ШЛЯХИ ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОВОДИТИ МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Світлана Іванова

Вступ. У останні роки спостерігається тенденція щодо зниження ролі доведень у навчанні математики. Ця тенденція з одного боку обумовлена дефіцитом навчального часу. Саме з цієї причини у класах з низьким рівнем математичної підготовки учнів переважна більшість теорем вивчається без доведення, а при розв'язуванні задач на обчислення обґрунтування окремих кроків не вважається обов'язковим. З іншого боку, серед завдань контрольних робіт, ДПА та ЗНО лише незначна частина – завдання на доведення математичних тверджень, тому формуванню в учнів умінь розв'язувати вправи на доведення не приділяється належна увага. Результатом зниження ролі доведень у навчанні математики є недостатній розвиток логічного мислення, його абстрактності, дедуктивності та евристичності у певної частини здобувачів освіти, тобто не виконується провідне завдання шкільної математичної освіти, що неприпустимо.

Отже, пошук шляхів вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження у сучасних умовах – важлива проблема, вирішення якої потребує сумісних зусиль науковців, методистів і вчителів.

Огляд останніх публікацій за темою. Проблему навчання учнів доведенню тверджень шкільного курсу математики досліджували видатні вчені-методисти: О. Д. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. Г. Болтянський, М. І. Бурда, Я. М. Грудьонов, Я. М. Жовнір, Ю. М. Колягін, Л. С. Карнацевич, О. В. Погорєлов, З. А. Скопець, А. А. Столяр, В. О. Тадеєв, Н. А. Тарасенкова, І. Ф. Шаригін та ін.

Ця проблема розглядалася з різних боків. З точки зору побудови шкільного курсу геометрії на дедуктивній основі її розробляли О. Д. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, В. Г. Болтянський, О. В. Погорєлов, В. О.Тадеєв, І. Ф. Шаригін та ін.

На основі формування в учнів узагальнених умінь та прийомів евристичної діяльності цю проблему досліджували М. І. Бурда, Я. М. Грудьонов, Я. М. Жовнір, Ю. М. Колягін, Л. С. Карнацевич, О. І. Скафа, З. І. Слєпкань, В. С. Прач, Н. А. Тарасенкова, В. О. Швець та ін.

З точки зору врахування різних рівнів та профілів навчання проблема знайшла відображення у роботах А. І. Акуленко, М. І. Бурди, С. В. Іванової, К. В. Нєдялкової, І. А. Сверчевської, П. О. Сиваківського та ін.

Основи технології «Інтелект-карти» висвітлені у роботах T. T. Buzan, T. Armstrong, N. R. Tee та ін.

Мета дослідження: визначення й експериментальне обґрунтування шляхів вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження у закладах загальної середньої освіти.

Виклад основного матеріалу. За вимогами до обов'язкових результатів навчання здобувачів освіти з математичної освітньої галузі (додаток 4 Державного стандарту базової середньої освіти) передбачено, що здобувач освіти «… обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, аналізує доказовість аргументів у своїх твердженнях і судженнях інших; формулює припущення і досліджує їх істинність» [4; с. 4].

У сучасних Програмах з математики для загальноосвітніх навчальних закладів у 5–9 та 10–11 класах для різних рівнів і профілів навчання визначені завдання щодо навчання учнів доводити математичні твердження. Так, до загальних завдань шкільної математичної освіти належить завдання щодо «формування *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач …» [8; с. 3]. Відповідно, серед специфічних завдань етапу навчання математики у 5–9 класах міститься завдання з «ознайомлення зі способами і методами розв'язування математичних задач, доведення математичних тверджень, формування умінь їх практичного використання …» [8; с. 3].

У програмі з математики для 10–11 класів (рівень стандарту) вказано: випускник загальноосвітнього закладу «вміє проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі…» [10; с.1], а на профільному рівні «логічно мислить (аналізує та порівнює, прогнозує результат, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклади, висуває та перевіряє гіпотези); володіє алгоритмами та евристиками…» [11; с. 2].

Таким чином, проведеним аналізом нормативних документів щодо цільової моделі шкільного курсу математики встановлено: навчання учнів доводити математичні твердження віднесено до основних завдань шкільної математичної освіти. Виконання цього завдання забезпечується використанням базових основ і результатів актуальних досліджень методики навчання математики.

Домовимося про трактування важливих положень щодо базових основ методики навчання учнів доводити математичні твердження.

Навчання учнів доведенню передбачає:

1) аналіз готових доведень, запропонованих вчителем або представлених у підручнику, та їх відтворення;

2) «самостійне відкриття», безперечно, на основі підготовчої роботи, організованої учителем, математичного факту (тобто теоретичного положення: властивості, ознаки, формули);

3) висунення ідеї доведення, створення і реалізацію плану доведення;

4) аналіз доведення з метою виправлення можливих неточностей та помилок [13; с. 134].

Ураховуючи важливість навчання учнів, особливо тих, які вивчають математику на поглибленому рівні, доведенню математичних тверджень різними способами, вважаємо за доцільне до вказаних 4-х аспектів трактування поняття «навчання учнів доведенню тверджень» додати і п'ятий, – аналіз різних способів доведення математичних тверджень, їх порівняння і вибір раціонального [6].

Навчання доведенням у шкільному курсі математики проводиться поступово.

Спочатку в учнів формується потреба у логічних обґрунтуваннях та уміння виконувати дедуктивні висновки у простих випадках (5–6 класи). Потім учнів ознайомлюють з евристичними прийомами, їх використанням і навчають виконувати ланцюжок логічних кроків при індуктивних та простіших дедуктивних міркуваннях (6–7 класи). У 7-ому класі починається навчання учнів самостійному аналізу готового доведення, виділенню окремих його етапів та визначенню ідеї доведення.

Під час навчання учнів у 7–9 класах формуються уміння використовувати методи доведення, визначені програмою; самостійно доводити твердження; виправляти помилки і окремі огріхи у доведеннях; аналізувати різні способи доведення твердження, порівнювати їх і визначати переваги кожного, вибирати серед декількох способів доведення раціональніший. Така робота щодо навчання учнів доведенню математичних тверджень продовжується, поглиблюється та узагальнюється при навчанні учнів у 10–11 класах.

Одна з важливих закономірностей методики навчання математики полягає в тому, що рівень навчання багато в чому визначається як насиченістю курсу математики теоретичними положеннями, які передбачено обов’язково доводити (теореми, опорні задачі-факти), так і відповідним ступенем навчання доведенням: сформованістю в учнів умінь використовувати різні методи під час доведення тверджень; виправляти помилки у доведеннях; аналізувати різні способи доведення твердження та ін.

Таким чином, провідною ознакою поглибленого навчання математики є наявність у його змістовій складовій великої кількості тверджень, які передбачено доводити, у тому числі і самостійно, та високий рівень сформованості в учнів умінь доводити такі твердження.

Разом із тим, ураховуючи загальне завдання шкільної математичної освіти щодо формування *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження на будь-якому рівні навчання математики передбачено обов’язкове доведення центральних, ключових теорем (ознаки рівності трикутників, властивості рівнобедреного та рівностороннього трикутників, ознаки паралельності прямих, теореми Піфагора, теореми Фалеса, теореми синусів і косинусів та ін.) [5].

Розглянемо деякі особливості методики навчання учнів доводити математичні твердження.

З нашої точки зору, під час проектування роботи з учнями над вивченням математичних тверджень, зокрема теорем або опорних задач-фактів, важливим є виокремлення етапів такої роботи.

У методиці навчання математики існують різні підходи до визначення етапів організації роботи над вивченням теорем. За підходом, запропонованим З. І. Слєпкань, виділяються такі етапи [13; с. 138]:

1) актуалізація опорних знань та умінь учнів;

2) мотивація вивчення теореми;

3) введення назви (за можливістю) і формулювання;

4) скорочений запис;

5) пошук, проведення і запис доведення;

6) закріплення (повторне формулювання теореми; визначення її виду; домовленість про скорочену назву; зв’язування до яких об’єктів можна застосувати цю теорему; з’ясування плану доведення теореми);

7) використання теореми.

К. В. Нєдялкова виокремлює наступні етапи роботи з учнями над твердженням:

1) підготовча робота (актуалізація опорних знань, створення проблемної ситуації, мотивація назви поняття (терміну), експеримент, висування гіпотези та ін.);

2) формулювання теореми (аналіз умови, побудова рисунка, короткий запис «дано – довести»);

3) доведення теореми;

4) закріплення доведення;

5) застосування й узагальнення теореми [12].

Ця систематизація має певні переваги – скорочення кількості етапів за рахунок об’єднання 1 і 2 етапів, а також 3 і 4. Але наш досвід аналізу уроків математики вчителів-початківців свідчить: вони часто утруднюються при розробці мотивації вивчення теореми і тому її не проводять. Виділення мотивації у окремий етап має сприяти приділенню більшої уваги такій важливій складовій роботи з теоремою.

Щодо етапу засвоєння формулювання теореми, то деяким учителям така робота здається марною витратою часу, оскільки для них формулювання теореми добре відоме і вони не припускають можливих утруднень учнів. Але така точка зору є помилковою. Саме тому вважаємо доцільним виокремити етап роботу над засвоєння формулювання теореми.

З урахуванням результатів проведеного аналізу методичної літератури та експериментальних досліджень, нами були внесені часткові корективи та уточнення у систему етапів роботи над математичним твердженням, запропановану у навчальному посібнику [13].

Вважаємо за доцільне рекомендувати вчителям під час підготовки уроків із вивчення теорем користуватися такою системою етапів роботи над теоремою:

1) актуалізація опорних знань і умінь учнів;
2) мотивація вивчення теореми;
3) робота над уведенням і засвоєнням формулювання теореми;
4) побудова рисунка (у геометрії), короткий запис умови і вимоги теореми;
5) робота над доведенням теореми;
6) застосування теореми у найпростіших випадках;
7) застосування теореми і визначення її місця у шкільному курсі математики.

Розглянемо детальніше сутність роботи на кожному із запропонованих етапів.

1. Актуалізація опорних знань і умінь учнів. На цьому етапі передбачено повторення основних відомостей (означень понять, математичних фактів, ідеї та етапів застосування окремих методів доведень), які використовуються у формулюванні та доведенні теореми. При повторенні конкретного методу доведення (від супротивного, векторного, або координатного та ін.) або прийому доведення (використання допоміжної побудови, уведення допоміжних елементів та ін.) доцільно на попередньому уроку повторити ідею і етапи застосування даного методу або сутність прийому і включити у домашнє завдання задачу, яка розв’язу\ться за допомогою цього методу або прийому. У такому випадку під час перевірки домашнього завдання відбувається і актуалізація опорних знань і умінь учнів.

2. Мотивація вивчення теореми. Тут доцільно використовувати: цікаві історичні відомості, пов'язані з даною теоремою; наочність (моделі, креслення, комп'ютерну графіку), проведення експерименту; встановлення доцільності вивчення даного твердження для подальшого застосування при розв'язуванні задач практичного змісту або доведенні інших теорем.

3. Робота над уведенням і засвоєнням формулювання теореми. При уведенні формулювання теореми користуємося або конкретно-індуктивним, або абстрактно-дедуктивним методами. У першому випадку вчитель створює проблемну ситуацію (на основі виконання побудов, або проведення вимірювань, або розв'язування задач на обчислення або виявлення певних залежностей), яка вирішується учнями самостійно або з частковою допомогою вчителя. Підсумком такої роботи є висування варіантів твердження і уточнення його до правильного формулювання теореми. У другому випадку вчитель самостійно формулює теорему, а завдання учнів – зрозуміти її зміст.

Вважається, що використання конкретно-індуктивного методу сприяє свідомому засвоєнню теореми, кращому розумінню її сутності. Саме цьому методу треба віддавати перевагу під час навчання учнів геометрії у 7–9 класах. Недоліки даного методу: 1) потребує значних часових витрат; 2) має обмежену область використання, оскільки підвести учнів до «самостійного відкриття» можна лише в окремих випадках.

4. Побудова рисунка (у геометрії), короткий запис умови і вимоги теореми. При виконанні цього етапу дуже важливо, щоб учитель звертав увагу учнів на необхідність дотримання вимог щодо правильності і наочності рисунка, коректного застосування типових позначень, чіткого оформлення короткої умови і висновку.

5. Робота над доведенням теореми. Рекомендуємо проводити трикратне доведення, тобто прогін доведення у три рази з певними варіаціями. Так, при першому прогоні акцентуємо увагу учнів на ознайомленні з ідеєю доведення; для другого прогону головне – виділення окремих кроків доведення, детальне їх обґрунтування та оформлення відповідних зразків-записів на дошці; мета третього прогону - повторення послідовності кроків доведення і формування в учнів уміння доводити теорему цілком.

6. Застосування теореми у найпростіших випадках. На даному етапі передбачається розв'язування найпростіших задач на застосування доведеної теореми, що реалізується, як правило, усно або за готовими рисунками з коротким записом розв'язання. Також на цьому етапі можна запропонувати учням довести дану теорему за зміненим рисунком (пропорції, розташування, розміри геометричної фігури та позначення її елементів).

7. Застосування теореми і визначення її місця у шкільному курсі математики. Цей етап, відповідно, передбачає роботу у 2-х напрямах: розв'язування більш складних задач із застосуванням доведеної теореми та встановлення зв'язків даної теореми із вивченими раніше теоремами.

Якщо можливо, на даному етапі проводиться робота щодо узагальнень теореми. Наприклад, узагальнення теореми Піфагора – теорема косинусів, узагальнення формули Герона – теорема Брахмагупти.

Таким чином, одним із шляхів удосконалення методики навчання учнів доведенню математичних тверджень вважаємо чітке застосування представлених етапів роботи над вивченням доведень математичних тверджень (теорем, опорних задач-фактів).

На нашу думку, іншим важливим напрямом вдосконалення методики навчання учнів доведенню математичних тверджень є їх доведення різними способами із використанням технології «Інтелект-карт». Розглянемо результати проведеної нами експериментальної роботи щодо встановлення доречності та ефективності використання технології інтелект-карт під час навчання учнів доведенню математичних тверджень загалом, і різними способами, зокрема.

Технологія «Інтелект-карт» (Mind Maps) або «Майнд-карт», або «Карт-міркувань», або «Ментальних карт» була розроблена англійским психологом Тоні Б'юзеном (Tony Buzan, 1942-2019 рр.). Сутність цієї технології і різні варіанти її застосування представлені у 82 книгах, у яких учений є автором або співавтором: «Научите себя думать», «Подключай свою память», «Руководство по развитию способностей к учебе для будущего поколения», «Книга интеллект-карт: разветвленное мышление» та ін. [18].

Класична інтелект-карта має таку структуру:

1. У центрі – основне поняття / ідея /тема.

2. Від центрального образу відходять гілки першого рівня, що розкривають центральне поняття / ідею / тему.

3. Від гілок першого рівня (за необхідності) відходять гілки другого рівня, які розкривають поняття / ідею, написані на гілках першого рівня.

4. Де можливо, використовуються символи / графічні образи, які асоціюються з ключовими поняттями / ідеями / темою.

5. Стрілками сполучають пов'язані між собою поняття / ідеї / розділи теми.

Основна мета застосування інтелект-карт – структурування та наочне представлення інформації [18, 20].

Вважаємо, що інтелект-карта за суттю – блок-схема, що розкриває поняття. За допомогою інтелект-карти встановлюються зв'язки даного поняття з іншими. Таким чином, доцільно узагальнити трактування поняття «інтелект-карта» та в якості різновидів інтелект-карт при навчанні математики розглядати:

1) опорні конспекти (методика В. Ф. Шаталова та ін.);

2) опорні схеми (синтез блок-схем алгоритмів і ментальних карт);

3) таблиці з широким застосуванням графічного матеріалу (Г. В. Апостолова, Є. П. Нелін, Н. А.Тарасенкова та ін.);

4) діаграми Єйлера-Вена.

Нами розроблені опорні схеми доведень теорем геометрії (різновиди інтелект-карт). Така опорна схема складається із назви теореми, рисунка до теореми з необхідними позначеннями і блок-схеми доведення. Для встановлення зв'язків між рисунком і блок-схемою використана запропонована нами система відповідних кольорів та позначень.

Розглянемо приклад опорної схеми доведення теореми Фалеса традиційним способом (рис. 1).

На нашу думку, кожна опорна схема може бути представлена у різних виглядах відповідно до міри деталізації. Так, представлена опорна схема доведення теореми Фалеса за необхідності може містити формулювання теореми, більш детальне наповнення кожного блоку тощо. Іноді поряд із опорною схемою записуються відповідні тези доведення. Отже, опорні схеми можуть бути різною мірою деталізовані, у залежності від конкретних особливостей їх використання.

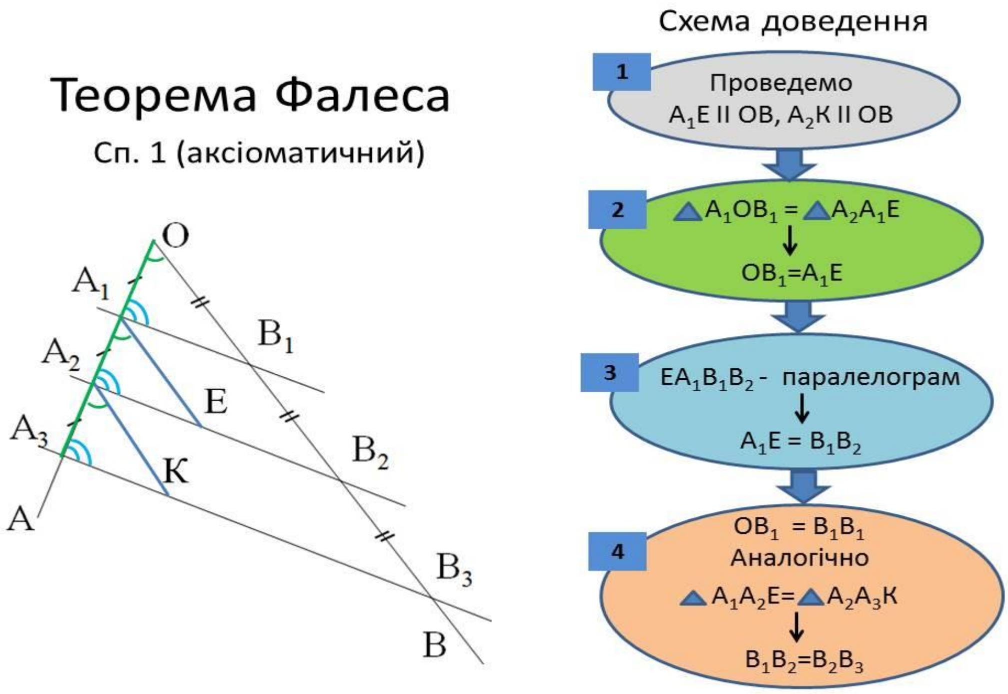


Рис. 1. Опорна схема доведення теореми Фалеса аксіоматичним способом

Інший спосіб доведення теореми Фалеса методом від супротивного представлено інтелект-картою у вигляді таблиці з широким застосуванням графічного матеріалу (рис. 2).

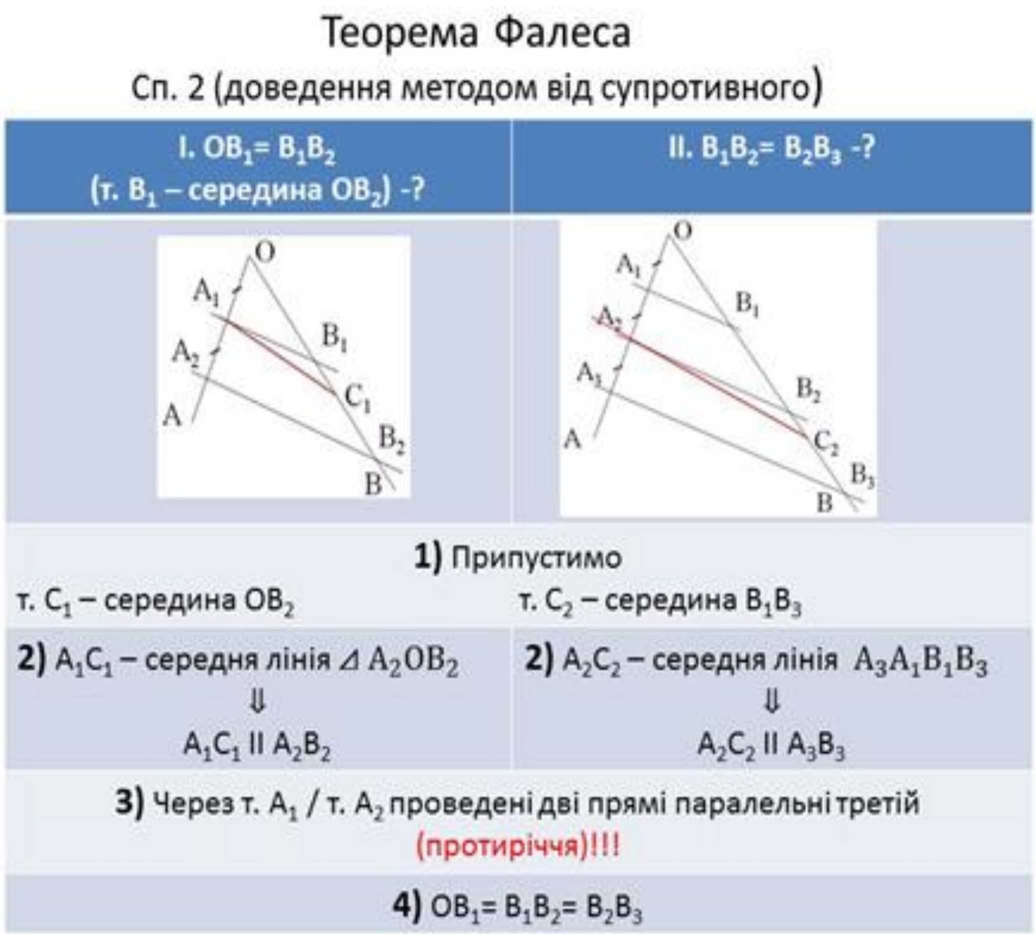


Рис. 2. Опорна схема доведення теореми Фалеса методом від супротивного

Розглянемо питання використання цих способів доведення теореми Фалеса під час навчання геометрії у 8-му класі.

При поглибленому навчанні математики доречно використовувати як традиційний спосіб доведення, так і нетиповий, у даному випадку, спосіб доведення від супротивного. Це дозволить повторити особливості реалізації кожного способу під час доведення, порівняти їх. В учнів з'явиться можливість вибору того способу доведення, який відповідає їх пізнавальним можливостям та інтересам.

Щодо доцільності використання 2-х способів доведення теореми Фалеса на базовому рівні навчання, то тут треба враховувати рівень математичної підготовки більшості учнів. Якщо рівень цієї підготовки достатній, то корисно ознайомити учнів з двома способами довелення теореми Фалеса.

У випадку низького рівня математичної підготовки більшості учнів рекомендуємо довести теорему Фалеса традиційним аксіоматичним способом. А учням, які цікавляться математикою, запропонувати самостійно ознайомитися з другим способом доведення теореми Фалеса. Рекомендуємо застосувати у цьому випадку опорну таблицю доведення теореми Фалеса методом від супротивного, яка містить і завдання для перевірки засвоєння даного методу (табл. 1).

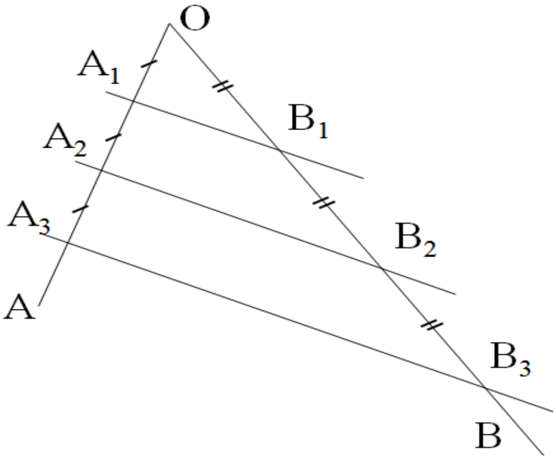
Таблиця 1

Доведення теореми Фалеса методом від супротивного

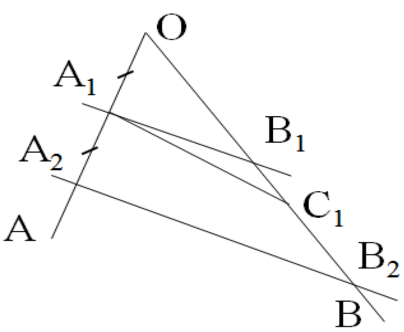
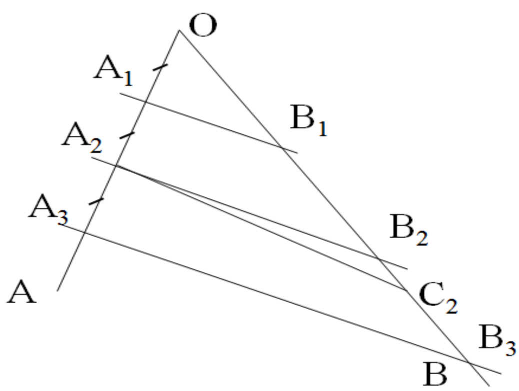
Теорема Фалеса

Дано: $\angle AOB$, $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Довести: $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$



1. Записати доведення теореми Фалеса з викоритсанням заданої таблиці для двох випадків, якщо $OB_1 = B_1B_2$ (випадок I) і якщо $B_1B_2 = B_2B_3$ (випадок II).

<table>
<tr><td>I. $OB_1 = B_1B_2$ (т. B_1 – середина OB_2) -?</td><td>II. $B_1B_2 = B_2B_3$ -?</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) Припустимо
т. C_1 – середина OB_2 т. C_2 – середина B_1B_3</td></tr>
<tr><td>2) A_1C_1 – середня лінія $\triangle A_2OB_2$
⇓
$A_1C_1 \parallel A_2B_2$</td><td>2) A_2C_2 – середня трапеції $A_3A_1B_1B_3$
⇓
$A_2C_2 \parallel A_3B_3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Через т. A_1 / т. A_2 проведені дві прямі паралельні третій (протиріччя)!!!</td></tr>
<tr><td colspan="2">4) $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$</td></tr>
</table>

2. Встановити, які теоретичні відомості використано при доведенні теореми Фалеса методом від супротивного за даною опорною таблицею?

А	Означення та властивості середньої лінії трикутника, аксіома паралельних прямих.
Б	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
В	Властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
Г	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих

Розглянемо організацію роботи щодо навчання учнів різним способам доведення теореми синусів. Наведемо приклад опорної схеми доведення теореми синусів традиційним способом, який використовується у більшості підручників (рис. 3).

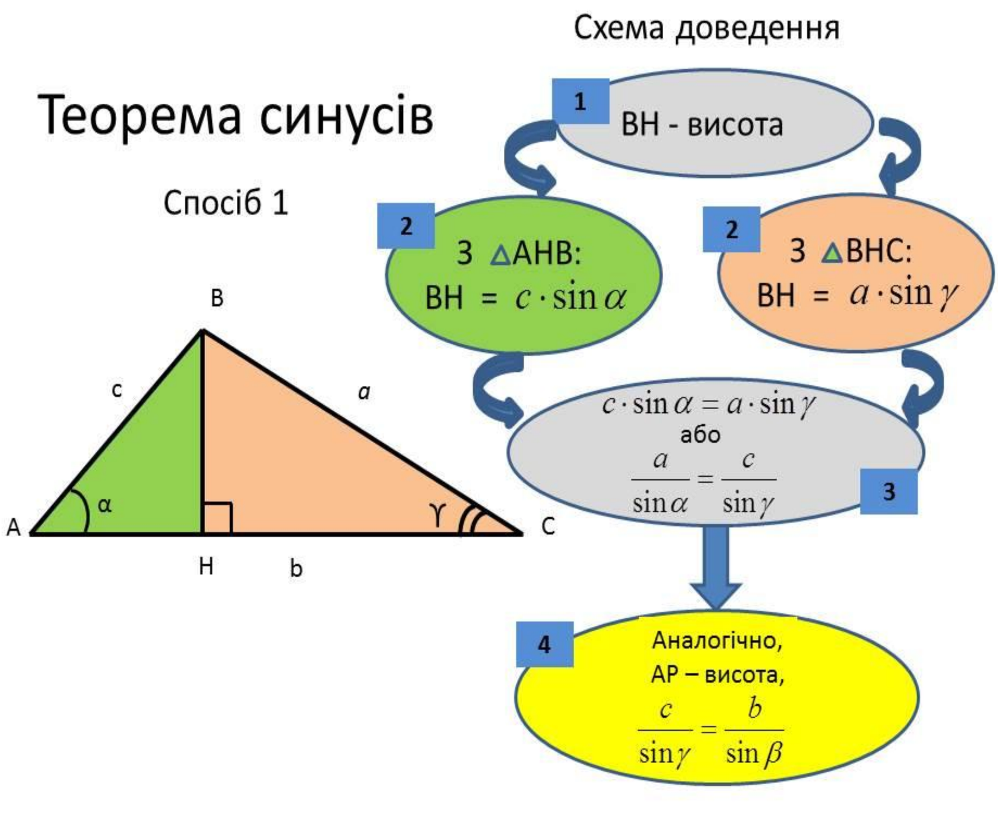


Рис. 3. Опорна схема доведення теореми синусів (спосіб 1)

Пропонуємо довести теорему синусів і способом, при якому використовується прийом уведення допоміжного кола (рис. 4). Дидактична цінність даного способу полягає у тому, що він дозволяє одночасно довести і теорему синусів, і формулу для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника за його стороною і синусом кута, протилежного цій стороні $R = \frac{a}{2\,sin\alpha}$.

Зазвичай реалізується така послідовність: спочатку доводимо теорему синусів, а потім виводимо дану формулу як наслідок теореми синусів або опорної задачі-факту.

Що стосується використання цих способів доведення при навчанні геометрії на базовому рівні, то тут, знов таки, треба враховувати рівень математичної підготовки більшості учнів. Але, і у випадку низького рівня такої підготовки рекомендуємо учням, які цікавляться математикою, представити можливість ознайомитися із другим способом доведення теореми синусів. Це може бути завдання щодо «розшифрування» опорної схеми доведення теореми синусів, тобто визначення і запис етапів доведення теореми синусів способом уведення допоміжного кола. Таким чином, із метою підвищення інтересу учнів до доказових міркувань застосовуються різні способи доведення.

Нами розроблено приклади щодо демонстрації можливостей застосування теоретичних відомостей нової теми для обґрунтування доведення вже відомих тверджень новим для учнів способом. Так, наприклад, пропонуємо застосування методу координат (під час вивчення теми «Декартові координати») продемонструвати для доведення теореми косинусів або властивості діагоналей паралелограма (залежність довжин діагоналей паралелограма від довжин його сторін).

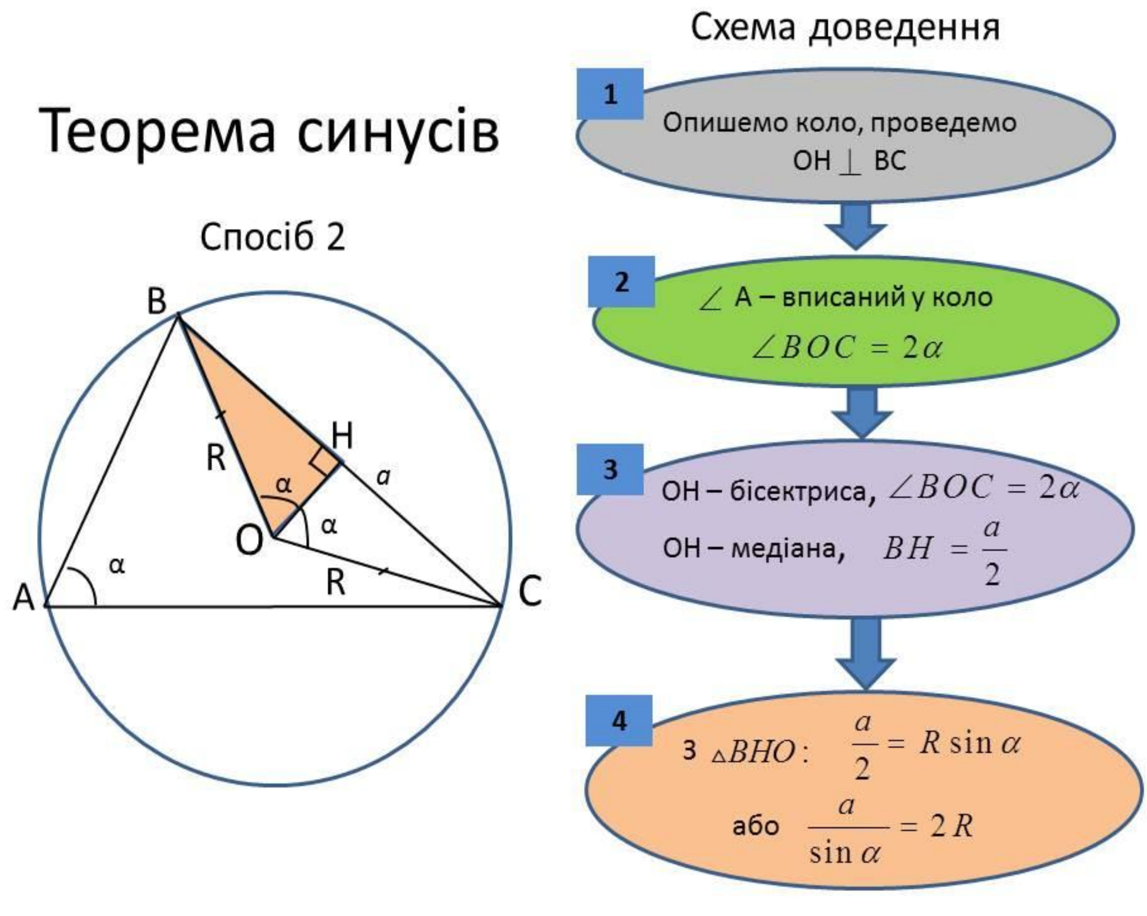


Рис. 4. Опорна схема доведення теореми синусів (спосіб 2)

Проведені нами експериментальні дослідження дозволили уточнити способи реалізації диференційованого навчання під час доведення теорем різними способами, пов’язані із розширенням кола варіантів організації роботи над доведенням твердження.

Обґрунтовано, що чітка організація навчання доведення теорем різними методами та способами, яка містить їх порівняння, вибір раціональнішого, роботу щодо конкретизації та узагальнення та ін., сприяє розвитку логічного мислення учнів.

Виокремимо позитивні сторони використання різних способів доведень математичних тверджень загалом, і теорем, зокрема:

1) розширення діапазону можливостей для кожного учня щодо засвоєння доведення конкретного математичного твердження;

2) створення можливостей для реалізації особистісно орієнтованого навчання (самостійний вибір учнем способу доведення, який він краще зрозумів, який відповідає його інтересам та рівню підготовки);

3) слушна нагода повторення різних методів і прийомів доведення та порівняння їх використання у конкретних випадках;

4) повторення більшої кількості теоретичних фактів, на які спираємося під час доведень.

До негативних сторін використання різних способів доведень математичних тверджень віднесемо:

1) збільшення витрат навчального часу;

2) ускладнення роботи вчителя при підготовці до уроку.

На основі аналізу методичної літератури і проведених нами експериментальних досліджень установлено, що застосування технології «Інтелект-карти» під час навчання учнів доведенню математичних тверджень забезпечує:

- реалізацію принципу наочності, а саме демонстрацію зв’язків ідей / об’єктів / понять і послідовності окремих етапів доведення;
- створення підстав для виникнення асоціацій щодо застосування конкретного способу доведення;
- підвищення швидкості і посилення ефективності процесу генерації ідей;
- посилення якості та інтенсивності навчання учнів доводити твердження;
- сприяння розвитку логічного мислення учнів;
- полегшення запам’ятовування доведень.

На тренінгах з учителями-математиками на базі Одеського приватного ліцею «Мрія» обговорювалися особливості реалізації творчого підходу вчителя до вибору способу доведення твердження з урахуванням рівня навчання учнів, а також організація роботи щодо навчання учнів використанню різних способів доведення. Учасники заходів позитивно оцінили застосування різновидів інтелект-карт у вигляді опорних схем і таблиць (з широким застосуванням графічного матеріалу) до організації роботи щодо навчання учнів доводити математичні твердження.

Висновки. Проведене дослідження на емпіричному та теоретичному рівнях дозволяє стверджувати, що представлені шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження є обґрунтованими та ефективними. Апробація зазначених напрямів роботи успішно відбувалася у процесі співпраці з учителями природничо-математичного циклу Одеського приватного ліцею «Мрія».

Список використаних джерел

1. Акуленко І. А. Індукція і дедукція у міркуванні школярів. *Математика в школі*. 2005. № 7. С. 9–17.
2. Бевз Г. П. Доведення від супротивного (геометрія). *Математика в школах України*. 2006. № 1. С. 6–9.
3. Гришина Т. Рівнева організація роботи над теоремою. *Математика в школі.* 2002. № 1. С. 20–23.
4. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: https://nus.org.ua/wp-content/uploads/2019/06/standart-1206.pdf

5. Іванова С. В. Формування геометричних умінь старшокласників шкіл (класів) гуманітарного профілю : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 Київ, 1999. 221 с.
6. Іванова С. В., Іванова О. В. Методичні особливості навчання учнів загальноосвітніх шкіл доведенню геометричних тверджень з урахуванням вимог ЗНО. *Актуальні проблеми методики навчання математики* : матеріали регіон. наук.-практ. конф. Одеса, 14-15 травня 2008 р. / за ред. С. В. Іванової. Одеса : Наука і техніка, 2008. С. 26–31.
7. Моторіна В. Г. Інноваційні підходи до навчання математики : навчальний посібник. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, Скорпіон, 2008. 112 с.
8. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-9 класи. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
9. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://uman-rvoms.gov.ua/navchalni-programi-dlya-89-klasiv-z-pogliblenim-vivchennyam-12-33-08-18-06-2020/
10. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніїх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://rada.info/upload/users_files/02146959/e971b695934c0b9b5013d002d698bcfe.pdf
11. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніїх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://rada.info/upload/users_files/02146959/828babe8f5aa78569243a87a59f77197.pdf
12. Нєдялкова К. В. Загальна методика навчання математики : практичний курс. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.
13. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика : навчальний посібник для організації самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. / З. І. Слєпкань та ін. ; за заг. ред. З. І. Слєпкань. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. 293 с.
14. Прач В. С. Евристичне навчання математики : Подорож у світ евристики. Донецьк : Ноулідж, 2012. 275 с.
15. Сверчевська І. А. Компетентісний підхід до навчання учнів доведенням тверджень про геометричні тіла https://core.ac.uk/download/pdf/12081826.pdf
16. Сиваківський П. О. До проблеми різних доведень одного твердження в шкільному курсі геометрії. *Математика в школі*. 2000. № 3. С. 36–39.
17. Шарыгин И. Ф. Нужна ли в школе XX века геометрия? *Математика в школе*. 2007. № 4. С. 72–80.
18. T. Buzan. Mind map mastery: The complete guide to learning and using the most powerful thinking tool in the universe. Watkins Media Limited, 2018.
19. T. Armstrong. The Whole-brain Solution: Thinking Tools to Help Students Observe, Make Connections and Solve Problems. Pembroke Publishers Limited, 2003.
20. N. R. Tee, et al. Buzan mind mapping : An efficient technique for note-taking. *International Journal of Psychological and Behavioral Sciences*, 2014, 8.1: 28–31.
21. S. Ivanova, L. Dimitrov, V. Ivanov and G. Naleva, "An Experiment on the Joint use of the Heuristic and Project Methods at the University," *2019 II International Conference on High Technology for Sustainable Development (HiTech)*, Sofia, Bulgaria, 2019, pp. 1–5, doi: 10.1109/HiTech48507.2019.9128248.