) якщо $\varDelta > 0$, то екстремум в стаціонарній точціє: якщо $A > 0$, то буде мінімум, а при $A < 0$ - максимум;

б) якщо $\varDelta < 0$, то екстремуму в розглянутій стаціонарній точці немає;

в) якщо $\Delta = 0$, то має місце сумнівний випадок, і для висновкупроекстремумтребазалучити частинні похідні порядку вище другого.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $я = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$

Розв'язання. Визначимо $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x$

Одержуємо дві парирозв'язань системи рівнянь

$$1)\ x_1 = 0; y_1 = 0; \quad 2)\ x_2 = 6; y_2 = 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y$$

Для першої пари розв'язань:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -36; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \quad \Delta = -36.$$

Оскільки$\Delta < 0$, то при $x_1 = 0$; $y_1 = 0$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Для другої пари розв'язань:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=6 \\ y=6}} = 72; \qquad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=6 \\ y=6}} = -36; \qquad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=6 \\ y=6}} = 72,$$

$\Delta = 72 \cdot 72 - 36^2 = 3888.$

$\Delta > 0$і$A > 0$, то функція має мінімум в точці$(6{,}6)$. Щобвизначити мінімальне значення функції, підставимо в неї$x = 6,\ y = 6$іодержимоz_{min}.

Приклад 2.Дослідити на екстремум функцію $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$.

Розв'язання. Знайдемо$\frac{\partial z}{\partial x} = 42x^2 + 27y^2 - 69$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 54xy - 54$

Розв'язуємо систему рівнянь$\begin{cases} 42x^2 + 27y^2 - 69 = 0 \\ 54xy - 54 = 0 \end{cases}$

Розв'язуючи систему,одержуємо 4 пари розв'язків, при яких досліджувана функція може мати екстремум.

$$1) x_1 = 1; \quad y_1 = 1;\ 2) x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3};$$

$$3) x_3 = -1; \quad y_3 = -1;\ 4)\ x_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}}; \quad y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$$

Тепервизначимо, які саме з цих значень доставляють функції екстремум.

Визначимо другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 84x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 54y; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 54x$$

Для кожної пари значень визначимо числа $A,\ B,\ C$і число Δ

1. Для $x_1 = 1; \quad y_1 = 1$маємо

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 84; \qquad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54; \qquad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54,$$

$\Delta = 84 \cdot 54 - 54^2 > 0.$

Екстремум є, а оскільки $A > 0$, то має місце мінімум z_{min}

2. Для $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = 18\sqrt{14}; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{162}{\sqrt{14}},$$

$\Delta < 0$

и при $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$екстремуму немає.

3. Для $x_3 = -1; \quad y_3 = -1 A = -84; \quad B = -54; \quad C = -54; \quad \Delta < 0$

Екстремум є, і саме максимум, оскільки $A = -84 < 0$; z_{max}.

4. Для $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}}; \quad y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$ маємо

$A = -\frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = -18\sqrt{14}; \quad C = -\frac{162}{\sqrt{14}}; \quad \Delta < 0$

Екстремуму при значеннях $x = x_4; \quad y = y_4$ немає.

2. Для того щоб найти найбільше й найменше значення функції, треба:

1) знайти стаціонарні точки функції, для чого слідрозв'язати систему рівнянь $\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$

2) обчислити в стаціонарних точках значення функції;

3) знайти найбільшеі найменше значення функції на кожній лінії, що обмежує область;

4) порівняти всіодержані значення. Найбільше из них буде найбільшим, а найменше – найменшим значенням функції в замкнутій функції.

Приклад 3. Знайти найбільшеі найменше значення функціїz $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкнутому трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y + 5 = 0$.

Розв'язання. 1) Знаходим стаціонарні точки функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

І знаходимо, що $x = -2; y = -1$. Отже, є одна стаціонарна точка $(-2 : -1)$

2) Визначаємо значення функції в цій точці: $z(-2 : -1) = -3$

3)Переходимо до дослідження функції на границях області, якаскоадаєтьсяз відрізку осіOx, відрізку осіOyі відрізкуAB прямої.

а) На осі$Oxy = 0$, задана функція набуває при $y = 0$ такого виду:

$z = x^2 + 3x + 1 (-5 \leq x \leq 0)$.

Ця функція має бути розглянута на відрізку$[-5; 0]$. Оскільки на цьому відрізку функція z неперервна, то вона досягає на ньому як найбільшого, так і найменшого свого значення. Це можевідбутисячи в точках стаціонарності функції, де $\frac{dz}{dx} = 0$, чи на кінцях розглянуто говірізка.

Визначимо перш за все точку стаціонарності

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3; 2x + 3 = 0; x = -\frac{3}{2}.$$

Визначимо значення функції при $x = -\frac{3}{2}$і на кінцях відрізка $[-5; 0]$:

$$z\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{5}{4}; z(-5; 0) = 11; \quad z(0,0) = 1.$$

Порівняння показує, що $(z_{\max})_{OA} = 11; \left(z_{min}()_{OA}\frac{5}{4}\right)$

б) на осіOy: $x = 0$, а дана функція при $x = 0$має виглядz $z = 2y^2 + 2y + 1 (-5 \leq y \leq 0)$.

Ця функція – функція однієї змінної. Вона має бути розглянута на відрізку$[-5;0]$. Визначимо на цьому відрізку її найменше і найбільше значення, які в силу неперервності мають існувати.

Спочатку визначимо точки стаціонарності функції:

$$\frac{dz}{dx} = 4y + 2; 4y + 2 = 0; \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Визначимо значення функції при $y = -\frac{1}{2}$, а також на кінцях відрізка, що розглядається:

$z\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $z(0;-5) = 11$; $\quad z(0{,}0) = 1$;

в) Досліджуємо дану функцію на відрізку прямої AB, який належить до границі області.

Рівняння прямої AB $x + y + 5 = 0$. Тому на ній $y = -x - 5$. Підставляючице значенняy в задану функцію, одержуємо

$$z = 4x^2 + 26x + 41$$

Найбільше й найменше значення цієї функції має бути визначеним для значень$(-5 \le x \le 0)$

$\frac{dz}{dx} = 8x + 26$; $8x + 26 = 0$; $x = -\frac{13}{4}$,

Знаходимо відповідні значення y. З$y = -x - 5$ випливає, що

$y = -\left(-\frac{13}{4} - 5\right) = -\frac{7}{4}$.

Розгляданню підлягає точка $\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right)$

$$z\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4}; \quad z(-5;0) = 11; \quad z(-0;-5) = 41$$

Порівнюючи значення функціїz в стаціонарній точці$(-2:-1)$ з найбільшими і найменшими значеннями на вірізках $OA,\ OB,\ AB$

$$z_{max}; \qquad z_{min}$$

Таким чином, виявилося, що найменшого свого значення функція досягла в стаціонарній точці$(-2:-1)$, найбільшого – на границі області, в точці$(0,-5)$.

Задачі для самостійної роботи

1. Дослідити на екстремум функції:

1) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$; 2) $z = x^3y^3(12 - x - y)$;

3) $z = xy(x + y - 1)$;4) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

5) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

2. Знайти найбільшеі найменше значення функції$z = x^2 + 2xy - 4y + 8y$ в прямоукутнику, ообмеженому прямими $x = 0;\ y = 0;\ x = 1;\ y = 2$.

3. Знайти найбільше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в трикутнику, ообмеженому прямими $x = 0; y = 0; x + y = 6$.

9. Дотична площина і нормаль до поверхні.

Якщо на поверхні через точку M провести всі кривіі до них в цій точці провести дотичні прямі, то виявиться, що всіцідотичні лежать в одній площині, яка називаеться дотичною площиною до поверхні в точціM, а перпендикуляр до дотичної площини, поставлений до неї в точцідотикуM, називається нормаллю до поверхні.

1. Якщо поверхня задана рівнянням$z = f(x, y)$,яке має розв'язоквідносно z, а точка дотикуM має координати$(x_0,\ y_0,\ z_0)$, то рівняння дотичної площини записується так:

$$z - z_0 = z_0'(x_0, y_0)(x - x_0) + z_0'(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (9.1)$$

а нормаль до поверхні в точці Mвизначаєтьсярівнянням

$$\frac{z - z_0}{z_0'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z_0'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \quad (9.2)$$

<u>Приклад 1.</u> Знайти рівняння дотичної площиниі нормалі до поверхні $z = x^2 + 3y^2$ в точці, для якої$x = 1; y = 1$.

Розв'язання. Визначимо апплікату точки дотику: $z(1,1) = 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4$. Точка дотикумає координати$(1,1,4)$. Оскільки рівняння поверхні має розв'язок відносно z, то дотична площинаі нормаль визначається рівняннями (9.1) і (9.2). Визначимо частинні похідні функції z: $z_x'(x, y) = 2x; z_y'(x, y) = 6y$. Обчислимо тепер значення частинних похідних в точцідотику:

$z'_x(1{,}1) = 2; \qquad z'_y(1{,}1) = 6.$

Подставляючи ці значення і координати точки дотику в рівняння (9.1) і (8.2) одержимо рівняння дотичної площини

$$z - 4 = 2(x-1) + 6(y-1) \text{чи} 2x + 6y - z - 4 = 0$$

Рівняння нормалі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}.$$

Приклад 2. Визначити рівняння тієї дотичної площини до еліпсоїду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, яка відсічує рівні відрізки на координатних вісях.

Розв'язання. Відрізки, що відсікаються цією площиною на координатних вісях, дорівнюють: $\frac{a^2}{x_0}$; $\frac{b^2}{y_0}$; $\frac{c^2}{z_0}$. Позначивши кожне з цих відношень через k, одержимо$x_0 = \frac{a^2}{k}$; $y_0 = \frac{b^2}{k}$; $z_0 = \frac{c^2}{k}$

оскільки(x_0, y_0, z_0) —точка дотику, то її координати задовольняють рівняння поверхні, а тому, підставляючи одержані значення x_0, y_0, z_0замість поточних в рівняння еліпсоїду, одержимо

$$\frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{k^2} + \frac{c^2}{k^2} = 1, \text{ а } k = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

тоді

$$x_0 = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad y_0 = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad z_0 = \frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Підставляючиці значення в рівняння дотичної площини до елипсоїду, маємо

$$x + y + z \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0.$$

<u>Приклад 3.</u> До поверхні$x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ провести дотичну площину, паралельну площині$2x + 4y + z = 0$.

Розв'язання. Запишеморівняння поверхні в вигляді$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 1 = 0$. Позначимо координати точки дотикуM через x_0, y_0, z_0. Визначимо значення частинних похідних функції $f(x, y, z)$ в цій точці

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = 2x_0; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y; \ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = 6y_0; \ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z; \ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M = 2z_0$$

Рівняннядотичної площини запишеться у вигляді:

$$x_0(x-x_0)+3y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$$

Оскільки точка дотику$M(x_0, y_0, z_0)$ належить поверхні, то $x_0^2+3y_0^2+z_0^2=1$ірівняннядотичної площини може бути записаним:

$$x_0x+3y_0y+z_0z-1=0 \qquad (*)$$

З умови паралельностіцієї площини і заданої в умові задачі площини $2x+4y+z=0$випливає, що

$$\frac{x_0}{2}=\frac{3y_0}{4}=\frac{z_0}{1}$$

Позначаючи кожневідношення через kодержимо, що:

$$x_0=2k;\ y_0=\frac{4}{3}k; z_0=k.$$

Підставляючиці значення в рівняння поверхні, одержимо:

$$4k^2+3\cdot\frac{16}{9}k^2+k^2=1$$

Звідки$k=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}$і , значить, $x_0=\pm\frac{6}{\sqrt{93}}; y_0=\pm\frac{4}{\sqrt{93}}; z_0=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}$

Підставляючице значення в рівняння (*), одержимо рівняння дотичної площини:

$$2x+4y+z=\pm\frac{\sqrt{93}}{3}$$

Таким чином, умову задачі задовольняють дві площини.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти рівняннядотичної площини і норма до поверхонь:

1) до еліптичного параболоїду $z=2x^2+y^2$ в точці$(1{,}1{,}3)$;

2) до поверхні$z=x^4+2x^2y-xy+x$ в точці $(1{,}0{,}2)$;

3) до гіперболічного параболоїду $z=xy$ в точці$(1{,}2{,}2)$;

4) до поверхні$x^2+y^2-x+2y+4z-13=0$ в точці$(2{,}1{,}2)$;

5) до поверхні$x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точці$(1{,}2{,}3)$.

2. До поверхні$x^2+2y^2+z^2=1$ провести к дотичну площину, паралельну площині$x-y+2z=0$

3. В якій точці еліпсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нормаль до нього утворює рівні кутиз осями координат?

Література

1.Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2 М.: «Физматгиз», 1962.

2.Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3 М.: «Физматгиз», 1962.

3. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов, Математический анализ. Продолжение курса, М. : Издательство МГУ, 1987.

4. С.Н. Никольский, Курс математического анализа, т. 2, М.: «Наука», 1983.

5. Г.Н. БерманСборник задач по курсу математического анализа, М.: «Наука» 1977.

6. Шкіль М.І., Колесник Т. В. Вища математика: диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних, диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994

7. Демидович Б.П., Ефимов А.В. Сборник задач по математике для ВТУЗОВ. Часть 2. – М.: Наука, 1981.