

*Державний заклад
“Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського”*

Одеський приватний ліцей «МРІЯ»

*Одеський приватний навчально-виховний комплекс «Загальноосвітня школа І ступеня з
поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «МРІЯ»*

НАУКОВО – МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

монографія

Одеса 2021

*Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені К. Д. Ушинського»*

Одеський приватний ліцей «МРІЯ»

*Одеський приватний навчально-виховний комплекс «Загальноосвітня
школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов –
дошкільний навчальний заклад «МРІЯ»*

**НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ
ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ
ЗДОБУВАЧІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ**

монографія

за редакцією К. В. Недялкової

Одеса 2021

Рецензенти

- І. А. Княжева* – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри педагогіки Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського
- О. С. Чашечникова* – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка

Науково-методичні засади формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти : монографія / ДЗ «ПНПУ імені К. Д. Ушинського»; за ред. К. В. Недялкової. – Одеса: Видавець ФОП Бойчук, 2021. 279 с.

Матеріали монографії призначені для широкого кола науковців і практиків у галузі теорії та методики навчання математики, вчителів математики, студентів математичних спеціальностей, викладачів математичних дисциплін, аспірантів.

Рекомендовано до друку Вченою радою Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського

(протокол № 9 від 25 лютого 2021 року)

- © К. В. Недялкова, автори, 2021
- © Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, 2021
- © Одеський приватний ліцей «Мрія», 2021

ЗМІСТ

Передмова	5
Розділ 1. Реалізація концепції НУШ у навчанні математики (початкова школа)	10
1. 1. Нормативні засади навчання математики у початковій школі за концепцією НУШ <i>Скворцова С., Гасвець Я.</i>	11
1. 2. Організація навчальних досліджень учнів початкової школи з використанням математичних матеріалів <i>Скворцова С.</i>	38
1. 3. Навчання математики учнів початкової школи за альтернативними програмами <i>Марахова Т., Демченко Е.</i>	67
Розділ 2. Методика формування в учнів понять сучасного шкільного курсу математики	74
2.1. Напрями вдосконалення методики формування математичних понять у здобувачів середньої освіти <i>Недялкова К.</i>	75
2.2. Шляхи розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики <i>Коростіянець Т.</i>	90
Розділ 3. Методика навчання учнів доводити математичні твердження	101
3.1 Шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження <i>Іванова С.</i>	102
3.2 Напрями розвитку методичної компетентності вчителів-математиків щодо навчання учнів доводити математичні твердження <i>Недялкова К.</i>	114
Розділ 4. Навчання математики учнів закладів загальної середньої освіти на різних освітніх рівнях	127
4.1. Реалізація профільного навчання у контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти <i>Іванова С., Кушнірук А.</i>	128
4.2. Методичні особливості підготовки і проведення сучасних уроків з математики на різних освітніх рівнях <i>Коростіянець Т., Іванова С., Недялкова К., Кушнірук А.</i>	141
Розділ 5. Методика підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики	161
5.1. Теоретико-методичні засади підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики <i>Кушнірук А.</i>	162
5.2. Методика розробки індивідуальних траєкторій підготовки старшокласників до ЗНО з математики <i>Тумбуракі А., Друзьяк О.</i>	175

Розділ 6. Мотивація навчальної діяльності здобувачів середньої освіти на уроках математики	190
6.1. Формування мотивації навчальної діяльності учнів на уроках математики у сучасній школі <i>Коростіянець Т.</i>	191
6.2. Методика організації і проведення педагогічного експерименту щодо підвищення мотивації вивчення учнями математики <i>Недзялкова К., Шинкаренко Є.</i>	201
Розділ 7. Формування практичної математичної компетентності здобувачів середньої освіти	213
7.1. Методика організації і проведення математичного експерименту з розвитку логічного мислення учнів <i>Світной О.</i>	214
7.2. Методика організації і проведення математичного експерименту з розвитку критичного мислення школярів <i>Тумбрукакі А.</i>	224
7.3. Методика організації і проведення математичного експерименту з розвитку просторового мислення учнів <i>Іщенко А.</i>	234
Висновки	248
Додаток 1	258
Додаток 2	272
Відомості про авторів	277

ПЕРЕДМОВА

Представлена монографія стала результатом плідної співпраці між Одеським приватним навчально-виховним комплексом «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»», Одеським приватним ліцеєм «Мрія» і кафедрою математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» у межах виконання науково-дослідної роботи (за договором №1 від 3 червня 2020 р.) з теми *«Дослідження науково-методичних засад формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти»*.

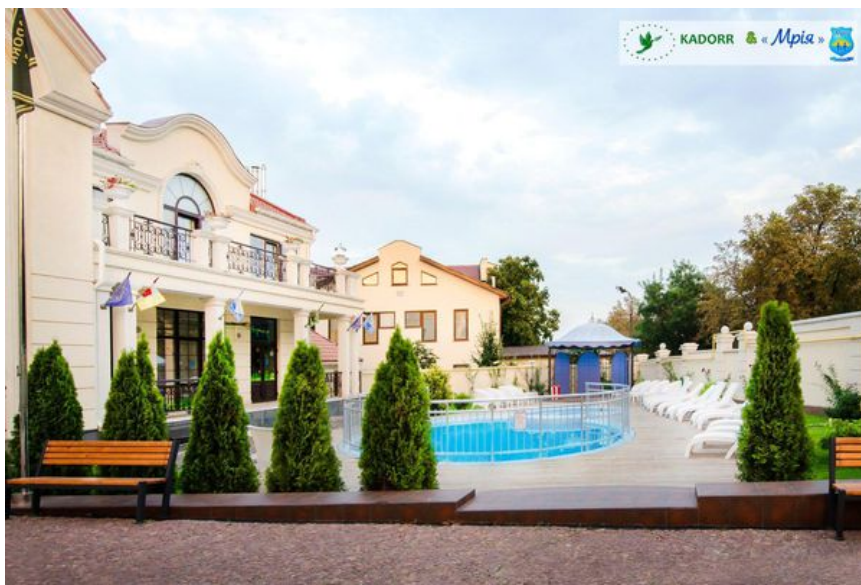
Університет

Ушинського є одним із найстаріших навчальних закладів України та першим педагогічним у Північному Причорномор'ї, який зараз очолює дійсний член НАПН України Олексій Якович Чебикін, засновник наукової школи, що отримала світове визнання. В університеті функціонує 38 кафедр під керівництвом докторів наук і професорів – визнаних фахівців у своїх галузях. На кафедрах працюють близько п'ятисот викладачів і двадцяти зарубіжних фахівців.



Кафедра математики і методики її навчання Університету Ушинського нещодавно відзначила свій 30-річний ювілей. У витоків заснування кафедри стояла видатна методистка-математик

Ганна Іванівна Мартинова. Зараз кафедру очолює Світлана Олексіївна Скворцова, доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України.



Навчальний заклад, із яким викладачам кафедри пощастило співпрацювати у рамках проєкту, є одним з провідних закладів загальної середньої освіти Одеського регіону. Це сучасна школа з традиціями, історією, цінностями, серед яких найважливіші – любов, вдячність, повага, мудрість...

Це не просто школа нового типу, відкрита до впровадження передового педагогічного досвіду, це – освітній простір для дітей і батьків, це колектив однодумців – творчих, талановитих, обізнаних людей – професіоналів своєї справи, здатний втілювати у життя найамбітніші ідеї і реалізовувати найцікавіші проєкти.

Ми маємо висловити велику подяку засновникам школи «Мрія», Олександрові Володимировичу Дідичу і Марії Геннадіївні Дідич за можливість співпрацювати, впроваджувати власні педагогічні ідеї; фактично, Одеський приватний навчально-виховний комплекс «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»», Одеський приватний ліцей «Мрія» стали експериментальним майданчиком кафедри математики і методики її навчання Університету Ушинського.

Також ми щиро вдячні директорові Одеського приватного ліцею «Мрія» Олені Євгеніївні Друзьяк – талановитому педагогу, вчителю математики, учениці Тетяни Олександрівни Шевченко – приват-доцента кафедри математики і методики її навчання – педагогу, яка зростила не одне покоління школярів, студентів, учителів-математиків. Завдяки Олені Євгеніївні дослідницька педагогічна діяльність та обмін досвідом між учителями і викладачами (школа – ЗВО) у рамках сумісного проєкту набули ґрунтового змісту і комфортної реалізації.

Науково-дослідну роботу **«Дослідження науково-методичних засад формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти»** виконано під керівництвом доцента кафедри, кандидата педагогічних наук Катерини Василівни Недялкової.

Актуальність теми є безперечною, виходячи із таких положень:

1. Навчання математики у закладах загальної середньої освіти передбачає формування в учнів *предметної математичної компетентності* та має зробити певний внесок у формування *ключових компетентностей*; серед них також виділяється *математична компетентність*, сутність якої виражається в уміннях оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та у просторі; встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і

- явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати у контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях.
2. Проте, останнім часом спостерігається зниження мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти, неусвідомлення частиною учнів значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного й оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін.
 3. Натомість, запит суспільства до якості математичної освіти школярів зростає, про що свідчить оголошення 2020/2021 навчального року «Роком математичної освіти в Україні» (Указ Президента України від 30 січня 2020 року). В Указі зазначено про необхідність упровадження у навчання сучасних практико-орієнтованих засад, у тому числі з використанням ресурсів PISA, підвищення якості навчально-методичного забезпечення вивчення математики. Міжнародна програма з оцінки освітніх досягнень учнів (англ. *Programme for International Student Assessment, PISA*) – тест, що оцінює функціональну грамотність школярів різних країн світу та вміння застосовувати знання на практиці, – також проголосила для 2021 року провідною саме математичну компетентність.

Отже, **метою науково-дослідної роботи стало визначення й узагальнення науково-методичних засад формування математичної компетентності учнів початкової, основної та старшої шкіл у контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти.**

У представленому дослідженні під *формуванням математичної компетентності* розумілося формування у здобувачів середньої освіти:

- 1) *математичної компетентності як ключової компетентності*, що дає можливість особистості ефективно діяти у різних сферах життєдіяльності і належить до загальногалузевого змісту освітніх стандартів;
- 2) *предметної математичної компетентності* як набутий учнями у процесі навчання досвід специфічної для певного предмета діяльності, пов'язаної із засвоєнням, розумінням і застосуванням нових знань;
- 3) *практичної математичної компетентності* як набутий учнями у процесі навчання комплекс певних прийомів математичної діяльності та навичок їх застосувань до розв'язування практичних задач.

Наукова робота відбувалася за **декількома напрямками**, за кожним із яких було окреслено завдання дослідження.

I. Реалізація концепції НУШ у навчанні математики (початкова школа).

ЗАВДАННЯ:

1. Визначення теоретико-методичних основ навчання математики у початковій школі на засадах НУШ.
2. Розробка методики організації навчальних досліджень учнів початкової школи при вивченні нумерації чисел з використанням математичних матеріалів.
3. Розробка методики організації навчального відкриття учнями суті прийомів обчислення у межах 100 (з використанням математичних матеріалів).
4. Розробка методики організації навчальних досліджень при формуванні в учнів початкової школи навичок табличного множення та ділення (з використанням математичних матеріалів).

II. *Методика формування в учнів понять сучасного шкільного курсу математики.*

ЗАВДАННЯ:

1. Розробка методичних рекомендацій щодо формування в учнів понять сучасного шкільного курсу математики.
2. Визначення шляхів вдосконалення фахових компетентностей учителів-математиків щодо формування у здобувачів середньої освіти математичних понять.
3. Виявлення методичних особливостей проведення уроку з вивчення математичних понять у класах з поглибленим навчанням математики.
4. Виявлення методичних особливостей проведення уроку з вивчення математичних понять у класах гуманітарного профілю.

III. *Методика навчання учнів доводити математичні твердження.*

ЗАВДАННЯ:

1. Визначення шляхів вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження.
2. З'ясування методичних аспектів застосування різних методів і способів доведень математичних тверджень у шкільному курсі математики.
3. Визначення напрямів розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо навчання учнів доводити математичні твердження.
4. Виявлення методичних особливостей проведення уроку з вивчення математичних тверджень в класах з поглибленим навчанням математики.
5. Виявлення методичних особливостей проведення уроку з вивчення математичних тверджень у класах гуманітарного профілю.

IV. *Навчання математики учнів закладів загальної середньої освіти на різних освітніх рівнях.*

ЗАВДАННЯ:

1. З'ясування теоретико-методичних засад профільного навчання математики в контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти.
2. Визначення шляхів розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо реалізації профільного навчання математики здобувачів середньої освіти.
3. Виявлення методичних особливостей проведення уроків у класах з поглибленим (профільним) навчанням математики.
4. Виявлення методичних особливостей проведення уроків у класах з навчанням математики на рівні стандарту.

V. *Методика підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики.*

ЗАВДАННЯ:

1. Визначення теоретико-методичних засад підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики та практичних шляхів їх реалізації.
2. Виявлення проблемних питань підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики в контексті реформування шкільної математичної освіти.
3. Визначення напрямів удосконалення фахових компетентностей учителів-математиків щодо розв'язання завдань ЗНО.
4. Організація і проведення діагностичного експерименту з учнями 9–11 класів щодо виявлення рівня сформованості математичної компетентності у контексті підготовки до ЗНО.

5. Організація і проведення формуючого експерименту з учнями 9–11 класів щодо подолання труднощів у підготовці до ЗНО і розробки індивідуальної траєкторії формування математичної компетентності.

VI. *Мотивація навчальної діяльності здобувачів середньої освіти на уроках математики.*
ЗАВДАННЯ:

1. Визначення теоретико-методичних засад формування мотивації навчальної діяльності учнів на уроках математики та практичних шляхів їх реалізації.
2. Розробка методики підготовки і проведення педагогічного експерименту щодо діагностики і формування мотивації навчальної діяльності учнів на уроках математики.
3. Організація науково-методичного супроводу педагогічного експерименту щодо діагностики і формування мотивації навчальної діяльності учнів на уроках математики.
4. Організація і проведення освітнього квесту для учнів із метою підвищення інтересу до вивчення математики.
5. Виявлення методичних особливостей проведення уроку-корекції мотивації вивчення учнями математики.

VII. *Формування практичної математичної компетентності здобувачів середньої освіти.*
ЗАВДАННЯ:

1. Розробка методики організації і проведення математичного експерименту (дослідження) на матеріалі шкільного курсу математики.
2. Залучення студентів Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» до дослідницької діяльності.

Виконання зазначених завдань обумовило **застосування методів**, представлених на рисунку 1.



Рис. 1. Методи дослідження

Зазначимо, що науково-дослідну роботу було виконано на засадах **компетентнісного, особистісно орієнтованого і діяльнісного підходів** до навчання та виховання.

РОЗДІЛ 1

Реалізація концепції НУШ у навчанні математики (початкова школа)

1.1. НОРМАТИВНІ ЗАСАДИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ ЗА КОНЦЕПЦІЄЮ НУШ

Світлана Сковцова, Яна Гаєвець

Вступ. У 2016 році Кабінет Міністрів України затвердив Концепцію реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа (далі – НУШ)» на період до 2029 роки (14.12.2016 № 988-р). Основними засадами Нової української школи є: спрямованість навчання на формування в учнів ключових компетентностей, оновлення змісту шкільної освіти, його інтегрованість на основі ключових компетентностей. Цей документ надає педагогічну свободу вчителю у доборі змісту, методів і форм навчання й акцентує увагу на використанні сучасних методик навчання. В якості наступного кроку у 2018 році Кабінет Міністрів України затвердив новий Державний стандарт початкової освіти (21.02.2018, постанова №87), який набув чинності з 1 вересня 2018 р. У новому Державному стандарті початкової освіти (далі ДС) деталізовано результати освіти на першому рівні Національної рамки кваліфікацій – на рівні початкової освіти – за освітніми галузями. Результати навчання сформульовані, виходячи з того, що метою освітніх галузей є формування в учнів ключових і предметних компетентностей. Зокрема, математична компетентність визначається і як ключова, і як предметна.

Мета математичної освітньої галузі полягає у формуванні математичної й інших ключових компетентностей; розвитку мислення; розвитку здатності розпізнавати й моделювати процеси та ситуації із повсякденного життя, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; здатності робити усвідомлений вибір. Загальними результатами математичної освітньої галузі передбачено, що учень або учениця досліджує ситуації і виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії (плани) дій для розв'язування різноманітних задач; критично оцінює дані, процес та результат розв'язання навчальних і практичних задач; застосовує досвід математичної діяльності для пізнання навколишнього світу [1; 3].

Огляд останніх публікацій за темою. Детальний аналіз сучасного етапу розвитку математичної освіти у початковій школі представлено у низці публікацій автора [4; 5; 6; 7; 8]. Зупинимось лише на істотних відмінностях математичної освіти у початковій школі, які викликані впровадженням Концепції НУШ. По-перше, це зміни кількості годин на математичну освітню галузь, визначені у новому ДС [1]. Згідно з базовим навчальним планом, що вміщений у новому ДС, математична освітня галузь належить до інваріантної частини з 4-годинним щотижневим навантаженням учнів (140 годин на рік) у першому циклі освіти та 5-годинним щотижневим навантаженням учнів (175 годин на рік) у другому циклі. У попередньому варіанті ДС на освітню галузь математика було відведено 140 годин на рік з 1-го по 4-й класи. 22 лютого 2018 року Колегією МОН України було затверджено два варіанти Типових освітніх програм (далі – ТОП) Нової української школи для 1–2-го класів, а 27 грудня 2018 року Колегія МОН України затвердила два варіанти ТОП для 3–4-го класів. Типові освітні програми (ТОП) для початкової школи впроваджуються у двох варіантах – ТОП, створена колективом авторів під керівництвом академіка О. Я. Савченко (умовно названа НУШ 1) та ТОП, створена під керівництвом Р. Б. Шияна (умовно названа НУШ 2). Ці програми відрізняються не лише змістом, а й структуруванням.

Метою дослідження є порівняльний аналіз ТОП1 і ТОП2, визначення спільних і відмінних сторін цих програм.

Виклад основного матеріалу. В ТОП НУШ 1 (далі – ТОП 1) для кожного року навчання чітко визначено результати і зміст навчання. В ТОП НУШ 2 (далі – ТОП 2) продубльовано з ДС «Обов’язкові результати навчання», які спроектовано в «Очікувані результати навчання». Ці результати прописані лише на кінець кожного з двох циклів початкової школи, і подано перелік орієнтувальних тем, на яких досягаються ці результати [9]. Відмінності є й у щотижневому навантаженні учнів. Так, за ТОП 1 у першому циклі на математичну освітню галузь, як і за ДС, відведено 4 години на тиждень, а у другому – 5 годин, а ТОП2 – одну годину з математичної освітньої галузі перенесено до інтегрованого курсу «Я досліджую світ»; і за ТОП 2 у 1-2 класах на уроки математики відводиться 3 години на тиждень, а у 3–4-му класах – 4 години на тиждень. Також, певні відмінності ТОП1 і ТОП2 є й у формулюванні мети навчання математики у початковій школі (рис. 1). Так, у ТОП1 зроблено акцент на різнобічному розвитку особистості, на формуванні математичної та інших ключових компетентностей, а у ТОП2 – мету сформульовано досить вузько – розвиток лише математичного мислення, досить деталізовано щодо розвитку певних здатностей.

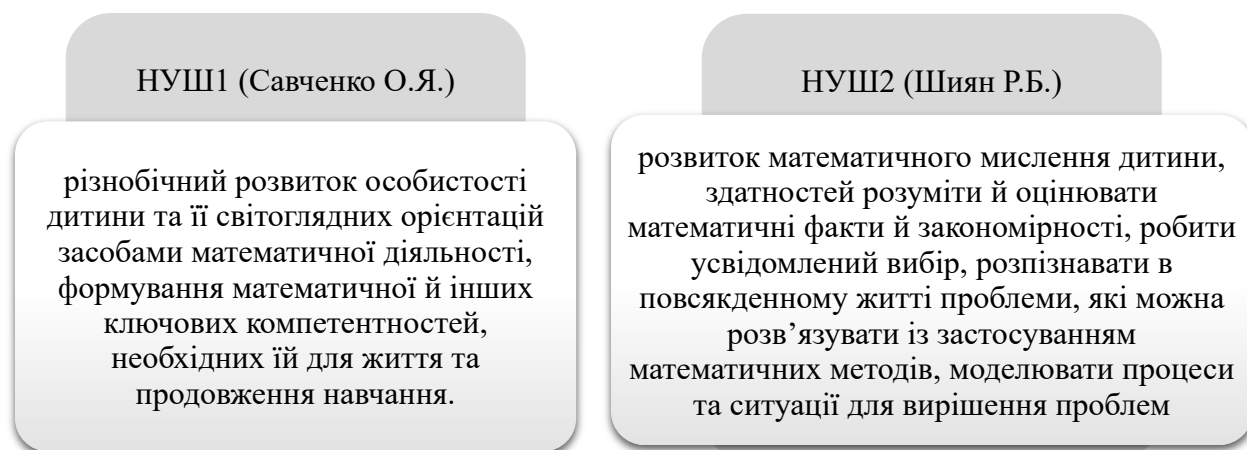


Рис. 1. Мета навчання математики у початковій школі за ТОП 1 та ТОП 2

Виходячи із дещо відмінного розуміння мети математичної освіти у початковій школі, очевидно, що і спостерігається певна неузгодженість і у формулюванні завдань навчання математики. На рисунках 2 і 3 подано результати порівняльного аналізу завдань навчання математики за ТОП1 і ТОП2. Як бачимо, деякі завдання або групи завдань, визначені у ТОП1 і ТОП2 можна співвіднести (рис. 2), але деякі завдання як у одній, так і у іншій програмі узгодити не має можливості (рис. 3). Крім того, у ТОП2 завдання більшою мірою деталізовано, ніж у ТОП1. Так, завданню 2 за ТОП1 «формування у дітей досвіду використання математичних знань та способів дій для розв’язування навчальних і практичних задач», у ТОП2 відповідає низка завдань (1–6). Водночас, у ТОП2 залишилися без уваги завдання навчання математики, пов’язані із розвитком математичного мовлення та логічного мислення.

У ТОП1 відсутній аналог сьомого завдання, сформульованого у ТОП2: «вироблення вміння сприймати, перетворювати та оцінювати отриману інформацію, використовуючи різні джерела, у тому числі й засоби інформаційно-комунікаційних технологій». На нашу думку, це завдання є важливим, пов’язаним з формуванням ключової компетентності – інформаційно-цифровою, але виокремлювати це як завдання для математичної освітньої галузі недоречно.



Рис. 2. Завдання навчання математики за ТОП 1 і ТОП 2

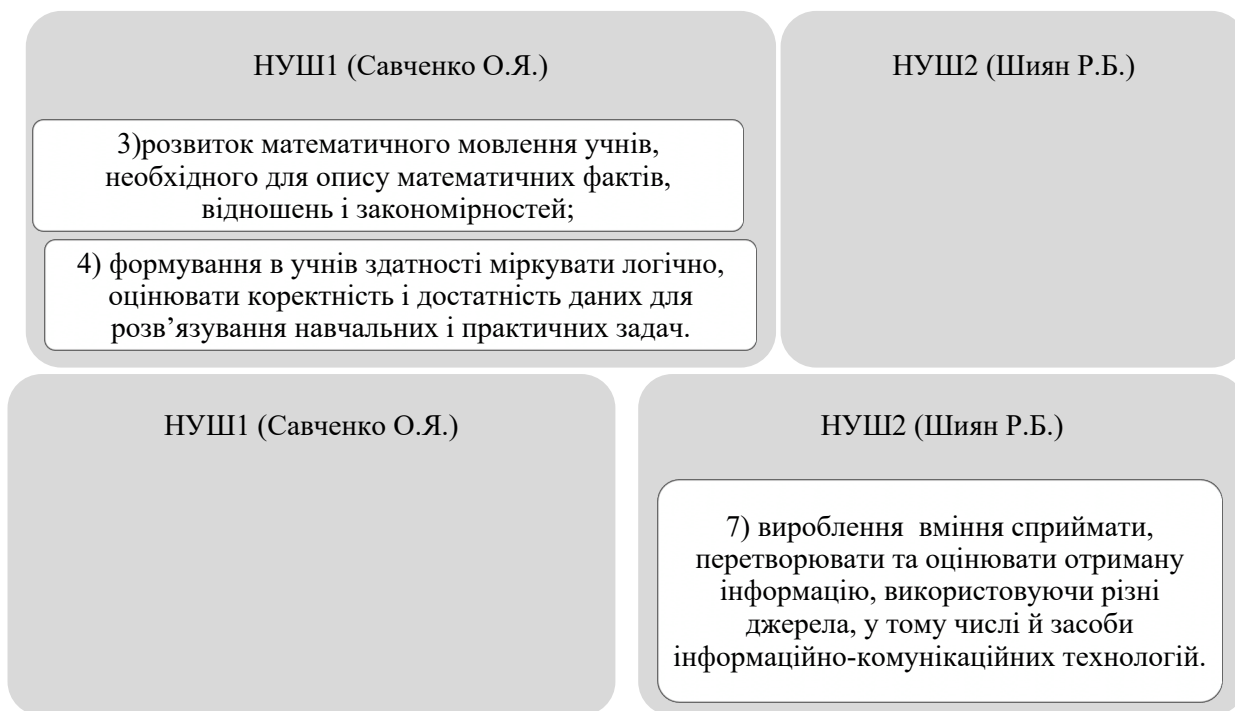


Рис. 3. Завдання навчання математики за ТОП 1 і ТОП 2

Відмінності ТОП1 і ТОП2 спостерігаються й у виокремленні змістових ліній (ЗМ). Зазначимо, що зміст математичної освіти не може істотно змінюватися з роками, бо початкова школа є першим рівнем НРК, на якому відбувається цілеспрямоване навчання. Очевидно, що починати навчати математики логічно з початкових базових понять – з поняття числа, поступово розширюючи множину чисел – з натуральних чисел у межах 10, уводячи 0, одержуємо розширену множину натуральних чисел, далі розглядаються числа у межах 100, у межах 1000, у межах 1000000. Отже, змістова лінія, пов'язана з вивченням чисел є системоутворювальною. Саме у її межах розглядаються арифметичні дії з числами у певному концентрі, розв'язуються задачі, здійснюється алгебраїчна та геометрична пропедевтика. Результати порівняльного аналізу ЗМ ТОП1 і ТОП2 представлено на рисунку 4.

Як бачимо, змістовій лінії «Числа, дії з числами. Величини» ТОП1 у ТОП2 відповідає три змістові лінії. Щодо виокремлення ЗМ «Вимірювання величин» немає заперечень, а ось щодо виділення ЗМ «Лічба», виникають певні питання. Справа у тому, що лічбою є встановлення взаємнооднозначної відповідності між множиною предметів та початковим відрізком натурального ряду. У такому сенсі лічба здійснюється лише у межах першого та другого десятку, далі, у концентрі «Сотня», «Тисяча», «Мільйон» – відтворюється лише певний відрізок натурального ряду, і власне лічба вже не виконується.



Рис. 4. Співставлення змістових ліній ТОП1 і ТОП2

Викликає стурбованість той факт, що у ТОП2 не виділено ЗМ, які б відповідали алгебраїчній пропедевтиці, хоча ЗМ щодо вивчення геометричних фігур представлена. На наш погляд, це не є логічним, оскільки курс математики початкової школи включає не лише арифметику цілих невід’ємних чисел, а й елементи алгебри та геометрії. Регресивним, на нашу думку, є відсутність у ТОП2 ЗМ, яка б виокремлювала сюжетні математичні задачі. Зазначимо, що на сучасному етапі розвитку початкової школи задачі є не лише засобом засвоєння математичних понять. У цілому ставиться завдання формування уміння розв’язувати задачі, як загального уміння – загального підходу до розв’язування будь-якої задачі, так і уміння розв’язувати задачі певних типів – типові задачі.

Відмінність ТОП1 і ТОП2 полягає і у представленні очікуваних результатів. Так, у ТОП1 очікувані результати подано до кожного року навчання, тоді як у ТОП2 – лише на кінець циклу – 1–2 класи та 3–4 класи, що становить певні незручності для вчителів, оскільки відсутні орієнтири на кінець 1-го та кінець 3-го класу. Тому, зіставлення очікуваних результатів ТОП1 і ТОП2, можливо лише для 2-го та 4-го класів. У Таблиці 1 ми порівняли очікувані результати за ТОП1 і ТОП2 на кінець 2-го класу.

Зіставлення очікуваних результатів за ТОП1 і ТОП2 1–2 клас

	ТОП1 (Савченко О.Я.)	ТОП2 (Шиян Р.Б.)
	1-й, 2-й класи	1–2-й класи
1.	Числа, дії з числами. Величини	Лічба
	<i>відтворює</i> послідовність чисел у межах сотні;	<i>лічить</i> за правилами лічби об'єкти навколишнього світу (розташовані послідовно, по колу, хаотично; двійками, п'ятірками, десятками) [2 MAO 1–4.2–1]; <i>лічить</i> до 100 в прямому і зворотному порядку [2 MAO 1–4.2–2]
		<i>уживає</i> в мовленні порядкові числівники при встановленні порядкового номера об'єкта відносно іншого [2 MAO 1–1.1–1]; <i>відтворює</i> в різних видах діяльності ймовірні та фактичні результати лічби об'єктів, що їх оточують (малює, викладає мозаїку, створює аплікацію, співає, складає власні лічилки тощо) [2 MAO 1–1.1–2]
		<i>визначає</i> істотні, спільні та відмінні ознаки об'єктів навколишнього світу [2 MAO 1–4.1–1]; <i>порівнює</i> і <i>впорядковує</i> об'єкти навколишнього світу за однією або декількома ознаками [2 MAO 1–4.1–2]; <i>об'єднує</i> об'єкти у групу за спільною ознакою [2 MAO 1–4.1–3]; <i>розбиває</i> об'єкти на групи за спільною ознакою [2 MAO 1–4.1–4]
		<i>прогнозує</i> результат лічби об'єктів навколишнього світу, доступних для спостереження [2 MAO 1–3.3–1]; <i>припускає</i> , як і на скільки рівних частин треба поділити об'єкти / групи об'єктів [2 MAO 1–3.3–2]; <i>зіставляє</i> одержаний результат лічби об'єктів з прогнозованим [2 MAO 1–3.3–3]; <i>виконує</i> перевірку правильності лічби довільним способом [2 MAO 1–3.3–4]; <i>робить висновок</i> про достовірність передбаченого результату [2 MAO 1–3.3–5]
	<i>читає</i> і <i>записує</i> числа,	<i>читає</i> і <i>записує</i> натуральні числа (мінімум до 100) та нуль – словами і цифрами [2 MAO 2–4.2–3];

	<i>утворює</i> числа різними способами;	<i>утворює</i> натуральні числа прилічуванням і відлічуванням одиниці [2 МАО 2–4.2–4];
2.	Числа, дії з числами. Величини	Числа. Дії з числами
	<i>визначає</i> десятки й одиниці у складі двоцифрового числа; 1-й клас	<i>досліджує</i> , що одна і та ж цифра в записі числа набуває різних значень залежно від своєї позиції [2 МАО 2–4.2–5];
	<i>визначає</i> розрядний склад двоцифрового числа; 2-й клас	
	<i>подає</i> числа у вигляді суми розрядних доданків; 2-й клас	
	<i>порівнює</i> числа різними способами;	<i>порівнює</i> натуральні числа в межах 100, позначає результат порівнювання за допомогою знаків $>$, $<$, $=$ [2 МАО 2–4.2–6];
		<i>співвідносить</i> кількість об'єктів навколишнього середовища з відповідним натуральним числом і навпаки [2 МАО 2–4.2–7];
		<i>ділить</i> конкретні об'єкти / групи об'єктів навпіл, на три, чотири рівні частини (яблуко, торт, піца, квадрат, цукерки, зошити, книжки та ін.) у процесі гри або імітуючи життєві ситуації, <i>описує</i> за допомогою відповідних моделей [2 МАО 2–4.2–8];
		<i>демонструє</i> , що таке цілий предмет і його частини – половина, третина, чверть [2 МАО 2–4.2–9]
		<i>знаходить</i> потрібну інформацію, використовуючи зокрема й засоби ІКТ [2 МАО 2–2.1–1];
		<i>перетворює</i> інформацію (почуту, побачену, прочитану) у схематичний рисунок, схему, таблицю, числовий вираз [2 МАО 2–2.1–2]
		<i>з'ясовує</i> , яка інформація потрібна для розв'язування проблемного завдання, в тому числі й сюжетних задач (яка інформація наявна, якої інформації немає і яку треба знайти) [2 МАО 2–2.2–1];
		<i>описує (коментує) послідовність</i> дій стосовно розв'язання проблемного завдання (в тому числі сюжетної задачі) за допомогою дорослого або самостійно [2 МАО 2–2.2–2]
		<i>оперує</i> числами в межах 100, розв'язуючи різні життєві проблеми (шукає номер квартири (будинку), місця в кінотеатрі, у вагоні потяга, автобусі, літаку, номер кабінету в різних

		установах, номер телефону тощо) [2 МАО 2–4.3–1];
<i>розуміє</i> сутність арифметичних дій додавання і віднімання;		<i>обчислює</i> суму (додає), різницю (віднімає), добуток (множить), частку (ділить) зручним для себе способом у межах 100, зокрема й користуючись предметами або засобами, які їх замінюють) [2 МАО 2–4.3–2];
<i>володіє</i> навичками додавання і віднімання одноцифрових чисел у межах 10; 1-й клас		
<i>виконує</i> додавання та віднімання на основі нумерації чисел;		
<i>володіє</i> навичками додавання і віднімання чисел у межах 100; 2-й клас		
<i>користується</i> в обчисленнях переставним законом додавання;		
<i>обчислює</i> усно зручним для себе способом;		<i>обчислює</i> суму (додає), різницю (віднімає), добуток (множить), частку (ділить) зручним для себе способом у межах 100, зокрема й користуючись предметами або засобами, які їх замінюють) [2 МАО 2–4.3–2]; <i>застосовує</i> різні способи виконання арифметичних дій з числами (додавання, віднімання, множення, ділення) під час розв’язування завдань та конкретних життєвих проблем, описаних у математичних задачах [2 МАО 2–4.3–5]
<i>знаходить</i> число, яке на кілька одиниць більше (менше) за дане;		
<i>розуміє</i> сутність різницевого порівняння чисел;		
<i>знаходить</i> , на скільки одне число більше або менше за інше;		
<i>розуміє</i> сутність дій множення і ділення; 2 клас		<i>обчислює</i> суму (додає), різницю (віднімає), добуток (множить), частку (ділить) зручним для себе способом у межах 100, зокрема й користуючись предметами або засобами, які їх замінюють) [2 МАО 2–4.3–2];
<i>застосовує</i> в обчисленнях знання таблиць множення чисел 2 і 3 та відповідних випадків ділення;		
<i>використовує</i> в обчисленнях взаємозв’язок між множенням і діленням;		
<i>використовує</i> в обчисленнях переставний закон множення, взаємозв’язок між множенням і діленням, правила множення і ділення з числами 1 і 0, ділення рівних чисел;		
<i>розуміє</i> неможливість ділення на нуль;		
<i>обчислює</i> значення виразів, що містять інші табличні випадки множення і ділення, з опорою на таблиці;		
<i>знаходить</i> число, яке на кілька одиниць більше (менше) за дане;		

	<i>розуміє</i> сутність різницевого порівняння чисел;	
	<i>знаходить</i> , на скільки одне число більше або менше за інше;	
	<i>знаходить</i> число, яке у кілька разів більше (менше) за дане;	
	<i>розуміє</i> сутність кратного порівняння чисел;	
	<i>обчислює</i> результат кратного порівняння чисел;	
	<i>використовує</i> у мовленні назви компонентів та результатів арифметичних дій додавання і віднімання;	
	<i>коментує</i> виконання обчислень;	
3.	Математичні задачі і дослідження	Числа. Дії з числами
	<i>розв'язує</i> прості сюжетні задачі, які є моделями реальних ситуацій; 1 клас	
	<i>розв'язує</i> прості і складені сюжетні задачі, у тому числі задачі з геометричним змістом; 2 клас	
		<i>знаходить</i> необхідні (суттєві) дані для виконання завдання [2 МАО 2–3.1–1];
		<i>розуміє</i> , що для відповіді на запитання може бракувати числових даних [2 МАО 2–3.1–2]
	<i>обирає</i> числові дані, необхідні і достатні для відповіді на запитання;	<i>визначає</i> числові дані, необхідні і достатні для відповіді на конкретне запитання [2 МАО 2–2.3–1];
	<i>планує</i> розв'язування (розв'язання) сюжетної задачі;	
	<i>створює</i> математичну модель задачі;	<i>розв'язує</i> проблемні ситуації з опорою на прості математичні моделі [2 МАО 2–2.3–2]
	<i>оцінює</i> з допомогою вчителя правильність розв'язання задачі;	<i>з'ясовує</i> , чи існує інший шлях розв'язування проблемної ситуації (з допомогою дорослого або самостійно), <i>робить</i> відповідний висновок [2 МАО 2–3.2–1]
	<i>шукає</i> різні способи розв'язування (розв'язання задачі);	<i>з'ясовує</i> , чи існує інший шлях розв'язування проблемної ситуації (з допомогою дорослого або самостійно), <i>робить</i> відповідний висновок [2 МАО 2–3.2–1]
	<i>складає</i> прості сюжетні задачі; 1 клас	
	<i>виконує</i> елементарні дослідження математичних закономірностей з допомогою вчителя; 1 клас	
	<i>складає</i> сюжетні задачі на одну і дві дії; 2 клас	

4.	Числа. Дії з числами. Величини	Вимірювання величин
	<i>вимірює і порівнює</i> величини: довжину, масу, місткість; 1 –й клас	<i>здійснює</i> вимірювання величин, маючи вільний доступ до необхідних вимірювальних приладів (лінійка, термометр, годинник, мензурка) та різного роду нестандартних мірок / підручних засобів (стрічка, сірникова коробка, пісковий годинник, склянка, ложка тощо) [2 МАО 3–4.7–1];
	<i>вимірює і порівнює</i> величини: довжину, масу, місткість, час; 2 –й клас	
	<i>використовує</i> короткі позначення величин (сантиметр – см, дециметр – дм, метр – м); маси (кілограм – кг); місткості (літр – л); часу (година – год, доба, тиждень); 1 клас	<i>знає</i> одиниці вимірювання величин та співвідношення між ними [2 МАО 3–4.7–2];
	<i>користується</i> інструментами й допоміжними засобами для вимірювання величин;	<i>записує</i> результати вимірювання основних величин у сантиметрах (см), дециметрах (дм), метрах (м); кілограмах (кг), центнерах (ц); градусах Цельсія (С°), годинах (год), хвилинах (хв); літрах (л) [2 МАО 3–4.7–3];
		<i>вимірює</i> довжини предметів або відрізків [2 МАО 3–4.7–4]; <i>будує</i> відрізки заданої довжини) [2 МАО 3–4.7–5];
	<i>користується</i> годинником (у межах цілих годин) і календарем для відстеження подій у своєму житті, спостережень у природі тощо; 1-й клас	<i>визначає</i> час з точністю до п’яти хвилин [2 МАО 3–4.7–6];
	<i>користується</i> годинником і календарем для визначення часу та планування своєї діяльності, спостережень за явищами природи тощо; 2-й клас	<i>позначає</i> час на зображенні / макеті циферблату годинника зі стрілками [2 МАО 3–4.7–7];
	<i>оперує</i> грошима в уявному (ігровому) процесі купівлі-продажу, використовує їх короткі позначення (гривня – грн, копійка – к.); 1-й клас	<i>оперує</i> грошима, здійснюючи покупки у крамницях (справжніх та уявних), продаж і покупки на шкільних ярмарках та ін. [2 МАО 3–1.2–2];
	<i>оперує</i> грошима в уявному процесі купівлі-продажу та в практичній діяльності, використовує їх короткі позначення ; 2-й клас	
		<i>розв’язує</i> проблемні ситуації зі свого життя, що містять групи пов’язаних між собою величин (довжини, маси, температури, часу, місткості (об’єму) [2 МАО 3–1.2–1];
		<i>порівнює</i> об’єкти навколишнього світу за довжиною, масою, місткістю (об’ємом) [2 МАО 3–1.2–3];
		<i>розуміє</i> , які одиниці вимірювання величини доцільно використовувати в конкретному випадку [2 МАО 3–1.2–4];
	<i>вимірює і порівнює</i> величини: довжину, масу, місткість; 1-й клас	<i>порівнює</i> іменовані числа, подані в одиницях довжини, маси, місткості

	<i>вимірює і порівнює</i> величини: довжину, масу, місткість, час; 2-й клас	(об'єму), часу, температури [2 MAO 3–1.2–5];
		<i>перетворює</i> іменовані числа, виражені в одиницях двох найменувань [2 MAO 3–1.2–6];
5.	Геометричні фігури	Просторові відношення. Геометричні фігури
	<i>орієнтується</i> на площині і в просторі, описує або зображає схематично розміщення, напрямки і рух об'єктів;	<i>встановлює</i> відношення розміщення об'єктів на площині та у просторі (лівіше, правіше, вище, нижче тощо), використовуючи математичну мову [2 MAO 4–4.4–1];
		<i>демонструє</i> вміння переміщувати об'єкти в заданих напрямках: справа наліво, зліва направо, зверху вниз, знизу вгору [2 MAO 4–4.4–2];
		<i>коментує</i> виконувані дії, вживаючи у мовленні відповідні математичні терміни [2 MAO 4–4.4–3]
	<i>розпізнає і класифікує</i> геометричні фігури за істотними ознаками; 1-2 класи	<i>розрізняє</i> геометричні площинні та об'ємні фігури за їх істотними ознаками [2 MAO 4–4.5–1];
	<i>співвідносить</i> реальні об'єкти з моделями та зображеннями геометричних фігур;	<i>відтворює</i> досліджувані геометричні форми (вирізає, наклеює, малює, моделює та ін.), використовуючи для цього не лише готові геометричні фігури, а й упізнані у предметах навколишнього світу [2 MAO 4–4.5–2];
		<i>знаходить</i> відомі площинні та об'ємні фігури серед предметів навколишнього середовища, на малюнках [2 MAO 4–4.5–3];
		<i>наводить</i> приклади предметів у навколишньому світі, які мають форму площинної чи об'ємної фігури [2 MAO 4–4.5–4]
		<i>розрізняє</i> прямі і непрямі кути, зображає їх на аркуші в клітинку за допомогою косинця [2 MAO 4–4.5–5];
		<i>будує</i> прямокутник / квадрат на аркуші в клітинку [2 MAO 4–4.5–6]
	<i>називає</i> елементи геометричних фігур; 2 клас	
	<i>моделює</i> геометричні фігури;	<i>моделює</i> геометричні фігури з підручного матеріалу (шнурків, олівців, паличок тощо) [2 MAO 4–4.6–1];
		<i>конструює</i> знайомі площинні та об'ємні фігури з підручного матеріалу (пластиліну, глини, соломки, конструктора тощо) [2 MAO 4–4.6–2];
	<i>вимірює</i> довжину відрізка;	

	<i>вимірює</i> сторони геометричних фігур; 2 клас	
	<i>обчислює</i> довжину ламаної, периметр многокутника; 2 клас	
	<i>креслить</i> відрізки заданої довжини; будує прямокутник (квадрат) на аркуші в клітинку; 2 клас	
	<i>розрізняє</i> круг і коло; 2 клас	
		<i>створює</i> макети реальних та уявних об'єктів [2 МАО 4–4.6–3]

Таблиця 2

Зіставлення очікуваних результатів за ТОП1 і ТОП2 3–4 клас

	ТОП1 (Савченко О.Я.)	ТОП2 (Шиян Р.Б.)
	3-й, 4-й класи	3-4-й класи
1.	Числа, дії з числами. Величини	Лічба
	<i>відтворює</i> послідовність чисел у межах тисячі; [3 МАО 4.2] <i>відтворює</i> послідовність чисел у межах мільйона; [4 МАО 4.2]	<i>відтворює</i> в різних видах діяльності ймовірні та фактичні результати лічби об'єктів, що їх оточують [4 МАО 1–1.1–1]; <i>лічить</i> у межах мільйона в прямому і зворотному порядку [4 МАО 1–4.2–1]; <i>лічить</i> у межах мільйона від будь-якого числа до вказаного [4 МАО 1–4.2–2]; <i>лічить</i> тисячами, десятками тисяч, сотнями тисяч у межах мільйона [4 МАО 1–4.2–3] <i>упорядковує та узагальнює</i> об'єкти навколишнього світу за однією або декількома ознаками [4 МАО 1–4.1–1]; <i>уживає</i> в мовленні кількісні та порядкові числівники [4 МАО 1–1.1–2]
		<i>порівнює та класифікує</i> об'єкти навколишнього світу за однією або декількома ознаками [4 МАО 1–4.1–2];
		<i>визначає</i> істотні, спільні і відмінні ознаки об'єктів [4 МАО 1–4.1–3];
		<i>продовжує</i> послідовності та знаходить пропущені члени [4 МАО 1–4, 1–4];
		<i>описує</i> зв'язок між сусідніми членами послідовності або між членом та його номером [4 МАО 1–4.1–5]
2.	Числа, дії з числами. Величини	Числа. Дії з числами
	<i>визначає</i> розрядний склад трицифрового числа; [3 МАО 4.2] <i>визначає</i> розрядний склад багаточислового числа; [4 МАО 4.2]	

	<i>подає</i> числа у вигляді суми розрядних доданків; [3 МАО 4.2], [4 МАО 4.2]	<i>записує</i> багатоцифрові числа у вигляді суми розрядних доданків [4 МАО 2–4.2–6];
	<i>читає і записує</i> числа, утворює числа різними способами; [4 МАО 4.2]	<i>читає і записує</i> багатоцифрові числа в межах мільйона [4 МАО 2–4.2–1]; <i>утворює</i> багатоцифрові числа різними способами [4 МАО 2–4.2–2];
		<i>класифікує</i> багатоцифрові числа за кількістю цифр у їх записі [4 МАО 2–4.2–3];
	<i>визначає</i> загальну кількість сотень, десятків, одиниць у числі; [3 МАО 4.2]	<i>визначає</i> загальну кількість одиниць, десятків, сотень, одиниць тисяч, десятків тисяч, сотень тисяч у числі [4 МАО 2–4.2–5];
	<i>визначає</i> загальну кількість одиниць певного розряду; [4 МАО 4.2]	
		<i>встановлює</i> позиційне значення цифри в записі багатоцифрового числа [4 МАО 2–4.2–4];
	<i>порівнює</i> числа різними способами; [3 МАО 4.2], [4 МАО 4.2]	<i>порівнює</i> багатоцифрові числа різними способами [4 МАО 2–4.2–7];
	<i>виконує</i> додавання та віднімання, множення і ділення на основі нумерації чисел; [3 МАО 4.3]	
	<i>обчислює</i> усно зручним для себе способом; [3 МАО 4.3]	<i>виконує</i> усно та письмово обчислення в межах мільйона в навчальних і життєвих ситуаціях [4 МАО 2–4.3–1]; <i>знаходить</i> значення числового виразу [4 МАО 2–4.3–3];
	<i>володіє</i> навичкою усного додавання і віднімання круглих чисел; [3 МАО 4.3], [4 МАО 4.3]	
	<i>володіє</i> навичкою письмового додавання і віднімання чисел у межах 1000; [3 МАО 4.3]	
	<i>володіє</i> навичкою табличного множення і ділення; [3 МАО 4.3]	
	<i>володіє</i> навичкою позатабличного множення і ділення чисел у межах тисячі; [3 МАО 4.3]	
	<i>володіє</i> навичками письмового додавання і віднімання чисел у межах мільйона; [4 МАО 4.3]	
	<i>володіє</i> навичками письмового множення і ділення багатоцифрового числа на одноцифрове; [4 МАО 4.3]	
	<i>володіє</i> обчислювальними навичками письмового множення і ділення на двоцифрове число; [4 МАО 4.3]	
	<i>розуміє</i> спосіб множення і ділення на трицифрове число; [4 МАО 4.3]	
	<i>розуміє</i> сутність арифметичних дій множення і ділення; [3 МАО 4.1]	
	<i>виконує</i> ділення з остачею; [3 МАО 4.3]	
	<i>виконує</i> письмове ділення з остачею; [4 МАО 4.3]	

	<i>розуміє</i> , що остача має бути меншою за дільник; [3 MAO 4.3]	
	<i>перевіряє</i> правильність ділення з остачею; [3 MAO 3.3], [3 MAO 3.4]	
	<i>застосовує</i> прийоми раціональних обчислень; [3 MAO 3.2]	
	<i>прогнозує</i> результат додавання та віднімання; [3 MAO 1.3]	<i>обґрунтовує</i> , як зміна одного з компонентів впливає на результат арифметичної дії [4 MAO 2–4.8–1];
	<i>прогнозує</i> результат множення і ділення; [3 MAO 1.3]	
	<i>планує</i> послідовність виконання дій у письмових обчисленнях; [4 MAO 2.2]	
	<i>прогнозує</i> кількість цифр у добутку, частці до знаходження результату; [4 MAO 1.3]	
	<i>перевіряє</i> правильність обчислень; [4 MAO 3.4]	
	<i>розуміє</i> сутність кратного порівняння чисел; [3 MAO 4.3]	
	<i>обчислює</i> результат кратного порівняння чисел; [3 MAO 4.3]	
	<i>знаходить</i> число, яке у кілька разів більше/менше за дане; [3 MAO 4.3]	
	<i>застосовує</i> в обчисленнях правила знаходження невідомих компонентів арифметичних дій; [3 MAO 4.8]	<i>встановлює</i> взаємозв'язки між арифметичними діями додавання і віднімання, множення і ділення [4 MAO 2–4.3–2];
	<i>перевіряє</i> правильність обчислень; [3 MAO 3.3], [3 MAO 3.4]	
	<i>застосовує</i> в обчисленнях переставний закон множення, взаємозв'язок між діями множення і ділення; правила множення і ділення з числами 1 і 0, ділення рівних чисел, множення на 10; [3 MAO 3.2], [3 MAO 4.3]	
	<i>розуміє</i> спосіб утворення частини як однієї з кількох рівних частин цілого; [3 MAO 4.2]	
	<i>застосовує</i> в обчисленнях правило знаходження частини від числа та числа за величиною його частини [3 MAO 3.2], [3 MAO 4.3]	
	<i>читає і записує</i> дробу; [4 MAO 4.2]	<i>читає і записує</i> дробу [4 MAO 2–4.2–9];
	<i>розуміє</i> спосіб одержання дробу; [4 MAO 4.2]	
	<i>розуміє</i> суть чисельника і знаменника дробу; [3 MAO 4.1], [4 MAO 4.2]	<i>тлумачить</i> дріб як одну або кілька рівних частин цілого, пояснює суть понять «чисельник» і «знаменник» [4 MAO 2–4.2–10];
	<i>розрізняє</i> дробу, які дорівнюють 1; [4 MAO 4.1]	

	<i>порівнює</i> дроби з чисельником 1 за допомогою засобів наочності; [3 MAO 4.2]	
	<i>порівнює</i> дроби з однаковими знаменниками; [4 MAO 4.2]	<i>порівнює</i> дроби з однаковими знаменниками [4 MAO 2–4.2–11]
	<i>застосовує</i> правила знаходження дробу від числа та числа за величиною його дробу під час розв’язування практично зорієнтованих завдань [4 MAO 4.3],	<i>знаходить</i> дріб від числа та число за величиною його дробу [4 MAO 2–4.3–4]
3.	Математичні задачі і дослідження	Числа. Дії з числами
	<i>розв’язує</i> прості і складені сюжетні задачі, задачі з геометричним змістом, компетентісно зорієнтовані задачі; [3 MAO 3.1], [3 MAO 2.3]	
	<i>розв’язує</i> прості і складені сюжетні задачі (в тому числі з дробами), задачі з геометричним змістом, компетентісно зорієнтовані задачі; [4 MAO 3.1], [4 MAO 2.3]	
		<i>аналізує</i> проблемну ситуацію з огляду на можливість використання відомих засобів добору даних [4 MAO 2–3.1–1]
		<i>представляє</i> проблемну ситуацію різними способами [4 MAO 2–2.1–1];
	<i>розв’язує</i> задачі на знаходження четвертого пропорційного різними способами, на подвійне зведення до одиниці, на пропорційне ділення, на знаходження невідомого за двома різницями, на спільну роботу, на прямолінійний рівномірний двох тіл; [3 MAO 1.2], [3 MAO 2.3], [4 MAO 1.2], [4 MAO 2.3]	
	<i>складає</i> вираз до задачі з буквеними даними; [3 MAO 2.2], [3 MAO 4.8]	
	<i>розв’язує</i> задачі з буквеними даними; [4 MAO 2.2], [4 MAO 4.8]	
	<i>розв’язує</i> прості задачі на обчислення тривалості події, дати початку події, дати закінчення події; [3 MAO 3.1], [3 MAO 2.3], [4 MAO 2.3]	
	<i>розуміє</i> сутність процесу і складає обернені задачі до даної задачі; [3 MAO 2.3]	
	<i>складає і розв’язує</i> обернені задачі; [4 MAO 1.2], [4 MAO 2.3]	
	<i>створює</i> допоміжну модель задачі різними способами; [3 MAO 2.1], [4 MAO 2.1]	<i>обирає</i> спосіб представлення інформації (схема, таблиця, схематичний рисунок) [4 MAO 2–2.1–2]
	<i>створює</i> математичну модель задачі; [3 MAO 2.3], [4 MAO 2.3]	

	<i>обирає</i> числові дані, необхідні і достатні для відповіді на запитання задачі; [3 MAO 3.1], [4 MAO 3.1]	<i>добирає</i> числові дані, необхідні й достатні для розв'язання проблемної ситуації, використовуючи відомі засоби [4 MAO 2–2.3–2]
	<i>планує</i> розв'язування /розв'язання задачі; [3 MAO 2.2], [4 MAO 3.2]	
	<i>перевіряє</i> правильність розв'язку задачі: складає і розв'язує обернену задачу, розв'язує задачу іншим способом тощо; [3 MAO 3.2], [3 MAO 3.4], [4 MAO 3.2]	
	<i>складає</i> сюжетні задачі; [3 MAO 1.2], [4 MAO 1.2]	
	<i>планує</i> нескладні навчальні дослідження; [4 MAO 3.2]	
		<i>прогнозує</i> очікуваний результат розв'язання проблемної ситуації [4 MAO 2–1.3–1];
		<i>планує</i> розв'язування проблемної ситуації [4 MAO 2–2.2–1];
		<i>обґрунтовує</i> вибір дій для розв'язання проблемної ситуації [4 MAO 2–2.2–3]
		<i>перевіряє</i> правильність розв'язання проблемної ситуації різними способами [4 MAO 2–3.4–1];
		<i>порівнює</i> різні способи розв'язання проблемної ситуації, які підтверджують або спростовують прогноз, обирає найефективніший [4 MAO 2–3.3–1];
4.	Числа. Дії з числами. Величини	Вимірювання величин
	<i>знає</i> одиниці вимірювання довжини (міліметр, сантиметр, дециметр, метр, кілометр); маси (грам, кілограм, центнер, тонна), місткості (літр); часу (доба, тиждень, година, хвилина, секунда), проміжки часу (місяць, рік, століття) та співвідношення між ними; [3 MAO 1.1], [3 MAO 4.7], [4 MAO 1.1], [4 MAO 4.7]	<i>записує</i> результати вимірювання величин у міліметрах (мм), сантиметрах (см), дециметрах (дм), метрах (м), кілометрах (км); грамах (г), кілограмах (кг), центнерах (ц), тоннах (т); градусах Цельсія (С°), секундах (с), хвилинах (хв), годинах (год), добах, тижнях, місяцях, роках, століттях, тисячоліттях, літрах (л), копійках (к.), гривнях (грн), використовуючи одиниці вимірювання та співвідношення між ними [4 MAO 3–4.7–2];
	<i>вимірює і порівнює</i> величини: довжину, масу, місткість, час; [3 MAO 4.2], [3 MAO 4.7], [4 MAO 4.3], [4 MAO 4.7]	<i>порівнює</i> іменовані числа, подані в одиницях довжини, маси, місткості (об'єму), часу, температури, вартості [4 MAO 3–1.2–6]
	<i>користується</i> знанням співвідношень між величинами у навчально-пізнавальних і практичних ситуаціях; [3 MAO 4.3], [4 MAO 1.1], [4 MAO 4.3]	<i>застосовує</i> співвідношення між одиницями вимірювання величин під час розв'язування практично зорієнтованих задач [4 MAO 3–1.2–8];
	<i>обирає</i> доцільну мірку для вимірювання величини; [3 MAO 4.7], [4 MAO 2.2]	<i>використовує</i> різні мірки для вимірювання величин довжини, маси,

<i>користується</i> для вимірювання величин інструментами, приладами та іншими засобами; [3 MAO 4.7], [4 MAO 4.7]	температури, часу, місткості, вартості [4 MAO 3–4.7–1];
<i>перетворює</i> величини, виражені в двох одиницях найменувань; [3 MAO 4.3], [4 MAO 4.7], [4 MAO 4.3]	<i>перетворює</i> одні одиниці величин в інші [4 MAO 3–4.7–3] <i>перетворює</i> іменовані числа, виражені в одиницях двох найменувань [4 MAO 3–1.2–7];
<i>користується</i> годинником і календарем для відстеження та планування подій свого життя [4 MAO 3-1.2-1];	<i>користується</i> годинником і календарем для відстеження та планування подій свого життя [4 MAO 3–1.2–1];
	<i>оперує</i> грошима в ситуації купівлі-продажу [4 MAO 3–1.2–2];
<i>розуміє</i> , що рух тіл описується за допомогою трійки взаємопов'язаних величин: шлях, швидкість і час; [4 MAO 1.2]	<i>знаходить</i> швидкість, час, шлях, застосовуючи відповідні формули, під час розв'язуванні практично зорієнтованих задач [4 MAO 3–1.2–3];
<i>розуміє</i> швидкість рухомого тіла як шлях, пройдений ним за одиницю часу; [4 MAO 1.2]	
<i>знає</i> назви і позначення одиниць швидкості; <i>користується</i> формулами для знаходження швидкості, подоланого шляху, часу під час розв'язування практично зорієнтованих задач [4 MAO 1.2]	
<i>визначає</i> в навчальних і практичних ситуаціях групи взаємопов'язаних величин; [3 MAO 1.2], [4 MAO 1.2]	
<i>розуміє</i> , що ситуація купівлі – продажу описується за допомогою трійки взаємопов'язаних величин: ціна, кількість, вартість; [3 MAO 1.2]	
<i>розуміє</i> , що робота описується за допомогою трійки взаємопов'язаних величин: продуктивність праці, час роботи, загальний виробіток; [3 MAO 1.2]	
<i>застосовує</i> для розв'язування практичних задач правила знаходження однієї з величин за двома відомими іншими; [3 MAO 1.2]	
<i>користується</i> знанням залежності між величинами у навчальних і практичних ситуаціях, [3 MAO 1.2], [4 MAO 1.2]	
<i>прогнозує</i> очікуваний результат; [3 MAO 1.3], [4 MAO 1.3]	
<i>зіставляє</i> одержаний результат із прогнозованим; [3 MAO 3.3], [4 MAO 3.3]	

	<i>виконує</i> арифметичні дії з іменованими числами; [3 МАО 4.3], [4 МАО 4.3]	<i>виконує</i> додавання і віднімання іменованих чисел, множення і ділення на одноцифрове число іменованих чисел, поданих в одиницях вимірювання довжини маси, вартості і часу [4 МАО 3–1.2–9]
	<i>розуміє</i> сутність периметра многокутника; [3 МАО 4.7], <i>користується</i> формулою обчислення периметра прямокутника (квадрата) в навчальних і практичних ситуаціях [3 МАО 4.3] <i>знаходить</i> периметр многокутника в навчальних і практичних ситуаціях; [4 МАО 4.3], [4 МАО 4.7] <i>знає</i> одиниці площі; [4 МАО 4.7]	<i>обчислює</i> периметр многокутника та площу прямокутника відомими способами [4 МАО 3–1.2–4];
	<i>знаходить</i> довжину однієї сторони прямокутника за відомими площею та іншою стороною [4 МАО 1.2], [4 МАО 4.3] <i>знаходить</i> довжину сторони квадрата за відомим периметром; [4 МАО 1.2], [4 МАО 4.3]	<i>знаходить</i> довжину однієї сторони прямокутника: за відомими периметром та іншою стороною; за відомими площею та іншою стороною [4 МАО 3–1.2–5];
	<i>користується</i> в навчальних і практичних ситуаціях формулою обчислення площі прямокутника (квадрата); [4 МАО 1.2], [4 МАО 4.3]	
	<i>розуміє</i> площу як властивість плоских фігур; [4 МАО 4.7]	
	<i>визначає</i> площу фігури за допомогою палетки; [4 МАО 4.7]	
5.	Вирази, рівності, нерівності	Числа. Дії з числами
	<i>встановлює</i> відношення рівності й нерівності між числами й числовими виразами; [3 МАО 4.8], [4 МАО 4.8] <i>розрізняє</i> істинні та хибні числові рівності й нерівності; [3 МАО 4.8]	<i>встановлює</i> відношення рівності та нерівності між числовими виразами [4 МАО 2–4.2–8];
	<i>читає і записує</i> математичні вирази, подані в текстовій формі, з використанням математичних символів; [3 МАО 2.1], [3 МАО 4.8], [4 МАО 2.1], [4 МАО 4.8]	<i>читає і записує</i> математичні твердження, використовуючи буквену символіку [4 МАО 2–4.8–2];
	<i>знаходить</i> значення числового виразу та буквеного виразу із заданим значенням букви; [3 МАО 4.3], [3 МАО 4.8], [4 МАО 4.3], [4 МАО 4.8]	<i>обчислює</i> вирази зі змінною (змінними) при заданому її (їх) числовому значенні [4 МАО 2–4.8–3];
	<i>розв’язує</i> рівняння на основі правил знаходження невідомого компоненту арифметичної дії та іншими способами; [3 МАО 4.8], [4 МАО 4.8], [4 МАО 4.3]	<i>розв’язує</i> рівняння з однією змінною, у яких один компонент чи права частина є числовим виразом [4 МАО 2–4.8–4];

	<i>розрізняє</i> числові нерівності та нерівності зі змінною; [3 МАО 4.1], [3 МАО 4.8]	
	<i>застосовує</i> правила порядку виконання дій під час обчислень значень виразів без дужок та з дужками; [3 МАО 4.3], [4 МАО 4.3]	
	<i>розуміє</i> сутність понять «рівняння», «розв’язок рівняння»; [3 МАО 4.8]	
	<i>знаходить</i> окремі розв’язки нерівності зі змінною зручним для себе способом [3 МАО 4.3], [3 МАО 4.8], [4 МАО 3.2], [4 МАО 4.8]	<i>добирає</i> із запропонованих таке значення змінної, яке задовольняє нерівність [4 МАО 2–4.8–5];
	<i>перевіряє</i> , що одержане числове значення змінної є розв’язком рівняння; [4 МАО 3.4]	<i>перевіряє</i> , чи є дане число розв’язком нерівності з однією змінною [4 МАО 2–4.8–6]
	<i>розуміє</i> , що нерівність зі змінною мати один, кілька або безліч розв’язків, може не мати розв’язків; [4 МАО 4.8]	
6.	Геометричні фігури	Просторові відношення. Геометричні фігури
	<i>описує або зображує</i> схематично розміщення, напрямки і рух об’єктів; [4 МАО 4.4]	<i>описує і складає</i> маршрути для подорожей, використовуючи відповідну математичну лексику, знаки, які пов’язані з напрямом і поворотом [4 МАО 4–4.4–1];
	<i>орієнтується</i> на площині і в просторі, рухається за визначеним маршрутом; планує маршрут пересування; [3 ГІО 2.1], [4 ГІО 2.1]	<i>переміщується</i> (реально і віртуально) визначеним маршрутом [4 МАО 4–4.4–2]
	<i>співвідносить</i> реальні об’єкти з моделями геометричних фігур; [3 МАО 4.5]	<i>визначає</i> знайомі геометричні фігури у фігурах складної конфігурації, на предметах навколишнього середовища, малюнках [4 МАО 4–4.5–3];
	<i>називає</i> елементи геометричних фігур; [3 МАО 4.5], [4 МАО 4.1]	<i>розпізнає</i> геометричні фігури, визначає їх елементи [4 МАО 4–4.5–2];
	<i>розрізняє</i> коло і круг, позначає на рисунку елементи кола і круга (центр, радіус, діаметр); [3 МАО 4.5]	
	<i>розпізнає і класифікує</i> геометричні фігури за істотними ознаками; [4 МАО 4.5], [4 МАО 4.1]	<i>розпізнає і класифікує</i> за істотними ознаками геометричні фігури, прямі й непрямі кути [4 МАО 4–4.5–1];
	<i>класифікує</i> кути (прямі, гострі, тупі); [4 МАО 4.1]	
	<i>називає</i> істотні ознаки прямокутника (квадрата); [4 МАО 4.1]	
		<i>класифікує та порівнює</i> геометричні фігури (за формою, розміром, площею, периметром, іншими ознаками тощо) [4 МАО 4–4.5–4]

	<i>креслить</i> прямі кути за допомогою косинця; [4 МАО 4.6]	
	<i>використовує</i> властивість протилежних сторін прямокутника під час розв'язування практичних задач; [4 МАО 2.3]	
	<i>моделює</i> геометричні фігури; [3 МАО 4.6], [4 МАО 4.6]	<i>моделює</i> геометричні фігури із підручного матеріалу [4 МАО 4–4.6–1];
	<i>будує</i> прямокутник/квадрат; [3 МАО 4.6], [4 МАО 4.6]	<i>будує</i> площинні фігури (трикутник, прямокутник, коло) за заданими розмірами [4 МАО 4–4.6–2];
	<i>будує</i> за допомогою циркуля коло [3 МАО 4.6]	
	<i>будує</i> коло, круг за заданим значенням радіуса, діаметра; [4 МАО 4.6]	
		<i>створює</i> різні конструкції, поєднуючи між собою площинні та об'ємні фігури [4 МАО 4–4.6–3]

Як бачимо у таблицях 1 і 2, не всі результати ТОП2 мають аналоги у ТОП1, але здебільшого це результати, які традиційно не виділялися в якості результатів навчання, а визначалися лише як засоби досягнення показників математичної компетентності учня початкової школи. У ТОП2 є і такі результати, які більшою мірою конкретизують певний показник.

На підставі нового ДС та нових ТОП були створені підручники нового покоління, які пройшли конкурсний відбір. На сайті Інституту модернізації змісту освіти МОН України (ІМЗО) представлено 10 pdf макетів підручників математики для 1-го класу, 2-го, 3-го класів (<https://lib.imzo.gov.ua/handle/123456789/820>). На момент написання розділу монографії конкурс підручників для 4-го класу НУШ ще триває. Над створенням підручників математики для НУШ працюють такі автори й авторські колективи:

1. «Математика» підручник для 1 класу закладів загальної середньої освіти: 1) Скворцова С. О., Онопрієнко О. В.; 2) Листопад Н. П.; 3) Гісь О. М., Філяк І. В.; 4) Лищенко Г. П., Тарнавська С. С., Лищенко К. О.; 5) Заїка А. М.; 6) Будна Н. О., Беденко М. В.; 7) Бевз В. Г., Васильєва Д. В.; 8) Корчевська О. П., Козак М. В.; 9) Логачевська С. П., Логачевська Т. А., Комар, О. А.; 10) Оляницька Л. В.

2. «Математика» підручник для 2 класу закладів загальної середньої освіти: 1) Скворцова С. О., Онопрієнко О. В.; 2) Листопад Н. П.; 3) Гісь О. М., Філяк І. В.; 4) Лищенко Г. П.; 5) Заїка А. М.; 6) Будна Н. О.; 7) Бевз В. Г., Васильєва Д. В.; 8) Корчевська О. П., Козак М. В.; 9) Логачевська С. П., Логачевська Т. А., Комар О. А.; 10) Оляницька Л. В.

3. «Математика» підручник для 3 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах): 1) Скворцова С. О., Онопрієнко О. В.; 2) Листопад Н. П.; 3) Гісь О. М., Філяк І. В.; 4) Лищенко Г. П.; 5) Заїка А. М., Тарнавська С. С.; 6) Будна Н. О.; 7) Бевз В. Г., Васильєва Д. В.; 8) Корчевська О. П., Козак М. В.; 9) Логачевська С. П., Логачевська Т. А., Комар О. А.; 10) Оляницька Л. В.

Підручники створено до одній із програм – або ТОП1, або ТОП2. Найбільш поширеними підручниками є перші три позиції з наведеного переліку. Підручники С. Скворцової та О. Онопрієнко виділяються чіткою методичною системою, яка виявляється у динаміці

розгортання навчального змісту та у системі навчальних завдань, які пропонуються до кожного уроку. Авторами зроблено акцент на формуванні математичних понять та способів дій на підставі теорії поетапного формування розумових дій і понять П. Гальперіна. Тому навчальні завдання створюють умови для виникнення в учнів проблемної ситуації та спрямовують їх на її вирішення та відкриття орієнтувальної основи дії, а далі – на формування дії у різних формах – від матеріальної чи матеріалізованої до розумової. Цей підручник містить багато допоміжного матеріалу для учнів у вигляді пам'яток, опорних конспектів, схем розв'язування. У системі навчальних завдань реалізовано методику перенесення відомого способу дії у нову ситуацію з реконструкцією відповідно до змінених умов, а також реалізовано ідею інтервального повторення.

Підручники О. Гісь та І. Філяк вирізняються цікавими сюжетами – мандрівки Україною, мандрівки світом, казковими героями, які супроводжують учнів сторінками підручника, спрямованістю на розвиток логічного мислення учнів. Водночас, не спостерігається спрямованості на створення і розв'язування проблемних ситуацій, в більшості випадків пропонуються зразки міркувань.

Підручники Н. Листопад являють собою збірник завдань до уроку з невеличкими поясненнями до виконання дій; динаміка розгортання змісту залишилася така сама, як і у їх попередниках – підручниках Л. Кочиної та Н. Листопад. Сучасними тенденціями цього підручника можна вважати завдання на роботу з даними, наявна достатня кількість діаграм. Але, у підручнику так і залишився провідним репродуктивний метод – дітям новий матеріал пояснює кенгуру, що не налаштовує учнів на пошук, на відкриття способів дій; відсутнє формування способів мислення – майже весь матеріал учням пропонується запам'ятати.

Очевидно, що початкова школа має створити гарну базу для наступного навчання математики учнів у 5–6 класах. Тому питання наступності і перспективності між початковою та основною школами є актуальним. Зазначимо, що 30 вересня 2020 року Постановою Кабінету Міністрів України № 898 затверджено Державний стандарт базової середньої освіти, який буде впроваджуватися з 1 вересня 2022 р. для учнів, які навчаються за програмами дванадцятирічної повної загальної середньої освіти [2]. Пілотування нового Державного стандарту розпочнеться з 2021–2022 навчального року у 100 класах, які протягом початкової школи пілотували новий Державний стандарт початкової освіти.

З метою реалізації наступності, порівняємо Державний стандарт початкової освіти та Державний стандарт базової середньої освіти щодо математичної освітньої галузі. На рис. 5 подано у порівнянні мету математичної освітньої галузі за ДС початкової школи та ДС основної школи.

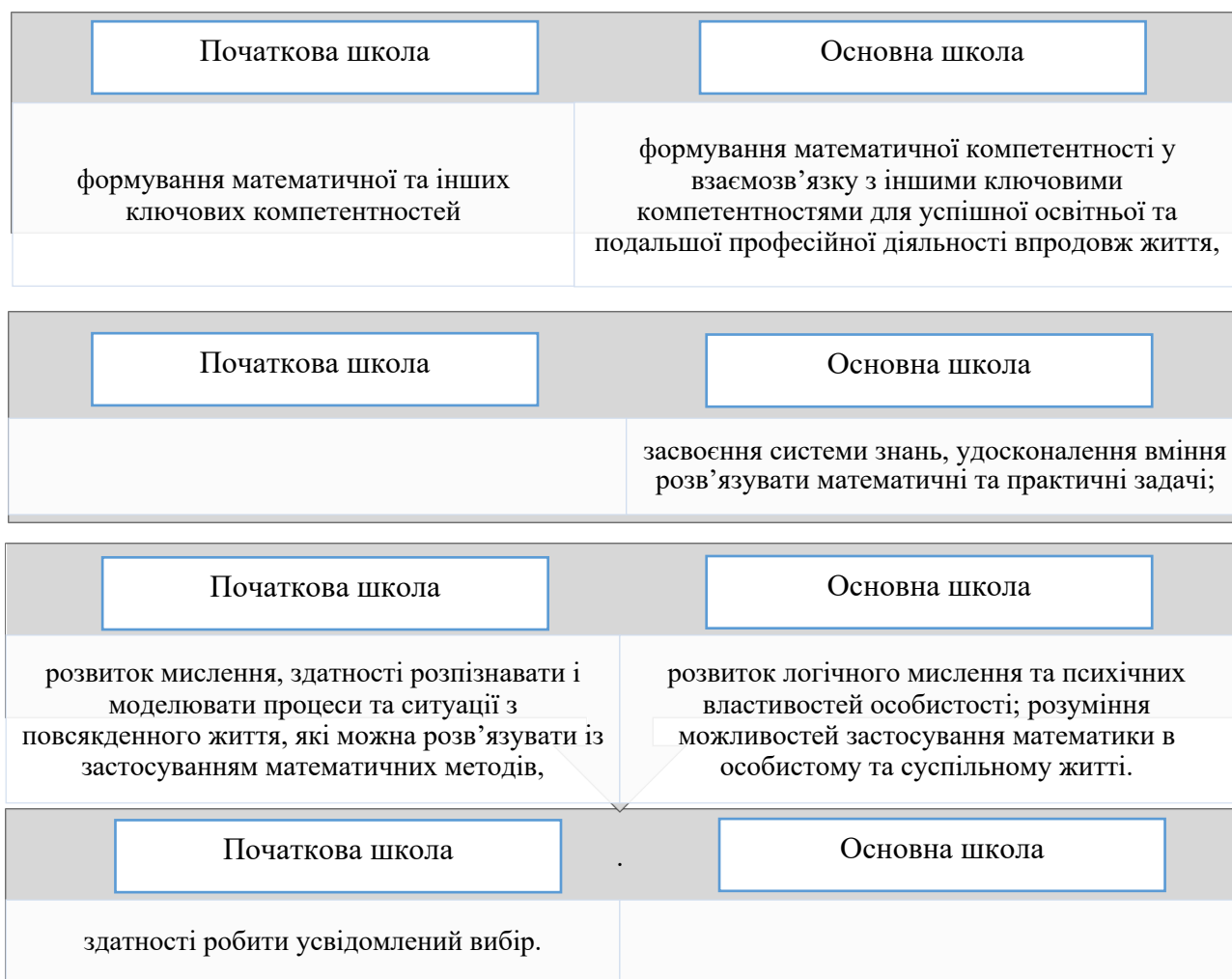


Рис. 5. Мета математичної освітньої галузі за ДС початкової освіти і базової середньої освіти

Як бачимо, у цілому мета математичної галузі початкової та основної школи співпадає, але, водночас, у ДС початкової освіти немає аналогу щодо засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі, а у ДС базової освіти – здатності робити усвідомлений вибір, що, на нашу думку, є досить дискусійним щодо висунення такої позиції в якості мети не лише для початкової школи.

Порівняння обов'язкових результатів за ДС початкової освіти і ДС базової освіти представлено на рис. 6. Як бачимо, обов'язкові результати, які регламентує ДС, у цілому співпадають, за виключенням розвитку математичного мислення для володіння математичною мовою, визначеного у ДС базової освіти, і застосування досвіду математичної діяльності, визначеного у ДС початкової освіти.

Початкова школа	Основна школа
досліджує ситуації і визначає проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;	досліджує проблемні ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;
Початкова школа	Основна школа
моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії (плани) дій для розв'язування різноманітних задач;	моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблем;
Початкова школа	Основна школа
критично оцінює дані, процес та результат розв'язання навчальних і практичних задач;	критично оцінює процес і результат розв'язання проблем;
Початкова школа	Основна школа
.	розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою.
Початкова школа	Основна школа
застосовує досвід математичної діяльності для пізнання навколишнього світу.	.

Рис. 6. Обов'язкові результати за ДС початкової освіти і ДС базової середньої освіти

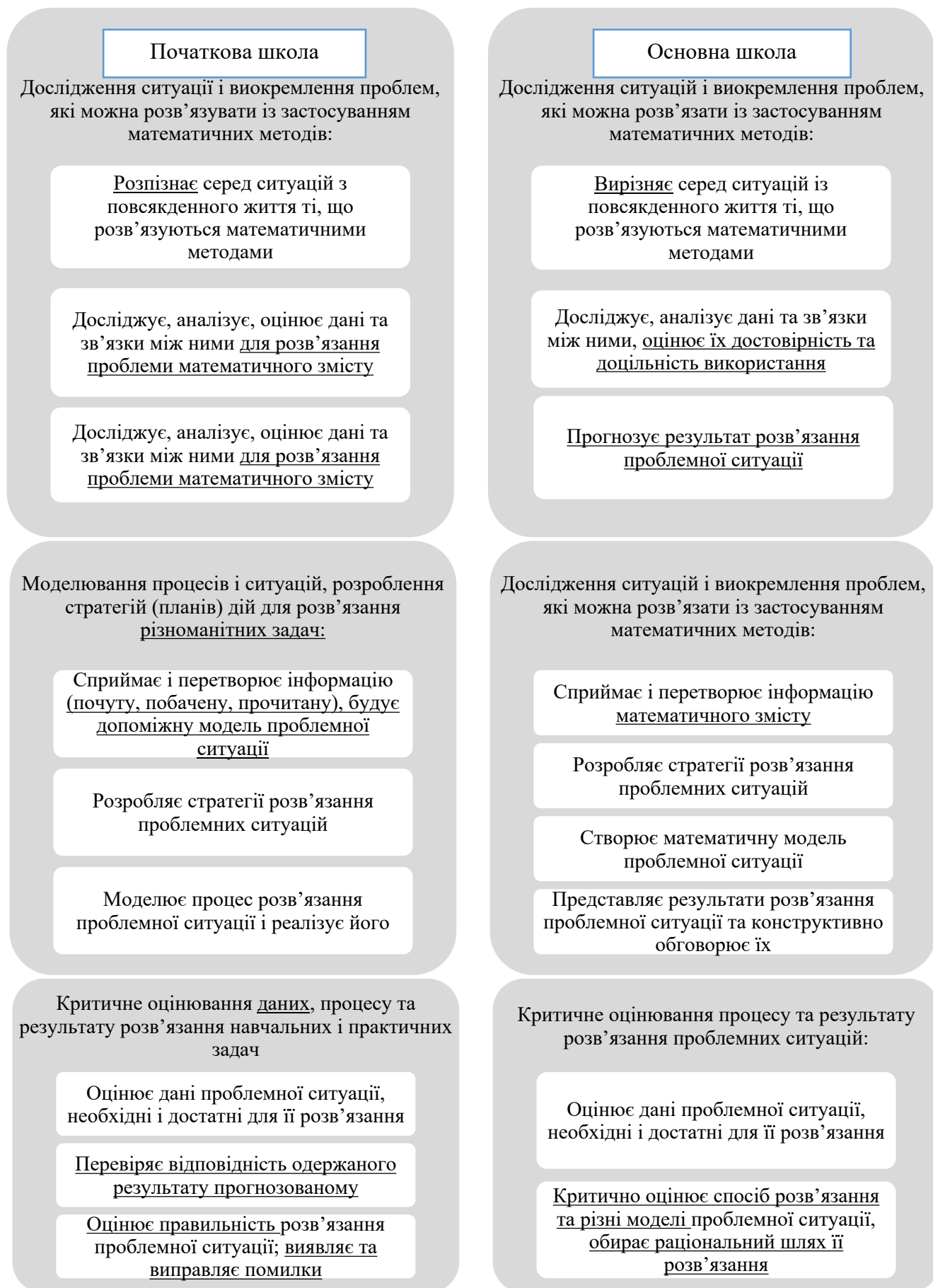


Рис. 7. Загальні результати навчання учнів за ДС початкової освіти і ДС базової середньої освіти



Рис. 8. Загальні результати навчання учнів за ДС початкової освіти і ДС базової середньої освіти

Порівняємо загальні результати навчання учнів у математичній освітній галузі за ДС початкової освіти і ДС базової середньої освіти. На рисунку 7 подано загальні результати, які можна співвіднести, і які мають окремі відмінності. На рисунку 8 подано загальні результати, які не мають аналогів у одному із стандартів. Викликає стурбованість той факт, що у ДС базової освіти відсутній аналог загального результату «Застосування досвіду математичної діяльності для пізнання навколишнього світу», який у певній мірі деталізує зміст математичної освіти у початковій школі. Таким чином, створюється уявлення про те, що у початковій школі вивчаються числа, і відповідно учні мають вміти їх читати і записувати, порівнювати; учні вчаться виконувати арифметичні дії з числами і набувають обчислювальних навичок; розглядаються просторові відношення та геометричні фігури, і в учнів формуються певні поняття та уявлення, вони будують і конструюють об'єкти, зокрема геометричні фігури; вивчаються величини, і учні опановують вимірювання величин; здійснюється алгебраїчна

пропедевтика, і учні використовують алгебраїчні поняття і залежності; розв'язуються задачі і учні вчать їх розв'язувати і досліджувати. У ДС базової середньої освіти у додатку 8, інформації про зміст математичної освіти зовсім не повідомляється, навіть непрямо через визначення конкретних результатів. Але уявлення про зміст навчання можна скласти, проаналізувавши «Базові знання» у додатку 7 до Державного стандарту.

Зазначимо, що базова середня освіта, так само як і початкова, має два цикли: адаптаційний (5–6 класи) та базового предметного навчання (7–9 класи), а базові знання у ДС визначено взагалі для основної школи без поділу на цикли. На жаль, на момент написання розділу монографії Типові освітні програми для базової середньої освіти ще не затверджено, тому не має можливості зіставити очікувані результати навчання на кінець другого циклу початкової освіти і зміст навчання 4-го класу та зміст і результати математичної освітньої галузі 5-го класу.

Висновки. Впровадження Концепції НУШ актуалізувало оновлення нормативного забезпечення початкової освіти – розробку і впровадження нового Державного стандарту, розробку і впровадження нових Типових освітніх програм, конкурсний відбір підручників, розроблених на підставі ТОП1 та ТОП2. Також, з 2022 року Концепція НУШ починає впроваджуватися в основну школу, у грудні 2020 року Постановою КМУ затверджено Державний стандарт базової середньої освіти, пілотування якого починається в 5-х класах у 2021–2022 навчальному році.

У Державному стандарті початкової освіти зміст навчання презентований у загальному результаті «Застосування досвіду математичної діяльності для пізнання навколишнього світу», а у Державному стандарті базової середньої освіти – у базових знаннях. У цілому мета математичної освітньої галузі та загальні результати математичної освіти узгоджені у ДС початкової школи і ДС основної школи. За умов відсутності затверджених ТОП для базової середньої освіти відсутня можливість їх порівняння.

У початковій школі чинними є дві ТОП – ТОП1 і ТОП2. У результаті порівняльного аналізу ми дійшли наступних висновків: ТОП1 і ТОП2 дещо відмінно трактують мету і завдання математичної освітньої галузі; ТОП1 і ТОП2 по різному структуровані – ТОП1 визначає очікувані результати і зміст навчання на кінець кожного року навчання, а ТОП2 – лише на кінець циклу – на кінець 2-го класу та на кінець 4-го класу; і у ТОП1 і у ТОП2 недостатньо чітко представлено зміст навчання, і у ТОП1 і у ТОП2 основну увагу приділено очікуваним результатам, а у ТОП2 ще й продубльовано загальні результати, які визначено ДС; у ТОП1 зміст навчання подано поряд із відповідними очікуваними результатами, а у ТОП2 – у кінці змістової лінії пропонується орієнтовний зміст; у ТОП1 визначено додаткові питання програми, а у ТОП2 такі питання відсутні.

Оскільки зміст навчання і у ТОП1 і у ТОП2 визначено у загальному вигляді, автори підручників по-різному визначають глибину вивчення математики та по-різному структурують зміст навчання, виходячи з власного досвіду, з власного бачення курсу математики початкової школи. Тому більшість підручників не мають істотних відмінностей від підручників попереднього покоління – до НУШ.

Список використаних джерел

1. Про внесення змін до Державного стандарту початкової освіти. Постанова КМУ від 24 липня 2019 р. № 688. Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-%D0%BF#Text>
2. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти. Постанова КМУ від 30 вересня 2020 р. № 898. – Київ. Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#Text>
3. Про затвердження Державного стандарту початкової освіти. Постанова КМУ від 21 лютого 2018 р. № 87. Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/87-2018-%D0%BF#Text>
4. Скворцова С. А. Особенности современного этапа математического образования в начальной школе Украины. *Математическое образование: современное состояние и перспективы*. К 100-летию со дня рождения доктора педагогических наук, профессора, заслуженного работника высшей школы БССР Абрама Ароновича Столяра : материалы междунар. науч. конф., г. Могилев, 20-21 февр. 2019 г. Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2019. С. 186–187.
5. Скворцова С. О. Навчання математики в 1-му класі на засадах Концепції Нової української школи. *Підготовка сучасного педагога дошкільної і початкової освіти в умовах розбудови Нової української школи* : зб. матеріалів Всеукраїнської з міжнародною участю наук.-практ. конф. Херсон : ТОВ «Борисфен-про», 2018. С. 16–19.
6. Скворцова С. О. Нова українська школа: варіанти пілотування. *Модернізація освітнього середовища: проблеми та перспективи* : матеріали Другої Міжнар. наук.-практ. конф., м. Умань, 5-6 жовтня 2017 року. FOLIA COMENIANA : Вісник Польсько-української науково-дослідницької лабораторії психодидактики імені Я. А. Коменського / гол. ред. Осадченко І. І. Умань : ВПЦ «Візаві», 2017. С. 117–122.
7. Скворцова С. О. Нова українська школа: особливості побудови Стандарту математичної освіти. *Модернізація освітнього середовища: проблеми та перспективи* : зб. статей. Folia comeniana: Вісник Польсько-української науково-дослідницької лабораторії психодидактики імені Я. А. Коменського / гол. ред. Осадченко І. І. Умань : ФОП Жовтий Щ. Щ., 2017. С. 66–71.
8. Скворцова С. О. Сучасний етап розвитку математичної освіти у початковій школі. *Математична освіта: минуле, сьогодення, майбутнє, до 100-річчя від дня народження О. Ф. Семеновича*: монографія / М. І. Бурда та ін.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2020. С. 48–56.
9. Типові освітні програми НУШ. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli>

1.2. ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ УЧНІВ ПОЧАТКОВОЇ ШКОЛИ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Світлана Сковцова

Вступ. 14 грудня 2016 р. Уряд України затвердив Концепцію реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа (НУШ)» на період до 2029 року (Постанова КМУ № 988-р). Відповідно до Концепції НУШ навчання у початковій школі має бути організоване відповідно до (із урахуванням) індивідуальних особливостей школярів; навчання має бути організовано через діяльність, найважливішим завданням учителя стає підтримка в кожному учневі впевненості і мотивації до пізнання. Таким чином, потребує докладного вивчення питання про особливості пізнавальної діяльності молодших школярів.

Огляд останніх публікацій за темою. Пізнавальна діяльність учня – це свідомо діяльність, яка спрямована на пізнання навколишньої дійсності за допомогою психічних процесів: сприймання, мислення, пам'яті, уваги, мовлення. Основою всіх пізнавальних процесів є мозок людини. Мозок людини розвивається як у напрямі функціонального розвитку, так і у напрямку зміни нейронного апарату кори [2].

Найбільш істотні зміни у перетворенні нейронного апарату відбуваються у віці 5–6 років та у 9–10 років; функціональна перебудова морфологічної структури функціональної організації мозку відбувається від п'яти до шести-семи років. Для навчання учнів дуже важливі наступні тези нейрофізіологів М. Безруких [1; 2] та Т. Чернігівської [15]:

- дитина народжується з повним набором нейронів, але у неї дуже мала кількість зв'язків між ними;
- нові нейрони протягом життя людини у великих кількостях не утворюються;
- кожен нейрон народжується з програмою апоптоза – програмою померти; і лише утворення нейронних зв'язків зупиняє програму апоптоза;
- нові нейронні зв'язки виникають у людини, коли вона робить щось нове, чомусь вчитися;
- при повторенні однієї й тієї ж дії виникають стійкі візерунки з нейронів, формується «навичка»;
- мозок формує нові зв'язки протягом 7 днів із початку постійних тренувань. Але набута нова навичка без підживлення зникає так само швидко, як і зароджується;
- у молодшому шкільному віці інтеграційна діяльність мозку характеризується відсутністю чіткої регіонарної і півкульної спеціалізації кори великих півкуль, адекватної виконуваної діяльності;
- вікові характеристики структурного і функціонального розвитку мозку визначають рівень розвитку пізнавальних (когнітивних) функцій;
- вік від 5-ти до 8-ми років є віком інтенсивного розвитку всіх *когнітивних функцій* і їх *мозкового забезпечення*.

Пізнавальні процеси забезпечуються злагодженою роботою комплексу зон мозку. Це, передусім, лобові частки, скоренева, тім'яна і потилична зони, фронтальні зони кори та прифронтальні відділи мозкової кори. Нейрофізіологи зазначають, що лобові частки формуються до шести-восьми років, але існують дані про те, що формування деяких складних полів продовжується до 12 років; скронева, тім'яна і потилична зони розвиваються до

8–12 років, а фронтальні зони кори дозрівають до необхідного рівня розвитку у 9–10 років, прифронтальні відділи у 4–8 років [1; 2; 5; 13].

Отже, з початком навчання у початковій школі у дитини існує необхідне нейрофізіологічне підґрунтя для цілеспрямованого навчання, для забезпечення пізнавальних процесів: сприймання, уваги, мислення, пам'яті, мовлення. Вікові особливості дозрівання зон мозку представлені на рисунку 1.

<i>Лобові доли</i>	<i>Скоренево-тім'яна-потилична зона</i>	<i>Фронтальні зони кори; прифронтальні відділи мозкової кори</i>
• стрімке збільшення цих частин спостерігається у 2–3 роки; • дозрівають за одними даними – до 10–12 віку, за іншими – до 6–8 років; • найбільш складні лобні області дозрівають у 6–7 років; • у деяких випадках збільшення особливо складних полів продовжується до 7-літнього, і навіть 12-літнього віку;	• дозрівають до 8–12 років;	• у 9–10 років дозрівають фронтальні зони; • у 4–8 років дозрівають прифронтальні відділи мозкової кори.

Рис. 1. Вікові особливості дозрівання зон мозку

Детальний аналіз проблеми щодо зон мозку, що забезпечують пізнавальні процеси подано у монографії Р. Романишин [4]. Скористаємось результатами дослідження авторки і представимо на рисунку 2 зони мозку, які забезпечують сприймання навчальної інформації.

З метою навчання учнів НУШ, яке спрямоване на урахування їх особливостей, доцільно врахувати наступні вікові особливості сприймання учнів початкової школи. Зокрема, у 5-6 років система сприйняття переходить на якісно інший рівень; ймовірність впізнавання об'єкта досягає 100%; в 6 років відбуваються зміни в організації системи сприймання, а саме, створюються умови для поглибленого сприймання предметів, оперування великою кількістю ознак (спеціалізованим залученням в аналіз і обробку зорової інформації задньо-асоціативних відділів); до 6 років відбуваються суттєві зміни структурної організації локальних нейронних мереж зорової області кори; у 6-8 років відбувається перехід від впізнавання з опорою на формальні ознаки до впізнавання з опорою на семантичні ознаки об'єкта; для 7-8 річного віку характерні певні труднощі з виокремленням значущості стимулу і відсікання неістотної інформації; до 8 і 9 років формуються метричні уявлення і стратегія оптико-конструктивної діяльності. Тому з метою полегшення учням початкових класів сприймання навчальної інформації на перший план виходить унаочнення навчальної інформації [1; 2; 7; 8; 9; 10].

Унаочнення навчальної інформації можливе через виконання практичних дій, наприклад, з роздатковими-математичними матеріалами. Математичні матеріали є засобом організації навчальних досліджень учнів. Очевидно, що організація навчальних досліджень

учнів, метою яких є навчальне відкриття нового поняття або способу дії, передбачає реалізацію системи навчальних завдань, яка має бути логічно вибудована з тим, щоб підвести учнів до розв'язання проблемної ситуації.

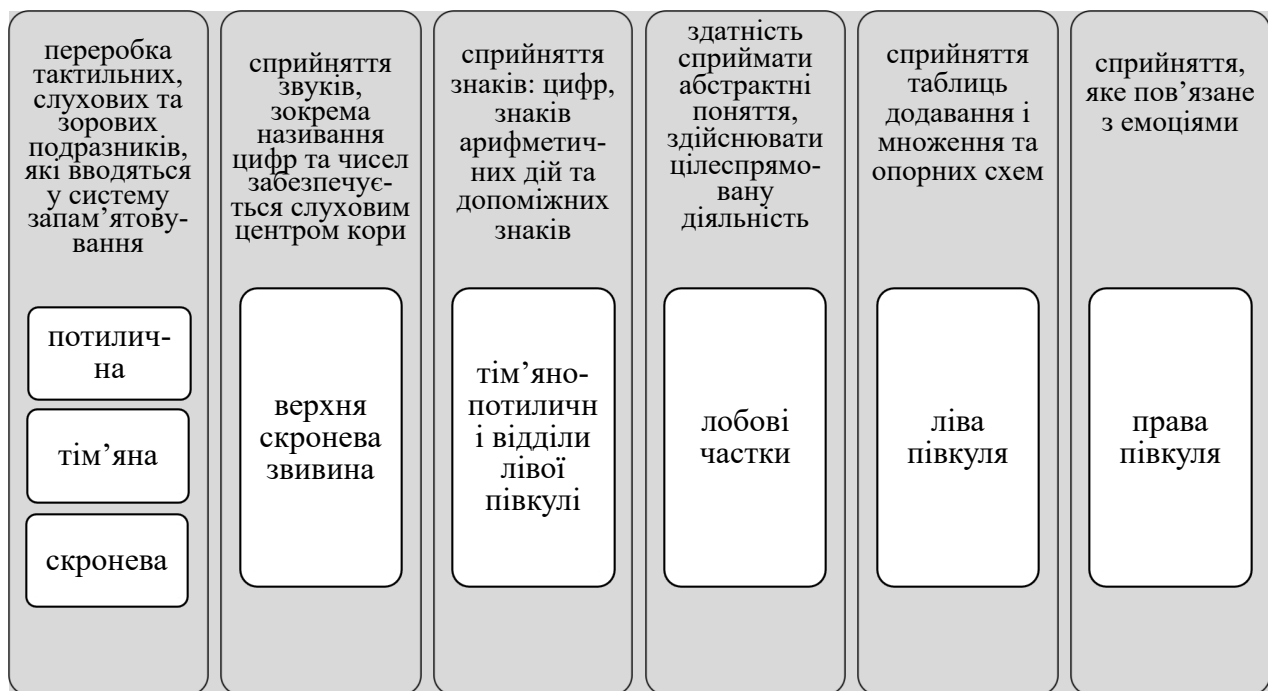


Рис. 2. Нейрофізіологічне підґрунтя сприймання

Унаочнення навчальної інформації, з метою полегшення учням сприймання абстрактного змісту, такого як математичний, може бути через використання матеріальної наочності, схематичної наочності, і в тому числі, наочності, створеної на підставі інформаційно-комунікаційних технологій. Унаочнюючи навчальний матеріал, його слід представляти з кольоровими виділеннями головних елементів змісту чи основних операцій розв'язування, використовувати стрілки й дужечки для демонстрації взаємозв'язків між елементами змісту або переходу від одного кроку розв'язування до наступного. Якщо унаочнення здійснюється на підставі ІКТ, то доцільно використовувати анімаційні ефекти як-то динамічне розгортання розв'язання, виділення кольором основних кроків розв'язування, пересування якихось елементів розв'язання тощо. Головне – представляти навчальну інформацію схематично, з мінімумом слів і максимумом виділених зв'язків між елементами змісту у вигляді опорних конспектів, схем тощо. Для забезпечення адекватного цілям навчання перебігу пізнавальної діяльності в учня має бути наявним певний рівень розвитку уваги, а для цього мають дозріти певні зони мозку; ці зони мозку подано на рис. 3 [4].

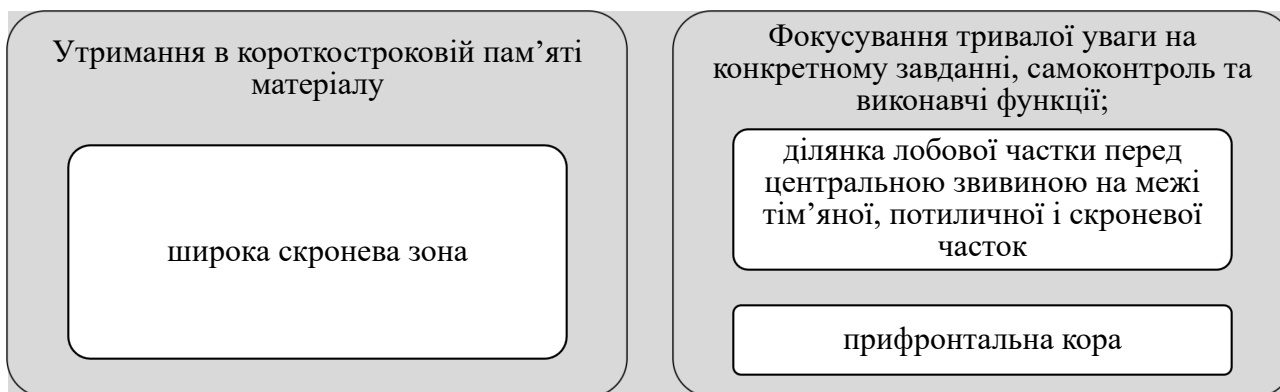


Рис. 3. Нейрофізіологічне підґрунтя уваги

Очевидно, що під час організації навчання математики у початковій школі обов'язково слід урахувати вікові особливості уваги молодшого школяра. Колективом науковців під керівництвом М. Безруких [1; 2; 13] проведено популяційні дослідження молодших школярів і виявлено наступні особливості уваги: з 3–6 років відбувається формування стійкої пізнавальної уваги, збільшується кількість ознак, що виділяються, збільшується обсяг уваги; в 7–8 років переважає мимовільна увага, але і мимовільна, і довільна увага ще мають риси незрілості; з 9–10 років мимовільна увага організовується за типом дорослого; у 6–8 років відбувається формування механізмів довільної виборчої уваги, при цьому емоційна мимовільна увага поступово витісняється довільною когнітивною; до 7–8 років довільна діяльність, яка організовується за допомогою уваги легко виштовхується заняттями, які безпосередньо цікавлять дитину; у 7–8-річних дітей система переробки інформації ще незріла і її можливості досить обмежені.

До кінця дошкільного періоду в міру прогресивного дозрівання лобових часток дитина отримує можливість здійснювати найпростіше планування своїх найближчих дій і керувати активаційними впливами відповідно до завдань, сформульованими в інструкції дорослого, які не завжди збігаються з бажаннями дитини; від 6–7 до 9–10 років удосконалюються механізми селективної уваги й організації діяльності, але лише у 9–10 років можлива довільна, цілеспрямована діяльність дитини, – діяльність, у якій дитина сама може сформулювати мету. В учнів 1–3-х класів проблеми із саморегуляцією; в цьому віці дитина погано ще керує власними вольовими зусиллями, оскільки для цього мають сформуватися фронтальні зони кори мозку, які формуються до 9–10 років.

Виходячи з вікових особливостей уваги молодших школярів, у навчанні математики слід урахувати умови, які підтримують увагу учня. Так, виходячи з гарного розвитку мимовільної уваги, навчання математики слід здійснювати з використанням яскравої, динамічної наочності, наочності з анімаційними ефектами. Слабкість довільної уваги потребує дотримання умов полегшення сприймання навчальної інформації – а це не лише унаочнення навчального змісту, а й його структурування, і реалізація системи навчальних завдань, які призводять до навчального відкриття як через організацію навчальних досліджень, так і через співставлення відомого матеріалу з новим. Але, головною умовою підтримки уваги учнів є чіткі інструкції з боку вчителя та поопераційний контроль на перших етапах навчання.

Математика як навчальний предмет, з одного боку вимагає певного розвитку абстрактно-логічного мислення, а з іншого, засобами математичних завдань, відбувається розвиток

мислення учня. Мислення людини забезпечується злагодженою роботою комплексу мозкових структур [4], які представлені на рис. 4 .

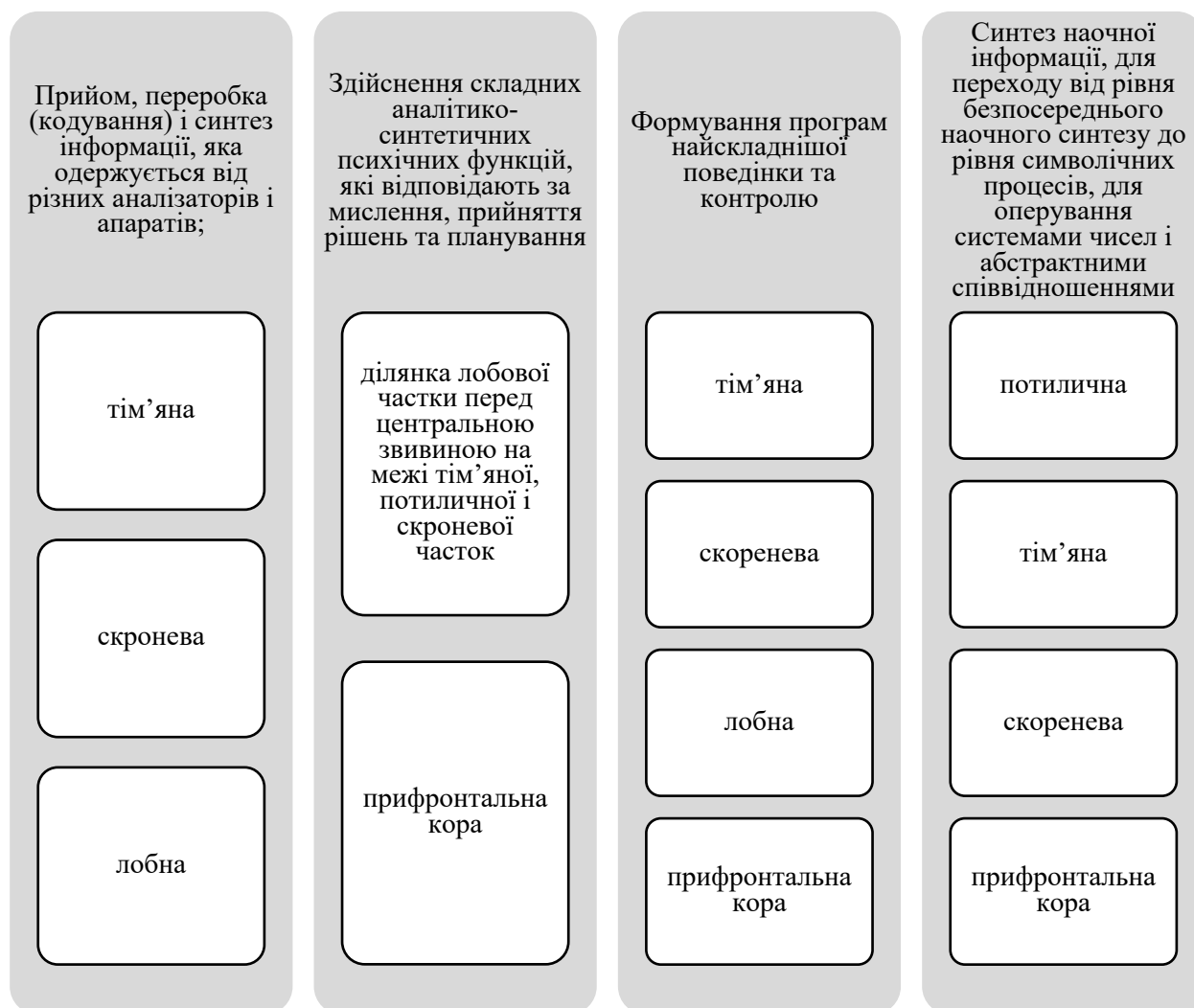


Рис. 4. Нейрофізіологічне підґрунтя мислення

Очевидно, що задля ефективного навчання математики у початковій школі слід урахувати вікові особливості мислення молодших школярів: типом мислення молодшого школяра є наочно-образне мислення, яке пов'язане з його емоційною сферою; для 7–8 років характерне образне мислення, основою якого є досягнення певного ступеня зрілості зорового сприйняття, а засобом – образ. Головна особливість дитячого мислення – сприймати все конкретно, буквально, не сформованість уміння піднятися над ситуацією і зрозуміти її загальний, абстрактний зміст. Мовлення є основою формування мислення дитини: до 7–8 років залучаються структури обох півкуль, і до 9–10 років відбувається залучення лобових областей у мовленнєві процеси. Особливості мовленнєвої діяльності у молодшому шкільному віці визначають специфіку розумових операцій; з розвитком механізмів мовленнєвої діяльності, дитина набуває здатності виділяти за допомогою вербально-логічного мислення сутнісні характеристики предметів і явищ, приховані від безпосереднього сприйняття. Вчитель має враховувати, що з 6-річного віку в учнів проявляється здатність до систематизації, класифікації і групування процесів, явищ, предметів, до аналізу простих

причинно-наслідкових зв'язків та пізнавальної мотивації, а у 5–7 років підвищується роль абстрактного мислення; якщо до цього часу головним було мислення у дії, то тепер починає переважати словесне мислення з внутрішнім мовленням, дитина вже користується поняттями, які абстраговані від дій [1; 2; 7; 8; 9; 10].

З огляду на це, навчання передбачає наявність певного рівня розвитку пізнавальних процесів, зокрема мислення, а з іншого – здійснює активний вплив на їх розвиток. Отже, говорячи про врахування вікових особливостей мислення учнів 1–4-х класів у навчанні математики, слід, по-перше, дотримуватись закономірностей формування розумових дій, які сформульовані Л. Фрідманом [14], і, по-друге, здійснювати навчання математичних понять та способів діяльності на основі теорії поетапного формування розумових дій і понять П. Гальперіна [12]. Вимоги до формування розумових дій Л. Фрідмана представлено на рис. 5.

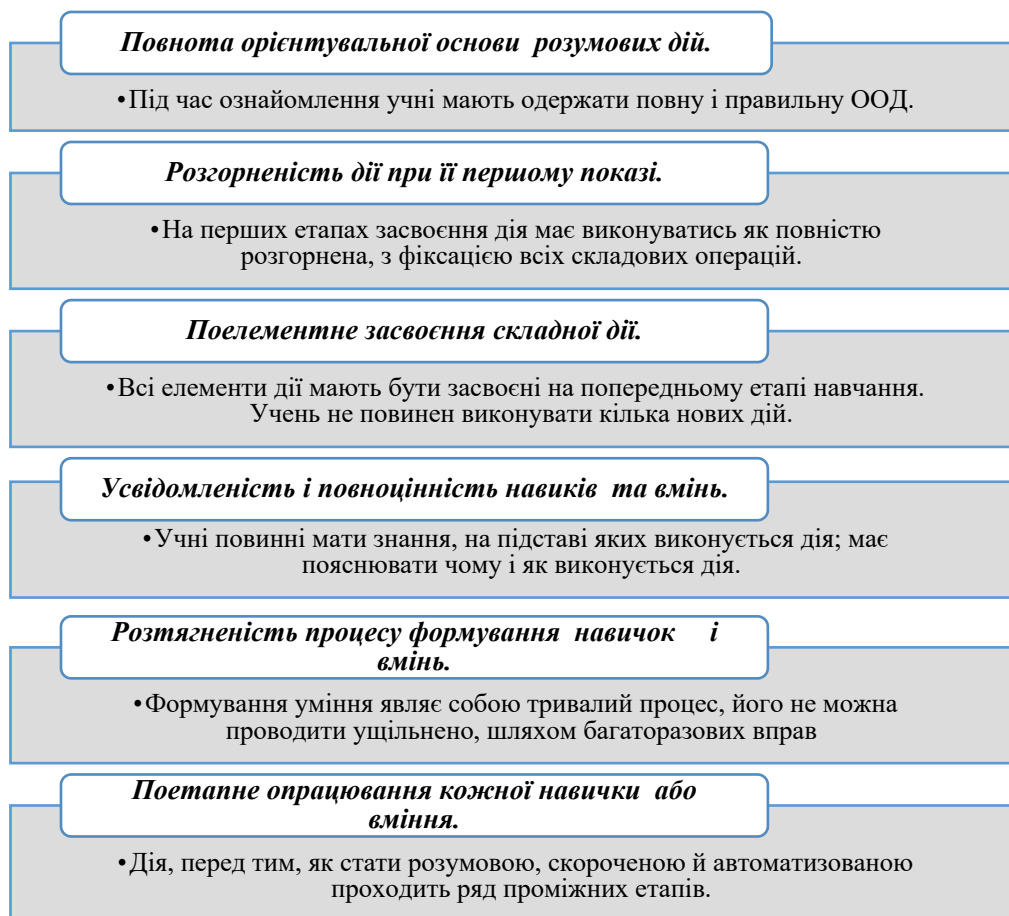


Рис. 5. Вимоги до формування розумових дій Л. Фрідмана

З метою реалізації останньої вимоги навчання математики доцільно будувати на підставі теорії поетапного формування розумових дій П. Гальперіна [12], яка передбачає зміну дії як за формою (матеріальна, матеріалізована, виконання дії у голосному мовленні, «зовнішнього мовлення про себе», у внутрішньому плані), так і за мірою узагальненості (на перших етапах дія виконується як повністю розгорнена, а потім вона починає скорочуватися за рахунок пропускання проміжних операцій, і, нарешті, максимально скорочується й автоматизується). Таким чином, відбувається процес інтеріоризації – переходу зовнішніх дій з речами або їх заміниками у внутрішні – розумові.

Набута таким чином навчальна інформація має бути належним чином упакована і збережена, а це є функція пам'яті. Нейрофізіологічні механізми пам'яті [4] подані на рис. 6.

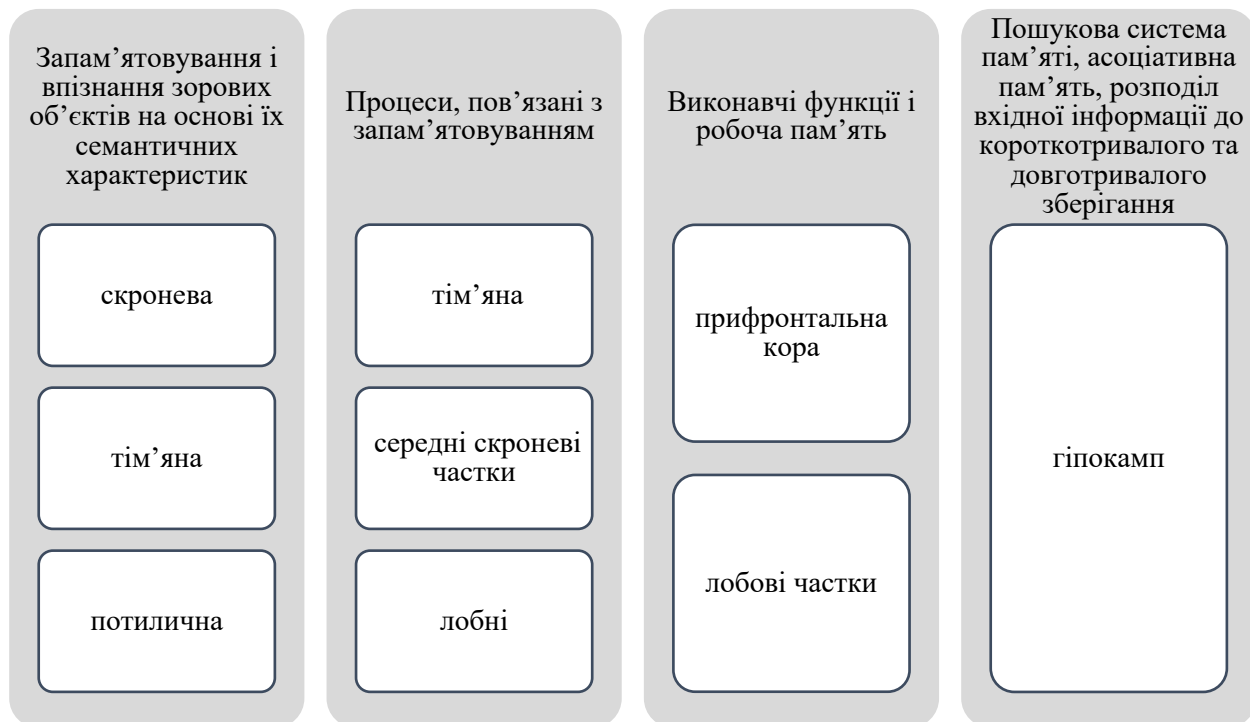


Рис. 6. Нейрофізіологічне підґрунтя пам'яті

Очевидно, нейропсихологічні параметри пам'яті пов'язані з наступними нейрофізіологічними функціями: зоровим сприйняттям, довільною увагою і мовленням [2]. Таким чином, вікові особливості пам'яті молодшого школяра пов'язані із віковими особливостями сприйняття, уваги, мовлення. Розглянемо їх за даними досліджень М. Безруких [1; 2]: у 5 років: обсяг як зорової, так і слухо-мовленнєвої пам'яті є достатнім; у 7–8 років запам'ятовування і впізнання геометричних фігур здійснюється за типом дорослого, а ідентифікація і розрізнення літер ще ускладнені і вимагають залучення більш складних механізмів. До 6 років міцність зберігання у пам'яті сягає зрілості. До 7–8 років оптимального статусу досягає вибірковість мнемічної діяльності. У першокласників переважає мимовільне запам'ятовування, водночас вони здатні й до довільних дій пам'яті, а з 7 років мимовільне запам'ятовування переходить у довільне. Взагалі, з початком навчання у школі виникає необхідність довільного запам'ятовування навчального матеріалу. У молодших школярів спостерігається перемикання системи пам'яті на інший рівень – від безпосереднього запам'ятовування, властивого дошкільнят, до запам'ятовування, опосередкованого конкретними смисловими завданнями. Організуючи навчання, слід враховувати, що діти краще запам'ятовують і міцніше зберігають у пам'яті конкретні відомості, події, предмети, тобто образну інформацію, ніж означення, правила і пояснення – словесно-логічну інформацію. Крім того, молодші школярі схильні до механічного запам'ятовування засобом простого повторення, без усвідомлення змістовних зв'язків матеріалу, але розвиток пам'яті у молодшому шкільному віці відбувається у напрямку стимулювання словесно-логічного запам'ятовування, і до 10–13 років формується словесно-логічна пам'ять, яка пов'язана з мовленням; її відмінними рисами є точність відтворення і велика залежність від волі. У період

7–8 років з'являються оптимальні умови для розвитку і міцного закріплення довільних форм діяльності, у тому числі і довільної короткочасної пам'яті.

Оскільки, для запам'ятовування потрібен певний рівень розуміння та усвідомлення навчального матеріалу, враховуючи зв'язок пам'яті зі сприйманням, увагою і мовленням, очевидно, що всі умови врахування вікових особливостей сприймання, уваги, мислення молодших школярів будуть сприяти і врахуванню вікових особливостей пам'яті: унаочнення навчальної інформації (анімаційні ефекти, кольорові виділення, схематичне подання навчальної інформації), організація навчальних досліджень (робота з математичними матеріалами, реалізація системи навчальних завдань, яка призводить до відкриття способу дії або перенесення відомого способу дії у нову ситуацію), керівництво навчальною діяльністю з боку вчителя (надання повної і правильної орієнтувальні основи дій, чіткі інструкції, покроковий, поопераційний зовнішній контроль), формування розумових дій (із дотриманням закономірностей Л. Фрідмана, на підставі ТПФРД П. Гальперіна).

У попередніх дослідженнях нами проаналізовано зміст математичної освітньої галузі на предмет урахування вікових можливостей засвоєння матеріалу і визначено підходи до побудови методики навчання математики учнів початкової школи. У статті [7] нами проаналізовано дані нейрофізіології та вікової психології, і ми дістали висновок про підтвердження доцільності і своєчасності подання у програмі з математики для 1-го класу геометричних фігур, розгляду ознак і властивостей предметів, узагальнення та класифікації за спільною ознакою. Готовність дитини до абстрагування певних властивостей об'єктів оточуючого світу створює підґрунтя до формування в неї поняття числа, виконання арифметичних дій додавання і віднімання між числами, що становить ядро змісту математики.

Виходячи з особливостей сприймання молодших школярів, а також з того, що система опрацювання інформації у дітей ще незріла, зроблено висновок про необхідність надання учню певної допомоги з опрацювання навчального змісту, у тому числі, шляхом його унаочнення. Хоча й молодший шкільний вік сенситивний для розвитку інформаційних процесів, які складають основу пізнавальної діяльності, система опрацювання інформації у 7–8 річних дітей ще незріла, а це вимагає надання учню певної допомоги в опрацюванні навчального змісту: підручники мають містити інформацію у структурованому вигляді, мають містити кольорові виділення, спеціальні позначки; вчитель має дотримуватись чіткої логіки викладу, підводячи дітей до власних відкриттів; доречно використовувати мультимедійну наочність, яка полегшує осмислення навчальної інформації шляхом подання на слайдах структурованого змісту з використанням анімаційних ефектів. З іншого боку, доцільність використання в процесі навчання всіляких наочних засобів продиктована особливостями сприймання молодших школярів [7].

Виходячи з переважання недовільної уваги, організовуючи діяльність учня на уроці, треба здійснювати впливи на емоції дитини, забезпечувати досягнення нею успіху, заохочувати її, не докоряти за помилки, а робити акценти на досягненнях, використовувати різноманітні форми роботи на уроці, часто змінювати темп уроку (строкатий темп уроку). Змінюючи форми організації діяльності учнів, треба ще й приділити уваги змістовій організації навчання, а саме: пропонувати учням систему навчальних завдань, яка дозволить без додаткових вольових зусиль «відкрити» нове знання і зробити власним надбанням особистості. З метою забезпечення досягнення успіху вчителю потрібно надавати дитині допомогу як на етапі планування дій із розв'язання певного завдання, так і на етапі реалізації плану, стимулювати дотримання його кроків. Навчаючи математики, не можна вимагати від

учнів механічного заучування; в основі запам'ятовування математичного змісту має бути його осмислення. Отже, вдосконалення початкової математичної освіти лежить у площині реалізації сучасних методик навчання, які забезпечують дитині досягнення успіху, а не налаштовують на механічне заучування, яке вимагає істотних вольових зусиль [7].

У статті [8] визначено основу розробки методики навчання математики, яка враховує вікові особливості пізнавальних процесів молодших школярів: 1) про важливість сенсорики для розвитку мозку; 2) про формування інваріантності у перцептивній сфері до 6 років, про формування до 6–7 років структурно-типологічних і координатних факторів у сфері просторових уявлень; 3) про здійснення по типу дорослого запам'ятовування і розпізнавання геометричних фігур у 6–7 років; 4) про вдосконалення рухів дитини, тренування зорової пам'яті і просторового сприйняття у процесі роботи з геометричним матеріалом; 5) про характерне для 7–8-річних учнів образне мислення, основою якого є зорове сприймання, а засобом – образ. Зроблено висновок про те, що однією зі складових методики навчання математики у початковій школі має бути методика роботи з математичними матеріалами – наочними посібниками, за допомогою яких учень досліджує кількісні відношення та форми об'єктів оточуючого світу.

За основу нами взято математичні матеріали, які запропоновані М. Монтессорі – «Арифметичні штанги» та «Числа і кружечки». При вдосконаленні цих матеріалів ми виходили з того, що вони мають використовуватись наскрізно, протягом всього навчального року в 1-му класі і охоплювати велику кількість питань програми, створюючи можливість внутрішньо предметної інтеграції за засобом навчання. Тому, розроблені матеріали є багатофункціональними, оскільки передбачають можливість трансформації, виходячи із ускладнення змісту навчання [8].

Метою дослідження є доопрацювання методики організації навчальних досліджень на уроках математики при вивченні нумерації цілих невід'ємних чисел та арифметичних дій з числами, і розширення її до навчання у 2–4-му класах НУШ. В розділі монографії презентуються результати роботи із вчителями Одеського приватного навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»» із навчання їх організації навчальних досліджень учнів з використанням математичних матеріалів.

Виклад основного матеріалу. Основними засадами Концепції НУШ є врахування пізнавальних можливостей учнів; навчання молодших школярів у діяльності актуалізує потребу у застосуванні у навчанні математики математичних матеріалів. Саме математичні матеріали забезпечують опору на наочно-образне мислення учнів і враховують особливості пізнавальних процесів молодших школярів; математичні матеріали забезпечують реалізацію діяльнісного підходу у навчанні математики, зокрема виконання дії у матеріальній або матеріалізованій формі за ТПФРД П. Гальперіна, унаочнюючи абстрактні математичні поняття та способи дії; математичні матеріали створюють можливості для внутрішньо предметної інтеграції за засобом навчання, оскільки вони є багатофункціональними і можуть застосовуватися у навчанні багатьох тем, наскрізно.

На користь використання математичних матеріалів для організації навчальних досліджень на уроках математики у початковій школі свідчить той факт, що у початкову школу прийшли діти – представники цифрового покоління. Це діти, які не уявляють свого життя без гаджетів, без підключення до мережі інтернет. Віртуальне середовище, в якому вони проводять досить велику частину свого життя, пропонує їм високі рівні стимуляції, яскраву,

динамічну картинку. Віртуальні сторінки яскраво оформлені, містять рухомі об'єкти, викликають у дітей недовільну увагу. Змалечку діти звикають «сьорфіти» сторінками мережі Інтернет знаходячи потрібні їм мультики, відеоігри й згодом інформацію в соціальних мережах. Таким чином, діти звикають до поверхового перегляду сторінок веб-сайтів, мультиків. Якщо в перші хвилини мультфільм дитину не зацікавив, то він переходить до іншого, що не сприяє зосереджуванню уваги на якійсь діяльності. Отже, формується звичка до поверхового сприйняття контенту як ігрового, так і навчального.

Перегляд навіть невеличких текстів здійснюється у напрямі латинської літери Z – початок і кінець, а середина – по діагоналі. Отже, створюється лише уявлення про зміст поданої на інтернет сторінці інформації; і мова не йде про аналіз інформації, про виділення головного, про систематизацію, про узагальнення, про висновки, які можна зробити з даної інформації. Таким чином, у сучасних дітей – представників цифрового покоління погіршилися аналітико-синтетичні здібності: вони не здатні обробляти більш низькі рівні стимуляції, ніж ті, що їм пропонує віртуальне середовище. А це, звичайно, погіршує готовність дитини до шкільного навчання.

Входження інтернет-мережі в наше повсякденне життя активізує питання про потребу у запам'ятовуванні певних фактів, законів, формул тощо – будь якої навчальної інформації. Адже, вся інформація є в мережі Інтернет і «Google знає все!». Але, разом з тим, у мережі Інтернет є і неправдива інформація – є фейки, і для того, щоб оцінити що є правдиво, треба мати знання. Отже, у сучасних дітей начебто за відсутності потреби запам'ятовувати матеріал, погіршилася пам'ять; в них пам'ять гірша, ніж у попередніх поколінь.

Викликає стурбованість той факт, що у сучасних дітей погіршилося сприймання тривимірного простору. Вони звикли до діяння у віртуальному середовищі, а це діяння, фактично, з двовимірними об'єктами. Інтернет-сторінки, відеоігри, хоча й начебто, імітують тривимірний простір, але ж вони все одно є плоскими (Л. Кондратенко). Таким чином, у методиці навчання математики треба передбачити компенсацію негативного впливу віртуального середовища, і тут можуть допомогти математичні матеріали – яскраві за своїм виглядом, деякі з них – об'ємні. Пропонуючи дітям дослідити математичні об'єкти, діючи з математичними матеріалами, ми повертаємо дітей реального фізичного світу до оперування з реальними тривимірними об'єктами; ми залучаємо дітей до досліджень математичних закономірностей, математичних понять і способів діяльності.

Ще одна особливість представників цифрового покоління – це одночасне виконання кількох справ. Так, діти можуть виконувати домашнє завдання, спілкуватися у соцмережі і ще відповідати на запитання батьків. Таким чином, з'являється хибне уявлення про те, що діти цифрового покоління здатні одночасно виконувати кілька справ. Але, єдине що не гарно виходить – це перемикається з однієї справи на іншу, бо на жодній з цих справ вони не зосереджуються, не вникають у суть цієї справи. Таким чином, представникам цифрового покоління притаманна уявна багатозадачність (Л. Кондратенко).

Крім того, спілкування з комп'ютером – це фактично спілкування сам на сам із собою. Перебуваючи у віртуальному середовищі, діти перестали спілкуватися, будувати дружні стосунки з однолітками та з дітьми різних вікових груп. Таким чином, вони всі свої проблеми з товаришами вирішують бійками, оскільки не вміють спілкуватися й домовлятися. Більш детально про особливості учнів як представників цифрового покоління подано у публікаціях автора [11; 16].

Очевидно, що конкурувати з віртуальним середовищем реальному фізичному світу дуже складно, але у навчанні математики є можливості організації дослідницької діяльності дітей із реальними предметами або схемами – математичними матеріалами. Доцільність застосування математичних матеріалів обґрунтовується наступними положеннями:

1. Одночасне перебування дитини у двох світах – фізичному і віртуальному шкодить мозку дитини на рині його будови. Тому, існує потреба у поверненні дитини до діяння з реальними предметами, в організації дослідження об'єктів реального світу, що, у свою чергу, полегшує сприймання математичного матеріалу і забезпечує розуміння навчальної інформації.

2. Врахування вікових особливостей пізнавальних процесів є одним з основних положень Концепції НУШ. Врахування рівня розвитку уваги і мислення молодшого школяра актуалізує потребу у пошуку ефективних методик навчання математики, які б спиралися на мимовільну увагу і пропонували учням види діяльності, які безпосередньо цікавлять дитину (з 9–10 років мимовільна увага організовується по типу дорослого; у 7–8 років збільшується обсяг уваги; переважає мимовільна увага, але і мимовільна і довільна увага ще мають риси незрілості). Очевидно, що з метою врахування вікових особливостей уваги молодших школярів доцільно використовувати математичні матеріали, залучаючи учнів до дослідження математичних понять та способів діяльності із їх використанням.

3. Навчання у діяльності учнів початкової школи також є основним положенням Концепції НУШ. Організовуючи діяльність учнів із відкриття способів математичних дій, їх орієнтувальних основ, із використанням математичних матеріалів як засобу навчання вчитель має враховувати те, що: до 7-8 років довільна діяльність, яка організовується за допомогою уваги легко виштовхується заняттями, які безпосередньо цікавлять дитину, оскільки вона погано ще курує власними вольовими зусиллями, і лише з 6–8 років відбувається формування механізмів довільної виборчої уваги; з 6–7 до 9–10 років вдосконалюється механізми селективної уваги і організації діяльності; з 6–7 років починається формування динамічно-виборчих функціональних систем обробки інформації та організації діяльності. Таким чином, вчитель має надавати учням чіткі і покрокові інструкції, здійснювати поопераційний контроль за виконанням завдань, тобто всі кроки роботи із навчального дослідження мають бути ґрунтовно продумані, розглянуті різні варіанти перебігу розв'язування проблемної ситуації. Крім того, слід передбачити ситуації, які викликають недовільну увагу, емоції здивування, позитивні емоції від відкриття нового, емоції від досягнення успіху. Математичні матеріали і будь-яка наочність, яка використовується для організації навчальних досліджень мають бути яскраво оформлені, бути приємними на дотик, вони мають подобатись учням. Слід мати на увазі, що тільки з 9-10 років можлива довільна, цілеспрямована діяльність дитини, в якій вона сама може сформулювати мету. Саме під час організації навчальних досліджень учитель може дати більше самостійності учням у розв'язуванні проблемних ситуацій.

Отже, організація навчальних досліджень з використанням математичних матеріалів є засобом, який полегшує сприйняття, розуміння, усвідомлення і запам'ятовування навчальної інформації учнями – представниками цифрового покоління.

Під час експериментальної роботи нами було проведено два модулі. Перший модуль стосувався організації навчальних досліджень учнів при вивченні нумерації чисел в концентрах «Десяток», «Сотня», «Тисяча», «Багатоцифрові числа», а другий – прийомам усних обчислень у кожному із цих центрів.

Нумерація чисел в центрі «Десяток». Для організації навчальних досліджень використовуються наступні математичні матеріали: «Арифметичні штанги», «Числа та

кружечки» і набір геометричних фігур. «Арифметичні штанги» і «Числа та кружечки» – це математичні Монтессорі-матеріали, які були виокремлені експериментальним шляхом відомим педагогом Марією Монтессорі.

Арифметичні штанги використовуємо із початку навчання у першому класі при вивченні теми «Узагальнення і систематизація знань учнів, одержаних у передшкільний період». Арифметичні штанги являють собою або дерев'яні бруски, або rischi з картону чи rischi на магнітній основі, що містять червоні і сині смужки однакової довжини. З арифметичними штангами пропонуємо учням завдання, наприклад: арифметичні штанги викласти по довжині від найкоротшої до найдовшої; потім завдання ускладнюються: вони починають лічити червоні та сині смужки, викладаючи біля кожної смужки картку з відповідним числом (рис. 7). Далі учні лічать штанги 1–10, показують штангу 2, штангу 3, ... штангу 10, кожного разу перелічуючи смужки на цій штанзі. Пропонуємо учням показати певну штангу, а потім показати її сусідів – штангу, яку лежить над нею, – наступну, – і штангу, яка лежить під нею, – попередню; досліджуємо, яка штанга довша – наступна чи попередня, яка штанга коротша – наступна чи попередня. На наступному етапі навчання пропонуємо учням змішати штанги, і серед купки штанг знайти певну штангу, наприклад, штангу 5. А потім, вимагаємо знайти штангу, яка є наступною, і штангу, яка є попередньою. Прикладаючи наступну штангу до штанги 5 учні помічають, що кожній червоній смужці є пара, а одна синя смужка залишилася без пари, таким чином наступна штанга 6 на одну смужку довша за штангу 5, а число 6 більше за число 5 на 1. Аналогічно працюємо із попередньою штангою 4, і з'ясовуємо, що число чотири менше за число 5 на один.

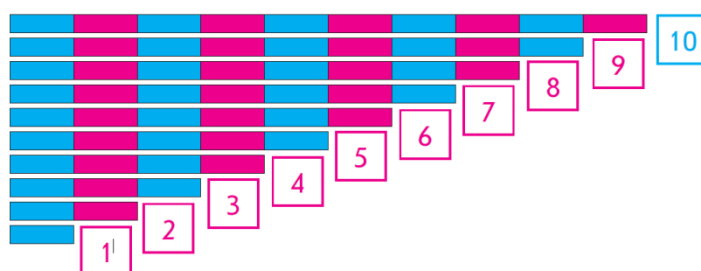


Рис.7. Арифметичні штанги

Таким чином, робота з арифметичними штангами дозволяє формувати в учнів поняття числа як кількості смужок, які укладаються на довжині певної штанги; дає можливість дослідити наступне і попереднє число; з'ясувати різницеве відношення наступного числа і даного, попереднього числа і даного. Найдовша штанга, що містить 10 смужок є аналогом числового відрізка (рис. 8), і це є гарним підґрунтям для наступного дослідження послідовності чисел на числовому промені.

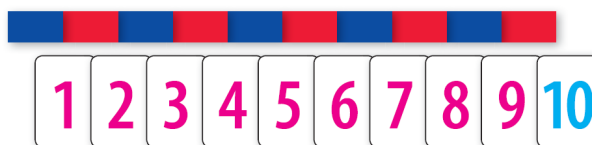


Рис. 8. Використання арифметичних штанг для дослідження послідовності чисел на числовому відрізку

Робота з арифметичними штангами дає можливість формувати в учнів спосіб порівняння предметних множин утворенням пар (рис. 9). Далі, при підготовці до введення арифметичних дій додавання та віднімання, арифметичні штанги можуть бути використані для демонстрації об'єднання двох штанг у ціле і вилучення з цілої штанги її частини. Об'єднання і вилучення на арифметичних штангах є підготовкою до схематичної інтерпретації арифметичних дій додавання та віднімання (рис. 10). Також арифметичні штанги можуть бути засобом дослідження переставного закону додавання (рис. 11) та взаємозв'язку арифметичних дій додавання та віднімання (рис. 12); різницевого порівняння (рис. 13).



Рис. 9. Використання арифметичних штанг для порівняння способом утворення пар

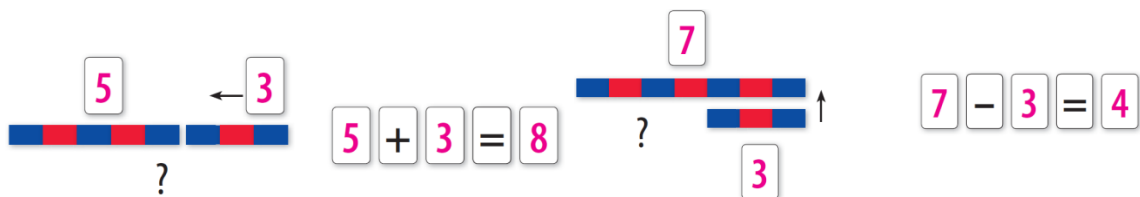


Рис. 10. Демонстрація на арифметичних штангах об'єднання частин в ціле/додавання і вилучення частини з цілого/віднімання

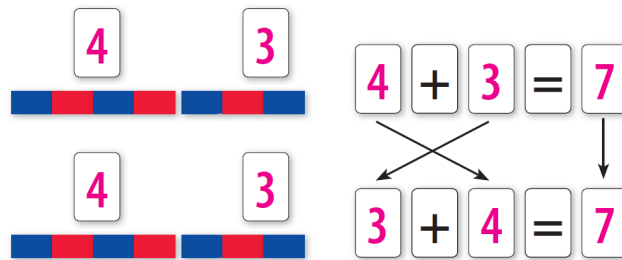


Рис. 11. Використання арифметичних штанг для пропедевтики переставного закону додавання

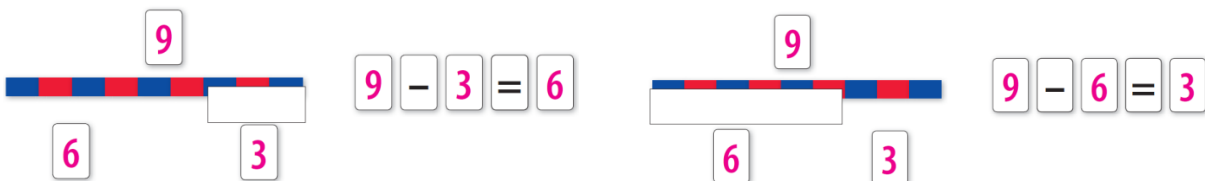


Рис. 12. Використання арифметичних штанг для пропедевтики взаємозв'язку арифметичних дій додавання та віднімання



Рис. 13. Використання арифметичних штанг для ілюстрації різницевого порівняння

Числа та кружечки. Цей матеріал також використовується при вивченні першої теми «Узагальнення і систематизація знань учнів, одержаних у передшкільний період». Цей матеріал являє собою набір з 10 карток із числами від одного до десяти і 55 кружків. Спочатку ми маємо викласти п'ять рядів по 10 кружків і один ряд 5 кружків. Очевидно що немає сенсу кожного разу відраховувати по 10 кружків, достатньо в верхньому рядку відлічити 10 кружків, а потім потреба у лічбі відсутня – достатньо скласти пари з верхнього і нижнього кружка, і так п'ять разів викласти по 10 кружків, і лише один ряд 5 кружків (рис. 14). Далі учні беруть або по одному, або по два кружки і підсовують їх до певної картки. Таким чином, під картку один підсуваємо 1 кружок, під картку два – двома пальцями два кружки, під картку три – 2 і 1, під картку чотири – 2 і 2, під картку п'ять – 2, 2 і 1 (рис. 15.).

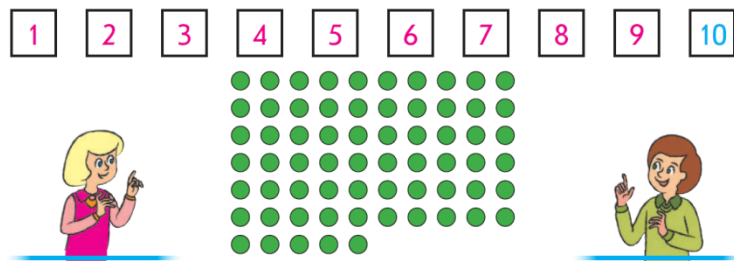


Рис. 14. «Числа та кружечки». Підготовка до роботи.

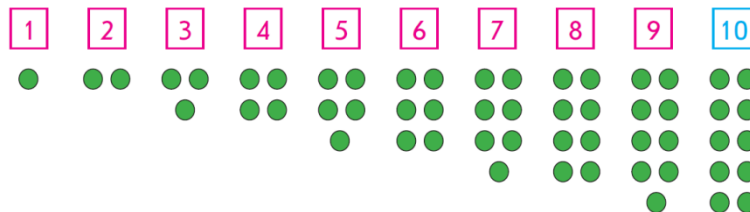


Рис. 15. «Числа та кружечки».

Засобом цього матеріалу в учнів формується поняття числа як кількості кружків, які учні мають підсунути під кожну картку з числом. У цьому матеріалі Марії Монтессорі передбачено контроль помилок, а саме: якщо учням не вистачає кружків, то вони допустилися помилки, або якщо у них залишаються зайві кружки, то вони так само допустилися помилки.

Таким чином, матеріал «Числа та кружечки» дозволяє формувати поняття числа, є пропедевтикою складу чисел першого десятку, унаочнює «числові фігури» або картки доміно. Зокрема, розглядаючи послідовність числових фігур, учні роблять висновок, що наступне число на один більше від попереднього. А також «Числа та кружечки» є гарною пропедевтикою парного і непарного числа. Але цей матеріал має вузьке застосування лише у зазначеній темі. Частина кружків, які мають різні кольори з кожного боку – з одного зелені, а з іншого жовті, використовується у подальшому вивченні теми «Числа 1–10» для дослідження складу числа; кружки можна або перегортати по одному, або пересувати по одному зліва направо (рис. 16).

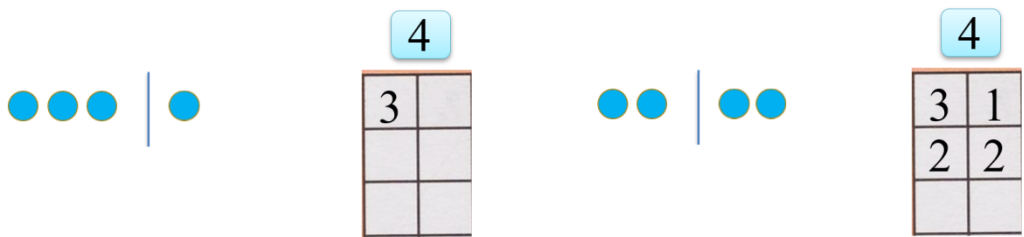


Рис. 16. Застосування кружків з набору «Числа та кружечки» для дослідження складу числа

Набір геометричних фігур. За допомогою цього матеріалу, учні досліджують ознаки предметів (форму, розмір, колір), спільні та відмінні ознаки, класифікацію (рис. 17). Також за допомогою цього матеріалу першокласники досліджують поняття числа і набувають розуміння числа як кількісної характеристики рівночисельних множин (рис. 18). Також цей матеріал використовується для порівняння предметних множин способом утворення пар (рис. 19), для демонстрації об'єднання частин у ціле та вилучення частини із цілого (рис. 20).

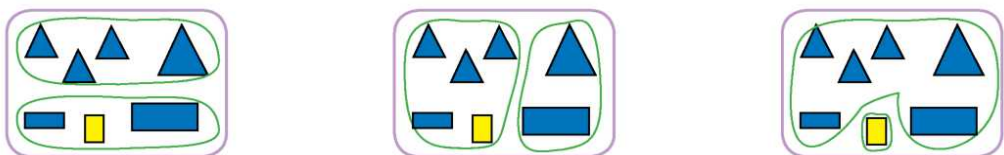


Рис. 17. Застосування набору геометричних фігур для дослідження ознак і розбиття цілого на частини за спільною ознакою

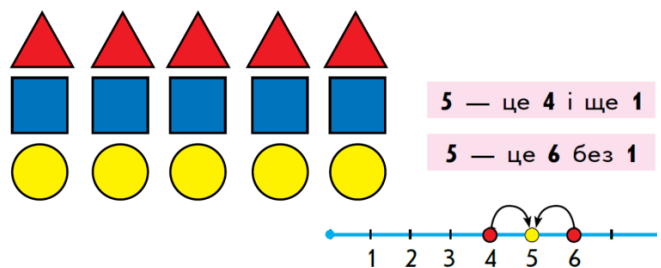


Рис. 18. Застосування набору геометричних фігур для формування поняття числа

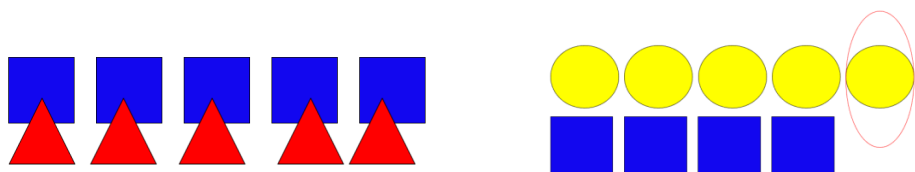


Рис. 19. Застосування набору геометричних фігур для порівняння предметних множин способом утворення пар

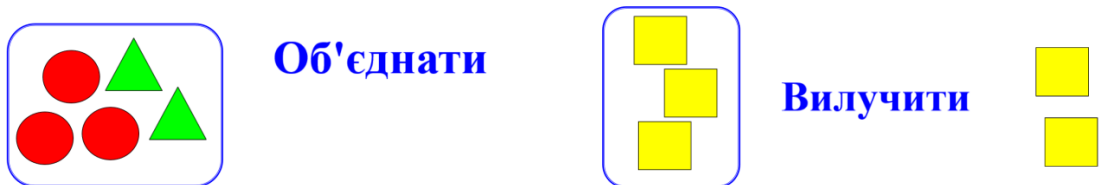


Рис. 20. Застосування набору геометричних фігур для демонстрації об'єднання частин в ціле та вилучення частини з цілого

Також набір геометричних фігур може бути використано для схематичної інтерпретації сюжету задачі (кодування) (рис. 21).

У дворі 5 дівчаток і 3 хлопчики. Прокоментуй схеми. Склади відповідний вираз.

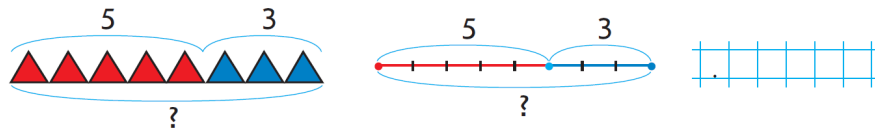


Рис. 21. Застосування набору геометричних фігур для схематичної інтерпретації сюжетної ситуації

Числові фігури або картки доміно. Використовується для співвіднесення кількості точок і числа (рис. 22), для дослідження складу числа (рис. 23), для об'єднання частин у ціле та вилучення частини із цілого, у тому числі, з метою пропедевтики переставного закону додавання та взаємозв'язку арифметичних дій додавання та віднімання (рис. 24).

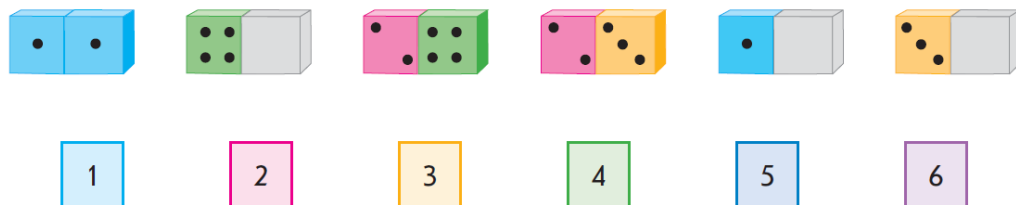


Рис. 22. Застосування карток доміно для дослідження співвіднесення кількості точок і числа

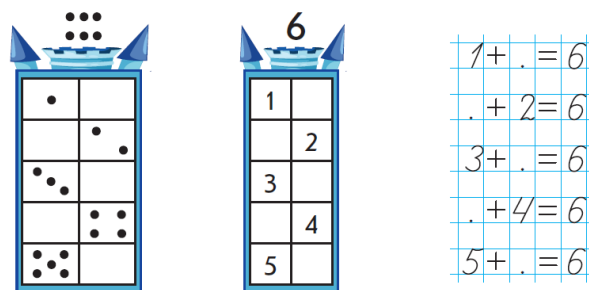


Рис. 23. Застосування карток доміно для дослідження складу числа

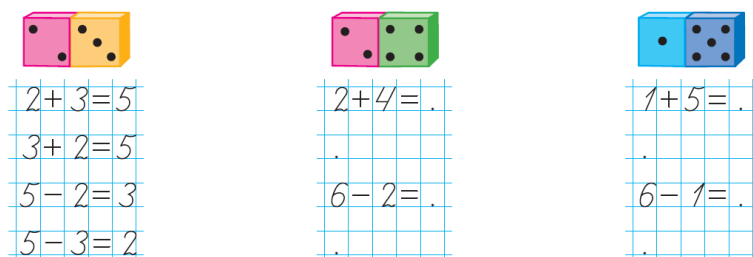


Рис. 24. Застосування карток доміно для дослідження об'єднання частин у ціле та вилучення частини з цілого

Нумерація чисел в концентрі «Сотня». Для організації навчальних досліджень використовуються наступні математичні матеріали: «Арифметичні штанги», «Золотий матеріал» – математичні матеріали Марії Монтессорі.

Арифметичні штанги використовуються при вивченні нумерації чисел другого десятку. За допомогою арифметичних штанг можна не лише продемонструвати утворення чисел другого десятку, а й пов'язати назви чисел другого десятку з характером виконуваної дії. Наприклад, на штангу 10 зверху покладемо штангу 3; поклали три на десять, а десять скорочено «дцять», одержали три-на-дцять. Аналогічну дію виконуємо із картками з числами – на картку з числом 10 накладаємо зверху картку з числом 3. Таким чином, за допомогою арифметичних штанг ілюструємо числа другого десятку, і пов'язуємо характер дії з їх назвами (рис. 25).

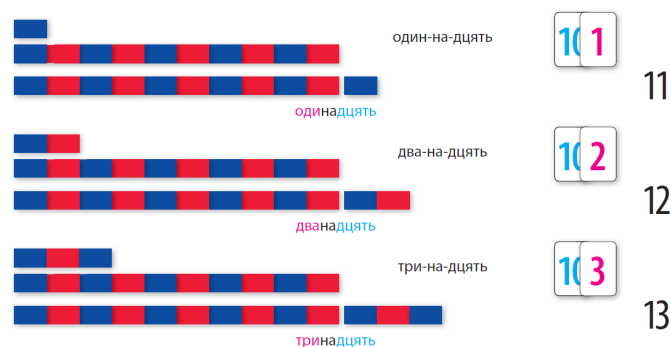


Рис. 25. Застосування «Арифметичних штанг» для ілюстрації утворення чисел другого десятку

Арифметичні штанги можуть бути засобом дослідження утворення чисел другого десятку з одного десятку та кількох одиниць та арифметичної дії додавання на підставі десяткового складу числа (рис. 26), віднімання на підставі десяткового складу числа (рис. 27).

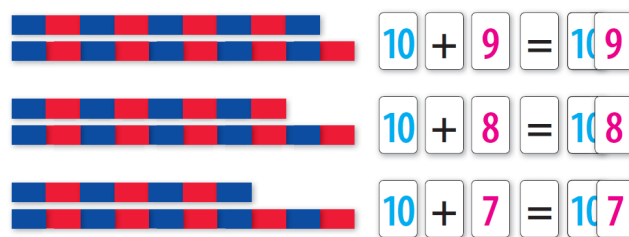


Рис. 26. Застосування «Арифметичних штанг» для ілюстрації додавання на підставі десяткового складу числа

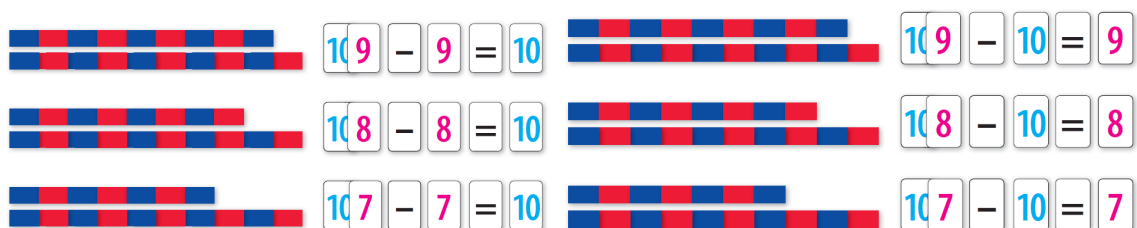


Рис. 27. Застосування «Арифметичних штанг» для ілюстрації віднімання на підставі десяткового складу числа

«Золотий матеріал». Для ілюстрації чисел як другого десятку, так і за межами другого десятку використовується «золотий матеріал» Марії Монтессорі, який являє собою набір золотих намистинок: окремі намистинки – одиниці, низка з 10 намистинок – десяток, площадка з 10-ти десятків – сотня. Якщо в освітньому процесі неможливо використати намистинки, їх можна замінити кружками жовтого кольору: окремі кружки ілюструють одиниці, низка з 10 кружків ілюструє десяток, площадка з 10-ти десятків – сотню. Також, як і у матеріалі «Арифметичні штанги» використовуються картки з розрядними числами – картки з одноцифровими числами від одного до дев'яти, картки з круглими десятками від 10 до 90, картка числом 100.

За допомогою «золотого матеріалу» Марії Монтессорі утворюємо нову лічильну одиницю – десяток: спочатку лічимо від одного до дев'яти; до 9 приєднуємо ще 1, і одержуємо 10; 10 окремих одиниць замінюємо одним десятком. На наступному етапі пропонуємо учням лічити десятками, вони впевнюються, що десятки лічать так само, як і числа в межах 10. Познайомившись із круглими числами, діти моделюють їх за допомогою низок десятків; учні порівнюють числа – круглі десятки, і впевнюються, що їх можна порівняти так само, як і прості одиниці (рис. 28). Далі, кружки-намистинки можна використати для ілюстрації додавання і віднімання чисел-десятків, а потім й додавання і віднімання круглих чисел.

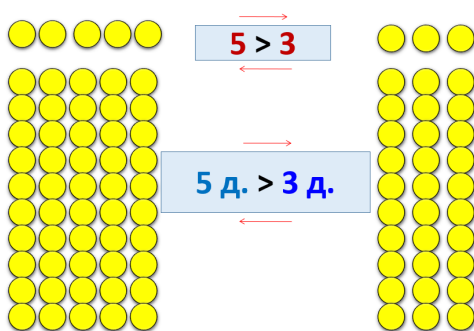


Рис. 28. Ілюстрація порівняння чисел-десятків за допомогою кружків-намистинок

За допомогою цього матеріалу учні моделюють числа. Наприклад, можна запропонувати учням такі завдання: поклади на парту 3 десятки – учні викладають три низки – десятки, позначте картою з числом, діти викладають картку з числом 30; приєднайте ще шість окремих одиниць, учні викладають 6 кружків, позначте картою з числом, учні накладають картку з числом 6 на картку з розрядними числом 30, картку з числом 6 кладуть на нуль й одержують число 36. Можна з'ясувати з учнями, що означає цифра 3 в запису числа 36 – цифра 3 означає, що в цьому числі три десятки, – що означає цифра 6 в запису числа 36 – вона означає, що в цьому числі 6 окремих одиниць (рис. 29). Учням можна запропонувати і оберненні вправи: позначити картками числа, наприклад число 42, а потім проілюструвати його кружками-намистинками.

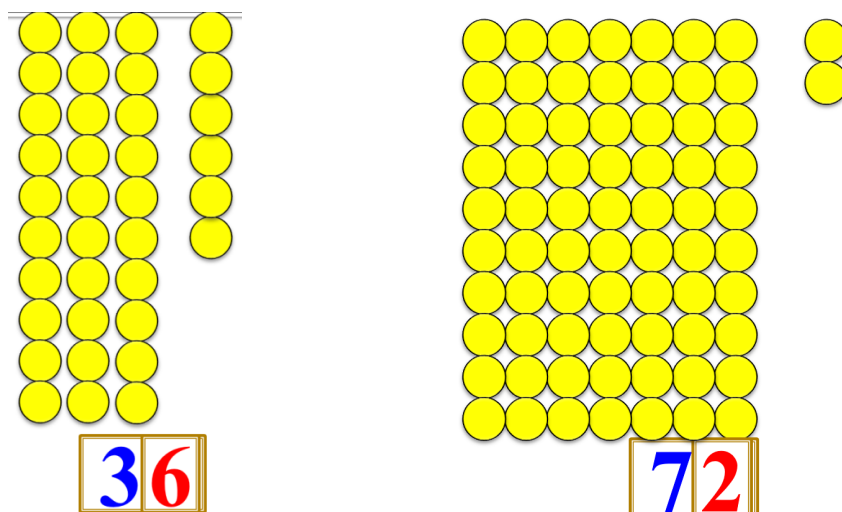


Рис. 29. Ілюстрація чисел за допомогою кружків-намистинок

Кружки-намистинки можна застосовувати для винаходу способу дії при додаванні та відніманні чисел на підставі десяткового складу числа. Пропонуємо учням покласти чотири десятки, позначити їх карткою з числом 40, і до чотирьох низок-десятків приєднати ще п'ять кружків-одиниць й покласти відповідну картку з числом, з'ясувати, яке число одержали. Це число 45, воно містить чотири десятки та п'ять одиниць. Як ми його утворили? Ми до чотирьох десятків, до сорока, приєднали 5 одиниць, 5. Таким чином ми виконали дію додавання: до сорока додати п'ять одержимо 45. Також кружки намистинки використовуємо для ілюстрації віднімання на підставі десяткового складу числа. Наприклад, пропонуємо учням проілюструвати число 52, позначити його картками, визначити його десятковий склад. Якою цифрою в запису числа позначаються десятки? Якою цифрою в запису числа позначаються одиниці? Пропонуємо показати низки-десятки та окремі одиниці. А тепер вилучаємо десятки. Що залишиться? Одиниці. Виконуємо запис: $52 - 50 = 2$. Або від числа 52, власне кажучи, від 5 низок-десятків та двох окремих кружків-одиниць, вилучаємо дві одиниці. Що залишиться? Залишиться 5 десятків, 50. Виконуємо запис: $52 - 2 = 50$.

Нумерація чисел в центрі «Тисяча». Для організації навчальних досліджень використовується «золотий матеріал» Марії Монтесорі або набір з 10 окремих кружків-одиниць, з 10 низок кружків-десятків та 10 площадок з 10 низок-десятків – сотень. Цей матеріал використовується аналогічно, описаному вище.

Лічимо кружки-одиниці від одного до дев'яти, приєднуємо ще одну одиницю й одержуємо 10 одиниць; 10 одиниць замінюємо низкою-десятком; лічимо десятками від одного до дев'яти, приєднуємо ще один десяток й одержуємо 10 десятків; 10 десятків замінюємо площадкою-сотнею. Таким чином, ми одержали нову лічильну одиницю – сотню, будемо лічити сотнями, так само як і простими одиницями. Лічимо сотнями: одна сотня, дві сотні і так далі. До 9 сотень приєднуємо ще одну сотню, одержуємо тисячу. Відтак, діти вправляються у лічбі сотень, позначаючи одержані числа сотень картками з розрядними числами (рис. 30).

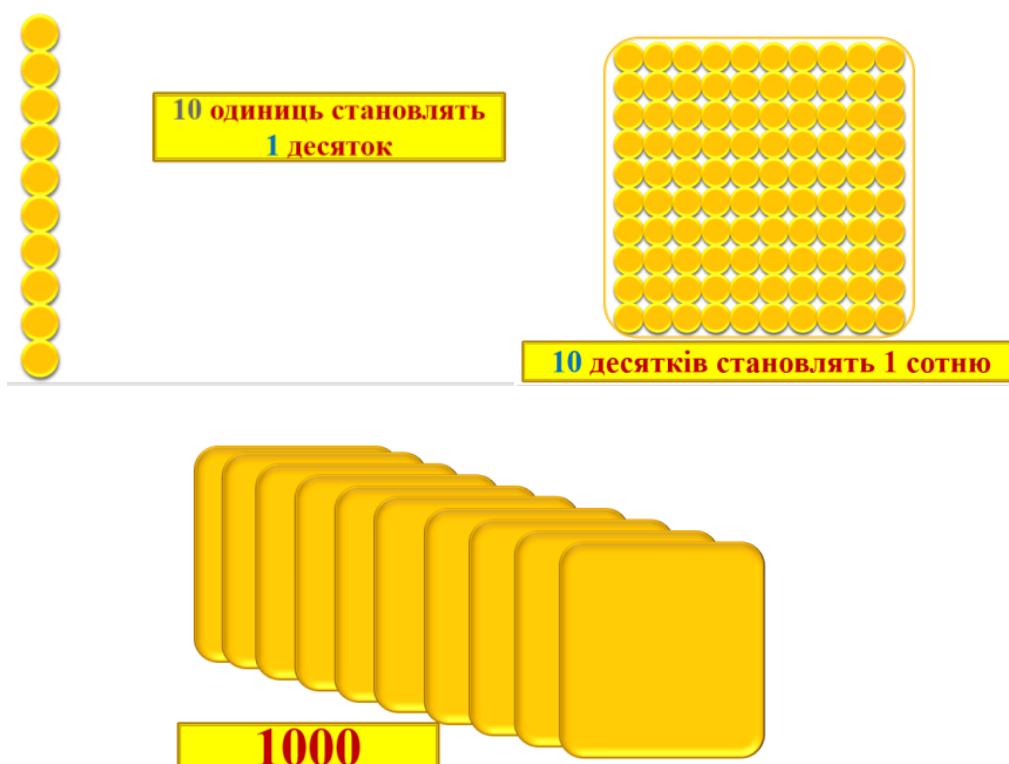


Рис. 30. Ілюстрація утворення лічильних одиниць за допомогою кружків-намистинок

Можна рухатися далі за тією самою логікою, як і в концентрі «Сотня», і перейти до порівняння чисел сотень, до додавання і віднімання чисел сотень. Таким чином, переносючи відомий спосіб дії додавання і віднімання круглих десятків, як простих одиниць, на додавання та віднімання круглих сотень.

На наступному етапі моделюємо числа у межах сотні. Доцільно пропонувати завдання на співставлення чисел до 100 і за межами сотні. Наприклад, проілюструйте кружками намистинками число 48, позначте його картками з числами. Що треба зробити, щоб позначити число 148? Достатнього доєднати ще одну сотню і покласти відповідну картку з числом 100. Пропонуємо і дітям інші завдання, як-то: покладіть одну площадку-сотню, вісім низок-десятків, та 4 окремі кружки-намистинки; позначте картками з числами. Яке число ми утворили? 184.

Далі ілюструємо числа, які містять кілька сотень: покладіть дві сотні, позначте карткою з числом; покладіть 3 низки-десятки, позначте картку з числом; покладіть 2 окремих кружка-одиниць, позначте карткою з числом. Яке число ми утворили? Доцільно використовувати й обернені вправи, позначаючи спочатку число картками з розрядними числами, а потім ілюструючи кружками-намистинками (рис. 31).

За потреби можна вдатися і до ілюстрації порівняння трицифрових чисел за допомогою кружків-намистинок, а також додавання і віднімання на підставі десяткового складу чисел у межах тисячі.

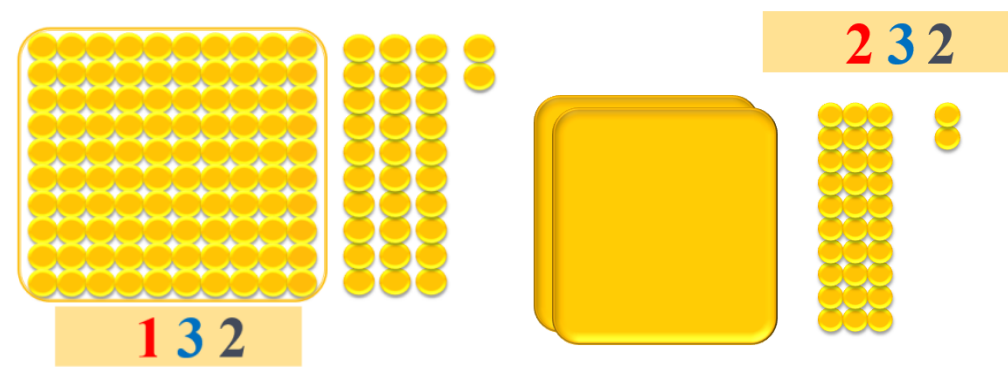


Рис. 31. Ілюстрація утворення чисел в межах 1000 за допомогою «золотого матеріалу»

Нумерація багатоцифрових чисел. Для організації навчальних досліджень використовується «золотий матеріал» Марії Монтессорі, або набір кружків-намистинок. Працюємо аналогічно. За допомогою кружків намистинок повторюємо утворення лічильних одиниць: полічивши від одного до десяти, одержуємо десяток; лічимо низками-десятками від одного до десяти й одержуємо сотню; лічимо площадками-сотнями, від однієї сотні до 10-ти й одержуємо кубик-тисячу. Приходимо до висновку, що тисячі можна лічити так само, як і прості одиниці. Лічимо кубики-тисячі до десяти тисяч; десяток тисяч замінюємо бруском із 10 кубиків-тисяч; лічимо брусками-десятками тисяч, 10 десятків тисяч замінюємо площадкою із 10 брусків-десятків тисяч – сотнею тисяч; лічимо площадками-сотнями тисяч, одержуємо кубик, який складається з десяти сотень тисяч – з 10 площадок-сотень тисяч й одержуємо великий куб – мільйон. Звичайно, краще використовувати «золотий матеріал» Марії Монтессорі, оскільки він містить об'ємні фігури, або замінювати лічильні одиниці – тисячі, десятки тисяч, сотні тисяч – малюнками (рис. 32).

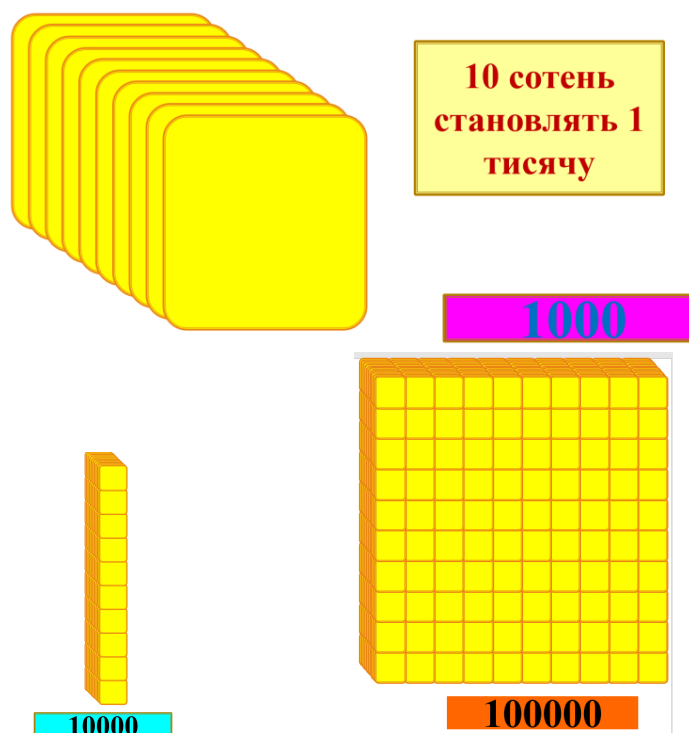


Рис. 32. Ілюстрація утворення лічильних одиниць за допомогою кружків-намистинок

Додавання та віднімання чисел в концентрі «Десяток». Для організації навчальних досліджень використовуються наступні математичні матеріали: «Арифметичні штанги», набір геометричних фігур.

Арифметичні штанги. Зазначимо, що на етапі підготовчої роботи до введення арифметичних дій додавання і віднімання саме на арифметичних штангах учні ілюстрували об'єднання частин ціле і вилучення частини з цілого. Таким чином, арифметичні дії додавання і віднімання, після їх введення, також ілюструються за допомогою арифметичних штанг. Наприклад, пропонуємо учням взяти штангу 4, взяти штангу 2, позначити їх картками з числами; до штанги 4 приєднати штангу 2 і показати штангу яку одержали; скласти відповідну рівність. Таким чином формуємо в учнів розуміння суті арифметичної дії додавання як об'єднання частин у ціле. При відніманні також використовуємо ілюстрацію на арифметичних штангах. Наприклад, пропонуємо учням обрати штангу 7, обрати штангу 3, позначити їх картками з числами; вилучити від семи три – учні підкладають знизу або справа або зліва від штанги 7 штангу 3; прикриваючи або долоню, або аркушем паперу частину штанги 7, яка відповідає штанзі 3, показують частину штанги 7, яка залишилася; складаємо відповідну рівність (рис. 10).

Крім того, оскільки арифметична штанга 10 є ілюстрацією числового відрізка (рис. 8), то дітям, яким потрібне діяння з реальними речами при додаванні і відніманні за числовим променем, можна використовувати арифметичну штангу 10. Беремо штангу 10, відлічуємо від початку потрібну кількість смужок, яка відповідає або першому доданку, або зменшуваному, фіксуємо одержане число; далі рухаємось по штанзі або вправо при додаванні, або вліво при відніманні, на потрібну кількість смужок, яка відповідає або другому доданку, або від'ємнику, фіксуємо одержане число і називаємо відповідь.

Арифметичні штанги можна використовувати і при ознайомленні учнів зі способами діяльності при додаванні та відніманні чисел у межах десяти. Наприклад, прийом додавання і віднімання числа 1 можна проілюструвати за допомогою штанги 10. Дії учнів аналогічні до дій з додавання і віднімання за числовим променем. Учні відраховують від початку штанги потрібну кількість смужок, фіксують число: додаючи один, рухаються вправо по штанзі на одну смужку й фіксують число; віднімаючи один, рухаються вліво по штанзі й відраховують одну смужку й фіксують відповідно число. Таким чином, арифметична штанга 10 може бути використана для ілюстрації додавання та віднімання числа 1 на підставі слідування чисел у натуральному ряді.

При введенні прийомів додавання і віднімання чисел 2, 3, 4, 5 частинами, ми також можемо використовувати арифметичні штанги, ілюструючи на штанзі 10 виконання дій частинами. Наприклад, до числа 7 додати 2: на штанзі 10 від початку відлічуємо 7 смужок і фіксуємо число; два – це 1 і ще 1, тому робимо від зафіксованого числа два кроки вправо і фіксуємо одержане число. Аналогічно діємо при відніманні числа 2, з тією відмінністю, що два одиничні кроки робимо вліво по арифметичній штанзі 10. Інші числа додаємо і віднімаємо частинами на підставі їх складу. Наприклад, додавати та віднімати число 3 будемо двома способами, оскільки у складі числа 3 є два варіанти 1 та 2 або 2 та 1, тому по штанзі десять спочатку робимо 1 крок, довжиною в дві смужки, а потім ще один крок, довжиною в одну смужку, або навпаки, – спочатку робимо крок, довжиною в одну смужку, а потім крок, довжиною в дві смужки. Водночас, треба розуміти, що таке унаочнення не потрібно дітям, які вже мають ознаки розвитку словесно-логічного мислення або в них гарно розвинене наочно-

образне мислення; таке унаочнення доцільно для дітей, в яких поки що провідним є наочно-дійове мислення.

Для дітей з провідним типом мислення – наочно-дієвим – доцільно унаочнювати прийом додавання чисел 6, 7, 8, 9 в межах десяти на підставі переставного закону додавання; прийом віднімання чисел 6, 7, 8, 9 на підставі взаємозв'язку арифметичних дій додавання і віднімання. Але у будь-якому разі, навіть, якщо на перших етапах засвоєння прийому дитина використовує арифметичні штанги для унаочнення, і таким чином, виконує дію в матеріальній формі, на наступному кроці треба переводити дії дитини на етап матеріалізованої дії, коли вона буде орієнтуватися на операційний зміст діяльності, допомогою тут мають бути всілякі схеми розв'язування.

Набір геометричних фігур. При веденні прийомів обчислення в межах 10 можна широко застосовувати не лише додавання або віднімання з використанням арифметичних штанг, а й набір геометричних фігур. Наприклад, розглянемо прийом додавання та віднімання частинами числа 4. Пропонуємо учням покласти ліворуч на парті 6 червоних кругів, а праворуч 4 жовті круги; треба до шести додати чотири. Розглянемо різні способи дії. Учні пропонують присунути 4 кружки до шести – до шести додати 4; 6 і 4 складають число 10, то у результаті буде 10. Можна до 6 кружків приєднувати 4 кружки по одному, але це довго і незручно. Можна діяти інакше – пригадуємо склад числа 4: 4 це 1 та 3, тому можна спочатку до шести кружків приєднати 1 кружок, одержимо 5, а потім ще приєднати 3, одержимо 10. Можемо використати інший випадок зі складу числа 4; 4 – це 2 та 2, тому до шести приєднуємо спочатку 2 і одержуємо 8, і до восьми ще приєднуємо 2, одержуємо 10. Але ж, склад числа 4 містить ще й інший випадок: 4 – це 3 та 1, тому можна до шести приєднати спочатку 3, буде 9, і до 9 приєднати ще один одержуємо 10. Таким чином, у трьох останніх випадках ми число чотири додавали не відразу, а частинами на підставі складу числа. Аналогічно діємо з відніманням числа 4 частинами. Очевидно, що дії з геометричними фігурами можуть бути застосовані на етапі відкриття способу дії, зокрема додавання чи віднімання чисел частинами.

Аналогічно, як і з арифметичними штангами, для дітей, у яких провідним видом мислення є наочно-дійове мислення, можна використовувати набір геометричних фігур для ілюстрації прийому додавання чисел другої п'ятірки на підставі переставного закону додавання, віднімання чисел другої п'ятірки на підставі взаємозв'язку арифметичних дій додавання та віднімання.

Додавання та віднімання чисел в концентрі «Сотня» без переходу через розряд. Для організації навчальних досліджень використовуються наступні математичні матеріали: «золотий матеріал» М. Монтессорі або кружки-намистинки.

У першому класі розглядаються випадки додавання і віднімання чисел в межах 100 без переходу через розряд. Спочатку розглядаються часткові випадки, коли до двоцифрового числа додаємо одноцифрове число, або від двоцифрового числа віднімаємо одноцифрове число. Наприклад, розглянемо випадок додавання – до 12 будемо додавати 3. Пропонуємо учням на парті ліворуч проілюструвати кружками-намистинками число 12; учні викладають на парті одну низку-десяток і дві окремі кружки-намистинки-одиниці, справа викладають три окремі кружки-намистинки-одиниці; приєднують три окремі кружки, що ілюструють одиниці до одиниць першого доданка, одержуємо 1 десяток і 5 окремих одиниць – 1 десяток і 5 одиниць становить число 15 (рис. 33). Аналізуємо, як можна діяти, щоб до двоцифрового числа додати одноцифрове. Очевидно, що одиниці слід додати до одиниць, тому перший доданок – двоцифрове число – слід представити у вигляді суми розрядних доданків – 10 та 2; до суми 10

та 2 додаватимемо 3 одиниці; додаємо одиниці до одиниць, і до 10 додаємо одержаний результат: $10 + 5 = 15$.

Розглянемо віднімання: від 15 віднімемо 3. Пропонуємо учням проілюструвати кружками-намистинками число 15. Учні викладають на парту одну низку-десяток і 5 окремих кружків, які ілюструють одиниці. Треба від 15 відняти три одиниці. Очевидно, що одиниці будемо віднімати від одиниць. Тому зменшуване – двоцифрове число – слід представити у вигляді суми розрядних доданків: $10 + 5$. Віднімаємо від п'яти одиниць три одиниці, залишаються 2 кружки-намистинки-одиниці; маємо один десяток і дві одиниці – це число 12 (рис. 33). Аналізуємо власну діяльність: зменшуване 15 представили у вигляді суми розрядних доданків – десятків та одиниць; відняли від п'яти одиниць 3 одиниці й одержуємо 2 одиниці, і до десяти додали одержаний результат: $10 + 2 = 12$

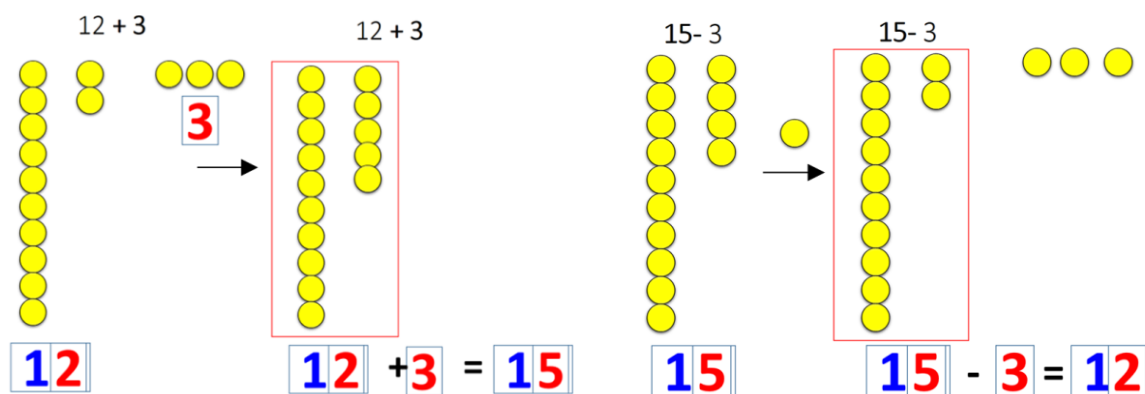


Рис. 33. Використання кружків-намистинок для відкриття учнями способу додавання та віднімання одноцифрового числа до/від двоцифрового

Так само можна організувати навчальне дослідження учнів із метою відкриття способу дії при додаванні круглих десятків до двоцифрового числа без переходу через розряд, віднімання круглих десятків від двоцифрового числа без переходу через розряд (рис. 34); способу дії при додаванні та віднімання двоцифрових чисел без переходу через розряд у випадку порозрядного додавання або віднімання (рис. 35). Більш докладно про організацію навчальних досліджень із відкриття учнями способів міркування при обчисленнях у роботах автора [3; 6].

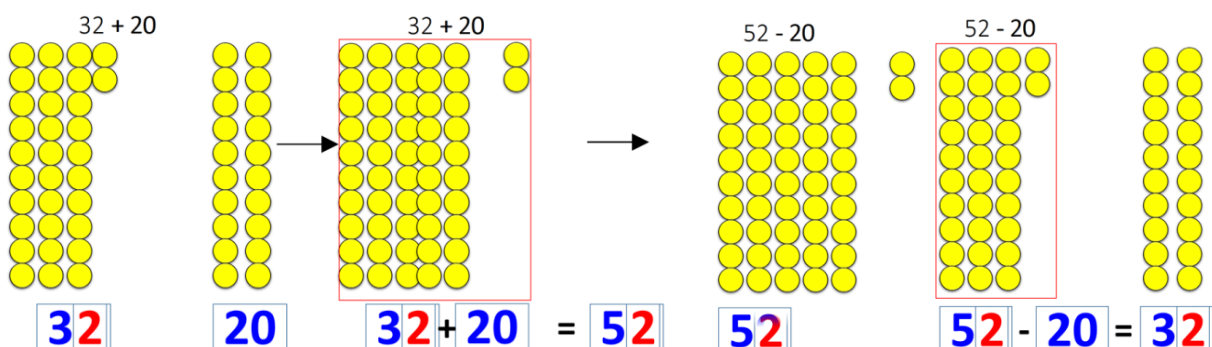


Рис. 34. Використання кружків-намистинок для відкриття учнями способу додавання та віднімання круглих десятків до/від двоцифрового

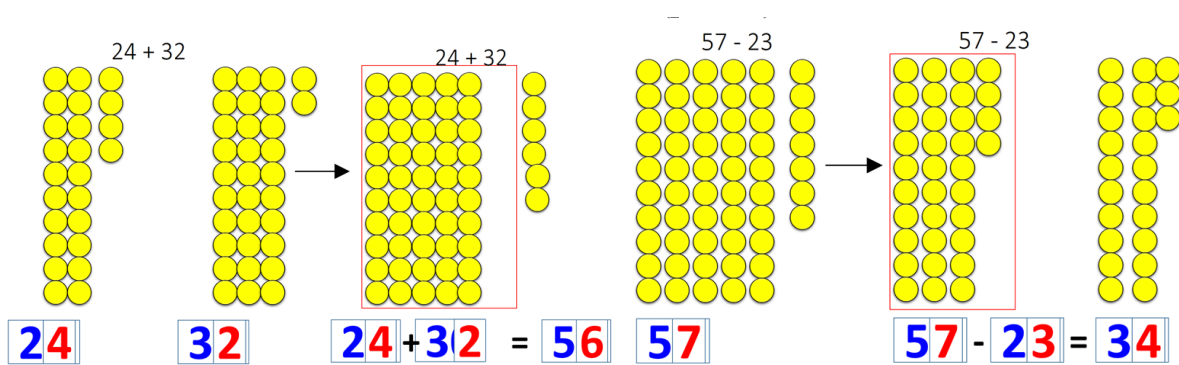


Рис. 35. Використання кружків-намистинок для відкриття учнями способу додавання та віднімання двоцифрових чисел (прийом порозрядного додавання та віднімання)

Кружки-намистинки також можна використовувати для організації навчальних досліджень учнів із метою відкриття способів міркування при додаванні та відніманні з переходом через розряд у межах 20. Приклад організації навчального дослідження при вивченні прийому додавання і віднімання частинами можна розглянути, перейшовши за QR кодом (рис. 36). Пояснення щодо організації навчального дослідження із ознайомлення учнів з прийомом округлення у межах 20, представлено за QR кодом (рис. 37).

Розгляд окремих випадків додавання та віднімання з переходом через розряд: додавання/віднімання одноцифрового числа до/від двоцифрового, додавання та віднімання двоцифрових чисел з переходом через розряд в межах 100 з використанням різноманітних прийомів представлено за QR кодом (рис. 38).



Рис. 36. Ілюстрація кружками-намистинками додавання та віднімання частинами в межах 20



Рис. 37. Ілюстрація кружками-намистинками додавання та віднімання з використанням прийому округлення в межах 20



Рис. 38. Ілюстрація кружками-намистинками прийомів додавання та віднімання в межах 100 з переходом через розряд

Відеозаписи майстер-класу та тренінгу для вчителів, який було проведено в рамках експериментальної роботи можна передивитися за QR кодами. На рис. 39 подано відеозапис майстер-класу та тренінгу за темою «Організація навчальних досліджень учнів початкової школи при вивченні нумерації чисел», а на рис. 40 – відеозапис майстер-класу та тренінгу за темою «Організація навчальних досліджень учнів початкової школи при вивченні прийомів додавання та віднімання».



Рис. 39. Відеозапис майстер-класу і тренінгу за темою «Організація навчальних досліджень учнів початкової школи при вивченні нумерації чисел»



Рис. 40. Відеозапис майстер-класу і тренінгу за темою «Організація навчальних досліджень учнів початкової школи при вивченні прийомів додавання та віднімання»

Висновки. З метою організації навчання математики учнів Нової української школи, яке спрямоване на врахування особливостей дітей молодшого шкільного віку, в нашому дослідженні вивчено нейрофізіологічні особливості функціонального розвитку мозку дитини. Нами з'ясовано відповідність ділянок мозку перебігу пізнавальних процесів: сприймання, уваги, пам'яті, мислення. Виходячи із вікових особливостей молодших школярів визначено підходи до навчання математики, які компенсують недоліки у розвитку перебігу пізнавальних процесів і враховують рівень їх розвитку відповідно до вікової норми.

Враховуючи особливості сприймання учнів 6–10 років, із метою його полегшення, встановлено потребу в унаочненні навчальної інформації, що можливо засобом або матеріальної наочності або наочності, створеної на засадах інформаційно-комунікаційних технологій. Матеріальна наочність може бути роздатковою або демонстраційною. Саме з використанням матеріальної наочності доцільно організувати навчальні дослідження учнів із метою навчального відкриття способу дії на уроках математики.

Унаочнення навчального матеріалу забезпечує врахування особливостей уваги учнів молодшого шкільного віку, а саме рівень розвитку мимовільної уваги. Таким чином, навчання математики слід здійснювати з використанням яскравої, динамічної наочності. Водночас, слабкість довільної уваги потребує дотримання умов, які полегшують сприймання навчальної інформації, а також передбачити чіткі інструкції та поопераційний контроль із боку вчителя.

Навчання математики передбачає певний рівень розвитку словесно-логічного мислення. Водночас, провідним видом мислення молодшого школяра є наочно-образне мислення; словесно-логічне мислення лише починає розвиватися в молодшому шкільному віці. Але, враховуючи той факт, що розбіг індивідуальних особливостей учнів може сягати двох років, у початковій школі можуть навчатися діти, в яких навіть наочно-образне мислення ще не є

провідним (провідним в них є наочно-дійове мислення). І це ще раз підкреслює необхідність унаочнення навчальної інформації, організації діяльності з роздатковим матеріалом.

Для врахування вікових особливостей мислення учнів 1–4-х класів у навчанні математики слід: по-перше, дотримуватися закономірностей формування розумових дій Л. Фрідмана, і здійснювати навчання відповідно до етапів формування розумових дій П. Гальперіна. Зазначимо, одним з перших етапів, на якому створюється мотивація і формулюється орієнтувальна основа дії, є етап попереднього ознайомлення учнів із дією. На цьому етапі учні під керівництвом вчителя відкривають спосіб міркування при виконанні певної математичної дії. Враховуючи особливості сприймання, уваги, мислення молодшого школяра, існує потреба в організації навчання математики з використанням наочності; навчальне відкриття доцільно організовувати з використанням роздаткового матеріалу – математичних матеріалів. На наступному етапі, для засвоєння вже відкритої учнями орієнтувальної основи дії, учні виконують дію у матеріальній або матеріалізованій формі. Звичайно, що в 1-му класі більше уваги приділяємо саме виконанню дії в матеріальній формі, і лише потім переходимо до матеріалізованої форми виконання дії. Очевидно, що згодом потреба у матеріалізації дій дещо зменшується, але враховуючи індивідуальні відмінності учнів, у яких ще недостатньо розвинено словесно-логічне мислення, слід для них передбачити можливість виконання дії у матеріальній формі.

Відомо, що матеріал, зрозумілий учням і який вони усвідомили запам'ятовується краще і на довше зберігається в пам'яті. Робота з роздатковими (математичними) матеріалами полегшує учням розуміння й усвідомлення абстрактного математичного змісту. Водночас, навчальні дослідження з використанням математичних матеріалів активізують механізми запам'ятовування, включаючи дієво-образу пам'ять, і дитина відтворює дії за уявленням, малюючи в думці образи виконання дій з речами або предметами, математичними матеріалами.

Потреба у використанні математичних матеріалів актуалізується ще й з огляду на те, що у початковій школі навчаються учні – представники цифрового покоління; діти, які одночасно перебувають у двох світах: фізичному (реальному) й у віртуальному. Як свідчать дослідження психологів, у дітей цього покоління погіршилася здатність діяти з тривимірними предметами, що ще раз підкреслює необхідність організації навчальних досліджень на уроках математики з математичними матеріалами.

Дослідження із застосування математичних матеріалів для організації навчальних досліджень учнів першого класу була нами здійснена на попередньому етапі роботи. На даному етапі експериментальної роботи нами вивчено можливості розширення розроблених підходів на навчання учнів математики у другому, третьому і четвертому класах. Експериментальна робота відбувалася у рамках співпраці кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» і Одеського приватного навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»» щодо виконання науково-дослідної роботи «Дослідження науково-методичних засад формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти».

Нами було проведено майстер-класи і тренінги з вчителями початкової школи із організації навчальних досліджень учнів на уроках математики з метою відкриття ними способів математичної діяльності. Засобом навчального відкриття є математичні матеріали.

Проведено два модулі: перший модуль стосувалося організації навчальних досліджень на уроках математики при вивченні нумерації чисел у концентрі «Десяток», «Сотня», «Тисяча», «Мільйон». Нами було виокремлено комплекс математичних матеріалів, певну частину з яких становлять математичні матеріали Марії Монтессорі – це «Арифметичні штанги», «Числа та кружечки», «Золотий матеріал», а також набір геометричних фігур. Ми дослідили можливості використання певних матеріалів при вивченні окремих елементів змісту, визначених Типовими освітніми програмами Нової української школи, і запропонували методику роботи з ними. Таким чином, для кожного концентру визначено комплекс математичних матеріалів і наведено зразки роботи з цими математичними матеріалами.

Другий модуль стосувався організації навчальних досліджень учнів на уроках математики з вивчення арифметичних дій додавання та віднімання в кожному із зазначених концентрів. Ми розглянули ситуації організації навчальних досліджень з відкриття способів додавання одноцифрового числа до двоцифрового, віднімання одноцифрового числа від двоцифрового, без переходу через розряд. Організували навчальне дослідження і відкриття способу додавання та віднімання двоцифрових чисел без переходу через розряд, розглянули окремі випадки додавання і віднімання в межах 100 з переходом через розряд за умов застосування різних прийомів обчислення. Також ми розглянули можливості організації навчальних досліджень при перенесенні відомих способів дії на випадки додавання та віднімання круглих чисел в межах 1000 та багатоцифрових чисел.

У практичній частині, під час тренінгів учителі розробляли систему навчальних завдань для організації навчальних досліджень для певного випадку обчислення і відкриття способу міркування.

Проведене дослідження не вичерпує всієї глибини проблеми. Перспективи подальших досліджень ми бачимо у доопрацюванні методики використання математичних матеріалів для організації навчальних досліджень на уроках математики і можливостей їх застосування при вивченні інших тем курсу математики початкової школи.

Список використаних джерел

1. Безруких М. М. Дошкольник. Мифы и реалии развития. *Вестник практической психологии образования*. № 4 (29). 2011. С. 16–20.
2. Безруких М. М., Сонькин В. Д., Фарбер Д. А. Возрастная физиология: (Физиология развития ребенка): учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. Москва : Издательский центр «Академия», 2003. 416 с.
3. Коваль Л. В., Скворцова С. О. Методика навчання математики: теорія і практика: Підручник для студентів за спеціальністю 6.010100 „Початкове навчання”, освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” [2-ге вид., допов. і переробл.]. Харків : ЧП «Принт-Лідер», 2011. 414 с.
4. Романишин Р. Я. Теоретико-методичні засади формування обчислювальних навичок в учнів початкової школи : монографія. Івано-Франківськ : ТзОВ «ВГЦ «Просвіта», 2020. 324 с.
5. Семенович А. В. Нейропсихологическая диагностика и коррекция в детском возрасте. Москва : АCADEMA, 2002. 159 с.
6. Скворцова С. О. «Золотий матеріал» Марії Монтесорі як засіб формування обчислювальних навичок учнів НУШ. *«Монтессорі-педагогіка: історія, теорія,*

- перспективи розвитку» (до 150-річчя від дня народження М. Монтессорі)»: матеріали Всеукр. (з міжнародною участю) наук.-практ. конф.(29 жовтня 2020 року м. Херсон) / за ред. І. Я. Жорової, Т. В. Комінарець, Т. Г. Чикалової. У II ч. Ч. І. Херсон : КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти», 2020. С. 297–301.
7. Скворцова С. О. Врахування вікових особливостей когнітивних процесів молодших школярів у навчанні математики. *Науковий вісник Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського*. Педагогічні науки : зб. наук. пр. / за ред. проф. Тетяни Степанової. № 2 (57), травень 2017. Миколаїв : МНУ імені В. О. Сухомлинського, 2017. С. 341–349.
 8. Скворцова С. О. Навчання математики з точки зору вікових особливостей когнітивних процесів молодших школярів. *Науковий вісник Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського*. Педагогічні науки : зб. наук. пр. / за ред. проф. Тетяни Степанової. № 2 (57), травень 2017. Миколаїв : МНУ імені В. О. Сухомлинського, 2017. С. 423–431.
 9. Скворцова С. О., Онопрієнко О. В. Нова українська школа: методика навчання математики у 1-2 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів : навч.-метод. посіб. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 352 с.
 10. Скворцова С. О., Онопрієнко О. В. Нова українська школа: методика навчання математики у 3-4 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів : навч.-метод. посіб. Харків: Вид-во «Ранок», 2020. 320 с.
 11. Скворцова С. О., Онопрієнко О. В., Бріцкан Т. Г. Навчання математики в початковій школі з урахуванням особливостей дітей цифрового покоління. *Проблеми сучасного підручника* : зб. наук. праць / ред. кол.; голов. ред. О. М. Топузов. Київ : Педагогічна думка, 2020. Вип. 25. С. 160–181.
 12. Талызина Н. Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников. Москва : Просвещение, 1988. 175 с.
 13. Фарбер Д. А. Младший школьник: развитие мозга и познавательная деятельность. Москва : Вентана-Графф, 2003. 32 с.
 14. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. Москва : Просвещение, 1983. 160 с.
 15. Черниговская Т. В. Как научить мозг учиться. <https://deti.mail.ru/teenager/7-mudryh-sovetov-kotorye-pomogut-vam-nauchit-reben/>
 16. Skvortsova S., Onopriienko O., Britskan T. Викладання математики з урахуванням особливостей дітей цифрового покоління. *Reflection of current abilities and needs of younger school age children*. 24 scientific conference with international participation Elementary Mathematics Education Comenius University in Bratislava. Братислава, 2019. С. 105–107.

1.3. НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ ПОЧАТКОВОЇ ШКОЛИ ЗА АЛЬТЕРНАТИВНИМИ ПРОГРАМАМИ

Тетяна Марахова, Євеліна Демченко

Вступ. З першого вересня 2018 року разом із навчанням за Типовими освітніми програмами Нової української школи школярі України можуть навчатися за програмою, яка не є типовою, а є авторською або експериментальною. До таких програм належать освітня програма для початкової школи за педагогічною технологією «Росток», освітня програма за системою розвивального навчання, освітня програма початкової освіти у науково-педагогічному комплексі «Інтелект України», освітня програма початкової освіти за Вальдорфською педагогікою, освітня програма «Початкова школа: освіта для життя», освітня програма «На крилах успіху», освітня програма початкової освіти «Світ, в якому я живу», освітня інтегровано-корекційна оздоровча програма «Гармонія інтелекту та здоров'я». (<https://mon.gov.ua/ua/news/osvitni-programi-intelekt-ukrayini-rostok-ta-inshi-avtorski-mozhut-projti-ekspertizu-na-vidpovidnist-novomu-derzhstandartu-shob-prodovzhiti-pracuyuvati-dlya-pershoklasnikiv>). Ці програми одержали позитивний експертний висновок Державної служби якості освіти щодо відповідності новому Державному стандарту початкової освіти.

Зазначені освітні програми для 1-4 класів розроблено відповідно до Закону України «Про освіту», затвердженого Верховною Радою України 5 вересня 2017 року, Державного стандарту початкової освіти та в контексті основних положень Концепції Нової української школи. Отже, з вересня 2018 року учні 1-го класу Одеського приватного навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»» навчаються за альтернативними освітніми програмами початкової освіти – за науково-педагогічним комплектом «Інтелект України»; за освітньою програмою за системою розвивального навчання школа працює з 2002 року.

Метою дослідження є презентація досвіду роботи вчителів початкової школи Одеського приватного навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»» за програмою розвивального навчання і програмою «Інтелект України».

Навчання математики за освітньою програмою розвивального навчання (РН)

Метою початкової освіти, яка реалізує Концепцію НУШ є всебічний розвиток дитини, її талантів, здібностей, компетентностей та наскрізних умінь відповідно до вікових та індивідуальних психофізіологічних особливостей і потреб, формування цінностей, розвиток самостійності, творчості та допитливості.

Метою системи розвивального навчання є виховання особистості як суб'єкта життєдіяльності. Досягнення зазначених цілей передбачає дотримання таких загальних принципів розвивального навчання (РН):

- ✓ принцип керування розвитком – організовуючи навчання дітей особливим чином, можна закономірно керувати темпами й змістом їхнього розвитку, надаючи дітям універсальної можливості оволодівати інтелектуальним досвідом і творчим потенціалом людства;
- ✓ принцип «сходження від абстрактного до конкретного» – введення учнів у певну предметну галузь починається з виділення загального принципу її побудови, що, у свою чергу, дає змогу дитині розуміти напрямок та сенс руху;

✓ принцип дослідження й пошуку – знання не даються учням у готовому вигляді, істотні властивості досліджуваного предмета вони визначають у процесі розв’язання навчальних задач;

✓ пошук способу розв’язування незнайомої задачі є мотиваційним ядром навчальної діяльності, основою бажання й уміння вчитися;

✓ принцип постановки навчальної задачі – необхідність пошуку способу розв’язування нової задачі мотивована для учнів внутрішньою логікою змісту навчального предмета; кожне наступне поняття не виникає для дітей випадково, воно з необхідністю впливає з попереднього;

✓ принцип моделювання – загальний спосіб діти шукають у предметно-практичній діяльності, центральною навчальною дією якої є моделювання, оскільки саме через модель виявляються загальні способи розв’язання класів задач;

✓ принцип відповідності змісту і форми – зміст навчальних предметів РН, поданий через систему навчальних задач, вимагає для їх розв’язання діалогово-дискусійних форм організації навчання, особливих колективно-розподілених форм спільної діяльності вчителя і класу.

Зміст програми РН має потенціал для формування в учнів таких ключових компетентностей, як-от:

- вільне володіння державною мовою; здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) мовою;
- математична, інформаційно-комунікаційна компетентності;
- компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій; екологічна;
- навчання впродовж життя; культурна, громадянські та соціальні компетентності; підприємливість та фінансова грамотність; інноваційність.

Відповідно до Концепції НУШ школа забезпечує формування таких наскрізних умінь, як: читання з розумінням, уміння висловлювати власну думку усно і письмово, критичне та системне мислення, здатність логічно обґрунтовувати позицію, творчість, ініціативність, вміння конструктивно керувати емоціями, оцінювати ризики, приймати рішення, розв’язувати проблеми, здатність співпрацювати з іншими людьми.

До дитини, яка розпочинає навчання у початковій школі висуваються вимоги, окреслені в Типових освітніх програмах Нової української школи, – це досягнення певного віку і певного рівня фізичної, соціальної, емоційно-ціннісної, пізнавальної, мовленнєвої, творчої готовності до систематичного навчання. Освітня програма розвивального навчання, за якою працює частина вчителів початкової школи Одеського приватного навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»» передбачає обов’язковий складник – адаптаційний курс «Вступ до шкільного життя» (два перші тижні навчання в 1-му класі). Цей курс повною мірою реалізує настанови Концепції НУШ щодо адаптаційно-ігрового циклу початкової освіти (1–2-й класи).

Мета курсу «Вступ до шкільного життя» є оптимізація перехідного періоду від дошкільного дитинства до навчання у початковій школі; створення у дитини уявлення про школу як про місце, де дитина буде прийнята, де важливі її почуття, думки, знання, проблеми, події життя. Змістом зазначеного курсу є знайомство дитини з однокласниками й учителем, створення правил навчальної співпраці та правил поведінки у позаурочний час у школі, орієнтація у шкільному просторі, формування уявлень про організацію шкільного часу (орієнтовне планування курсу подано у додатку до програми РН). Розподіл навчальних годин

за темами, розділами, вибір форм і методів навчання вчитель визначає самостійно, враховуючи конкретні умови роботи, забезпечуючи водночас досягнення конкретних очікуваних результатів, зазначених у програмі. Години курсу «Вступ до шкільного життя» (1 клас) виділяються за рахунок таких навчальних предметів: математики – 8 годин, навчання грамоти – 16 годин, курсу «Я досліджую світ» – 6 годин. У класному журналі курс оформлюється на окремих сторінках.

Контроль і оцінювання навчальних досягнень учнів в системі розвивального навчання спрямовані на формування навчальних дій контролю й оцінювання, що забезпечують становлення оцінювальної самостійності школярів як найважливішої складової їхнього самонавчання. У 1-2 класах опанування учнями навчальних дій контролю й оцінювання розпочинається зі створення та використання засобів контролю та оцінювання, зокрема із колективного вироблення критеріїв оцінювання та застосування цих критеріїв у різних конкретних ситуаціях.

Завданням учителя є організація роботи з формування зазначених навчальних дій та систематичне відстеження індивідуального розвитку учнів у процесі навчання. Навчальні досягнення учнів у 1–2 класах підлягають формувальному (вербальному) оцінюванню, у 3–4 – формувальному та підсумковому оцінюванню (за рівнями, відповідно НУШ).

Формувальне оцінювання має на меті:

- підтримувати навчальний розвиток учнів;
- вибудовувати індивідуальну траєкторію розвитку дитини;
- діагностувати досягнення на кожному з етапів процесу навчання;
- вчасно виявляти проблеми і запобігати їх нашаруванню;
- аналізувати хід реалізації навчальної програми й ухвалювати рішення щодо корегування програми і методів навчання відповідно до індивідуальних потреб дитини;
- виховувати ціннісні якості особистості, бажання вчитися, переконання у власних можливостях і здібностях;
- формувати конструктивне ставлення до помилок, вміння виявляти причину помилки, прагнення і вміння знаходити шляхи її уникнення;
- мотивувати до прагнення здобути максимально можливі результати.

Підсумкове оцінювання передбачає зіставлення навчальних досягнень учня/учениці з конкретними очікуваними результатами навчання, визначеними освітньою програмою.

Програма математичної галузі побудована відповідно до концепції Д. Ельконіна, В. Давидова, В. Рєпкіна, О. Дусавицького та реалізується через систему навчальних задач, розв'язання яких здійснюється як колективне (групове) дослідження, що забезпечує формування у молодших школярів ключової компетентності – «уміння вчитися».

Першим етапом у структурі будь-якої діяльності є мотивація; потужним мотивом навчання є пізнавальний інтерес. Очевидно, що у молодшому шкільному віці важко сформувати пізнавальний інтерес до навчання математики, але можна стимулювати цікавість. Дії вчителя мають бути спрямовані на активізацію у дитини бажання не просто ПІЗНАВАТИ щось нове, а постійне бажання «ЗДОБУВАТИ» нові та нові знання. А для цього потрібно, щоб нова, невідома задача або проблема викликала не страх та безсилля, а цікавість, і навіть азарт. Щоб учень, відкриваючи для себе нове знання, виявляв бажання «рухатися» все далі і далі до нових звершень.

Очевидно, що розв'язання цієї задачі не є простим. Зазвичай, після того, як проходить 2-3 місяці навчання у школі та зникає ефект новизни, діти не виявляють стійкого бажання

вчитися, або це бажання і зовсім відсутнє. Тому вчителю потрібно крок за кроком організовувати навчальний простір так, щоб дитині стало цікаво самостійно «побачити» у чому полягає невідома задача, запропонувати та випробувати способи розв'язування, обговорити свої рішення з вчителем та однокласниками. У цьому випадку знання дітей є більш глибокими і усвідомленими, адже розуміння набагато краще механічного заучування. Такий підхід робить захоплюючим для дитини сам процес навчання. Адже будь-яке навчання це просування від однієї задачі до іншої.

Занурення школярів у дослідження створює умови для навчання міжособистісному спілкуванню один із одним і з дорослими, для освоєння нового типу спілкування, який називається «навчальна співпраця». Крім індивідуальної форми роботи, яку найчастіше використовують у традиційній системі, у РН застосовується парна і групова форми організації навчальної взаємодії. У традиційній школі дитина отримує знання порційно, у послідовності, яку визначає дорослий, тобто вчитель. Авторитарність вчителя «який все знає» пригнічує ініціативу дитини в отриманні нових знань. У РН при роботі у парах і групах відбувається спілкування учня з рівним собі по життєвому досвіду, по колу непізнаних питань, що дає можливість дітям сперечатися, шукати докази. Саме так народжується думка, бажання вчитися! Справа за малим: створити умови для виконання навчальної задачі.

У підручниках з математики для першого класу відсутні числові дані, проте присутні буквені. Вважаємо, що боятися незвичності такого підходу не варто. Адже історично натуральні числа виникли саме для вимірювання, порівняння і зрівняння величин. І навчившись працювати з величинами, порівнювати їх або складати, зрівнювати або вирішувати із ними задачі, діти більш усвідомлено виконують аналогічні дії з числами. Трохи пізніше, після того як діти з'ясують, що число - це відношення величин, з'являться і звичні приклади, і завдання із числами.

Такий підхід забезпечує успішність засвоєння не тільки натуральних чисел, а і дробових, і раціональних чисел. Уміння розрізняти і проводити паралелі між діями з величинами і діями з числами забезпечує учням надалі великі переваги у вивченні математики у 5–6 класах, а також при вивченні алгебри і геометрії.

Ще одна важлива річ. З перших днів навчання у школі дитина стикається з необхідністю досліджувати різні навчальні ситуації, умови задач, виділяти властивості і відношення будь-яких об'єктів. Для цього використовуються різного виду моделі: схеми, таблиці і формули у математиці. Найперша модель, яка з'являється на уроках математики – це схема. Для найпростіших результатів порівняння (рівності - нерівності) з'являються найпростіші схеми – пара рівних відрізків розповідає про рівність, а пара нерівних - про нерівність. Надалі, коли дитина просувається до складання і віднімання величин, схеми ускладнюються. А вміння за допомогою схеми проаналізувати відношення, які задані у тексті задачі, допомагає маленькому учневі побачити рішення і, відповідно, вирішити задачу.

Метою навчання математики у системі РН є формування в учнів дії моделювання. Для її реалізації учителі застосували набутий під час майстер-класів та тренінгів від викладачів кафедри математики і методики її навчання Університету Ушинського досвід із організації навчальних досліджень учнів під час навчання нумерації цілих невід'ємних чисел та арифметичних дій додавання і віднімання.

На уроках математики у 1–4-х класах широко використовувалось моделювання чисел із використанням арифметичних штанг, кружків-намістинок; ціле та його частини ілюструвалися арифметичними штангами; для унаочнення арифметичних дій додавання та

віднімання застосовувалися математичні матеріали – арифметичні штанги та кружки-намістинки. Спостереження вчителів за роботою учнів свідчать про те, що така робота їх цікава, викликає позитивні емоції радості від відкриття способів математичної діяльності.

Навчання математики за освітньою програмою «Інтелект України»

В умовах Нової української школи принципи побудови змісту, організації процесу навчання математики надають крила й учню, і вчителю. Компетентнісний підхід націлює нас на кінцевий результат, який дійсно дозволяє учню застосовувати свої знання у навчальних і реальних життєвих ситуаціях, самостійно діяти, нести відповідальність за свої дії. Потенціал кожного уроку насичений не тільки завданнями направленої розвитку пізнавальних процесів, він має ціннісно-емоційне наповнення, що допомагає внутрішнім чинникам особистості учня формувати стійкий пізнавальний інтерес, активну позицію у навчанні, бажання вчитися, ефективніше запам'ятовувати матеріал.

Мотиваційний потенціал уроку забезпечено цікавими текстовими матеріалами, ілюстраціями, аудіо й відео супроводом, математичними іграми, вправами, виконання яких захоплює учнів процесом; завданнями, що спонукають до пошуку значущого для учня результату.

Математика сприймається учнями як частина загальнолюдської культури, як метод пізнання навколишнього світу; школярі усвідомлюють значущість математики для прогресу людства. У цьому велику роль відіграють хвилинки ерудита – знайомимо учнів із видатними математиками й винахідниками, із цікавими фактами із життя відомих математиків, історією виникнення натуральних чисел на основі потреб практики, нуля, дробів, невідомого X тощо. Надихає дітей й інформація про те, що колись дії із звичайними дробами завдавали людям надзвичайних труднощів. Інформаційна довідка про те, що давній англійський чернець Беда, який був ученою людиною свого часу, писав: «у світі є багато речей, але немає нічого важчого, як чотири дії арифметики», наповнює гордістю маленьких «математиків», оскільки вони вже це вміють і надалі свої вміння будуть розвивати.

Навіть влучна назва однієї із змістових ліній – «Математика навколо мене». Кожен день дитина зіштовхується з повсякденними проблемами математичного характеру. Ми вчимося їх розпізнавати, застосовувати необхідні операції: перелічувати, вимірювати, обчислювати, прогнозувати результат і порівнювати його із реальним. Відпрацьовані у класі задачі на знаходження суми, решти надають малечі сміливості здійснювати самостійні покупки у шкільному буфеті, у магазині. А гордість батьків підкріплює у малюка бажання вчитися математики. Дитина розуміє – це важливо для життя вже сьогодні.

Реалізація змістової лінії «Досліджую навколишній світ засобами математики» – не просто створює умови для розвитку математичних здібностей учнів. Завдяки «цариці всіх наук» учні початкових класів цілеспрямовано визначають істотні, спільні й відмінні ознаки об'єктів, які їх оточують, об'єднують і розподіляють у групи, вимірюють. А найулюбленішими є завдання із конструювання, макетування. Як ви думаєте, навіщо на урок ми принесли сірники? Сірники + пластилін + розумні рученята = готовий гексаедр. Скільки кружечків із пластиліну – стільки вершин, скільки сірників – стільки ребер. Терміни «паралельні, перпендикулярні, протилежні» засвоюються опосередковано і легко. Не складно і виміряти довжину сірника лінійкою, а до знаходження довжини усіх ребер і рукою подати, «заглянувши у гості» до таблиці множення.

Основною метою змістової лінії «Вивчаю математичні процеси та явища» визнано міцне і свідоме опанування учнями системи математичних знань, умінь і навичок. Формування в

учнів усвідомлених і міцних обчислювальних навичок – одне з найважливіших завдань навчання математики. Велику роль у реалізації цієї змістовної лінії відіграє робота на уроці з ментальними картами та картами знань. Цю роботу вводимо поступово – від знайомства з готовими картами до складання їх у групах, парах, індивідуально. Застосовуємо:

- під час пояснення нової теми;
- для систематизації інформації;
- пошуку взаємних зв'язків;
- повторення і міцного запам'ятовування;
- підготовки до усної відповіді;
- відтворення вивченого за ключовими словами;
- групування в інших спосіб;
- визначення необхідного і достатнього для відповіді на запитання вчителя;
- підготовки до діагностичної роботи.

Систематична робота за інтелект-картами, картами знань, робота над теоретичними поясненнями та алгоритмами за допомогою технологій «раціональне читання» та «запам'ятовуй ефективно», робота у команді (у парі, трійці, четвірці) з розумінням, що робота кожного – безцінний внесок у командну справу розвивають здатність логічно обґрунтовувати позицію, приймати рішення, сприяють ефективному розвитку пізнавальних здібностей, міцному і свідомому опануванню учнями системи математичних знань, умінь і навичок, відчуттю успішності.

Змістова лінія «Критично оцінюю дані та власну математичну діяльність». Одним з наскрізних завдань освітнього процесу є розвиток критичного мислення. Крім того, що у кожен урок учитель закладає спеціальні вправлення з розвитку навичок аналізу та синтезу, використовуючи такі вправи, як «Кошик ідей», «Дерево припущень», круги Ейлера, «Мозковий штурм», «Істино / хибно», побудова змісту освіти у НУШ, організації процесу навчання математики передбачає формування в учнів початкових класів критичного й логічного мислення. Вхід учнів у інформаційне поле уроку вже є відправною точкою для розвитку думки. Кожне завдання починається зі спостереження за математичним явищем, постановки питань, пошуку варіантів рішення із застосуванням власних доказів/ аргументації. Учні діляться думками, працюючи у команді. Думки обговорюються, перевіряються, відточуються. Діти навчаються прогнозувати, виясняють, яка інформація потрібна для вирішення проблеми. Учні вчать враховувати різні думки, розрізняти факти, з'ясовувати наявність інших шляхів розв'язування проблемної ситуації; перевіряти правильність результату; знаходити помилки та виправляти їх. Кожен урок математики в умовах НУШ – це простір для розвитку базових навичок, необхідних для критичного мислення.

У кінці кожного уроку математики проводимо одну із стратегій розвитку критичного мислення – рефлексію. Наприкінці дня тренуємо базові навички критичного мислення: вчимося аналізувати продуктивні думки і дії, чи впливали думки інших, чи я діяв, керуючись особистими переконаннями, цінностями, знаннями, хотів би зробити щось інакше?

Висновки. На сучасному етапі розвитку системи освіти України вчителі, користуючись свободою вибору методик навчання, мають можливість працювати як за Типовими освітніми програми НУШ, так і за альтернативними освітніми програмами. Програма розвивального навчання та програма «Інтелект України» реалізують вимоги Державного стандарту початкової школи, забезпечують досягнення обов'язкових результатів математичної освітньої галузі. Водночас, ці програми побудовані за іншою логікою.

Навчання математики у системі РН розглядається як навчання дії моделювання, власне опанування математичних понять та способів дії мотивується через постановку навчальної задачі; розгортання математичного змісту йде від загального до конкретного на підставі теорії змістових узагальнень В. Давидова. Відмінними ознаками є занурення учнів у дослідження по розв'язуванню навчальної задачі, і таким шляхом дітьми відкриваються нові поняття та способи дії. У такий спосіб, розв'язується задача розвитку в школярів теоретичного типу мислення, спрямованості на винахід нового, що є досить позитивним у контексті підготовки дітей до майбутнього дорослого життя.

Акцент на засвоєння культури, що накопичило людство за віки власної історії, на сприйманні математики як засобу пізнання навколишньої дійсності, на застосуванні досвіду математичної діяльності у повсякденному житті учня зроблено в освітній програмі «Інтелект України». Відмінною особливістю програми з математики є спрямованість на міцне засвоєння математичних понять, формування в них математичних умінь і навичок, для чого використовуються ефективні засоби навчання – інтелект-карти, алгоритми, але водночас спостерігається спрямованість на заучування навчальної інформації. У цій системі дії вчителя регламентовані, він не може за власним бажанням застосувати інші методики навчання.

Позитивним є можливість учителя обирати освітню програму, за якою навчатимуться учні класу. Ефективність навчання залежить, передусім, якістю розуміння і присвоєння вчителем ідей, які закладено у цих програмах, його бажання розвиватися у напрямі вдосконалення професійних знань, умінь і навичок.

РОЗДІЛ 2

Методика формування в учнів понять сучасного шкільного курсу математики

2.1. НАПРЯМИ ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИКИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ У ЗДОБУВАЧІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Катерина Недялкова

Вступ. Математика як наука і як навчальний предмет володіє величезними можливостями щодо розвитку понятійного мислення особистості, що є основою наукового пізнання. Формування математичних понять в учнів, умінь їх застосовувати при вирішенні практичних і прикладних задач є одним із провідних завдань шкільної математичної освіти. На це вказує і аналіз програм з математики, де зазначається: «Понятійний апарат, ... є тим підґрунтям, що забезпечує успішне вивчення в наступних класах алгебри і геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються математичні знання» [9, с. 10]; «учень повинен формулювати означення планіметричних фігур та їх елементів, зображати їх на малюнку, класифікувати...» [9, с. 14]. Водночас, шкільна практика засвідчує, що значна частина учнів утруднюється при визначенні багатьох математичних понять, їх відношень і застосувань. Це, безумовно, негативно впливає на рівень загальної та логічної культури, обізнаність здобувачів середньої освіти, системність їхніх знань і стає на заваді якійсь підготовки до підсумкових випробувань, допрофесійної і подальшої професійної підготовки. Отже, необхідно шукати причини такого стану проблеми і шляхи їх подолань.

Огляд останніх публікацій за темою. У психологічній науці проблемою мислення як вищого психічного процесу займалися такі видатні вчені, як С. Л. Рубінштейн, О. Р. Лурія, Л. С. Виготський, О. Н. Леонтьєв, А. В. Брушлінський. Встановлено, що існує єдиний процес пізнання, який починається з почуття і виходить за його межі – в абстрактне (понятійне) мислення. Психологію понятійного мислення докладно висвітлено у працях М. О. Холодної, яка розробляла психологічні характеристики міжпонятійних зв'язків, понятійні здібності та продуктивність інтелектуальної діяльності та ін.

Питаннями методики формування математичних понять займалися А. А. Столяр, В. Г. Бевз, З. І. Слєпкань, В. М. Осинська та ін. Методиці формування математичних понять у молодших школярів присвячені роботи М. О. Бантової, М. В. Богдановича, Є. О. Лодатко, Г. І. Мартинової, О. В. Онопрієнко, С. О. Скворцової та ін. Останні публікації з тематики дослідження належать С. П. Семенцю (проблему розглянуто з точки зору розвивального підходу), В. О. Панченко, Г. І. Непомнящій (досліджено особливості формування математичних понять у молодших школярів), Т. П. Коростіянець і К. В. Недялковій (розглянуто психолого-дидактичний аспект формування математичних понять в учнів) та ін.

Можемо констатувати, що проблема формування математичних понять у здобувачів середньої освіти є достатньо розробленою із теоретичної і практичної точок зору; однак і досі ефективність методики формування математичних понять потребує підвищення.

Мета дослідження – окреслити проблемні питання щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики і визначити напрями вдосконалення методики формування математичних понять у здобувачів середньої освіти.

Виклад основного матеріалу. Аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури з проблеми дослідження, бесіди з учителями-математиками, аналіз передового педагогічного досвіду та власної педагогічної діяльності дозволили виявити проблемні питання, пов'язані з формуванням в учнів понять шкільного курсу математики, серед яких:

- неготовність деякими школярами сприймати логічні основи шкільного курсу математики, пов'язані з теорією понять, яка спричинена несвоєчасною пропедевтикою;
- нерозуміння значною частиною учнів сутності поняття «означення», його видів тощо;
- невміння школярами визначити родові поняття по відношенню до даного; відтак, неможливість дати правильного означення поняттю;
- недостатність наочних уявлень при з'ясуванні відношень між поняттями, у процесі класифікацій тощо;
- безсистемність знань у частини здобувачів середньої освіти, що обумовлюється несформованістю деяких понять шкільного курсу математики;
- неусвідомлення деякими школярами змісту та обсягу деяких понять, їх співвідношення;
- невміння частиною учнів застосовувати поняття при розв'язанні різного роду завдань, що іноді спричинено неадекватним вибором методів щодо формування математичних понять у здобувачів середньої освіти.

З'ясуємо можливі шляхи вирішення окреслених проблем.

На нашу думку, пропедевтика формування в учнів математичних понять повинна активно відбуватися у ранньому шкільному віці; не можна недооцінювати розумові здібності дітей цього віку, нехтувати їхньою природною допитливістю і жагою пізнання; цей віковий період сприятливий для формування вміння виділяти істотні ознаки, знаходити закономірності, класифікувати тощо, виконуючи цікаві, адекватні віку завдання, задачі, вправи у формі гри. Навіть дітей старшого дошкільного віку можна залучати до виконання, наприклад таких вправ:

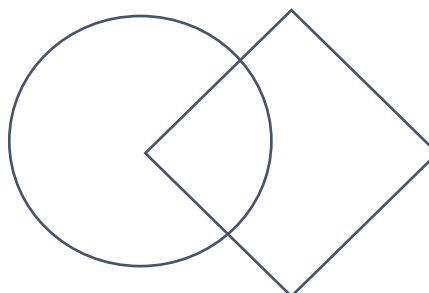
Завдання 1. Прослухай уважно назви понять. Вкажи у кожному рядку зайве слово. Інші поняття об'єднай загальним (родовим) поняттям:

- 1) кенгуру, кішка, кінь, корова (свійські тварини);
- 2) лижі, штанга, кактус, ковзани (спортивні предмети);
- 3) пальма, шишка, ялинка, сосна (дерева);
- 4) зима, літо, осінь, вечір (пори року);
- 5) дім, диван, стіл, крісло (меблі).

Завдання 2. Прослухай уважно пари слів у першому реченні і проаналізуй зв'язок між ними. Спробуй дібрати пару до слова у другому реченні:

- 1) Огірок – овоч. Ромашка -
- 2) Учитель – школа. Лікар -
- 3) Людина – руки. Кішка -
- 4) Риба – вода. Птах -
- 5) Осінь – дощ. Зима -

Завдання 3. Намалюй квіточку всередині кола, але не в квадраті; метелика – усередині квадрата, але не в колі; яблуко – всередині кола і всередині квадрата, а гриб – не в колі і не в квадраті.



Учнів 1–2 класів можна зацікавити такими завданнями:

Завдання 1. Прочитай уважно поняття. У квадратик поряд зі словом впиши потрібну цифру: 1 – якщо поняття загальне; 2 – якщо поняття конкретне; 3 – якщо поняття одиничне.

Сукня □, фрукти □, літо □, телевизор □, транспорт □, Одеса □, сосна □, Леся Українка □, пори року □, ложка □, опади □, термометр □.

Завдання 2. Поділи слова на склади. Запиши тільки перші склади. Утвори нове слово-поняття. Вкажи його вид. Спробуй дібрати до нього поняття з меншим обсягом.

Кавун + шахи = _____

Кружка + пароплав = _____

Мова + ремінь = _____

Завдання 3. Прочитай уважно слова-поняття:

річка, доброта, Катруся, автомобілі, Карпати, Котигорошко, полуниця, нива, посуд, комахи, тополя, чесність, діброва, Хрещатик, слово.

Запиши ці слова у відповідних стовпчиках таблиці, добери до кожного стовпчика ще одне поняття самотійно.

Загальні	Одиничні	Збірні	Конкретні	Абстрактні

Учням 3-4 класів можна запропонувати більш складні завдання:

Завдання 1. Прочитай визначення понять. Знайди помилки.

- 1) Джміль – це комаха, більша за бджолу.
- 2) Риба – це те, що плаває.
- 3) Кішка – це свійська тварина, але не собака.

Завдання 2. За допомогою кіл Ейлера зобрази множини:

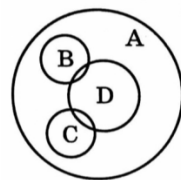
А – множина плодових дерев у саду;

В – множина яблунь у саду.

Склади і запиши з ними судження, використовуючи слово «всі» або «деякі».

Завдання 3. (Рис. 1).

84. Роздивись малюнок. На ньому за допомогою кіл Ейлера зображено співвідношення між обсягом понять.



А – транспорт
В – тролейбус
С – метро
Д – міський транспорт

Використовуючи ці поняття, склади і запиши судження:

А) зі словом і (та):

Істинне. _____

Хибне. _____

Б) зі словом чи (або):

Істинне. _____

Хибне. _____

Рис. 1. Завдання із збірника задач [4; с. 102]

Автори сучасних підручників із математики для основної школи надають належну увагу формуванню поняття «означення». Наприклад, у підручнику [5, с. 13]: «Якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміна), то використовують означення. Наприклад: 1) годинником називають прилад для вимірювання часу; 2) геометрія – це розділ математики, який вивчає властивості фігур. Означення використовують і в геометрії».

Підручник [2, с. 10] містить п. 1.4., присвячений вивченню поняття «означення» (рис. 2).

1.4. Означення і його роль у геометрії

У п. 1.3 описано два поняття: «промінь», яке відоме вам із курсу математики 5 класу, і нове — «доповняльні промені». Завдяки цим описам можна чітко уявити, які саме фігури розглядаються. Наведені описи є **означеннями**; вони вказують на особливості описаної фігури, що відрізняють її від інших фігур.

Рис. 2. Фрагмент підручника [2]

Натомість, тільки від майстерності та професіоналізму вчителя залежить, наскільки якісно учні оволодіють поняттям «означення», усвідомлять необхідність визначення понять у математиці, зрозуміють, що означення математичних понять, поряд із аксіомами, теоремами різних видів складають логічні основи курсу математики. Зрозуміло, що таких знань школярі набувають не за один урок; це має бути результатом цілеспрямованої, систематичної роботи як з боку вчителя, так і з боку учнів.

Окрім розуміння необхідності визначення математичних понять, учні мають бути ознайомленими з різними способами їх означень задля формування вміння їх відтворювати, застосовувати, аналізувати зв'язок між різними поняттями. Тому вчителю під час роботи з поняттям бажано обговорювати структуру означення, спосіб побудови математичного об'єкта, що може бути покладеним у означення, смисл символів, які використано в означенні тощо.

Відомо, що більшість понять шкільного курсу математики визначається через найближчий рід і видову відмінність. Також часто зустрічаються конструктивні означення (зміст поняття, що визначається, розкривається за допомогою опису того, як побудовано даний об'єкт або явище), наприклад: «Фігура, що утворюється обертанням прямокутного трикутника навколо вісі, що містить катет, називається конусом». У генетичному означенні вказується рід поняття, що визначається, а далі, замість видових ознак пояснюється, як утворюється предмет або явище (окремий вид генетичних означень – через рекурсію), наприклад: «Пропорцією називається рівність двох відношень». Також виділяють означення через перелік і означення у символічній формі. Так, учні мають розуміти, що речення: «Цілі числа – це натуральні числа, їм протилежні та нуль», – є означенням поняття «ціле число»; а запис $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$ – є означенням поняття степеня з цілим показником.

Важливо, щоб здобувачі середньої освіти усвідомили, що не всі поняття математики можна визначити: існують деякі *вихідні, початкові, первинні поняття*, їм не передують ніякі інші поняття цієї теорії. На майстер-класі у формі відкритого уроку в 7–М класі Одеського

приватного ліцею «Мрія» з теми: «Найпростіші геометричні фігури» ми наголошували, що поняттям точка і пряма не даємо означення, вони нам інтуїтивно зрозумілі, а ось поняттям «промінь», «відрізок» уже можна дати означення, використовуючи поняття «точка» і «пряма» (надалі, при вивченні первинних понять стереометрії уже можна говорити, що вони визначаються опосередковано через систему аксіом).

При аналізі текстів підручників обов'язково треба звертати увагу учнів на той факт, що деяким поняттям автори не дають строгого з математичної точки зору означення, а вважають його інтуїтивно зрозумілим, простим, і, щоб не обтяжувати учнів, вводять ці поняття описово. Наприклад, у підручнику [2, с. 21] поняття кута вводиться через означення (рис. 3).

3.1. Означення кута

Вивчаючи доповняльні промені, ми розглядали випадок, коли дві півпрямі однієї прямої мають спільну початкову точку. Розглянемо тепер той випадок, коли дві півпрямі мають спільну початкову точку, але не обов'язково є півпрямими однієї прямої.

Означення

Кутом називається геометрична фігура, що складається з двох променів (**сторін кута**), які виходять з однієї точки (**вершини кута**).

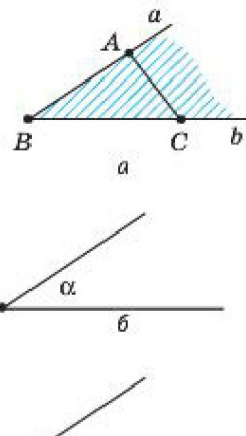


Рис. 3. Фрагмент підручника [2]

А у підручнику [5, с. 26] поняття кута вводиться описово (рис. 4):

На рисунку 46, *а* зображено фігуру, яка складається з двох променів OA та OB , що мають спільний початок. Ця фігура ділить площину на дві частини, які виділено різними кольорами. Кожну із цих частин разом із променями OA та OB називають **кутом**.

Промені OA та OB називають **сторонами кута**, а точку O — **вершиною кута**.

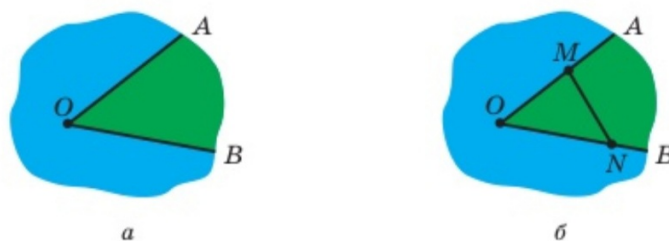


Рис. 4. Фрагмент підручника [5]

Неважко помітити, що і саме поняття «кут» трактується по-різному авторами зазначених підручників. Звичайно, такі розбіжності у концепціях сучасних рекомендованих підручників вимагають від учителя вміло виконувати логіко-математичний (і логіко-дидактичний) аналіз навчального матеріалу.

Вважаємо доцільним із точки зору розвитку логічного мислення учнів розглянути питання еквівалентних означень (принаймні для школярів, які вивчають математику на поглибленому рівні). Результатом такої роботи має стати розуміння учнями, що означення

математичних понять – справа домовленості, раціонального вибору набору необхідних і достатніх умов поняття, що закладаються в означення (тобто, ми могли би, взагалі кажучи, вільно створювати класи предметів і визначати їх). Наприклад, якщо в означення паралелограма покласти іншу його характеристичну властивість – поділ діагоналей у точці перетину навпіл, то традиційне означення паралелограма «перетвориться» на теорему-властивість і теорему-ознаку.

На узагальнюючих уроках або на заняттях факультативу з математики можна провести доведення еквівалентності, наприклад, таких означень: «Рівнобедреним трикутником називається трикутник, у якого дві сторони рівні», «Рівнобедреним трикутником називається трикутник, у якого два кути рівні». Учні під керівництвом учителя мають дійти висновку: вибір істотних ознак для утворення означення із всієї сукупності ознак не є однозначним: якщо один набір таких ознак поняття покладений в основу його визначення, то інші подібні набори характеристичних властивостей зазвичай виступають у ролі теорем.

Важливим аспектом правильного формування математичних понять в учнів є аналіз відношень між поняттями, що сприяє більш глибокому розумінню предмета, систематизує знання, позбавляє формалізму у навчанні. Так, можна ставити питання про відношення декількох понять, як це показано на рис. 5: А – многокутники; В – трикутники; С – прямокутні трикутники; D – рівнобедрені трикутники; Е – рівносторонні трикутники; К – космічна ракета.

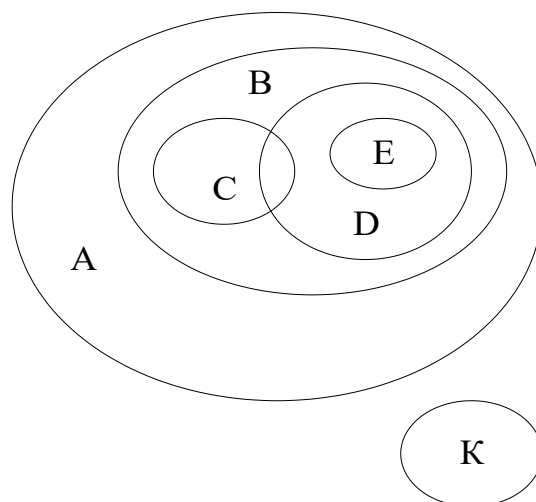


Рис. 5. Діаграма Ейлера: відношення між поняттями



Рис. 6. Фрагмент підручника [7, с. 95]

За допомогою діаграм Ейлера зручно наочно ілюструвати класифікацію понять, що і роблять автори деяких сучасних підручників (рис. 6).

Загалом, вважаємо, окреме заняття факультативу з математики або окремий урок (уроки) у класах із поглибленим вивченням математики можна присвятити питанню щодо можливих відношень між поняттями: незважаючи на велике різноманіття понять у смислі їх змісту, кількість можливих відношень між обсягами понять невелика, строго обмежена і може бути представлена схематично (рис. 7).

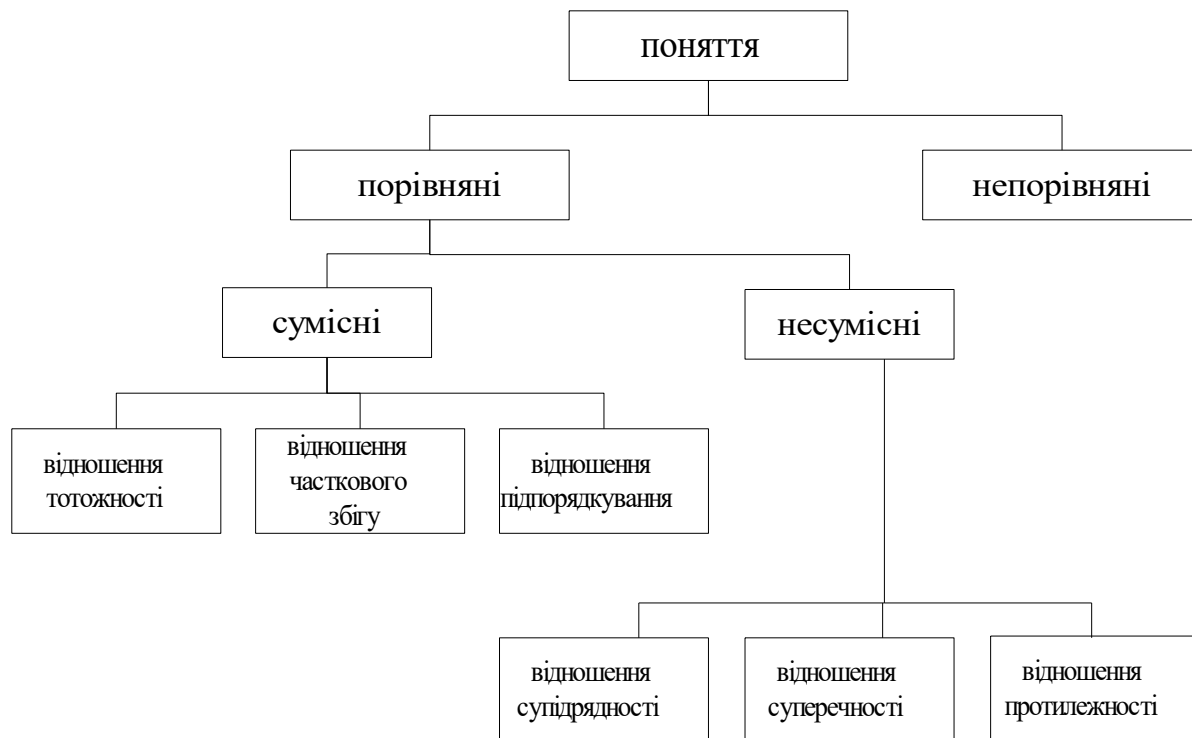


Рис. 7. Види відношень між поняттями

Завдання

Проілюструйте кругами Ейлера-Вена відношення між такими поняттями: «рівняння», «лінійне рівняння», «рівняння першого степеня», «квадратне рівняння», «неповне квадратне рівняння», «зведене квадратне рівняння», «нерівність», «вітамін», «предикат», «функція».

Які відношення між поняттями:

- «лінійне рівняння» і «рівняння першого степеня»;
- «неповні квадратні рівняння» і «зведені квадратні рівняння»;
- «рівняння», «лінійні рівняння» і «квадратні рівняння»;
- «рівняння» і «нерівність»;
- «рівняння» і «вітамін»;
- «предикат» і «функція»?

Яку назву в таких відношеннях мають самі поняття?

Рис. 8. Завдання щодо встановлення відношень між поняттями

Питання відношення між поняттями є цікавими та корисними і для вчителів-практиків; на тренінгу для вчителів-математиків Одеського приватного ліцею «Мрія» щодо вдосконалення методики навчання математичних понять учнів ми пропонували завдання з відповідним змістом (рис. 8).

На нашу думку, подібні завдання можна пропонувати учням 9 класу, які вивчають математику на поглибленому рівні. У контексті цієї ж проблеми можна обговорювати зі здобувачами середньої освіти поняття, відношення між якими часто тлумачаться хибно, наприклад:

- ✓ ототожнення понять, зміст і обсяг яких не збігається: коло – круг; число – цифра; додавання нуля – приписування нуля;
- ✓ поняття, що не є перехресними: числа, що діляться на 6 – числа, що діляться на 15; многочлени – одночлени; прямокутник – квадрат;
- ✓ поняття, що не знаходяться у відношенні підпорядкування: дуга – коло; зрізана піраміда – піраміда; промінь – пряма; відрізок – пряма;
- ✓ поняття, що не є супідрядними: прямокутник – ромб; невід’ємні цілі числа – недодатні цілі числа;
- ✓ поняття, що не знаходяться у відношенні суперечності: паралельні прямі – перпендикулярні прямі; прості числа – складені числа;
- ✓ поняття, що не є протилежними: подібні трикутники – неподібні трикутники; парне число – непарне число; паралельні прямі – перпендикулярні прямі; менше – не менше.

Для ефективного формування в учнів понять шкільного курсу математики можна, поряд із традиційними методами і прийомами, залучати завдання у тестовій формі, що обґрунтовано набувають популярності згідно сучасних освітніх тенденцій.

Автором було розроблено низку таких завдань [11; 15], деякі з яких пропонувалися й учням (класів із поглибленим вивченням математики) на відкритих уроках, і вчителям-математикам на тренінгах, які проводилися на базі Одеського приватного ліцею «Мрія».

Наведемо приклади.

1. Чи підпорядковане поняття «зрізаний конус» поняттю «конус»?

А	Так, ці поняття знаходяться у родо-видових відношеннях
Б	Ні, поняття «конус» підпорядковане поняттю «зрізаний конус»
В	Так, поняття «зрізаний конус» підпорядковане поняттю «конус»
Г	Ні, обсяг поняття «зрізаний конус» не входить в обсяг поняття «конус»

2. «Площина, так само як і пряма, складається із точок, тобто площина – це множина точок» [6, с. 6]. Представлене речення є:

А	Означенням через перелік
Б	Означенням через найближчий рід і видову відмінність
В	Описовим уведенням поняття «площина»
Г	Аксіомою

3. «Якщо всі спільні точки двох площин утворюють пряму, то говорять, що ці площини перетинаються» [6, с. 7]. Чи можна таке математичне речення вважати означенням поняття «перетин площин»?

А	Так, це конструктивне означення
Б	Ні, це описове введення поняття «перетин площин»
В	Так, це означення через найближчий рід і видову відмінність
Г	Так, це означення через перелік

4. «Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, паралельними даним прямим».

Чи правильне таке означення поняття «кут між мимобіжними прямими»?

А	Так, цілком правильно
Б	Ні, неправильно вказана суттєва ознака
В	Ні, пропущено суттєву ознаку
Г	Ні, неправильно вказано родові поняття

5. «Дві прямі в просторі називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90° ». Чи правильне таке означення перпендикулярних прямих у просторі?

А	Так, таке означення правильне
Б	Ні, треба говорити «Якщо вони перетинаються під прямим кутом»
В	Ні, треба говорити «Якщо вони перетинаються і кут між ними дорівнює 90° »
Г	Ні, треба говорити «Якщо вони лежать в одній площині та кут між ними дорівнює 90° »

6. Розглянемо твердження: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$. Чи можна вважати це означенням?

А	Ні, таке твердження не розкриває зміст поняття «більше»
Б	Ні, таке твердження невірне розкриває зміст поняття «більше»
В	Так, це означення, що виражено символічною мовою
Г	Так, це означення через рекурсію

7. «Фігура, що утворюється обертанням прямокутної трапеції навколо вісі, що містить меншу бічну сторону, називається зрізаним конусом». Вкажіть вид означення.

А	Б	В	Г
Через перелік	Конструктивне	Символьною мовою	Через найближчий рід і видову відмінність

9. «Дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити».

Вкажіть вид означення.

А	Б	В	Г
Конструктивне	Через найближчий рід і видову відмінність	Символьною мовою	Генетичне

10. «Нехай із планок, які сполучені на шарнірах, зроблено квадрат. Змінивши положення планок так, щоб вони не були перпендикулярними, одержимо фігуру, що називається ромбом».

Чи можна вважати це строгим математичним означенням ромба?

А	Так, тут розкрито зміст поняття «ромб»
Б	Так, це конструктивне означення
В	Ні, це описове введення поняття «ромб»
Г	Ні, в цьому означенні пропущено суттєву ознаку

11. «Тотожність – це рівність, яка справедлива при всіх значеннях змінних, які входять до неї». Чи правильне таке означення поняття «тотожність»?

А	Так, правильно
Б	Ні, неправильно вказано родові поняття
В	Ні, неправильно. Треба готувати «при всіх значеннях букв, які входять до неї»
Г	Ні, неправильно. Пропущено суттєву ознаку «при всіх <i>допустимих</i> значеннях змінних»

12. «Мимобіжними називаються прямі, що не лежать в одній площині і не перетинаються». Чи правильне таке означення мимобіжних прямих?

А	Так, правильне
Б	Ні, неправильно. Пропущено суттєву ознаку «не є паралельними»
В	Ні, неправильно. Суттєва ознака «не перетинаються» – зайва
Г	Ні, неправильно. Суттєва ознака «не лежать в одній площині» – зайва

13. «Кожне натуральне число, на яке ділиться дане натуральне число, називається дільником даного числа». Чи правильно наведено означення поняття «дільник»?

А	Правильно
Б	Ні, треба говорити «Яке ділиться на дане натуральне число»
В	Ні, треба говорити «Будь – яке натуральне число, на яке ...»
Г	Ні, можна не говорити «дільником <i>даного</i> числа»

На жаль, шкільна практика засвідчує, що і на теперішній час здобувачі середньої освіти часто припускаються помилок, пов'язаних із хибним формулюванням означень, і вчителю необхідно вчасно і коректно їх виправляти. Нами було здійснено аналіз помилок, яких учні припускаються найчастіше.

I. Помилки, пов'язані з родовим поняттям:

- 1) пропуск родового поняття, наприклад: „У трапеції тільки дві сторони паралельні”;
- 2) неправильно вказане родові поняття, наприклад: „Промінь – це пряма, обмежена з одного боку” або „Квадрат – це паралелограм, у якого всі сторони рівні”.

II. Помилки, пов'язані з видовими ознаками:

- 1) пропуск видової ознаки, наприклад: „Призма, в основі якої лежить правильний многокутник, називається правильною” – необхідно додати ознаку „пряма призма”;

2) уведення зайвої видової ознаки, що є наслідком інших ознак, уже вказаних в означенні, наприклад: „Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі і діагоналі рівні”;

3) додавання хибної видової ознаки, як-от: „Паралелограмом називається чотирикутник, у якого всі сторони паралельні” – такого чотирикутника не існує; „Простим називається число, що має два дільники – одиницю і само себе” – пропущено слово «тільки».

III. Помилки, пов’язані з „порочним колом” в означеннях, коли одне поняття визначається через друге, а друге через перше. Наприклад: “Прямий кут – це кут із взаємноперпендикулярними сторонами, а взаємноперпендикулярні прямі – це прямі, що перетинаються під прямим кутом”.

IV. Тавтологія в означеннях, коли об’єкт визначається сам через себе, хоча і в інших виразах. Наприклад, “Діленням називають дію, коли одне число ділять на інше”; “Многогранники називають подібними, якщо вони подібні між собою”; “Розв’язати рівняння – знайти число, що є його розв’язанням”.

V. Означення поняття через невизначені поняття (крім *первинних, неозначуваних понять*). Наприклад: “Одночленом називається многочлен, який містить тільки один доданок”.

Ефективному засвоєнню математичних понять здобувачами середньої освіти сприяє адекватний добір учителем методів уведення понять, засвоєння відповідного означення, закріплення понять. Наведемо приклади фрагментів уроків із демонстрацією методів, які, на нашу думку, є доречними, враховуючи тему уроку, специфіку поняття, вікові можливості учнів.

1) Арифметична прогресія (*введення поняття конкретно-індуктивним методом*).

У ч и т е л ь: Запишіть декілька членів такої послідовності: $x_1 = 2$; $x_{n+1} = x_n + 3$.

У ч н і: 2; 5; 8; 11; 14; ...

У ч и т е л ь: Як можна охарактеризувати члени цієї послідовності?

У ч н і: В ній кожний член на 3 більше попереднього.

У ч и т е л ь: Правильно. Таку послідовність називають арифметичною прогресією. Послідовність: 3; 1,5; 0; -1,5; -3; -4,5; ... - також арифметична прогресія. Що помічаєте характерного для її членів?

У ч н і: В ній кожний член на 1,5 менше попереднього.

У ч и т е л ь: Спробуйте дати означення арифметичній прогресії.

(Учні намагаються сформулювати означення).

Вчитель коректує, обґрунтовує термін. Далі можна переходити до закріплення відповідного означення.

2) Коло (*абстрактно-дедуктивний метод уведення поняття*).

У ч и т е л ь: Запишемо означення: «Колом називається множина усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки». Зобразіть коло в зошитах. Яким креслярським інструментом при цьому користуємось?

У ч н і: Циркулем.

У ч и т е л ь: Які суттєві ознаки можна виділити в означенні?

У ч н і: по-перше, це множина усіх точок площини, а по-друге, ці точки рівновіддалені від заданої точки.

У ч и т е л ь: Цю точку називають центром кола. Так як множина усіх точок площини, що володіє якоюсь властивістю, називається геометричним місцем точок, то можна дати ще

одне правильне (еквівалентне) означення: «Колом називається геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки». Як ви думаєте, чому це поняття отримало таку назву (мотивується термін)?

3) Діаметр кола (*забезпечення засвоєння означення роздільним методом*).

У ч и т е л ь: Діаметр – це хорда, що проходить через центр. Хто може повторити означення діаметра?

(Два–три учня по черзі повторюють).

У ч и т е л ь: А як можна по-іншому сказати, що таке діаметр (дати еквівалентне означення)?

(Діти дають варіанти відповіді. «Діаметр – найбільша хорда»).

4) Висота трикутника (*забезпечення засвоєння означення компактним методом*).

1 крок: учитель виписує означення на дошці і виокремлює у ньому суттєві ознаки (учні роблять те саме у зошиті). Текст приймає такий вигляд: “Висотою трикутника // називається перпендикуляр, // опущений із вершини трикутника // на пряму, що містить протилежну сторону трикутника”.

2 крок: дається вправа: вказати висоти в трикутниках (рис. 9).

Вчитель демонструє, як виконувати таке завдання, читаючи вголос означення і зупиняючись після кожної риси, перевіряючи виконання прочитаної ознаки.

3 крок: вправу продовжують виконувати учні під керівництвом вчителя, який робить зауваження.

Далі спостерігається перехід до згортання міркувань.

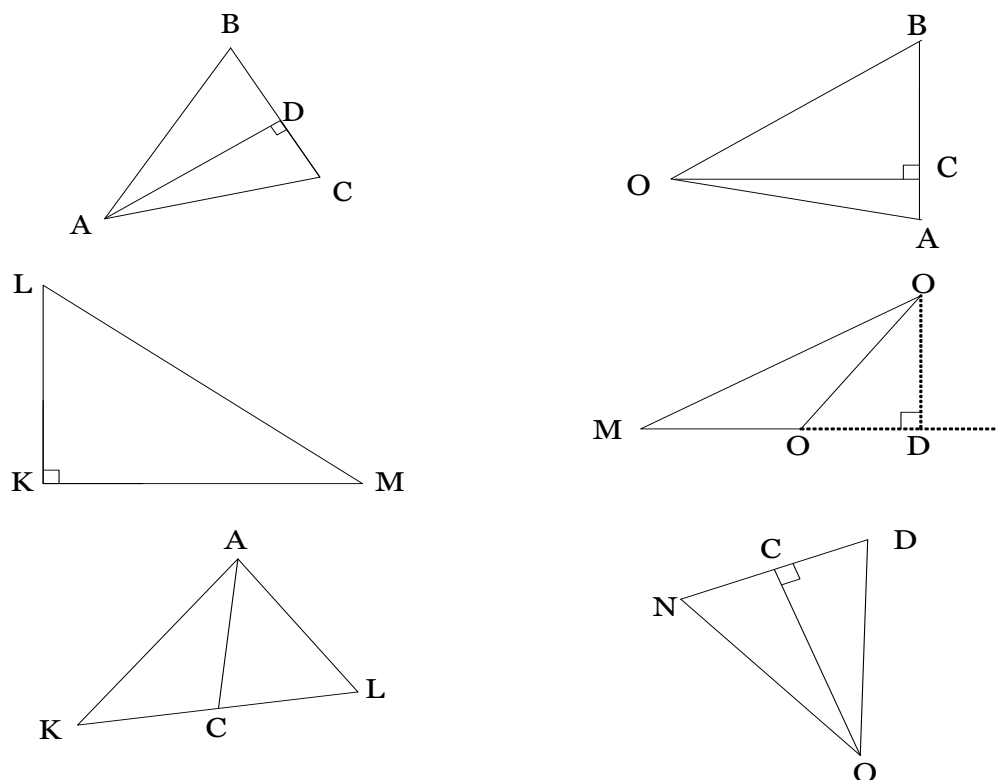


Рис. 9. До реалізації компактного методу засвоєння означення

5) Поняття похідної (*алгоритмічний метод забезпечення засвоєння означення*).

Після того, як було сформульовано означення похідної функції у точці, учням пропонується виконати завдання: знайти похідну функції $f(x) = x^3$ в точці x_0 (за означенням). Для цього означення представляється у вигляді алгоритму:

1. Знайти приріст функції Δf ;
2. Знайти відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
3. Знайти число, до якого прямує таке відношення, за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Розв'язання:

$$1) \Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2, \Delta x \neq 0;$$

3) $3x_0^2$ – стала величина; при $\Delta x \rightarrow 0$ очевидно, що $3x_0\Delta x \rightarrow 0$ і $(\Delta x)^2 \rightarrow 0$, отже і сума $3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \rightarrow 0$. Таким чином, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3x_0^2$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Тобто, $f'(x_0) = 3x_0^2$.

б) Чотирикутник (закріплення поняття систематизуючою вправою).

Які види чотирикутників зображено на рисунку (рис. 10)?

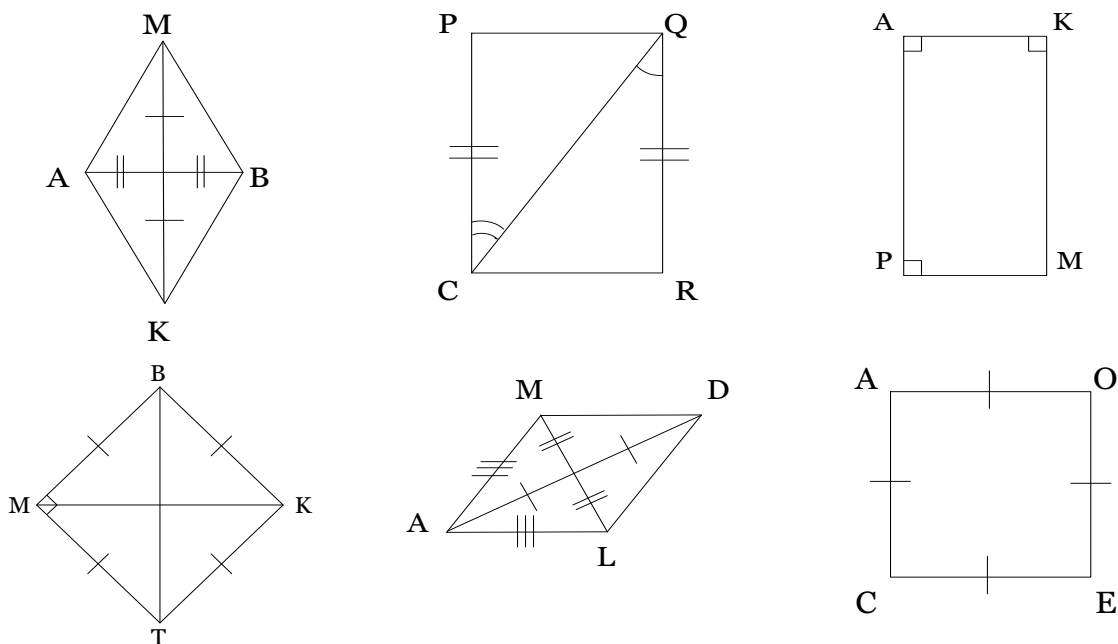


Рис. 10. Ілюстрація до завдання

1) Діагоналі чотирикутника (закріплення поняття систематизуючою вправою):

Якими властивостями володіють відрізки MN і KP (рис. 11)?

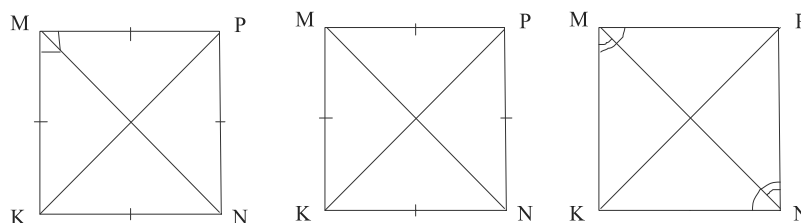


Рис. 11. Ілюстрація до завдання

Висновки. У представленому дослідженні окреслено проблемні питання щодо формування математичних понять в учнів; з'ясовано деякі причини незадовільного стану проблеми; визначено напрями, за якими можна вдосконалити методику навчання математичних понять здобувачів середньої освіти з метою підвищення якості та ефективності такого процесу, із-поміж яких:

- своєчасна пропедевтика навчання школярів математичних понять;
- ознайомлення учнів із основними фактами теорії понять: види понять, види означень, відношення між поняттями тощо;
- більш активне залучення наочності, що можна реалізувати кругами Ейлера при вивченні математичних понять;
- приділення належної уваги питанням логічних основ шкільного курсу математики, що сприятиме систематизації знань, глибокому розумінню предмету, підвищенню логічної культури учнів;
- урізноманітнення форм роботи, наприклад, залучення завдань у тестовій формі;
- адекватний добір учителем методів і прийомів формування математичних понять на різних етапах: введення поняття, забезпечення засвоєння відповідного означення, закріплення поняття.

Список використаних джерел

1. Брушлинский А. В. Психология мышления и проблемное обучение. Москва : Знание, 1983. 96 с.
2. Ершова А. П. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт навч. закл. / А. П. Ершова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. Харків : Вид-во «Ранок», 2015. 224 с.
3. Коростіянecь Т. П., Недеялкова К. В. Підготовка майбутніх учителів математики до формування понять в учнів: психолого – дидактичний аспект. Математична освіта: минуле, сьогодення, майбутнє, до 100- річчя від дня народження О. Ф. Семеновича: монографія / М. І. Бурда та ін.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2020. С. 156–162.
4. Логіка. Збірник задач. Початкова школа / Укл. М. О. Володарська. Харків : Торсінг плюс, 2011. 256 с.
5. Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2020. 240 с.
6. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 272 с.
7. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 368 с.
8. Методика навчання математики. Загальна методика: Практикум для організації самостійної роботи студентів: У 4-х ч. / Н. А. Тарасенкова та ін.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : ЧДУ ім. Б. Хмельницького, 2004.
9. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5–9 класи. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>

10. Непомняща Г. І. Формування математичних понять у молодших школярів на засадах компетентнісного підходу. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. № 9 (43). 2014. С. 108–113.
11. Недялкова К. В., Кушнірук А. С., Тумбрукакі А. В. Збірник тестових завдань з шкільного курсу математики і методики його навчання. Одеса: «Рекламсервіс», 2020. 72 с.
12. Панченко В. О. Формування математичних понять у молодших школярів на уроках математики. Педагогічні науки. Вип. 114. 2013. С. 175–181.
13. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
14. Холодная М. А. Психология понятийного мышления: от концептуальных структур к понятийным способностям. Москва : Институт психологии РАН, 2012. 288 с.
15. Niedialkova K. Formation of professional competences of future teachers of mathematics // Eurasian scientific congress. Abstracts of the 3rd International scientific and practical conference. Barca Academy Publishing. Barcelona, Spain. 2020. Pp. 280-285. URL: <http://sci-conf.com.ua>.
16. Tarasenkova N. (Ed). Conceptual framework for improving the mathematical training of young people: monograph / Akulenko I., Bochko O., Bogatyrova I., Bosovskiy M., Bozhko A., Brezhneva H., Chernajeva S., Donets M., Golodiuk L., Kolomiets O., Lovyanova I., Lutsenko G., Milloushev V., MilloushevaBoikina D., Serdiuk Z., Tarasenkova N., Terekh O., Tereshchenko V., Tretyak M., Vasilenko I., & Volodko I.; Eds. prof. N. Tarasenkova, & L. Kyba. Budapest : SCASPEE, 2016. 212 p.

2.2. ШЛЯХИ РОЗВИТКУ ФАХОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧИТЕЛІВ-МАТЕМАТИКІВ ЩОДО ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ПОНЯТЬ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Тамара Коростіянець

Вступ. Розвиток особистості засобами математики неможливий без оволодіння нею певної системою наукових знань. Однією із головних складових системи наукових знань будь-якого предмета, у тому числі й математики, є поняття. Не оперуючи поняттями, не можна сформулювати жоден закон і, отже, створити наукову теорію. Без засвоєння відповідних понять не може бути ні засвоєння законів, ні засвоєння теорій. Це обумовлює провідну роль понять при формуванні у свідомості учнів системи наукових знань у відповідній науковій галузі. Процес формування системи знань виступає як процес оволодіння поняттями.

Шкільна практика показує, що вчителі математики не завжди на високому професійному рівні володіють методикою формування понять. Розуміння важливості цієї проблеми і незадоволеність її станом спонукає вчителів математики шукати нові шляхи розвитку своїх фахових компетентностей.

Огляд останніх публікацій за темою. Процес формування понять знаходиться у центрі уваги багатьох авторів, серед яких слід виділити дослідження В. Г. Болтянського, Н. Я. Віленкіна, М. Б. Воловича, Я. І. Грудьонова, О. Б. Єпішевої, Ю. М. Колягіна, Г. І. Саранцева, А. В. Усової, А. Я. Хінчина та ін.

У навчальній літературі з методики навчання математики розроблені загальні питання теорії понять (зміст, обсяг, означення, класифікація), а також деякі питання засвоєння понять; причому останнє ототожнюється із засвоєнням означення. У ряді робіт виділяються етапи формування понять, але при цьому залишаються осторонь питання виділення дій, адекватних кожному етапу.

Проблемами професійної підготовки і, зокрема, формування різних складників методичної компетентності вчителів математики продовжують займатися сучасні вчені-методисти І. А. Акуленко, Б. О. Бурда, О. І. Матяш, О. І. Скафа, С. О. Скворцова, Н. А. Тарасенкова, О. С. Чашечникова, В. О. Швець та інші. Наразі, постає проблема пошуку шляхів вдосконалення фахової підготовки учителів математики щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики.

Мета дослідження – визначення й апробація напрямів удосконалення фахових компетентностей учителів-математиків щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики.

Виклад основного матеріалу. Пріоритетною проблемою теорії і методики навчання математики є проблема формування понять у здобувачів середньої освіти. Від ступеня її розв'язання залежить і якість засвоєння знань із предмета, і рівень розвитку мислення учнів.

Співпраця зі шкільними вчителями-математиками, досвід підготовки майбутніх вчителів математики та аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури дозволили визначити шляхи розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики. Серед них, зокрема, виділяємо:

- 1) усвідомлення фахівцями ролі та значущості формування в учнів понятійного мислення;

- 2) удосконалення вміння вчителів виконувати логіко-дидактичний і логіко-математичний аналізи навчального матеріалу;
- 3) усвідомлення ними значущості та сутності психолого-дидактичних основ формування математичних понять в учнів;
- 4) удосконалення вміння вчителів залучати прийом використання контрприкладу;
- 5) дотримання вчителями математики основних етапів роботи з поняттям;
- 6) володіння фахівцями різноманітними організаційними формами реалізації основних етапів роботи над формуванням понять.

Обґрунтуємо деякі з них.

Усвідомлення вчителями-математиками значущості та сутності психолого-дидактичних основ формування математичних понять в учнів і дотримання ними основних етапів роботи з поняттям відіграє важливу роль з огляду на зазначену проблему. Щоб забезпечити управління навчальним процесом, на думку психологів, необхідно організувати власні дії учнів. Ніяке навчання без особистої активності школяра неможливо – наголошує один з важливих принципів дидактики. Причому, як показали дослідження А. Н. Леонтьєва, успішність управління засвоєнням залежить не тільки і не стільки від того, що учні щось «роблять» із матеріалом, як від відповідності (адекватності) їх дій цілям навчання. Що ж це таке – адекватні знанням дії? І яким чином можна встановити, які саме дії адекватні матеріалу, що підлягає засвоєнню? Розглянемо методику вивчення понять – основи будь-якого наукового курсу.

Поняття в курсі математики вводяться, як правило, за допомогою означень; відтак, методика роботи з означеннями є дуже важливою у викладанні математики. Іноді кажуть, що для засвоєння означення його потрібно просто вивчити. Але це неправильно.

Якщо ми хочемо керувати процесом засвоєння, то недостатньо тільки організувати роботу на «вході» (поставити перед учнем саме ту задачу, розв'язування якої необхідно для успішного засвоєння матеріалу) або тільки переконатися у правильності результату на «виході» (встановити, що учень правильно відповів на запитання задачі). Необхідно втрутитися у ті процеси, що відбуваються при вирішенні поставленого завдання у свідомості кожного учня, забезпечити ефективне звернення до матеріалу, який підлягає засвоєнню. Існують способи втручання у розумову діяльність кожного з учнів? Або можна, наприклад, змусити учня у ході розпізнавання приналежності до поняття орієнтуватися переважно на означення, а не на шаблони, що склалися у свідомості? Психологи відповідають на це питання ствердно. Механізм такого навчання описаний у роботах П. Я. Гальперіна, Н. Ф. Талізінної та інших учених. Пояснимо його дію на прикладі розпізнавання приналежності до поняття «бісектриса кута». Для цього розберемо, що ж робили учні, які успішно впоралися із завданням про бісектрису. Вони міркували приблизно за такою схемою: «Промінь є бісектрисою кута, якщо виконуються дві умови:

- 1) початок променя збігається із вершиною кута;
- 2) промінь ділить кут на два рівних кута.

Оскільки завдання полягає у тому, щоб дізнатися, чи є промінь бісектрисою кута, треба перш за все встановити, чи збігається початок променя із вершиною кута. Якщо ця умова виконується, треба перевірити, чи розділився даний кут на два рівних кута». Перевірка першої умови; висновок про те, що необхідно перейти до перевірки другої умови, або про необхідність припинити перевірку; перевірка другої умови (якщо це необхідно); остаточний висновок – ось операції, з яких складається вирішення цієї та аналогічних задач. Контроль за її правильністю зводиться до контролю за правильністю виконання кожної операції. Однак,

якщо розв'язання виконується подумки і вчителю повідомляється лише кінцевий результат, неможливо проконтролювати окремі операції і їх правильність. Отже, необхідно організовувати роботу таким чином, щоб кожна з операцій виконувалася у формі, що дозволяє здійснювати потрібний контроль. Оскільки найчастіше мета навчання – забезпечити вміння виробляти відповідні операції подумки, контроль треба поступово замінити самоконтролем.

Щоб встановити, які дії адекватні означенням, з'ясуємо, дотримуючись рекомендацій психологів, яка мета вивчення означень у шкільному курсі математики. Ця мета дуже широка: тут і саме введення понять, і досягнення розуміння ролі означень у побудові точних наук. Тексти підручників і методичні вказівки достатньо орієнтують учителя у цій спільній меті та у її втіленні щодо кожного введеного означення. І викладач, який пояснює матеріал, враховує ці вказівки, а значить працює у напрямку даної мети. Ясно, що одного цього орієнтування недостатньо. Потрібно концентрувати ці цілі з точки зору діяльнісного підходу до навчання: зрозуміти, які дії повинен уміти виконувати учень, що засвоїв означення. Для цього потрібно розглянути, як може використовуватися текст означення при розв'язуванні задач. У завданнях можуть бути дві принципово різні ситуації: по-перше, може зустрітися термін, який уводиться цим означенням, і для розв'язування задачі знадобитися цей термін розшифрувати; по-друге, може знадобитися довести, що об'єкт, про який ідеться в задачі, можна назвати цим терміном (і скористатися всім, що ми про нього знаємо), для чого потрібно вміти доводити приналежність об'єкта до даного поняття. Наприклад, у всіх численних задачах, які вимагають застосування означення паралелограма, це застосування зводиться або до встановлення того, що деяка фігура є (або не є) паралелограмом, або до висновку наслідків із того, що дана фігура є (або не є) паралелограмом. І взагалі, будь-яке застосування будь-якого означення є не що інше, як умовивід, зроблений на підставі істинності еквіваленції:

$$(\forall x \in M) (A(x) \Leftrightarrow B(x)) \\ \text{def}$$

А таких умовиводів два види:

- 1) якщо справедлива (помилкова) кон'юнкція висловлювань $(x \in M) \wedge B(x)$, то об'єкт можна (не можна) позначити терміном А;
- 2) якщо об'єкт можна (не можна) позначити терміном А, то справедлива (помилкова) кон'юнкція висловлювань $(x \in M) \wedge B(x)$.

Дії, адекватні означенню і полягають у виконанні одного з двох видів умовиводів. Перше з них називають дією підведення під поняття, друге – дією виведення наслідків. Обидві ці дії необхідні при роботі з означенням; інших дій не може бути, тому що ніяких інших висновків на підставі означення зробити не можна.

Розглянемо, з яких елементарних операцій складаються названі дії, тобто з'ясуємо, які операції доводиться здійснювати учневі при виконанні цих дій. Операції при підведенні під поняття можуть бути різними, у залежності від способу завдання істинності значень висловлювань $x \in M$ і $B(x)$: або у вигляді безпосередньої інформації, або у вигляді інформації непрямої. Наприклад, те, що x – чотирикутник, може бути сказано у задачі прямо, а може і через якусь характеристичну властивість чотирикутника (скажімо, через указівку числа його діагоналей). Так само по-різному може бути повідомлена інформація про паралельність сторін. Слід особливо підкреслити випадок, коли доводиться робити підведення під поняття для об'єктів, які задаються не словесним описом, а у вигляді матеріальних (пластмасових, дерев'яних і т.п.) або матеріалізованих (намічених на дошці, показаних на екрані і щось подібне) моделей. Якщо істинне значення виразу $x \in M$ або висловлювання $B(x)$ дано

опосередковано, то учень повинен зробити деякі операції для з'ясування цих значень. Це можуть бути, зокрема, матеріальні операції (наприклад, вимір), а також розумові дії (умовиводи, засновані на раніше вивченому матеріалі). Будь-яку послідовність операцій щодо з'ясування істинності значення виразу $x \in M$ або висловлювання $B(x)$ ми будемо називати розпізнаванням.

Отже, дія підведення під поняття може здійснюватися у різних варіантах:

- 1) складатися з розпізнання істинності значень висловлювань $x \in M$ і $B(x)$ та з виведення наслідків про істинність висловлювання $A(x)$;
- 2) складатися з розпізнання істинності значення тільки одного з висловлювань $x \in M$, $B(x)$ (якщо значення іншого відомо) і з виведення наслідку про $A(x)$;
- 3) складатися тільки з виведення наслідку про $A(x)$ (якщо істинності значень висловлювань $x \in M$, $B(x)$ відомі).

Дидактичне значення цих трьох варіантів різне. У першому варіанті учень змушений оперувати з кожною складовою означення, встановлювати тим чи іншим способом справжнє значення кожного висловлювання, що входить в умову, і робити з цього відповідні висновки. У результаті відбувається і запам'ятовування всього тексту означення, і з'ясування його змісту і структури. Разом з тим, настільки докладна робота з окремо взятим означенням може перешкодити сприйняттю загальних прийомів роботи з означенням і загальних алгоритмів логічних умовиводів. У другому (а ще більше – у третьому) варіанті добре проявляються ці загальні методи логічної обробки матеріалу, але к меншій мірі відпрацьовується конкретний зміст даного означення. Наприклад, означення: «Квадратом називається ромб, у якого є прямий кут». Тут M – це множина ромбів; $B(x)$: x має прямий кут, $A(x)$: x – квадрат. Дія підведення під поняття – це висновок про істинність (хибність) висловлювання «даний об'єкт – квадрат» на підставі наявних відомостей про істинність (хибність) кон'юнкції висловлювань «даний об'єкт – ромб» і «даний об'єкт – має прямий кут». Перший варіант виконання цієї дії полягає у тому, що учень розпізнає справжнє значення висловлювань «даний об'єкт – ромб» і «даний об'єкт має прямий кут» самостійно. Приклади задач, які змушують учня діяти саме так: а) чи є квадратом фігура, зображена на дошці (вирізана з картону і т.п.); б) чи є квадратом паралелограм, якщо кожна з його діагоналей ділить його на рівнобедрені прямокутні трикутники); в) чи представляє собою квадрат прямокутник, діагоналі якого перетинаються під кутом 60° .

Другий варіант виконання дії підведення під поняття при роботі з тим же означенням квадрата полягає в тому, що учень розпізнає самостійно істинність значення тільки одного з висловлювань «даний об'єкт – ромб» і «даний об'єкт має прямий кут», а значення іншого з цих висловлювань відомо за умовою задачі. Приклади: а) серед ромбів, зображених на дошці, знайдіть квадрати; б) серед прямокутників, представлених на дошці, знайдіть квадрати.

У третьому варіанті виконання підведення під поняття квадрата учневі відомі всі дані про істинність висловлювань «даний об'єкт – ромб» і «даний об'єкт має прямий кут». Учневі залишається тільки вивести наслідок про істинність висловлювання "даний об'єкт – квадрат". Приклади: а) встановіть, є квадратом ромб $ABCD$ з прямим кутом A ; б) встановіть, чи є квадратом ромб $ABCD$ з кутами $A = 30^\circ$, $B = 150^\circ$, $C = 30^\circ$, $D = 150^\circ$.

Сказане про третій варіант дії підведення під поняття у повній мірі відноситься і до дії виведення наслідків, адже ця дія – не що інше, як визначення справжнього значення кон'юнкції ($x \in M$) $\wedge B(x)$ на підставі істинного значення висловлювання $A(x)$. Але останнє можна задати єдиним способом – прямо повідомити, чи можна даний об'єкт назвати даним

терміном: при роботі з означенням ми про дане поняття просто нічого, крім означення, не знаємо. Отже, ми з'ясували, що в першу чергу повинен виконувати учень, щоб оволодіти тим чи іншим означенням, яке вводиться. Для того, щоб здійснювати управління засвоєнням означення, потрібно домагатися виконання цих дій кожним учнем у підконтрольній (а отже, матеріальній) формі. Організувати таку роботу (адекватне оперування з навчальним матеріалом) можна лише за допомогою завдань, які спонукають до виконання підведення під поняття і виведення наслідків.

При знайомстві з означенням, логічна структура якого ще недостатньо відома учням, потрібно забезпечити поетапне формування дій підведення під поняття і виведення наслідків. Справді, розумові дії, які необхідно сформувати в учнів, не можуть бути засвоєні ними відразу в розумовій, внутрішній формі. Як пише А. Н. Леонтьєв, «на відміну від зовнішньої дії внутрішня дія безпосередньо не може бути побудована ззовні. Будуючи зовнішню дію, її можна показати дитині, можна, нарешті, механічно втрутитися в її виконання ... Інша справа – дія внутрішня, дія «у розумі». Її не можна ні показати, ні побачити; в процес її виконання дитиною не можна безпосередньо втрутитися. Тому для того, щоб побудувати у дитини нову розумову дію, її потрібно дати попередньо дитині як дію зовнішню» [3, с. 383]. Це положення емпірично відкрито вже давно. Дослідження А. Н. Леонтьєва, П. Я. Гальперіна, Н. Ф. Талізінної та інших психологів і педагогів відкрили такий алгоритм поетапного формування розумових дій, який дозволяє керувати засвоєнням. Цей алгоритм зводиться до наступного.

1. Учні дається орієнтовна основа дій (тобто роз'яснення, які дії їм належить здійснити і з яких операцій повинні складатися ці дії), фіксується у будь-якій матеріальній формі, і відразу після цього організовується робота учнів у матеріалізованій, зовнішній формі.

Виконання завдань на цьому етапі має бути дуже докладним, щоб будь-яку можливу змістовну або логічну помилку можна було виявити і виправити. Треба тільки вимагати, щоб при відповідях учень дивився на означення, читав його (а якщо може процитувати його напам'ять, то робив би це явно, а не «про себе»). У центрі уваги повинна бути не дана модель, а текст означення. Поки кожен учень не виконає самостійно кілька завдань у цій формі, переходити до наступної не можна.

2. Організовується робота у зовнішній мовленнєвій формі. Перед учнями немає інструкції, яка їх орієнтує (на кшталт плаката з означенням), вони нічого не вимірюють, але пояснення проводять так само докладно, як і при роботі на першому етапі. Якщо хто-небудь із учнів не справляється з роботою, то це означає, що його потрібно повернути до першої форми (тобто дати скористатися означенням, вимагати проведення вимірювань і т.д.).

3. Організовується робота у внутрішній мовленнєвій формі. Учні вимовляють все пояснення про себе, працюють мовчки. Однак кожне міркування завершується відповіддю, що матеріалізується вербально.

4. Організовується робота у внутрішній, згорнутій формі. На ті ж питання учні швидко відповідають «так» або «ні», і тільки у разі помилки пояснюють свої відповіді (що означає повернутися назад).

Такий алгоритм був багаторазово випробуваний при індивідуальному навчанні [3]. Стосовно класно-урочної системи навчання можна внести у нього наступні корективи: а) з'єднати в одну другу і третю форми; б) усне мовлення замінити письмовим.

Таким чином, виконання кожним учнем дій підведення під поняття і виведення наслідків – необхідна умова засвоєння означень шкільного курсу математики. У той же час

виконання завдань, які стимулюють ці дії, виявляється достатнім засобом для організації повторень і пропедевтики наступного матеріалу. Це означає, що правильна організація засвоєння означень вирішує різні і різноманітні завдання курсу математики. Суттєвим є і те, що всі «знахідки», які спостерігаються на уроках, присвячених вивченню конкретних означень, як правило, легко передбачити, виходячи з описаної методики побудови викладання. У методичній літературі, на жаль, не завжди враховується необхідність організації підведення під поняття і виведення наслідків під час вирішення задач. Але навіть у тих випадках, коли рекомендується організувати таку роботу, вона, як правило, спирається на сформований у свідомості учня еталон, а не на видові відмінності, зафіксовані в означенні. У результаті розв'язування задач виявляється відірваним від теоретичного матеріалу, який вивчається і не сприяє його засвоєнню.

Розкриємо ще один з шляхів розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики: володіння фахівцями різноманітними організаційними формами реалізації основних етапів роботи над формуванням понять.

Засвоєння понять і означень (як і інших дидактичних одиниць шкільного курсу математики: аксіом, теорем, правил, алгоритмів розв'язування задач) може бути організовано у формі самостійної опосередковано керованої роботи учнів, і тим самим виступати засобом і середовищем формування досвіду самостійної пізнавальної діяльності. Завдання вчителя полягає у створенні умов для ефективної самостійної пізнавальної діяльності учнів, спрямованої як на розвиток пізнавальної активності школярів, так і на їх предметну підготовку.

Розвиток пізнавальної активності передбачає саморегульовану пізнавальну діяльність учня. У той же час такої діяльності необхідно школяра навчити. Як наслідок, в рамках формування досвіду саморегульованого пізнання необхідна організація вивчення дидактичних одиниць учнем за допомогою самостійного їх покрокового засвоєння (побудови, конструювання). Даний процес може бути ефективно реалізований у рамках диференційовано-групової форми навчання за допомогою пред'явлення технологічних карт, які задають алгоритм навчальної роботи учнів на уроці. Застосування технологічних карт дає можливість, по-перше, створити умови для формування досвіду саморегульованого пізнання, по-друге – здійснювати диференційоване опосередковане педагогічне управління самостійною пізнавальною діяльністю учнів, по-третє – забезпечити засвоєння предметного навчального матеріалу. Значущим чинником у засвоєнні математичних понять є виділення інформаційно-сміслових елементів знання, закінчених за змістом і формою простих суджень, із подальшим поділом яких втрачається сенс.

Покажемо на практично орієнтованому прикладі, що процес засвоєння математичного поняття і його означення може являти собою ефективну основу для формування пізнавальної самостійності учня. Розглянемо можливу методику засвоєння означення поняття степеня з раціональним показником при вивченні курсу алгебри і початків математичного аналізу [1] із застосуванням технологічних карт (табл. 1–3).

Таблиця 1

Технологічна карта педагогічного супроводу засвоєння учнями з низьким рівнем сформованості пізнавальної самостійності означення кореня з раціональним показником

Завдання	Вказівки щодо виконання завдань
Нам відомо означення степеня з цілим показником a^n: 1) якщо $n = 1$ то $a^n = a$; 2) якщо $n = 0$ і $a \neq 0$, то $a^n = 1$; 3) якщо $n = 2, 3, 4, \dots$, то $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n множників); 4) якщо $n = 1, 2, 3, \dots$ і $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Наприклад, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Який сенс має запис $2^{\frac{3}{5}}$? «Припустимо, що число $2^{\frac{3}{5}}$ ми визначили як степінь $\frac{3}{5}$ числа 2, і для нього виконуються властивості степеня, зокрема $(a^n)^m = a^{nm}$. Тоді будуть вірні такі міркування: «Нехай $2^{\frac{3}{5}} = a$, тоді можна обидві частини рівності піднести до степеня, тобто $(2^{\frac{3}{5}})^5 = a^5$. Звідси, оскільки $\frac{3}{5} \cdot 5 = 3$, то $2^3 = a^5$, $a = \sqrt[5]{2^3}$. Тобто $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$». Означення: якщо $\frac{p}{q}$ звичайний дріб ($p > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$) і $a \geq 0$, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$.	Проведіть аналогічні міркування для рівності $5^{\frac{2}{3}}$. Запишіть дане означення в зошит.
Заповніть пропуски у наступних реченнях, використовуючи означення степеня з раціональним показником: 1. Якщо $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб ($p > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$) і $a \geq 0$, то _____, тобто $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$. 2. Під $a^{\frac{p}{q}}$ розуміють $\sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$, тобто $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$, при умові, що _____. 3. Якщо $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб ($p > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$) і $a \geq 0$, то під $a^{\frac{p}{q}}$ розуміють $\sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$, тобто _____.	Використовуйте означення: «Якщо $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб ($p > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$) і $a \geq 0$, то під $a^{\frac{p}{q}}$ розуміють $\sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$, тобто $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$»

4. Якщо $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб () і $a \geq 0$, то під $a^{\frac{p}{q}}$ розуміють $\sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$, тобто $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$. 5. Якщо $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб ($p > 0, q > 0, q \neq 1$) і , то під $a^{\frac{p}{q}}$ розуміють $\sqrt[q]{a^p}$, , тобто $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, .	
Чому в означенні «Якщо $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб ($p > 0, q > 0, q \neq 1$) і $a \geq 0$, то під $a^{\frac{p}{q}}$ розуміють $\sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$, тобто $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$» вказані обмеження: а) $p > 0, q > 0, q \neq 1$; б) $a \geq 0$?	Дайте означення звичайного дробу. Прочитайте зауваження підручника [1].
Запишіть, якщо це можливо, степінь у вигляді кореня n-ого степеня: а) $4^{\frac{2}{3}}$; б) $5^{\frac{7}{5}}$; в) $0^{\frac{4}{7}}$; г) $(-8)^{\frac{2}{3}}$	Використовуйте означення $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$
Запишіть, якщо це можливо, корінь у вигляді степеня: $\sqrt{5^3}$, $\sqrt[4]{2^3}$, $\sqrt[3]{(-3)^2}$, $-\sqrt[3]{4^7}$	Використовуйте означення $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a \geq 0$

Таблиця 2

Технологічна карта педагогічного супроводу засвоєння учнями із середнім рівнем сформованості пізнавальної самостійності означення кореня з раціональним показником

Завдання	Вказівки щодо виконання завдань
Нам відомо означення степеня з цілим показником a^n. 2^3 визначається як $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Який сенс має запис $2^{\frac{3}{2}}$? Відомо, що $25^{\frac{1}{2}} = 5$, $27^{\frac{1}{3}} = 3$, $16^{\frac{1}{4}} = 2$. Проведіть узагальнення і встановіть, чому дорівнює $a^{\frac{1}{n}}$? Цей вираз визначено тільки для невід'ємної основи степеня. З'ясуйте, які обмеження накладаються на показник степеня $\frac{1}{n}$?	Знайдіть закономірність і обчисліть $8^{\frac{1}{3}}$. При якому значенні n дріб визначено? Подайте $a^{\frac{m}{n}}$ як $(a^{\frac{1}{n}})^m$. Запишіть означення у зошит.

З урахуванням виявлених обмежень сформулюйте означення, заповнивши пропуски в рівності: $a^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$, при $\underline{\hspace{2cm}}$ (вставити обмеження a и n). Спираючись на отриману в означенні рівність і переносючи властивість степеня з цілим показником $(b^k)^p = b^{kp}$ на степінь із раціональним показником (істинність такого перенесення буде доведена пізніше), запишіть числовий вираз, використовуючи знак кореня: $25^{\frac{3}{2}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $16^{\frac{5}{4}}$, $a^{\frac{m}{n}}$. Сформулюйте означення, заповнивши пропуски: «Якщо $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб ($\underline{\hspace{2cm}}$) і $a \underline{\hspace{2cm}}$, то під $a^{\frac{p}{q}}$ розуміють $\underline{\hspace{2cm}}$, де $a \underline{\hspace{2cm}}$»	Звірте отримане означення з даними у підручнику [1].
Використовуючи отримане означення степеня з раціональним показником, випишіть його інформаційно-сміслові елементи: 1. $\frac{p}{q}$ – $\underline{\hspace{2cm}}$ ($\underline{\hspace{2cm}}$) 2. $a \underline{\hspace{2cm}}$ 3. $a^{\frac{p}{q}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 4. $\sqrt[q]{a^p} = \underline{\hspace{2cm}}$	
Чим обумовлені обмеження в даному означенні: а) $p > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$; б) $a \geq 0$?	Проаналізуйте зміст запису $a^{\frac{p}{q}}$. Прочитайте зауваження на стор. 141 підручника [1].
Запишіть, якщо це можливо, у вигляді кореня n-го степеня: а) $125^{\frac{1}{3}}$; б) $64^{\frac{5}{6}}$; в) $0^{\frac{2}{3}}$; г) $(-2)^{\frac{2}{3}}$; д) $27^{-\frac{2}{3}}$	Використовуйте означення степеня з раціональним показником.
Запишіть, якщо це можливо, корінь у вигляді степеня: $\sqrt{(-4)^3}$, $\sqrt[3]{3^2}$, $\sqrt[4]{0}$, $-\sqrt[3]{3^3}$	Використовуйте означення степеня з раціональним показником.

Технологічна карта педагогічного супроводу засвоєння учнями з високим рівнем сформованості пізнавальної самостійності означення кореня з раціональним показником

Завдання	Указівки з виконання завдань
Нам відомо означення степеня з цілим показником a^n. 2^3 визначається як $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Який сенс має запис $2^{\frac{3}{5}}$? Відомо, що справедливий запис: $25^{\frac{1}{2}} = 5$, $27^{\frac{1}{3}} = 3$, $16^{\frac{1}{4}} = 2$, чому дорівнює вираз $a^{\frac{1}{n}}$? Цей вираз визначено тільки для невід'ємної основи степеня. Переносючи властивості степеня з цілим показником на степінь із раціональним показником (істинність такого перенесення буде доведена пізніше), запишіть, чому дорівнює вираз $a^{\frac{m}{n}}$. Виявіть, які обмеження можуть накладатися на показник степеня, і сформулюйте означення, що розуміється під $a^{\frac{p}{q}}$, де $\frac{p}{q}$ – звичайний дріб?	Запишіть означення у зошит. Зверте отримане означення з поданим у підручнику [1].
Використовуючи отримане означення степеня з раціональним показником, випишіть його інформаційно-сміслові елементи.	
Поясніть, чим зумовлені обмеження у визначенні степеня з раціональним показником.	Проаналізуйте зміст p і q. Проаналізуйте зауваження на стор. 141 підручника [1].
1. Запишіть будь-які чотири числа з раціональним показником степеня у вигляді кореня n-го степеня. 2. Запишіть, якщо це можливо, у вигляді кореня n-го степеня: а) $0^{\frac{7}{10}}$; б) $(-4)^{\frac{1}{6}}$; в) $32^{-\frac{2}{5}}$.	Використовуйте означення степеня з раціональним показником.

1. Запишіть у вигляді степеня будь-які три числа, що представляють собою корені n -го степеня. 2. Запишіть, якщо це можливо, у вигляді степеня: $-\sqrt[4]{4^2}$, $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{(-49)^5}$.	Використовуйте означення степеня з раціональним показником.
---	---

Аналізуючи зміст технологічних карт (табл. 1–3), неважко помітити, що процес засвоєння поняття і його означення спрямований на поетапне формування навичок впізнавання, неусвідомленого відтворення (на рівні заучування), усвідомленого відтворення (на рівні розуміння, опису й аналізу дії з об'єктом), застосування знань у знайомій ситуації за зразком, застосування знань у незнайомій ситуації. Тим самим створюються умови для формування поняття і його означення.

Визначені напрями вдосконалення фахових компетентностей учителів-математиків було апробовано з позитивним результатом у процесі співпраці з педагогами Одеського приватного ліцею «Мрія»: на тренінгу для вчителів докладно розглядалися психолого-дидактичні аспекти формування математичних понять в учнів, учителі самостійно конструювали завдання, зміст яких реалізує алгоритм поетапного формування розумових дій, обговорювалися організаційні аспекти реалізації основних етапів роботи з поняттями, аналізувалися помилки, що найчастіше припускаються учнями у процесі формулювання означень, ознайомлювалися з фрагментами уроків по застосуванню адекватних методів і прийомів формування математичних понять в учнів.

Висновки. У представлений статті визначено напрями розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики. Вкрай важливо під час вдосконалення фахової підготовки учителів математики досягти усвідомлення ними значущості та сутності основ і етапів формування математичних понять, а також використання різноманітних організаційних форм реалізації формування понять в учнів. Досягненню цієї мети може слугувати забезпечення поетапного формування дій підведення під поняття і виведення наслідків, а також використання вчителем комплексів навчальних завдань і різноманітних організаційних форм. На думку автора, у такий спосіб може бути удосконаленим процес професійної підготовки учителів-математиків у контексті зазначеної проблеми.

Список використаних джерел

1. Алгебра і початки аналізу (профіль. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єрміна. Київ : Генеза, 2018. 448 с.
2. Гальперин П. Я. Формирование умственных действий и понятий. Москва : МГУ, 1985. 45 с.
3. Леонтьев А. Н. Проблема развития психики. Москва : Мысль, 1965. 402 с.
4. Рогановский Н. М. Методика преподавания математики в средней школе. Минск : Высшая школа, 1990. 388 с.
5. Талызина Н. Ф. Теория поэтапного формирования умственных действий и проблема развития мышления. Москва : Просвещение, 1966. 173 с.
6. Усова А. В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. Москва : Педагогика, 1986. 173 с.

РОЗДІЛ 3

Методика навчання учнів
доводити математичні твердження

3.1. ШЛЯХИ ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОВОДИТИ МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Світлана Іванова

Вступ. У останні роки спостерігається тенденція щодо зниження ролі доведень у навчанні математики. Ця тенденція з одного боку обумовлена дефіцитом навчального часу. Саме з цієї причини у класах з низьким рівнем математичної підготовки учнів переважна більшість теорем вивчається без доведення, а при розв'язуванні задач на обчислення обґрунтування окремих кроків не вважається обов'язковим. З іншого боку, серед завдань контрольних робіт, ДПА та ЗНО лише незначна частина – завдання на доведення математичних тверджень, тому формуванню в учнів умінь розв'язувати вправи на доведення не приділяється належна увага. Результатом зниження ролі доведень у навчанні математики є недостатній розвиток логічного мислення, його абстрактності, дедуктивності та евристичності у певної частини здобувачів освіти, тобто не виконується провідне завдання шкільної математичної освіти, що неприпустимо.

Отже, пошук шляхів вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження у сучасних умовах – важлива проблема, вирішення якої потребує сумісних зусиль науковців, методистів і вчителів.

Огляд останніх публікацій за темою. Проблему навчання учнів доведенню тверджень шкільного курсу математики досліджували видатні вчені-методисти: О. Д. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. Г. Болтянський, М. І. Бурда, Я. М. Грудьонов, Я. М. Жовнір, Ю. М. Колягін, Л. С. Карнацевич, О. В. Погорелов, З. А. Скопец, А. А. Столяр, В. О. Тадеєв, Н. А. Тарасенкова, І. Ф. Шаригін та ін.

Ця проблема розглядалася з різних боків. З точки зору побудови шкільного курсу геометрії на дедуктивній основі її розробляли О. Д. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, В. Г. Болтянський, О. В. Погорелов, В. О. Тадеєв, І. Ф. Шаригін та ін.

На основі формування в учнів узагальнених умінь та прийомів евристичної діяльності цю проблему досліджували М. І. Бурда, Я. М. Грудьонов, Я. М. Жовнір, Ю. М. Колягін, Л. С. Карнацевич, О. І. Скафа, З. І. Слепкань, В. С. Прач, Н. А. Тарасенкова, В. О. Швець та ін.

З точки зору врахування різних рівнів та профілів навчання проблема знайшла відображення у роботах А. І. Акуленко, М. І. Бурди, С. В. Іванової, К. В. Недялкової, І. А. Сверчевської, П. О. Сиваківського та ін.

Основи технології «Інтелект-карти» висвітлені у роботах Т. Т. Buzan, Т. Armstrong, N. R. Tee та ін.

Мета дослідження: визначення й експериментальне обґрунтування шляхів вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження у закладах загальної середньої освіти.

Виклад основного матеріалу. За вимогами до обов'язкових результатів навчання здобувачів освіти з математичної освітньої галузі (додаток 4 Державного стандарту базової середньої освіти) передбачено, що здобувач освіти «... обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, аналізує доказовість аргументів у своїх твердженнях і судженнях інших; формулює припущення і досліджує їх істинність» [4; с. 4].

У сучасних Програмах з математики для загальноосвітніх навчальних закладів у 5–9 та 10–11 класах для різних рівнів і профілів навчання визначені завдання щодо навчання учнів

доводити математичні твердження. Так, до загальних завдань шкільної математичної освіти належить завдання щодо «формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач ...» [8; с. 3]. Відповідно, серед специфічних завдань етапу навчання математики у 5–9 класах міститься завдання з «ознайомлення зі способами і методами розв'язування математичних задач, доведення математичних тверджень, формування умінь їх практичного використання ...» [8; с. 3].

У програмі з математики для 10–11 класів (рівень стандарту) вказано: випускник загальноосвітнього закладу «вміє проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі...» [10; с.1], а на профільному рівні «логічно мислить (аналізує та порівнює, прогнозує результат, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклад, висуває та перевіряє гіпотези); володіє алгоритмами та евристичними...» [11; с. 2].

Таким чином, проведенням аналізом нормативних документів щодо цільової моделі шкільного курсу математики встановлено: навчання учнів доводити математичні твердження віднесено до основних завдань шкільної математичної освіти. Виконання цього завдання забезпечується використанням базових основ і результатів актуальних досліджень методики навчання математики.

Домовимося про трактування важливих положень щодо базових основ методики навчання учнів доводити математичні твердження.

Навчання учнів доведенню передбачає:

- 1) аналіз готових доведень, запропонованих вчителем або представлених у підручнику, та їх відтворення;
- 2) «самостійне відкриття», безперечно, на основі підготовчої роботи, організованої учителем, математичного факту (тобто теоретичного положення: властивості, ознаки, формули);
- 3) висунення ідеї доведення, створення і реалізацію плану доведення;
- 4) аналіз доведення з метою виправлення можливих неточностей та помилок [13; с. 134].

Ураховуючи важливість навчання учнів, особливо тих, які вивчають математику на поглибленому рівні, доведенню математичних тверджень різними способами, вважаємо за доцільне до вказаних 4-х аспектів трактування поняття «навчання учнів доведенню тверджень» додати і п'ятий, – аналіз різних способів доведення математичних тверджень, їх порівняння і вибір раціонального [6].

Навчання доведенням у шкільному курсі математики проводиться поступово.

Спочатку в учнів формується потреба у логічних обґрунтуваннях та уміння виконувати дедуктивні висновки у простих випадках (5–6 класи). Потім учнів ознайомлюють з евристичними прийомами, їх використанням і навчають виконувати ланцюжок логічних кроків при індуктивних та простіших дедуктивних міркуваннях (6–7 класи). У 7-ому класі починається навчання учнів самостійному аналізу готового доведення, виділенню окремих його етапів та визначенню ідеї доведення.

Під час навчання учнів у 7–9 класах формуються уміння використовувати методи доведення, визначені програмою; самостійно доводити твердження; виправляти помилки і окремі огріхи у доведеннях; аналізувати різні способи доведення твердження, порівнювати їх і визначати переваги кожного, вибирати серед декількох способів доведення раціональніший.

Така робота щодо навчання учнів доведенню математичних тверджень продовжується, поглиблюється та узагальнюється при навчанні учнів у 10–11 класах.

Одна з важливих закономірностей методики навчання математики полягає в тому, що рівень навчання багато в чому визначається як насиченістю курсу математики теоретичними положеннями, які передбачено обов'язково доводити (теореми, опорні задачі-факти), так і відповідним ступенем навчання доведенням: сформованістю в учнів умінь використовувати різні методи під час доведення тверджень; виправляти помилки у доведеннях; аналізувати різні способи доведення твердження та ін.

Таким чином, провідною ознакою поглибленого навчання математики є наявність у його змістовій складовій великої кількості тверджень, які передбачено доводити, у тому числі і самостійно, та високий рівень сформованості в учнів умінь доводити такі твердження.

Разом із тим, ураховуючи загальне завдання шкільної математичної освіти щодо формування *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження на будь-якому рівні навчання математики передбачено обов'язкове доведення центральних, ключових теорем (ознаки рівності трикутників, властивості рівнобедреного та рівностороннього трикутників, ознаки паралельності прямих, теореми Піфагора, теореми Фалеса, теореми синусів і косинусів та ін.) [5].

Розглянемо деякі особливості методики навчання учнів доводити математичні твердження.

З нашої точки зору, під час проектування роботи з учнями над вивченням математичних тверджень, зокрема теорем або опорних задач-фактів, важливим є виокремлення етапів такої роботи.

У методиці навчання математики існують різні підходи до визначення етапів організації роботи над вивченням теорем. За підходом, запропонованим З. І. Слєпкань, виділяються такі етапи [13; с. 138]:

- 1) актуалізація опорних знань та умінь учнів;
- 2) мотивація вивчення теореми;
- 3) введення назви (за можливістю) і формулювання;
- 4) скорочений запис;
- 5) пошук, проведення і запис доведення;

6) закріплення (повторне формулювання теореми; визначення її виду; домовленість про скорочену назву; зв'язування до яких об'єктів можна застосувати цю теорему; з'ясування плану доведення теореми);

- 7) використання теореми.

К. В. Недялкова виокремлює наступні етапи роботи з учнями над твердженням:

1) підготовча робота (актуалізація опорних знань, створення проблемної ситуації, мотивація назви поняття (терміну), експеримент, висування гіпотези та ін.);

2) формулювання теореми (аналіз умови, побудова рисунка, короткий запис «дано – довести»);

- 3) доведення теореми;

- 4) закріплення доведення;

- 5) застосування й узагальнення теореми [12].

Ця систематизація має певні переваги – скорочення кількості етапів за рахунок об'єднання 1 і 2 етапів, а також 3 і 4. Але наш досвід аналізу уроків математики вчителів-початківців свідчить: вони часто утруднюються при розробці мотивації вивчення теореми і

тому її не проводять. Виділення мотивації у окремий етап має сприяти приділенню більшої уваги такій важливій складовій роботи з теоремою.

Щодо етапу засвоєння формулювання теореми, то деяким учителям така робота здається марною витратою часу, оскільки для них формулювання теореми добре відоме і вони не припускають можливих утруднень учнів. Але така точка зору є помилковою. Саме тому вважаємо доцільним виокремити етап роботи над засвоєнням формулювання теореми.

З урахуванням результатів проведеного аналізу методичної літератури та експериментальних досліджень, нами були внесені часткові корективи та уточнення у систему етапів роботи над математичним твердженням, запропановану у навчальному посібнику [13].

Вважаємо за доцільне рекомендувати вчителям під час підготовки уроків із вивчення теорем користуватися такою системою етапів роботи над теоремою:

- 1) актуалізація опорних знань і умінь учнів;
- 2) мотивація вивчення теореми;
- 3) робота над введенням і засвоєнням формулювання теореми;
- 4) побудова рисунка (у геометрії), короткий запис умови і вимоги теореми;
- 5) робота над доведенням теореми;
- 6) застосування теореми у найпростіших випадках;
- 7) застосування теореми і визначення її місця у шкільному курсі математики.

Розглянемо детальніше сутність роботи на кожному із запропонованих етапів.

1. Актуалізація опорних знань і умінь учнів. На цьому етапі передбачено повторення основних відомостей (означень понять, математичних фактів, ідеї та етапів застосування окремих методів доведень), які використовуються у формулюванні та доведенні теореми. При повторенні конкретного методу доведення (від супротивного, векторного, або координатного та ін.) або прийому доведення (використання допоміжної побудови, введення допоміжних елементів та ін.) доцільно на попередньому уроку повторити ідею і етапи застосування даного методу або сутність прийому і включити у домашнє завдання задачу, яка розв'язується за допомогою цього методу або прийому. У такому випадку під час перевірки домашнього завдання відбувається і актуалізація опорних знань і умінь учнів.

2. Мотивація вивчення теореми. Тут доцільно використовувати: цікаві історичні відомості, пов'язані з даною теоремою; наочність (моделі, креслення, комп'ютерну графіку), проведення експерименту; встановлення доцільності вивчення даного твердження для подальшого застосування при розв'язуванні задач практичного змісту або доведенні інших теорем.

3. Робота над введенням і засвоєнням формулювання теореми. При введенні формулювання теореми користуємося або конкретно-індуктивним, або абстрактно-дедуктивним методами. У першому випадку вчитель створює проблемну ситуацію (на основі виконання побудов, або проведення вимірювань, або розв'язування задач на обчислення або виявлення певних залежностей), яка вирішується учнями самостійно або з частковою допомогою вчителя. Підсумком такої роботи є висунування варіантів твердження і уточнення його до правильного формулювання теореми. У другому випадку вчитель самостійно формулює теорему, а завдання учнів – зрозуміти її зміст.

Вважається, що використання конкретно-індуктивного методу сприяє свідомому засвоєнню теореми, кращому розумінню її сутності. Саме цьому методу треба віддавати перевагу під час навчання учнів геометрії у 7–9 класах. Недоліки даного методу: 1) потребує

значних часових витрат; 2) має обмежену область використання, оскільки підвести учнів до «самостійного відкриття» можна лише в окремих випадках.

4. Побудова рисунка (у геометрії), короткий запис умови і вимоги теореми. При виконанні цього етапу дуже важливо, щоб учитель звертав увагу учнів на необхідність дотримання вимог щодо правильності і наочності рисунка, коректного застосування типових позначень, чіткого оформлення короткої умови і висновку.

5. Робота над доведенням теореми. Рекомендуємо проводити трикратне доведення, тобто прогін доведення у три рази з певними варіаціями. Так, при першому прогоні акцентуємо увагу учнів на ознайомленні з ідеєю доведення; для другого прогону головне – виділення окремих кроків доведення, детальне їх обґрунтування та оформлення відповідних зразків-записів на дошці; мета третього прогону - повторення послідовності кроків доведення і формування в учнів уміння доводити теорему цілком.

6. Застосування теореми у найпростіших випадках. На даному етапі передбачається розв'язування найпростіших задач на застосування доведеної теореми, що реалізується, як правило, усно або за готовими рисунками з коротким записом розв'язання. Також на цьому етапі можна запропонувати учням довести дану теорему за зміненим рисунком (пропорції, розташування, розміри геометричної фігури та позначення її елементів).

7. Застосування теореми і визначення її місця у шкільному курсі математики. Цей етап, відповідно, передбачає роботу у 2-х напрямках: розв'язування більш складних задач із застосуванням доведеної теореми та встановлення зв'язків даної теореми із вивченими раніше теоремами.

Якщо можливо, на даному етапі проводиться робота щодо узагальнень теореми. Наприклад, узагальнення теореми Піфагора – теорема косинусів, узагальнення формули Герона – теорема Брахмагупти.

Таким чином, одним із шляхів удосконалення методики навчання учнів доведенню математичних тверджень вважаємо чітке застосування представлених етапів роботи над вивченням доведень математичних тверджень (теорем, опорних задач-фактів).

На нашу думку, іншим важливим напрямом вдосконалення методики навчання учнів доведенню математичних тверджень є їх доведення різними способами із використанням технології «Інтелект-карт». Розглянемо результати проведеної нами експериментальної роботи щодо встановлення доречності та ефективності використання технології інтелект-карт під час навчання учнів доведенню математичних тверджень загалом, і різними способами, зокрема.

Технологія «Інтелект-карт» (Mind Maps) або «Майнд-карт», або «Карт-міркувань», або «Ментальних карт» була розроблена англійським психологом Тоні Б'юзеном (Tony Buzan, 1942-2019 рр.). Сутність цієї технології і різні варіанти її застосування представлені у 82 книгах, у яких учений є автором або співавтором: «Научите себя думать», «Подключай свою память», «Руководство по развитию способностей к учебе для будущего поколения», «Книга интеллект-карт: разветвленное мышление» та ін. [18].

Класична інтелект-карта має таку структуру:

1. У центрі – основне поняття / ідея / тема.
2. Від центрального образу відходять гілки першого рівня, що розкривають центральне поняття / ідею / тему.
3. Від гілок першого рівня (за необхідності) відходять гілки другого рівня, які розкривають поняття / ідею, написані на гілках першого рівня.

4. Де можливо, використовуються символи / графічні образи, які асоціюються з ключовими поняттями / ідеями / темою.

5. Стрілками сполучають пов'язані між собою поняття / ідеї / розділи теми.

Основна мета застосування інтелект-карт – структурування та наочне представлення інформації [18, 20].

Вважаємо, що інтелект-карта за суттю – блок-схема, що розкриває поняття. За допомогою інтелект-карти встановлюються зв'язки даного поняття з іншими. Таким чином, доцільно узагальнити трактування поняття «інтелект-карта» та в якості різновидів інтелект-карт при навчанні математики розглядати:

- 1) опорні конспекти (методика В. Ф. Шаталова та ін.);
- 2) опорні схеми (синтез блок-схем алгоритмів і ментальних карт);
- 3) таблиці з широким застосуванням графічного матеріалу (Г. В. Апостолова, Є. П. Нелін, Н. А.Тарасенкова та ін.);
- 4) діаграми Сйлера-Вена.

Нами розроблені опорні схеми доведень теорем геометрії (різновиди інтелект-карт). Така опорна схема складатиметься із назви теореми, рисунка до теореми з необхідними позначеннями і блок-схеми доведення. Для встановлення зв'язків між рисунком і блок-схемою використана запропонована нами система відповідних кольорів та позначень.

Розглянемо приклад опорної схеми доведення теореми Фалеса традиційним способом (рис. 1).

На нашу думку, кожна опорна схема може бути представлена у різних виглядах відповідно до міри деталізації. Так, представлена опорна схема доведення теореми Фалеса за необхідності може містити формулювання теореми, більш детальне наповнення кожного блоку тощо. Іноді поряд із опорною схемою записуються відповідні тези доведення. Отже, опорні схеми можуть бути різною мірою деталізовані, у залежності від конкретних особливостей їх використання.

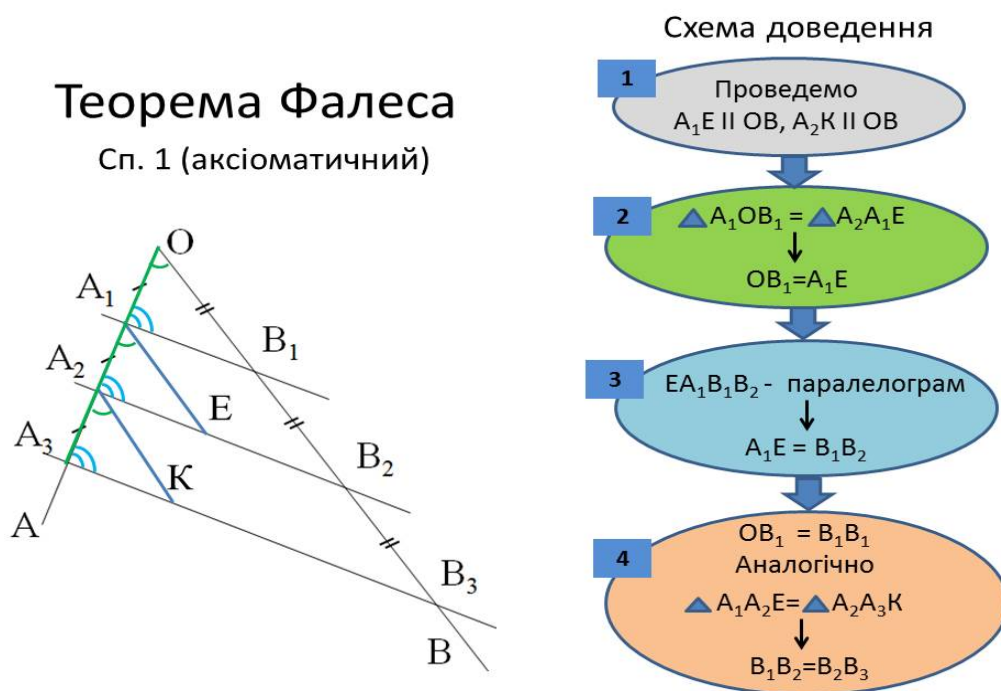


Рис. 1. Опорна схема доведення теореми Фалеса аксіоматичним способом

Інший спосіб доведення теореми Фалеса методом від супротивного представлено інтелект-картою у вигляді таблиці з широким застосуванням графічного матеріалу (рис. 2).

Теорема Фалеса	
Сп. 2 (доведення методом від супротивного)	
I. $OB_1 = B_1B_2$ (т. B_1 – середина OB_2) -?	II. $B_1B_2 = B_2B_3$ -?
1) Припустимо	
т. C_1 – середина OB_2	т. C_2 – середина B_1B_3
2) A_1C_1 – середня лінія $\triangle A_2OB_2$ $\Downarrow$ $A_1C_1 \parallel A_2B_2$	2) A_2C_2 – середня лінія $\triangle A_3A_1B_1B_3$ $\Downarrow$ $A_2C_2 \parallel A_3B_3$
3) Через т. A_1 / т. A_2 проведені дві прямі паралельні третій (протириччя)!!!	
4) $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$	

Рис. 2. Опорна схема доведення теореми Фалеса методом від супротивного

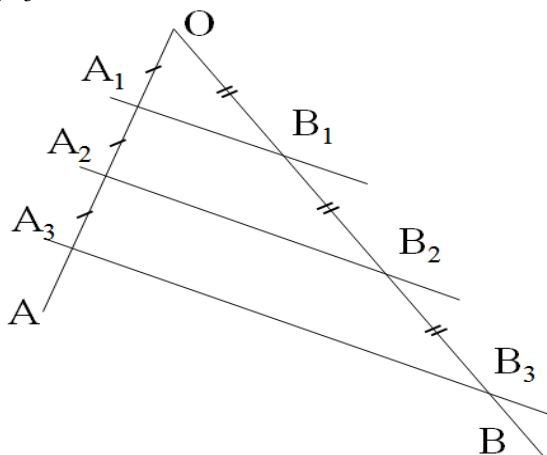
Розглянемо питання використання цих способів доведення теореми Фалеса під час навчання геометрії у 8-му класі.

При поглибленому навчанні математики доречно використовувати як традиційний спосіб доведення, так і нетиповий, у даному випадку, спосіб доведення від супротивного. Це дозволить повторити особливості реалізації кожного способу під час доведення, порівняти їх. В учнів з'явиться можливість вибору того способу доведення, який відповідає їх пізнавальним можливостям та інтересам.

Щодо доцільності використання 2-х способів доведення теореми Фалеса на базовому рівні навчання, то тут треба враховувати рівень математичної підготовки більшості учнів. Якщо рівень цієї підготовки достатній, то корисно ознайомити учнів з двома способами доведення теореми Фалеса.

У випадку низького рівня математичної підготовки більшості учнів рекомендуємо довести теорему Фалеса традиційним аксіоматичним способом. А учням, які цікавляться математикою, запропонувати самостійно ознайомитися з другим способом доведення теореми Фалеса. Рекомендуємо застосувати у цьому випадку опорну таблицю доведення теореми Фалеса методом від супротивного, яка містить і завдання для перевірки засвоєння даного методу (табл. 1).

Доведення теореми Фалеса методом від супротивного

Теорема ФалесаДано: $\angle AOB$, $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.Довести: $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ 

1. Записати доведення теореми Фалеса з використанням заданої таблиці для двох випадків, якщо $OB_1 = B_1B_2$ (випадок I) і якщо $B_1B_2 = B_2B_3$ (випадок II).

I. $OB_1 = B_1B_2$ (т. B_1 – середина OB_2) -?	II. $B_1B_2 = B_2B_3$ -?
1) Припустимо	
т. C_1 – середина OB_2	т. C_2 – середина B_1B_3
2) A_1C_1 – середня лінія $\triangle A_2OB_2$ $\Downarrow$ $A_1C_1 \parallel A_2B_2$	2) A_2C_2 – середня трапеції $A_3A_1B_1B_3$ $\Downarrow$ $A_2C_2 \parallel A_3B_3$
3) Через т. A_1 / т. A_2 проведені дві прямі паралельні третій (протиріччя)!!!	
4) $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$	

2. Встановити, які теоретичні відомості використано при доведенні теореми Фалеса методом від супротивного за даною опорною таблицею?

А	Означення та властивості середньої лінії трикутника, аксіома паралельних прямих.
Б	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
В	Властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
Г	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих

Розглянемо організацію роботи щодо навчання учнів різним способам доведення теореми синусів. Наведемо приклад опорної схеми доведення теореми синусів традиційним способом, який використовується у більшості підручників (рис. 3).

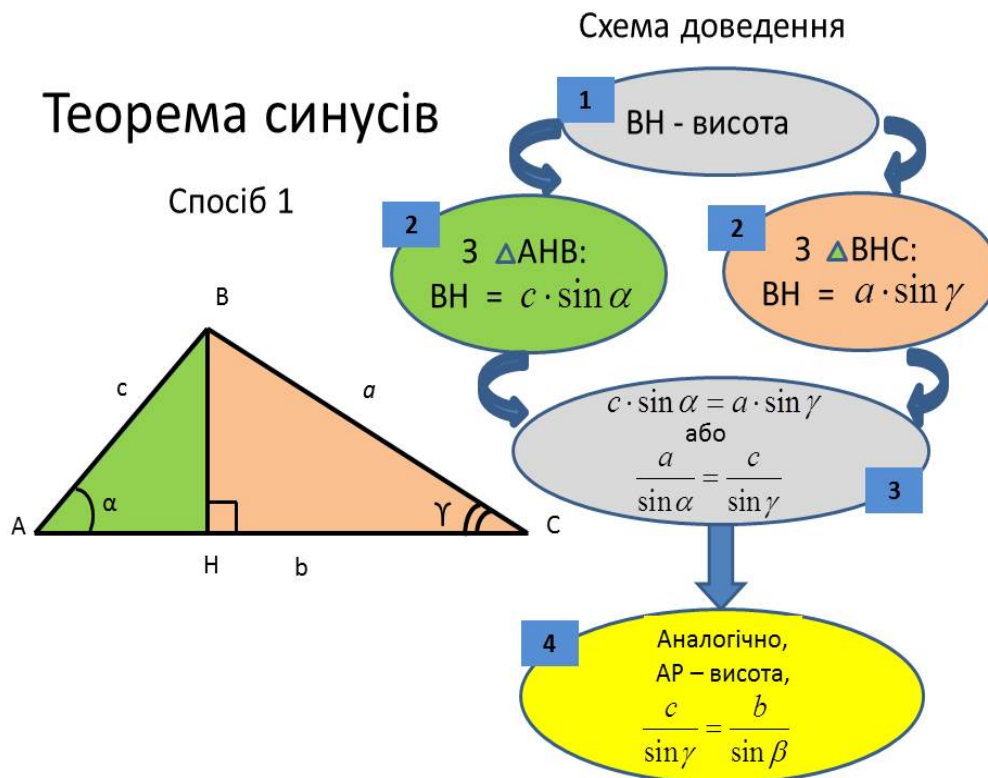


Рис. 3. Опорна схема доведення теореми синусів (спосіб 1)

Пропонуємо довести теорему синусів і способом, при якому використовується прийом введення допоміжного кола (рис. 4). Дидактична цінність даного способу полягає у тому, що він дозволяє одночасно довести і теорему синусів, і формулу для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника за його стороною і синусом кута, протилежного цій стороні $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$.

Зазвичай реалізується така послідовність: спочатку доводимо теорему синусів, а потім виводимо дану формулу як наслідок теореми синусів або опорної задачі-факту.

Що стосується використання цих способів доведення при навчанні геометрії на базовому рівні, то тут, знов таки, треба враховувати рівень математичної підготовки більшості учнів. Але, і у випадку низького рівня такої підготовки рекомендуємо учням, які цікавляться математикою, представити можливість ознайомитися із другим способом доведення теореми синусів. Це може бути завдання щодо «розшифрування» опорної схеми доведення теореми синусів, тобто визначення і запис етапів доведення теореми синусів способом введення допоміжного кола. Таким чином, із метою підвищення інтересу учнів до доказових міркувань застосовуються різні способи доведення.

Нами розроблено приклади щодо демонстрації можливостей застосування теоретичних відомостей нової теми для обґрунтування доведення вже відомих тверджень новим для учнів способом. Так, наприклад, пропонуємо застосування методу координат (під час вивчення теми «Декартові координати») продемонструвати для доведення теореми косинусів або властивості

діагоналей паралелограма (залежність довжин діагоналей паралелограма від довжин його сторін).

Теорема синусів

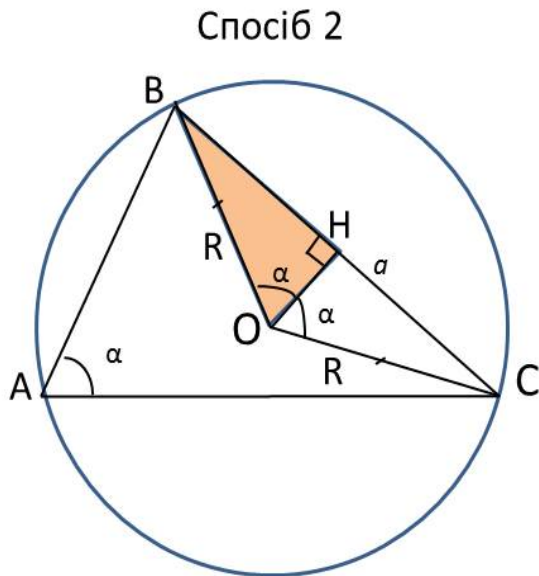


Схема доведення

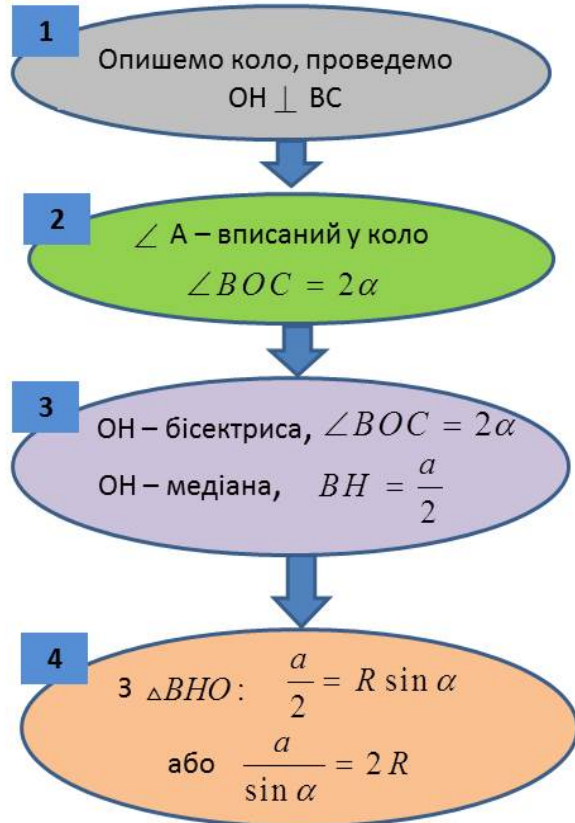


Рис. 4. Опорна схема доведення теореми синусів (спосіб 2)

Проведені нами експериментальні дослідження дозволили уточнити способи реалізації диференційованого навчання під час доведення теорем різними способами, пов'язані із розширенням кола варіантів організації роботи над доведенням твердження.

Обґрунтовано, що чітка організація навчання доведення теорем різними методами та способами, яка містить їх порівняння, вибір раціональнішого, роботу щодо конкретизації та узагальнення та ін., сприяє розвитку логічного мислення учнів.

Виокремимо позитивні сторони використання різних способів доведень математичних тверджень загалом, і теорем, зокрема:

1) розширення діапазону можливостей для кожного учня щодо засвоєння доведення конкретного математичного твердження;

2) створення можливостей для реалізації особистісно орієнтованого навчання (самостійний вибір учнем способу доведення, який він краще зрозумів, який відповідає його інтересам та рівню підготовки);

3) слушна нагода повторення різних методів і прийомів доведення та порівняння їх використання у конкретних випадках;

4) повторення більшої кількості теоретичних фактів, на які спираємося під час доведень.

До негативних сторін використання різних способів доведень математичних тверджень віднесемо:

1) збільшення витрат навчального часу;

2) ускладнення роботи вчителя при підготовці до уроку.

На основі аналізу методичної літератури і проведених нами експериментальних досліджень установлено, що застосування технології «Інтелект-карти» під час навчання учнів доведенню математичних тверджень забезпечує:

- реалізацію принципу наочності, а саме демонстрацію зв'язків ідей / об'єктів / понять і послідовності окремих етапів доведення;
- створення підстав для виникнення асоціацій щодо застосування конкретного способу доведення;
- підвищення швидкості і посилення ефективності процесу генерації ідей;
- посилення якості та інтенсивності навчання учнів доводити твердження;
- сприяння розвитку логічного мислення учнів;
- полегшення запам'ятовування доведень.

На тренінгах з учителями-математиками на базі Одеського приватного ліцею «Мрія» обговорювалися особливості реалізації творчого підходу вчителя до вибору способу доведення твердження з урахуванням рівня навчання учнів, а також організація роботи щодо навчання учнів використанню різних способів доведення. Учасники заходів позитивно оцінили застосування різновидів інтелект-карт у вигляді опорних схем і таблиць (з широким застосуванням графічного матеріалу) до організації роботи щодо навчання учнів доводити математичні твердження.

Висновки. Проведене дослідження на емпіричному та теоретичному рівнях дозволяє стверджувати, що представлені шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження є обґрунтованими та ефективними. Апробація зазначених напрямів роботи успішно відбувалася у процесі співпраці з учителями природничо-математичного циклу Одеського приватного ліцею «Мрія».

Список використаних джерел

1. Акуленко І. А. Індукція і дедукція у міркуванні школярів. *Математика в школі*. 2005. № 7. С. 9–17.
2. Бевз Г. П. Доведення від супротивного (геометрія). *Математика в школах України*. 2006. № 1. С. 6–9.
3. Гришина Т. Рівнева організація роботи над теоремою. *Математика в школі*. 2002. № 1. С. 20–23.
4. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://nus.org.ua/wp-content/uploads/2019/06/standart-1206.pdf>
5. Іванова С. В. Формування геометричних умінь старшокласників шкіл (класів) гуманітарного профілю : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 Київ, 1999. 221 с.
6. Іванова С. В., Іванова О. В. Методичні особливості навчання учнів загальноосвітніх шкіл доведенню геометричних тверджень з урахуванням вимог ЗНО. *Актуальні проблеми методики навчання математики* : матеріали регіон. наук.-практ. конф. Одеса, 14-15 травня 2008 р. / за ред. С. В. Іванової. Одеса : Наука і техніка, 2008. С. 26–31.
7. Моторіна В. Г. Інноваційні підходи до навчання математики : навчальний посібник. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, Скорпіон, 2008. 112 с.

8. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-9 класи. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
9. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. URL: <https://uman-rvoms.gov.ua/navchalni-programi-dlya-89-klasiv-z-pogliblenim-vivchennyam-12-33-08-18-06-2020/>
10. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://rada.info/upload/users_files/02146959/e971b695934c0b9b5013d002d698bcfe.pdf
11. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://rada.info/upload/users_files/02146959/828babe8f5aa78569243a87a59f77197.pdf
12. Недялкова К. В. Загальна методика навчання математики : практичний курс. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.
13. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика : навчальний посібник для організації самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. / З. І. Слєпкань та ін. ; за заг. ред. З. І. Слєпкань. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. 293 с.
14. Прач В. С. Евристичне навчання математики : Подорож у світ евристики. Донецьк : Ноулідж, 2012. 275 с.
15. Сверчевська І. А. Компетентісний підхід до навчання учнів доведенням тверджень про геометричні тіла <https://core.ac.uk/download/pdf/12081826.pdf>
16. Сиваківський П. О. До проблеми різних доведень одного твердження в шкільному курсі геометрії. *Математика в школі*. 2000. № 3. С. 36–39.
17. Шарьгин И. Ф. Нужна ли в школе XX века геометрия? *Математика в школе*. 2007. № 4. С. 72–80.
18. T. Buzan. Mind map mastery: The complete guide to learning and using the most powerful thinking tool in the universe. Watkins Media Limited, 2018.
19. T. Armstrong. The Whole-brain Solution: Thinking Tools to Help Students Observe, Make Connections and Solve Problems. Pembroke Publishers Limited, 2003.
20. N. R. Tee, et al. Buzan mind mapping : An efficient technique for note-taking. *International Journal of Psychological and Behavioral Sciences*, 2014, 8.1: 28–31.
21. S. Ivanova, L. Dimitrov, V. Ivanov and G. Naleva, "An Experiment on the Joint use of the Heuristic and Project Methods at the University," *2019 II International Conference on High Technology for Sustainable Development (HiTech)*, Sofia, Bulgaria, 2019, pp. 1–5, doi: 10.1109/HiTech48507.2019.9128248.

3.2. НАПРЯМИ РОЗВИТКУ МЕТОДИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ВЧИТЕЛІВ-МАТЕМАТИКІВ ЩОДО НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОВОДИТИ МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Катерина Недялкова

Вступ. Усебічний аналіз досвіду роботи вчителів-математиків у сучасних закладах загальної середньої освіти змушує констатувати зменшення інтересу учнів до доказових міркувань, розв'язування задач на доведення, самостійного пошуку доведень, різних способів доведення тверджень шкільного курсу математики тощо. У значній кількості учнів помічається гальмування розвитку предметної математичної компетентності щодо доведень тверджень як курсу геометрії, так і курсу алгебри сучасної школи. Водночас, при навчанні учнів доводити математичні твердження відбувається розвиток логічного мислення учнів, просторових уявлень та уяви; учні вчаться методам доведень, засвоюють евристичні прийоми розумової діяльності; у школярів формуються позитивні якості особистості: наполегливість, посидючість, кмітливість та ін. Відтак, постає проблема підвищення інтересу здобувачів середньої освіти до доказових міркувань – з одного боку; а з іншого – розвиток методичної компетентності учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження.

Огляд останніх публікацій за темою. Питаннями логічних основ сучасного шкільного курсу математики і методики доведень теорем активно займалися вчені-математики, методисти і практики другої половини ХХ століття: П. С. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, М. І. Бурда, О. В. Погорєлов, В. Ю. Серєда, З. І. Слєпкань, А. А. Столяр, І. Ф. Тесленко, С. М. Чашечников, Л. І. Чашечникова та ін.

В українських наукових працях розкриття змісту поняття «методична компетентність вчителя математики» зустрічаємо у публікаціях І. А. Акуленко, А. О. Кузьмінського, С. О. Скворцової, Н. А. Тарасенкової. За означенням С. О. Скворцової, під методичною компетентністю вчителя математики розуміється системне особистісне утворення, що виявляється у здатності до здійснення та організації процесу навчання математики на рівні сучасних вимог, спроможності успішного розв'язування методичних задач, яке ґрунтується на теоретичній і практичній готовності до викладання предмета [9, с. 36–37].

Проблемою формування методичної компетентності, зокрема у навчанні учнів геометрії, займаються сучасні вчені-методисти: С. В. Іванова, К. В. Недялкова, О. С. Чашечникова, В. О. Швець та ін. Зазначеній проблемі присвячено дисертаційне дослідження О. І. Матяш [6]. Учена визначає поняття та структуру методичної компетентності вчителя математики, рівні методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики, надає методичну систему формування методичної компетентності майбутніх учителів математики до навчання учнів геометрії. За О. І. Матяш, методична компетентність майбутнього вчителя математики – це очікуваний результат методичної підготовки вчителя, який включає методичну грамотність, досвід методичної діяльності та методичні переконання. Цей очікуваний результат, згідно з термінологією компетентнісного підходу, полягає у готовності і здатності майбутнього вчителя математики методично грамотно, творчо розв'язувати комплекс задач методичної діяльності щодо формування математичної компетентності учнів, які випливають із дидактичних, виховних і розвивальних цілей навчання математики в школі [5, с. 121]. Дослідниця вводить новий термін: геометрично-методична компетентність вчителя математики, під яким розуміє готовність і здатність вчителя математики методично грамотно,

творчо розв'язувати комплекс задач методичної діяльності щодо формування геометричної компетентності учнів [5, с. 124].

Відтак, проблема методичної підготовки майбутніх учителів математики до навчання учнів доводити математичні твердження є достатньо вивченою. Водночас, потребують розробки у різних аспектах питання вдосконалення методичної компетентності вчителів-математиків, які мають певний досвід педагогічної діяльності; з огляду на це, представлене дослідження є актуальним.

Мета дослідження: з'ясувати й експериментально обґрунтувати напрями розвитку методичної компетентності вчителів-математиків щодо навчання учнів доводити математичні твердження.

Виклад основного матеріалу. Аналіз засад сучасної української системи професійної підготовки майбутніх учителів математики, нормативних освітніх документів, професійної діяльності практикуючих учителів математики, спілкування у професійних колах із освітянами, молодими і досвідченими вчителями-математиками, включаючи педагогів Одеського приватного ліцею «Мрія», дозволяє констатувати високий рівень їхнього професіоналізму, вмотивованості до нелегкої педагогічної праці, належний рівень методичної компетентності. Як зазначає О. С. Чашечникова, порівнюючи український і зарубіжний досвід підготовки вчителів математики, традиційна українська система позитивно відрізняється своєю фундаментальністю, спрямованістю на ознайомлення студентів з методологічними основами методики навчання математики, знаннями про принципи і методи, форми та засоби навчання з подальшим формуванням умінь використовувати існуючі методичні системи та конструювати (вдосконалювати) методики викладання конкретних тем шкільної програми, адаптувати їх до конкретних умов, прогнозуючи можливі результати; забезпеченням аксіологічного, змістового, технологічного, особистісно-творчого компонентів професійної підготовки [12, с. 176].

Водночас, таке особистісне утворення, як методична компетентність потребує постійного вдосконалення, враховуючи бурхливі зміни сьогодення, зокрема в освітніх тенденціях, реалії сучасної педагогічної практики, особливості дітей цифрового покоління.

Не претендуючи на вичерпність, нами було виокремлено напрями розвитку методичної компетентності вчителів-математиків у частині навчання учнів доводити математичні твердження:

- 1) усвідомлення фахівцями ролі та значущості формування в учнів культури доказових міркувань;
- 2) розуміння вчителями ролі, сутності пропедевтики навчання учнів доводити математичні твердження та вміння її здійснювати;
- 3) удосконалення вміння виконувати логіко-математичний аналіз доведення;
- 4) дотримання вчителями математики основних етапів роботи з теоремами та їх доведеннями;
- 5) володіння фахівцями різноманітними організаційними формами реалізації основних етапів роботи над теоремами;
- 6) усвідомлення вчителями значущості та доречності застосування різних способів доведень теорем і вміння їх реалізовувати.

Практикуючі вчителі мають пам'ятати, що під навчанням учнів доводити математичні твердження розуміється навчання готових доведень, які пропонуються вчителем або авторами підручників, а також навчання самостійному пошуку доведень тверджень [10, с. 75]. Під час

тренінгів ми нагадували фахівцям, що проблему навчання доведень доцільно розділити на декілька методичних завдань, які розв'язуються послідовно: 1) вивчення готових доведень, уміння відтворювати їх; 2) самостійна побудова учнями доведень за аналогією із вивченим доведенням; 3) пошук і виклад доведень способом, указаним учителем; 4) самостійний пошук учнями способу доведення математичного твердження і його реалізація.

Учителів математики повинні усвідомлювати, що необхідно проводити пропедевтичну роботу з учнями щодо доведень тверджень, починаючи з початкової школи, виховуючи корисну звичку все пояснювати, обґрунтовувати.

Відзначимо, що автори сучасних підручників 5–6 класів активно залучають до задачного матеріалу завдання, спрямовані на формування в учнів культури доказових міркувань. Наприклад, у підручнику [11, с. 89] можна знайти такі вправи:

№ 429*. Знайдіть помилку в міркуваннях: «Розглянемо правильну рівність: $4 : 4 = 5 : 5$. Застосуємо розподільну властивість: $4 \cdot (1 : 1) = 5 \cdot (1 : 1)$. $(1 : 1) = (1 : 1)$, тому $4 = 5$ ».

402*. Знайдіть помилку в міркуваннях:

«Розглянемо правильну числову рівність: $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$.

Застосуємо розподільний закон: $5 \cdot (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9)$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на множник $(7 + 2 - 9)$.

Одержимо: $5 = 6$ ». [11, с. 82].

У підручнику [4] зустрічаємо такі завдання:

938. (с. 177) Чи є правильним твердження:

- 1) модулі протилежних чисел рівні;
- 2) якщо модулі двох чисел рівні, то ці числа протилежні?

987. (с. 183) Чи є правильними твердження:

- 1) якщо $x > 2$, то x — додатне число;
- 2) якщо $x > -1$, то x — додатне число;
- 3) якщо $y < -1$, то y — від'ємне число;
- 4) якщо $y < 2$, то y — від'ємне число?

1272. (с. 228) Доведи, що значення виразу $(2x - 3) \cdot 0,2 - (3x - 4) \cdot 0,5 - (2,6 - 1,1x)$ не залежить від значення змінної.

Отже, вчителям залишається «не проходити повз» таких завдань і приділяти належну увагу підготовчому етапу навчання учнів доводити математичні твердження.

З 7 класу починається систематична робота з навчання учнів доводити математичні твердження; при цьому вчителі мають усвідомлювати, що розуміння учнями доведень, які пропонуються на уроці або представлені у підручнику, вміння відтворювати готові доведення теореми або формули – перший, важливий рівень навчання доведень, і головними моментами у цій роботі є такі: 1) розуміння вихідних положень (даних) і вимог теореми (задачі); 2) усвідомлення основної ідеї і системи розгортання доведення; 3) розуміння методу, яким здійснюється доведення; 4) виділення основних етапів доведення, чітке усвідомлення всіх аргументів доведення [10].

Важливим є добре сформоване вміння вчителя математики виконувати логіко-математичний аналіз доведення. На тренінгах для вчителів Одеського приватного ліцею «Мрія» із метою вдосконалення методичної компетентності щодо навчання учнів доводити математичні твердження нами проводився логіко-математичний аналіз доведення теореми-ознаки вписаного чотирикутника, теореми-властивості діагоналей паралелограма, теореми-властивості вписаного кута та ін.

Теорема (про вписаний кут). Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри відповідного центрального кута.

Доведення.

1 випадок: одна зі сторін кута проходить через центр кола (рис. 1 а)). $\triangle AOB$ – рівнобедрений, у нього сторони AO і OB рівні як радіуси. Тому кути A і B трикутника рівні. А так як їх сума дорівнює зовнішньому куту трикутника при вершині O , то кут B трикутника дорівнює половині кута AOC , що і необхідно довести.

2 випадок: представлений на рис. 1 б).

Проведемо допоміжний діаметр BD .

$$\text{Тоді } \angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD + \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

3 випадок: представлений на рис. 1 в).

Також скористаємося допоміжним діаметром BD .

$$\text{Тоді } \angle ABC = \angle CBD - \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD - \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Теорему доведено повністю.

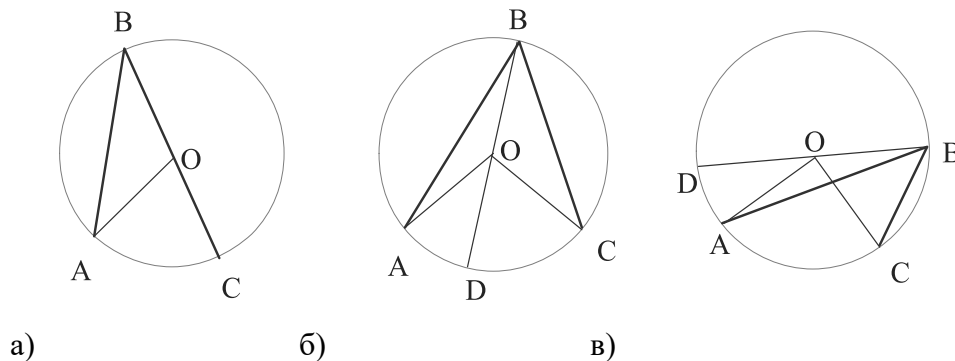


Рис. 1. Ілюстрація до теореми

Проведемо аналіз доведення:

- 1) *за послідовністю міркувань*: синтетичне;
- 2) *за загальнологічною основою*: пряме, по частинах;
- 3) *за формою умовиводу*: індуктивне доведення (розглянуто три випадки, що вичерпують усю множину можливих випадків щодо даної ситуації – метод повної індукції; усередині кожного випадку застосовано дедуктивні міркування);
- 4) *в залежності від використання математичних теорій*: за допомогою властивостей кутів рівнобедреного трикутника і зовнішнього кута трикутника.

Напевно, фахівці розуміють, що другий, найважливіший рівень – навчання учнів доводити твердження самостійно. Натомість, значна кількість учителів утруднюється виділити наступні компоненти, що входять в уміння школярів самостійно доводити теореми і задачі на доведення: 1) підведення об'єктів під поняття; 2) знання необхідних і достатніх ознак понять, про які йде мова у висновку теореми; 3) вибір ознак понять, які відповідають даним теоремі (умові); 4) виконання дії розгортання умови. Так, наприклад, на тренінгу для вчителів-математиків було згадано *набір достатніх умов поняття «паралельні прямі»*:

- 1) ознака паралельності прямих (пов'язаних із відповідними, односторонніми і різносторонніми кутами);
- 2) ознака: дві прямі, паралельні третій, паралельні;
- 3) ознаки: дві прямі перпендикулярні третій, паралельні (на площині);

4) умова колінеарності векторів: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$;

5) алгебраїчні умови паралельності прямих: $l_1 \parallel l_2$, якщо:

а) система їх рівнянь не має розв'язків, або

б) система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ така, що $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, або

в) рівняння цих прямих $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$, причому $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$;

також паралельність прямих можна довести:

1) за означенням; 2) методом від супротивного; 3) застосовуючи властивості деяких фігур мати паралельні відрізки: протилежні сторони паралелограма, середня лінія трикутника і його сторона, середня лінія і основи трапеції, бічні ребра призми та ін.

Зрозуміло, що такі набори достатніх умов для підведення під найважливіші поняття накопичуються і систематизуються по мірі вивчення учнями геометрії, і вчитель не може нехтувати можливістю проводити узагальнююче повторення. Всі теореми-ознаки і теореми-властивості – це, по суті, задачі на підведення під поняття. Тому при їх доведенні треба дати відповідь на два питання: які достатні умови відповідного поняття і як перевірити виконання достатніх умов. Проте, шкільна практика засвідчує, що більшість учнів не усвідомлює основних етапів розв'язання задач на підведення під поняття, оскільки вчителі не фіксують їхню увагу на кожному етапі розв'язання: 1) проаналізували умову і зробили рисунок; 2) із вимоги виділили те поняття, до якого необхідно віднести даний об'єкт; 3) пригадали всі істотні властивості того поняття, під яке підводиться об'єкт (дія виведення наслідків) або скористувалися готовим систематизованим набором достатніх умов поняття; 4) склали набір достатніх умов поняття, відібрали ознаку, яка відповідає умові теореми (задачі); 5) довели наявність у об'єкта, що підводиться під поняття, достатньої умови; 6) зробили висновок.

Для полегшення застосування схеми до розв'язання однакових за структурою задач на розпізнавання, слід узагальнити несуттєве у таких задачах: який об'єкт (поняття) подано в умові задачі, якими конкретними властивостями він володіє. Але суттєвим є те, що цих властивостей достатньо, щоб виділити основні достатні ознаки поняття.

Можна нагадати вчителям, що на уроках узагальнення і систематизації знань (або на уроках іншого типу) важливо, з точки зору розвитку логічного мислення учнів, ознайомлювати їх із прикладами софізмів. Автори сучасних підручників пропонують до розгляду софізми [1; 11], тому на їх пошуки вчителю не треба додатково витрачати час.

Наприклад, розглянемо твердження: *Коло має два центри*. «Доведення»:

Позначимо на сторонах довільного кута В точки А і С і проведемо через ці точки перпендикуляри к сторонам ВА і ВС відповідно (рис. 2).

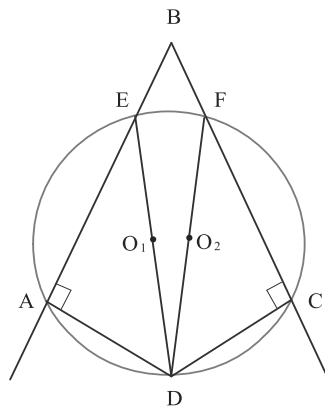


Рис. 2. Ілюстрація до софізму

Ці перпендикуляри повинні перетинатися (якщо б вони були паралельні, то паралельними були би і сторони даного кута). Позначимо т. D – точку перетину перпендикулярів.

Через точки A, D і C, які не лежать на одній прямій, проведемо коло (це коло існує, і тільки єдине). Позначимо точки E і F – точки перетину цього кола зі сторонами кута B. Прямі кути EAD і FCD є вписаними в коло. Отже, за наслідком теореми про вписані кути, відрізки DE і DF є діаметрами кола, що мають спільний кінець – точку D, але не співпадають. Тоді середини цих відрізків O_1 і O_2 є двома різними центрами одного кола, тобто коло має два центри.

Твердження доведено.

Помилка цього «доведення» складається у неправильності побудов на рисунку 2: в чотирикутнику ABCD $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, тобто за ознакою вписаного чотирикутника він є вписаним у коло. Це означає, що в ході побудов коло, проведене через точки A, D, і C, обов'язково пройде через т. B. У такому разі відрізки DE і DF співпадуть з відрізком DB, середина якого і є єдиним центром побудованого кола.

Вкрай важливим є розвиток у вчителів-математиків умінь реалізовувати наступні етапи роботи з учнями над твердженням: 1) підготовча робота (актуалізація опорних знань, створення проблемної ситуації, мотивація назви поняття (терміну), експеримент, висунення гіпотези та ін.); 2) формулювання теореми (аналіз умови, побудова рисунка, короткий запис «дано – довести»); 3) доведення теореми; 4) закріплення доведення; 5) застосування й узагальнення теореми.

Не можна недооцінювати останній етап роботи над теоремами, оскільки така робота систематизує знання, демонструє глибину і красу математики, її внутрішньопредметні зв'язки.

Наведемо приклад узагальнення теорем. Відомо, що теорема косинусів – узагальнення теореми Піфагора. У класах із поглибленим навчанням математики можна запропонувати узагальнення теореми косинусів для чотирикутників.

Теорема. Для довільного чотирикутника ABCD, в якому $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ справедливо:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \gamma - 2ab \cdot \cos \beta + 2ac \cdot \cos (\beta + \gamma).$$

Доведення. Нехай дано довільний чотирикутник ABCD. Введемо вектори так, як позначено на рисунку 3.

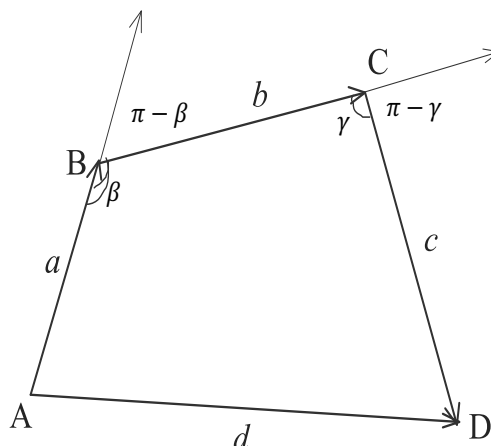


Рис. 3. Ілюстрація до узагальненої теореми косинусів

$$\text{Тоді: } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

$$\text{Далі: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot b \cdot \cos(\pi - \beta) = -ab \cdot \cos \beta;$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = b \cdot c \cdot \cos(\pi - \gamma) = -bc \cdot \cos \gamma;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a \cdot c \cdot \cos(\pi - \varphi), \text{ де}$$

$$\varphi = \pi - (\pi - \beta) - (\pi - \gamma) = \pi - \pi + \beta - \pi + \gamma = \beta + \gamma - \pi.$$

$$\text{Тому } a \cdot c \cdot \cos(\pi - \varphi) =$$

$$= a \cdot c \cdot \cos(\pi - \beta - \gamma + \pi) = a \cdot c \cdot \cos(2\pi - (\beta + \gamma)) = ac \cdot \cos(\beta + \gamma)$$

$$\text{Отже, } d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \gamma - 2ab \cdot \cos \beta + 2ac \cdot \cos(\beta + \gamma).$$

Що і необхідно було довести.

З метою обговорення у колі фахівців проблеми, що розглядається автором, проводилася відкрита лекція з дисципліни «Шкільний курс математики і методика його навчання», тренінги для вчителів-математиків, на яких було розглянуто реалізацію цих етапів, зокрема на прикладі вивчення теореми про три перпендикуляри [8]. Слід зазначити, що значна кількість учителів усвідомлює важливість реалізації зазначених етапів роботи з теоремами шкільного курсу геометрії і певною мірою володіє відповідними прийомами роботи [8]; водночас, багато фахівців недооцінює важливість реалізації основних етапів роботи і з теоремами шкільного курсу алгебри.

Продемонструємо реалізацію основних етапів роботи над теоремою на прикладі теореми про рівносильність рівнянь (теорема 7.6. за підручником [7, с. 65]).

1) *Підготовчий етап.*

1. Актуалізація опорних знань.

$$\text{Розв'яжемо рівняння: } \sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 2} = 1.$$

Учні знають метод розв'язування ірраціональних рівнянь – піднесення обох частин рівняння в один і той самий степінь. Застосовуючи цей метод і виконуючи наступні перетворення, одержуємо: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$. Також учні обізнані на попередньому уроці з тим, що при розв'язуванні ірраціональних рівнянь необхідно робити перевірку знайдених коренів підстановкою у вихідне рівняння. Виконуючи таку підстановку, впевнюємося, що обидва значення перетворюють вихідне рівняння у вірну рівність. Отже, відповідь: 3; 2.

2. Мотивація вивчення теореми (*створення проблемної ситуації*).

$$\text{Розв'яжемо рівняння: } \sqrt{x + 2} = 1 - x.$$

$$\text{Розв'язання: піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: } x + 2 = 1 - 2x + x^2;$$

$$\text{далі: } x^2 - 3x - 1 = 0, \text{ звідки } x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Виникає проблема технічної реалізації наступного етапу розв'язування рівняння – перевірки підстановкою. Дійсно, підстановка у вихідне рівняння знайдених значень змінної призводить до «неприємних» обчислень.

Учитель повідомляє, що для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування – метод рівносильних перетворень.

2) *Аналіз формулювання теореми.* Учитель повідомляє теорему:

$$\text{Теорема. Рівняння виду } \sqrt{f(x)} = g(x) \text{ рівносильне системі } \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Зауваження. За логікою викладу матеріалу у підручнику [5], учні вже попередньо ознайомлені з поняттями «рівносильне рівняння», «рівняння-наслідок», «область визначення рівняння», «сторонній корінь».

Аналізуємо з учнями умову теореми, оформлюємо короткий запис:

Дано: рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$;

Довести: $(1) \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (2)$

У ч и т е л ь: Що означає довести рівносильність рівняння і мішаної системи? Для цього необхідно пригадати означення рівносильності.

У ч н і: це означає, необхідно показати, що корені рівняння співпадають з розв'язками системи.

Зауваження. Аналізуючи формулювання теореми, варто обговорити зі школярами ту обставину, що в умовах системи (2) фактично враховано область визначення рівняння (1): $f(x) \geq 0$. Дійсно, якщо $f(x) = (g(x))^2$, то $f(x) \geq 0$ (квадрат будь-якого виразу є вираз, який приймає тільки невід'ємних значень).

3) *Доведення теореми.*

Доведемо, що корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1). Це означатиме, що рівняння (1) і система (2) рівносильні.

Нехай число α – корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$; це означає, що $g(\alpha) \geq 0$ і $f(\alpha) = (g(\alpha))^2$ також правильна числова рівність, тобто α – розв'язок системи (2).

Нехай β – розв'язок системи (2). Тоді $g(\beta) \geq 0$ і $f(\beta) = (g(\beta))^2$. При умові, що $g(x) \geq 0$ функція $y = (g(x))^2$ є оборотною і, тому, $\sqrt{f(\beta)} = g(\beta)$. Отже, β – корінь рівняння (1).

Теорему доведено.

Зауваження. У підручнику [7] учням пропонується самостійно довести цю теорему за аналогією з доведенням теореми 7.3. На нашу думку, варто провести доведення цієї теореми колективно, за допомогою вчителя.

4) *Закріплення доведення.*

Для закріплення доведення цієї теореми можна запропонувати старшокласникам відповісти на низку запитань (це може відбутися і на наступному уроці):

1. Що означає довести рівносильність рівняння і системи рівнянь? (Це означає довести, що корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1))

2. Якщо α – корінь рівняння (1), чи перетворюється це рівняння у правильну числову рівність при підстановці цього значення? (Так)

3. Якщо $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$ – правильна числова рівність, чи випливає з цього, що $g(\alpha) \geq 0$? (Так)

4. Якщо $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$ – правильна числова рівність, чи випливає з цього, що $f(\alpha) = (g(\alpha))^2$ – також правильна числова рівність? (Так)

5. Чи означатиме це, що α – розв'язок системи (2)? (Так)

6. Якщо β – розв'язок системи (2), що з цього випливає? (Що $g(\beta) \geq 0$ і $f(\beta) = (g(\beta))^2$)

7. За якої умови функція $y = (g(x))^2$ є оборотною? (При умові, що $g(x) \geq 0$)

8. Якщо виконується така умова, чи буде справедливо, що $\sqrt{f(\beta)} = g(\beta)$? (Так)

9. Який з цього можна зробити висновок? (Що β – корінь рівняння (1))

10. Якщо корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1), можна стверджувати, що рівняння (1) і система (2) рівносильні? (Так, за означенням рівносильності).

5) *Застосування теореми.*

1. На цьому етапі перш за все варто повернутися до рівняння $\sqrt{x+2} = 1-x$, за допомогою якого було створено проблемну ситуацію і вирішити його, застосовуючи теорему. Використовуючи умову $1-x \geq 0$, неважко помітити, що із двох значень $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ і $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ цієї нерівності задовольняє $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, а $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ – сторонній корінь. Відповідь: $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

2. Можна запропонувати ще раз порівняти методи розв'язання, адресуючи дітей до таблиці 1 (вона може бути поданою як на слайді, так і як роздавальний матеріал на карточці).

Таблиця 1

Порівняльний аналіз методів розв'язування ірраціонального рівняння

<i>Поетапне розв'язування з перевіркою</i>	<i>Застосування методу рівносильних перетворень</i>
$\sqrt{x+1} = x-5$. 1. Знайдемо ОДЗ: $x+1 \geq 0$; $x \geq -1$. 2. Піднесемо обидві частини рівняння в квадрат: $x+1 = (x-5)^2$; і далі: $x^2 - 10x + 25 - x - 1 = 0$; $x^2 - 11x + 24 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = 8$. 3. Обидва значення входять в ОДЗ, однак перевірка показує: $\sqrt{8+1} = 8-5$; $3 = 3$; $\sqrt{3+1} = 3-5$; $2 \neq -2$, тобто $x_1 = 3$ – сторонній корінь. Відповідь: 8.	$\sqrt{x+1} = x-5$. За теоремою про рівносильні перетворення задане рівняння рівносильне такій мішаній системі: $\begin{cases} x+1 = (x-5)^2; \\ x-5 \geq 0 \end{cases},$ і далі: $\begin{cases} x^2 - 10x + 25 - x - 1 = 0; \\ x \geq 5 \end{cases}.$ Коренями квадратного рівняння $x^2 - 11x + 24 = 0$ є $x_1 = 3$; $x_2 = 8$. Системі задовольняє тільки один: $x_2 = 8$. Відповідь: 8.

3. Далі можна розглянути таке рівняння: $\sqrt{x^2-1} = 3-2x$. При його розв'язанні методом рівносильних перетворень ми приходимо до системи: $\begin{cases} x^2-1 = (3-2x)^2; \\ 3-2x \geq 0 \end{cases}$, розв'язуючи яку дістаємо відповідь: $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$ (зауважуємо, що перевірка коренів призвела б до складних обчислень).

4. Повторюючи формулювання теореми, можна запропонувати учням переформулювати її за допомогою слів «необхідно і достатньо»:

Теорема: Для того, щоб розв'язати рівняння $\sqrt{f(x)} = g(x)$ *необхідно і достатньо* розв'язати систему $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

На тренінгах із учителями обговорювалася доцільність застосувань учителем на уроці різних способів доведень математичних тверджень [8] (рис. 4).

*Обґрунтування з методичної точки зору застосування вчителем
різних способів доведення теорем*

- З метою підвищення інтересу учнів до доказових міркувань; тоді доведення різними способами може відбуватися на одному уроці або інший спосіб може бути поданий для розбору додому, у тому числі для самостійного пошуку доведення (за готовим рисунком або без підказки).
- У зв'язку з вивченням нової теми задля її закріплення: можна подати інший спосіб доведення теореми, що вже була розглянута на попередніх уроках, або навіть у попередніх класах.
- Для застосування даної теореми, оскільки доведення цієї ж теореми іншим способом є одним із варіантів закріплення теореми.
- Для реалізації диференційованого навчання як спосіб врахування індивідуальних можливостей учнів, їхніх потреб у подальшому навчанні
- І, насамперед, як дієвий засіб розвитку логічного мислення учнів, оскільки зазвичай різні способи доведення теорем засновані на використанні різних достатніх умов того чи іншого поняття.

Рис. 4. Методична доцільність застосувань різних способів доведень теорем

Учителям було запропоновано довести теорему про властивість бісектриси трикутника п'ятьма способами і з'ясувати методичну доцільність використання того чи іншого способу доведення (рис. 5).

Теорема. Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

Доведіть п'ятьма способами!

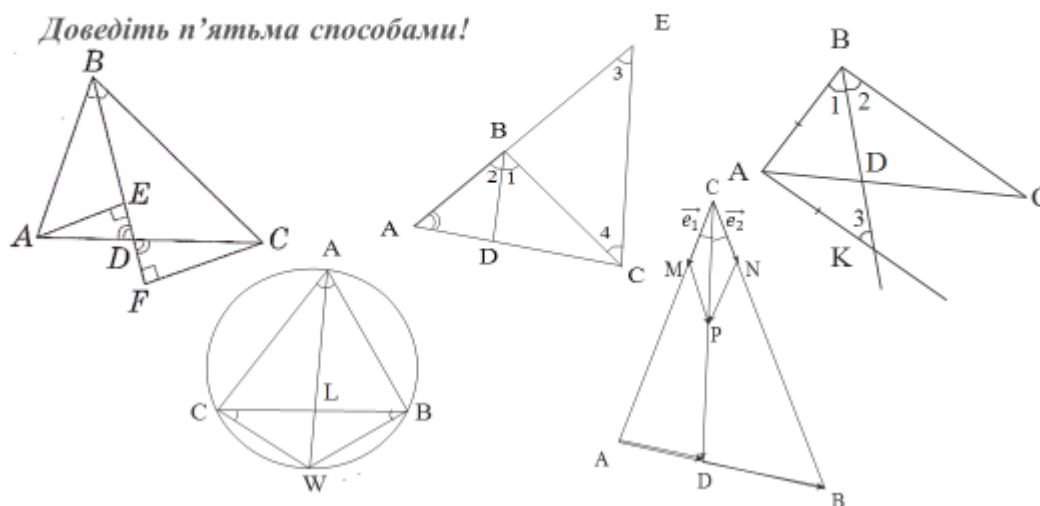


Рис. 5. Ілюстрації до доведень теореми-властивості бісектриси трикутника

Автором було розроблено систему тестових завдань і завдань для самостійної та індивідуальної роботи вчителів-математиків, які дозволяють розвинути методичну

компетентність у частині навчання учнів доводити математичні твердження. Наведемо деякі з них.

1. Розглянемо рівняння: $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$. Розв'язання: $3x - 4 = x - 2$, звідки $x = -3$. Однак перевірка показує, що -3 не є коренем вихідного рівняння. Відповідь: $\emptyset$.
У чому причина появи стороннього кореня?

А	Невірно застосовано теорему про рівносильність рівнянь
Б	Розширення області визначення
В	Звуження області визначення
Г	Розв'язання неправильне

2. «Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна». Чим може бути таке математичне речення?

А	Аксіомою або означенням
Б	Аксіомою або теоремою
В	Теоремою або означенням
Г	Це неправильне математичне твердження

3. Розглянемо софізм: *Сума будь-яких двох однакових чисел дорівнює нулю.*
«Доведення»: доведемо, що $a + a = 0$.

- 1) Нехай $a = x$.
- 2) Помноживши обидві частини цієї рівності на $-4a$, де $a \neq 0$, дістанемо:
 $-4ax = -4a^2$, або $-4ax + 4a^2 = 0$.
- 3) Додамо до обох частин рівності x^2 , тоді $x^2 - 4ax + 4a^2 = x^2$.
- 4) Або $(x-2a)^2 = x^2$.
- 5) Звідки $x-2a = x$.
- 6) Але оскільки $x = a$, то $a-2a = a$, тобто $-a = a$.
- 7) Остаточно: $a+a=0$.

На якому кроці міркувань припущено помилку?

А	Б	В	Г
на 6)	на 2)	на 5)	на 4)

4. Складіть набір достатніх умов поняття прямокутника. Наведіть приклад задачі, у процесі розв'язання якої доцільно пригадати з учнями набір достатніх умов поняття прямокутника.
5. Розглянемо твердження:

Чотирикутник ABCD – паралелограм $\Leftrightarrow \forall \text{ т. } Q : \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}$ (рис. 6).

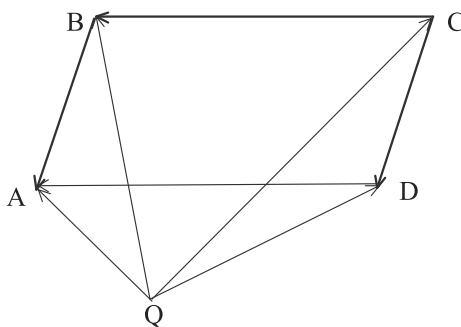


Рис. 6. Ілюстрація до доведення твердження

Доведення:

1) Нехай $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}$. Доведемо, що ABCD – паралелограм.

$$\underbrace{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB}}_{\overrightarrow{BA}} = \underbrace{\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QC}}_{\overrightarrow{CD}}, \text{ тобто } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow AB = CD.$$

$$\underbrace{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QD}}_{\overrightarrow{DA}} = \underbrace{\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC}}_{\overrightarrow{CB}}, \text{ тобто } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CB}| \Rightarrow DA = CB.$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ DA = CB \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD - \text{паралелограм за ознакою.}$$

Яку частину твердження було доведено: необхідність або достатність? Проведіть доведення другої частини вихідного твердження. Виконайте логіко-математичний аналіз доведення.

Висновки. Проведене дослідження на емпіричному та теоретичному рівнях дозволяє стверджувати, що напрями розвитку методичної компетентності вчителів-математиків обрано правильно. Апробація зазначених напрямів роботи відбувалася у процесі співпраці з учителями природничо-математичного циклу Одеського приватного ліцею «Мрія».

Список використаних джерел

1. Єршова А. П. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. /А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. Харків : Вид-во «Ранок», 2016. 256 с.
2. Іванова С. В., Дерезізова Г. А. Реалізація структурно-функціональної моделі формування методичної компетентності майбутнього вчителя у навчанні геометрії. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Геометрія в Одесі». Одеса. 2015. С. 21–22.
3. Іванова С. В., Іванова О. В. Методичні особливості навчання учнів загальноосвітніх шкіл доведенню геометричних тверджень з урахуванням вимог ЗНО. *Актуальні проблеми методики навчання математики* : матеріали регіон. наук.-практ. конф. м. Одеса, 14-15 травня 2008 р. / за ред. С.В. Іванової. Одеса : Наука і техніка, 2008. С. 26–31.
4. Істер О. С. Математика : підруч. для 6-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2014. 296 с.
5. Матяш О. І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії : монографія / О. І. Матяш; науковий редактор д.пед.н., проф. О. І. Скафа. Вінниця : ФОП Легкун В., 2013. 450 с.
6. Матяш О. І. Формування методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики: дис... д-ра пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Ольга Іванівна Матяш – Київ, 2014. 568 с.
7. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 272 с.
8. Недялкова К. В. Формування складника методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження. *Педагогічні науки: зб. наук. праць*. Херсон, 2020. Вип. 90. С. 110–118.
9. Скворцова С. О. Підготовка майбутніх учителів початкових класів до навчання молодших школярів розв'язувати сюжетні математичні задачі : монографія. Харків : «Ранок-НТ», 2013. 331 с.
10. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

11. Тарасенкова Н. А. Математика. 5 кл. : підруч. для закладів загальної середньої освіти / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Вид. 2-ге, доопр. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 240 с.
12. Чашечникова О. С. Шляхи вдосконалення підготовки вчителя математики. Вітчизняний та зарубіжний досвід. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. № 4 (22). 2012. С. 172–178.
13. V. Ivanov, L. Dimitrov, S. Ivanova and O. Olefir, "Creativity enhancement method for STEM education," *2019 II International Conference on High Technology for Sustainable Development (HiTech)*, Sofia, Bulgaria, 2019, pp. 1–5, doi: 10.1109/HiTech48507.2019.9128255.

РОЗДІЛ 4

Навчання математики учнів закладів загальної середньої освіти на різних освітніх рівнях

4.1. РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ У КОНТЕКСТІ СУЧАСНОГО РЕФОРМУВАННЯ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Світлана Іванова, Анастасія Кушнірук

Вступ. Освітньою реформою «Нова українська школа» (НУШ) передбачено суттєві перетворення всіх рівнів освіти (початкової, базової середньої і профільної середньої). Уже затверджено новий Державний стандарт початкової освіти і Державний стандарт базової середньої освіти, розроблено модульні програми для навчальних дисциплін. На черзі введення Державного стандарту профільної середньої освіти, створення мережі нових закладів освіти III ступеня і розробка методичного забезпечення навчальних дисциплін сучасної профільної освіти. Відтак, набуває актуальності і потребує подальшого дослідження методичний аспект проблеми допрофільної і профільної підготовки з математики у контексті реформи НУШ.

Огляд останніх публікацій за темою. Зміст і організація профільного навчання математики у школі привертає увагу багатьох науковців. Проблему реалізації профільного навчання математики у закладах середньої освіти досліджували І. Акуленко, Г. Бевз, В. Бевз, М. Бурда, С. Іванова, І. Лов'янова, А. Мерзляк, Є. Нелін, Д. Номіровський, З. Сердюк, Н. Тарасенкова, В. Швець, М. Якір та ін.; зміст допрофільної математичної підготовки у своїх працях аналізували М. Бурда, О. Вашуленко, О. Єрміна, К. Недялкова, Н. Прокопенко, Л. Сіра, Т. Цьома, О. Харік, С. Яценко та ін.

Однією із умов успішної реалізації профільного навчання математики у школі є впровадження у навчальний процес сучасних освітніх технологій, серед яких виділяють технології загально-педагогічного характеру (В. Бондар, О. Пехота, О. Савченко, Г. Селевко, А. Хуторской та ін.), інформаційні технології у навчанні математики (М. Жалдак, Н. Житеньова, Н. Кульчицька, Н. Морзе та ін.), технології змішаного навчання (К. Бугайчук, Д. Васильєва, А. Кудін, О. Міненко та ін.).

Водночас, вивчаючи концепцію сучасного реформування шкільної математичної освіти, ми дійшли висновку, що потрібно провести більш докладний аналіз цілей, змісту, методів, форм, засобів та технологій навчання математики у профільній школі з метою забезпечення якості реалізації профільного навчання.

Мета дослідження: охарактеризувати цільову, змістову та процесуальну моделі реалізації профільного навчання математики у контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти.

Виклад основного матеріалу. Представимо результати аналізу основних нормативних документів та наукових досліджень щодо профільної середньої освіти у цілому і профільної математичної освіти, зокрема. За Законом України про повну загальну середню освіту (розд. І ст. 4), повна загальна середня освіта здобувається на таких рівнях: початкова освіта, базова середня освіта і профільна середня освіта. Кожний рівень освіти передбачає виконання учнем вимог до результатів навчання, визначених Державним стандартом, відповідно, початкової, базової середньої та профільної середньої освіти [5].

У Законі «Про освіту» (розд. II ст. 12 п. 7) вказано: «здобуття профільної середньої освіти передбачає два спрямування: академічне – профільне навчання на основі поєднання змісту освіти, визначеного стандартом профільної середньої освіти, і поглибленого вивчення окремих предметів з урахуванням здібностей та освітніх потреб здобувачів освіти з орієнтацією на продовження навчання на вищих рівнях освіти; професійне – орієнтоване на ринок праці профільне навчання на основі поєднання змісту освіти, визначеного стандартом профільної середньої освіти, та професійно орієнтованого підходу до навчання з урахуванням здібностей і потреб учнів» [6].

За реформою НУШ до 2023 р. має бути розроблено Державний стандарт профільної освіти; до 2025 р. створено мережу нових закладів III ступеня; до 2027 р. здійснено повне запровадження профільної освіти.

Профільне навчання спрямоване на врахування освітніх потреб, нахилів і здібностей кожного учня у контексті соціального і професійного самовизначення.

Основними принципами профільного навчання вважаються:

- 1) принцип *фуркації* (розподілі учнів за рівнем освітньої підготовки, інтересами, потребами, здібностями і нахилами);
- 2) принцип *варіативності й альтернативності* освітніх програм, технологій навчання і навчально-методичного забезпечення;
- 3) принцип *наступності та неперервності* між допрофільною підготовкою, профільним навчанням і професійною підготовкою;
- 4) принцип *гнучкості змісту і форм організації профільного навчання*, забезпечення можливості зміни профілю;
- 5) принцип *діагностико-прогностичної реалізованості* (виявлення здібностей учнів для їхньої обґрунтованої орієнтації на профіль навчання) [21].

У Законі «Про освіту» (розд. II ст.12 п.1) сформульована мета повної загальної середньої освіти: «всебічний розвиток, виховання і соціалізація особистості, яка здатна до життя в суспільстві та цивілізованій взаємодії з природою, має прагнення до самовдосконалення і навчання впродовж життя, готова до свідомого життєвого вибору та самореалізації, відповідальності, трудової діяльності та громадянської активності» [6].

Досягнення цієї мети забезпечується шляхом формування ключових компетентностей, необхідних кожній сучасній людині для успішної життєдіяльності, у тому числі і математичної компетентності.

За одним із важливих положень дидактики, будь-яка навчальна дисципліна, для певного рівня навчання, визначається 3-ма моделями:

- 1) цільовою,
- 2) змістовою,
- 3) процесуальною [2, 20].

Цільова модель навчальної дисципліни для закладів середньої освіти розкривається через мету та завдання для заданого рівня навчання, які визначені у Державному стандарті і відповідають рівню модельних програм [4; 11–14].

Змістова модель навчальної дисципліни для закладів середньої освіти відображається структурно-логічною схемою (розділи, теми) змісту теоретичного та практичного навчального матеріалу. Теоретичний матеріал математичних дисциплін представлено означеннями і відповідними прикладами, теоремами, опорними задачами, формулами, методами, алгоритмами, а практичний – вправами та задачами різного ступеня складності. Для визначення змістової моделі навчальної дисципліни користуються такими джерелами інформації: навчальними програмами, рекомендованими за цими програмами підручниками і навчальними посібниками, дидактичними матеріалами, методичними рекомендаціями до розробок уроків, наборами завдань ДПА та ЗНО.

Процесуальна модель навчальної дисципліни визначається актуальними освітніми технологіями, формами, методами, прийомами і засобами навчання, що є ефективними під час навчання за цією дисципліною.

На етапі допрофільної підготовки у 5–9 класах навчання математики організовується на 2-х рівнях: базовому і поглибленому.

Цільова модель навчання математики у 8 і 9 класах

БАЗОВЕ	ПОГЛИБЛЕНЕ
Основна мета - розвиток та соціалізація особистості учнів, формування їхньої національної самосвідомості, загальної культури, світоглядних орієнтирів, екологічного стилю мислення і поведінки, творчих здібностей, дослідницьких навичок і навичок життєзабезпечення , здатності до саморозвитку та самонавчання в умовах глобальних змін і викликів	
Продовжується реалізація завдань математичної освіти учнів, розпочата в початкових класах, з розширенням і доповненням цих завдань відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів	Передбачається: 1) розширення і поглиблення змісту курсу математики; 2) посилення його прикладної спрямованості; 3) формування в учнів стійкого інтересу до предмета; 4) виявлення і розвиток математичних здібностей; 5) підготовка до поглибленого навчання математики в старшій школі
Навчання математики в основній школі: - передбачає формування предметної математичної компетентності; - має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей.	
Загальні і специфічні завдання шкільної математичної освіти. Приклад загального завдання: формування ставлення до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві. Приклад специфічного завдання: розширення знань про число (від натуральних чисел до ірраціональних та дійсних), формування культури усних, письмових, інструментальних обчислень.	

Нами було проаналізовано цільові моделі математичних дисциплін для базового і поглибленого навчання у 8 і 9 класах (табл. 1). Установлено, що основна мета, компетентнісний складник, загальні і специфічні завдання для цих рівнів навчання практично співпадають. Проте, при поглибленому навчанні передбачено розширення і поглиблення змісту курсу математики, посилення його прикладної спрямованості. Це стає основою для відмінностей змістових моделей даних рівнів. Окрім того, при поглибленому навчанні посилюється значущість цілей щодо формування в учнів стійкого інтересу до математики та виявлення і розвитку математичних здібностей. І, безперечно, визначною метою є підготовка до поглибленого навчання математики у старшій школі.

Розглянемо результати аналізу змістових моделей навчальної дисципліни алгебра (8-й клас) для базового і поглибленого рівнів (рис. 1, 2). У даному випадку замість систематизаційних таблиць для порівняння цих змістових моделей використано інтелект-карти різного ступеня деталізації, розроблені авторами.

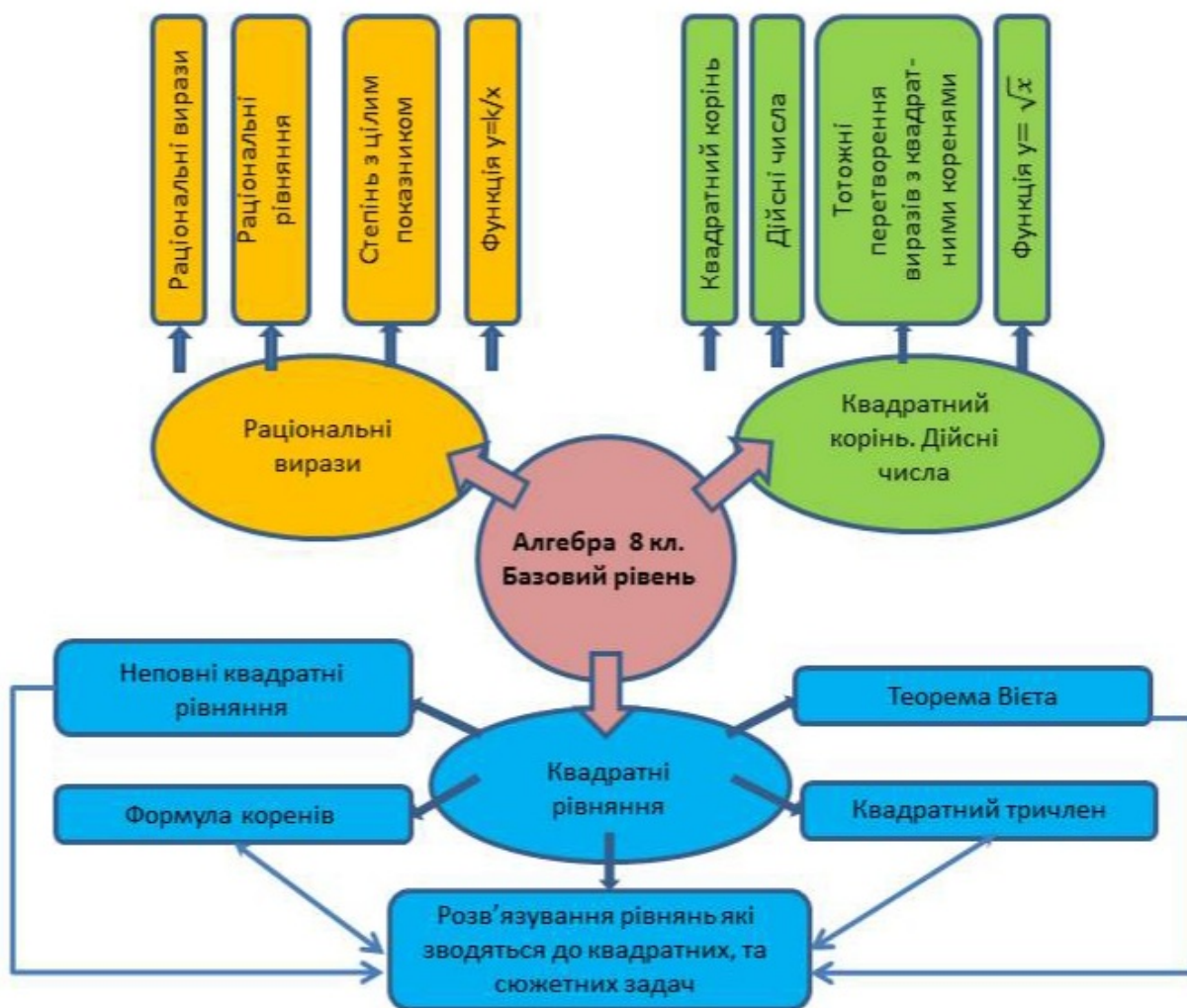


Рис. 1. Інтелект-карта змістової моделі алгебри (8-й клас, базовий рівень)



Рис. 2. Інтелект-карта змістової моделі алгебри (8-й клас, поглиблений рівень)

На представлених інтелект-картах наочно подано особливості змістових моделей для різних рівнів навчання. При поглибленому навчанні крім тем, які співпадають з базовим рівнем («Рациональні вирази», «Квадратні корені. Дійсні числа» та «Квадратні рівняння») вивчаються й інші («Множини і операції з ними», «Основи теорії подільності», «Нерівності» та «Основи теорії многочленів з однією змінною»). Введення теми «Множини і операції з ними» на початку вивчення курсу алгебри 8-го класу при поглибленому навчанні є позитивним, оскільки це дозволяє використовувати символіку і операції над множинами, наприклад, під час подальшого розв'язування учнями рівнянь, нерівностей та їх систем.

Одним із недоліків діючого розподілу тем між 7–9 класами для базового рівня навчання є запізне розгортання змістового складника щодо вивчення нерівностей (9-й клас), на відміну від рівнянь (7-й клас). При поглибленому навчанні цей недолік ліквідовано введенням теми «Нерівності» до курсу алгебри 8 класу. Включення тем «Основи теорії подільності» та «Основи теорії многочленів з однією змінною» дозволяє ознайомити учнів з елементами теорії чисел. Поглиблене навчання алгебри у 8-ому класі також характеризується поширенням змісту однакових тем.

Щодо практичної частини даних змістової моделей (типових вправ), то при поглибленому рівні коло вправ значно поширюється за рахунок завдань на застосування елементів теорії множин і теорії чисел; вправ на розв'язування: лінійних нерівностей, їх систем та сукупностей, нерівностей з модулем, рівнянь і нерівностей з параметрами; вправ на побудову зображень на координатній площині, множин, заданих за допомогою нерівностей; вправ із використання ділення многочленів та ін.

Розглянемо змістові моделі навчальної дисципліни алгебра і початки аналізу (10-й клас) для різних рівнів навчання (табл. 2).

Таблиця 2

Змістові моделі алгебри і початків аналізу (10-й клас)

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ (54 год; резерв 7 год)	ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ (210 год; резерв 24 год)
Функції, їхні властивості та графіки (15 год)	Функції, многочлени, рівняння і нерівності (36 год)
	Степенева функція (30 год)
Тригонометричні функції (18 год)	Тригонометричні рівняння і нерівності (34 год)
	Тригонометричні рівняння і нерівності (32 год)
Похідна та її застосування (14 год)	Границя та неперервність функцій. Похідна та її застосування (54 год)

При профільному навчанні алгебри і початків аналізу у 10-му класі, крім теми «Тригонометричні функції», яка співпадає з рівнем стандарту за назвою, вивчаються й інші, в які були трансформовані теми рівня стандарту. Тема рівня стандарту «Функції, їх властивості та графіки» у профільному навчанні представлена темами «Функції, многочлени, рівняння і нерівності» та «Степенева функція». Тема рівня стандарту «Похідна та її застосування» поширена і поглиблена до теми «Границя і неперервність функцій. Похідна та її застосування». При навчанні на рівні стандарту передбачено формування в учнів умінь розв'язувати лише простіші тригонометричні рівняння у межах окремого питання теми

«Тригонометричні функції», а для профільного рівня – це окрема тема «Тригонометричні рівняння і нерівності».

Розглянемо зміст теми «Похідна та її застосування» для рівня стандарту. В цій темі передбачено ознайомити учнів із такими питаннями: похідна функції, її геометричний і фізичний зміст; правила диференціювання; ознака сталості функції; достатні умови зростання й спадання функції; екстремуми функції; застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків; найбільше і найменше значення функції на проміжку.

Змістова складова теми «Границя і неперервність функцій. Похідна та її застосування» наближається до змісту відповідного розділу дисципліни «Вища математика» у ЗВО. Тут передбачено вивчення таких питань: границя функції у точці; основні теореми про границі функції у точці; неперервність функції у точці і на проміжку; рівняння дотичної до графіка функції; друга похідна; поняття опуклості функції; точки перегину; асимптоти графіка функції; застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей, розв'язування задач прикладного змісту та ін.

Для профільного рівня навчання коло типових вправ поширюється і ці вправи значно ускладнюються. Особлива увага має приділятися практично орієнтованим задачам і задачам для встановлення міжпредметних зв'язків.

Наведемо приклади таких задач.

Задача. Діамант масою m упав і розколовся на дві частини так, що сумарна вартість частин, на які він розколовся стала мінімальною. На які частини розколовся діамант, якщо відомо, що його вартість пропорційна квадрату маси з коефіцієнтом k ?

Задача. У кулю радіуса R вписаний циліндр. Чому дорівнює висота циліндра, який має: а) найбільший об'єм; б) найбільшу площу бічної поверхні?

Перейдемо до аналізу процесуальної моделі профільного навчання математики, що відображує форми, методи, засоби та педагогічні технології, які мають застосовуватися у процесі навчання для досягнення цілей (табл. 3), а саме «забезпечення рівня підготовки учнів з математики, необхідного для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, для подальшого вибору й успішного опанування професією, яка потребує високого рівня математичних знань, тобто за спеціальностями теоретичної та прикладної математики або спеціальностями тих галузей, які потребують розвиненого математичного апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів; у підготовці до навчання у вищому навчальному закладі з відповідним фаховим спрямуванням» [14].

Успіх навчання залежить як від правильного визначення його цілей і змісту, так і від способу досягнення цілей, зокрема від вибору методів навчання. Пояснювально-ілюстративний та репродуктивний методи навчання збагачують учнів знаннями, вміннями та навичками, формують фон дійових знань, який є необхідною умовою для можливості організації самостійної пізнавальної роботи, розвитку творчого мислення і продуктивної діяльності. Призначення проблемного викладу – демонстрація вчителем зразків наукового пізнання. Це основні методи навчання математики класів і базового і профільного рівнів.

При викладанні математики в класах з поглибленим вивченням математики поряд з зазначеними методами навчання слід особливу увагу приділити таким методам, як проблемний, евристичний та дослідницький. Саме на їх основі у процесі вивчення програмного матеріалу можливо приділити належну увагу узагальненням, навчанню різних методів доведень і розв'язування задач, усвідомленню ідеї аксіоматичної побудови математики.

Урок був і залишається основною формою організації навчання у школі при очній та дистанційній освіті. Водночас, досвід роботи у класах із поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики свідчить про те, що однією із вдалих форм організації навчального процесу є лекційно-практична система, в якій розрізняють лекції, практикуми з розв'язування задач, семінари.

Таблиця 3

Процесуальні моделі навчання математики

Базове	Поглиблене
Методи навчання	
– пояснювально-ілюстративний – репродуктивний – проблемний виклад – евристичний метод	– пояснювально-ілюстративний – репродуктивний – проблемний виклад – евристичний метод – дослідницький метод
Форми навчання	
– урок – основна форма навчання – он-лайн (дистанційний) урок – бінарні/інтегровані уроки	– урок – основна форма навчання (зокрема, дистанційний) – лекційно-практична система (лекції, практикуми з розв'язування задач, семінари) – бінарні/інтегровані уроки – факультативи та елективні курси – самостійна робота – проектно-дослідна робота (МАН)
Засоби навчання	
– підручники (рівень стандарту) – друковані; демонстраційні; креслярські – інформаційно-технічні – інтерактивні засоби навчання (програмні продукти)	– підручники (профільний рівень, поглиблене вивчення) – друковані; демонстраційні; креслярські – інформаційно-технічні – інтерактивні засоби навчання (програмні продукти)
Педагогічні технології	
– технології особистісно орієнтованого навчання – технології проблемного навчання – інтерактивні технології навчання – авторські технології навчання – змішане навчання	– технології особистісно зорієнтованого навчання (зокрема, технологія «Портфоліо учня») – технології проблемного навчання – інтерактивні технології навчання – технологія проєктного навчання – дослідницька технологія – авторські технології навчання – змішане навчання

В контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти істотне значення має надаватися міжпредметним зв'язкам і прикладним аспектам математики. Цьому сприяє проведення бінарних та інтегрованих уроків [20].

Засоби навчання формують навчальне середовище, а їх удосконалення та вдале використання дають можливість інтенсифікувати навчальний процес. Підручник з математики, дидактичні матеріали і довідкова математична література, навчальне обладнання, зокрема наочні посібники, моделі, рисунки, схеми, таблиці, предмети оточення, креслярські

інструменти; технічно-інформаційні засоби навчання: калькулятори, персональні комп'ютери; відповідні педагогічні програмні засоби мають утворювати єдиний комплекс [16, 17].

Вважаємо, для учнів старших класів профільного рівня доцільно активно залучати такі форми роботи:

- систему факультативів і елективних курсів, орієнтованих на різні типи мислення (насамперед образного, прикладного, теоретичного), на розвиток різних видів діяльності, формування критичного стилю мислення тощо;
- організацію різних видів самостійної та самостійно-дослідницької роботи учнів, зокрема робота з підручником, науково-популярною, довідковою літературою, Інтернет-контентом;
- систему індивідуальних завдань, спрямованих на розвиток математичних здібностей учнів, їхнього інтересу до застосувань математики;
- участь у роботі Малої академії наук, у ході якої учні досягають певних самостійних дослідницьких та прикладних результатів і набувають навичок презентування одержаних результатів перед зацікавленою аудиторією [14].

Підручники забезпечують як вимоги базового освітнього стандарту (мінімальний, обов'язковий рівень), так і підвищений та поглиблений рівні навчання математики; дидактичні матеріали наразі також є для класів різних освітніх рівнів.

Інформаційно-технічні засоби навчання представлено відеоапаратурою, копипристроями, а також до них відносять мультимедійні проектори, інтерактивні дошки, планшети, мобільні гаджети, графічні планшети; пристрої зв'язку (web-камера, роутер тощо).

До інтерактивних засобів навчання ми відносимо:

- програмні продукти, такі як електронні підручники, інтерактивні довідники, інтерактивні тренажери (наприклад, тести ЗНО онлайн); презентації та відеоуроки;
- комп'ютерні програми, такі як Динамічна геометрія, GeoGebra, Mathcad, Cabri 3D Fraction, Algebrator, Winmat, Wingeom тощо;
- мобільні програмні додатки (PhotoMath, MalMath, MyScript Calculator, Формули Free, Geometryx тощо);
- додатки-месенджери Вайбер, Вотсап, Телеграм;
- web-сайти;
- web-сервіси [Live Worksheets](#), [Wizer.me](#), [Formative](#) та інші;
- хмарні сервіси (Google Диск, Google форми, Google презентації, Google таблиці тощо), хмарні платформи (Zoom, Teams);
- цифрові інструменти формуючого оцінювання (наприклад, LearningApps, Kahoot).

Сучасна педагогіка переживає період переосмислення підходів, відмови від усталених традицій і стереотипів. Прагнення оптимізувати навчально-виховний процес зумовило появу нових і вдосконалення апробованих педагогічних технологій, подальший розвиток яких пов'язаний із реалізацією профільного навчання математики у контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти.

Найпоширенішими технологіями загально-педагогічного характеру, які впроваджуються у сучасних школах є *технології особистісно орієнтованого навчання*. Так, у програмі для класів із поглибленим вивченням математики зазначено, що «організація навчання передбачає реалізацію особистісно орієнтованої моделі навчання, першочергове завдання якої полягає в тому, щоб розпізнати та розвинути конкретні здібності, схильності, особливості мислення, потенціал кожного учня» [14]. У профільних класах серед технологій особистісно орієнтованого

навчання виділяється технологія показників особистісного зростання учнів, що отримала назву «*Портфоліо учня*». «Портфоліо» – це систематичне та спеціально організоване фіксування, накопичення й оцінювання (та самооцінювання) індивідуальних досягнень учня в певний період навчання; колекція робіт і результатів учня, що демонструє прогрес і досягнення з математики. У цій технології учень є активним учасником процесу оцінювання, спрямованого на відстеження прогресу в навчанні та результатів навчально-пізнавальної діяльності, докладених зусиллях.

В основі *технології проблемного навчання* є створення вчителем самостійної пошукової діяльності школярів із розв’язання навчальних проблем, у ході якої формується нове знання, уміння, навички та розвиваються здібності дитини, активність, зацікавленість, ерудиція, творче мислення та інші особистісно значущі якості. Застосування цієї технології у класах різного профілю відрізняється змістовою складовою.

Серед технологій проблемного навчання, що мають застосовуватись у профільних класах є технологія формування *критичного мислення* – система діяльності, що базується на дослідженні проблем та ситуацій на основі самостійного вибору, оцінки та визначення міри корисності інформації відносно особистих потреб і цілей. Основні прийоми технології: використання синканів; мозковий штурм; розширена лекція; постановка учнями запитань; читання з позначками; дискусія. Розумові дії, які формуються під час використання технології: знання, розуміння, використання знань і вмінь, аналіз, синтез, оцінювання, вміння робити висновки.

Інтерактивні технології навчання сприяють формуванню навичок та вмінь як предметних, так і загальнонавчальних; виробленню життєвих цінностей; створенню атмосфери співробітництва, взаємодії; розвитку комунікативних якостей. Технологія передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, спільне розв’язання проблеми. Форми групової роботи у технології інтерактивного навчання: уроки-конференції, урок-мозаїка, математичний бій, уроки-консультації, дискусія.

У профільних класах розповсюджена *технологія проєктного навчання*, що дає можливість учням продуктивніше засвоювати знання, працюючи над проєктом учні навчаються користуватися різними джерелами інформації, аналізувати отриману інформацію, узагальнювати, відбирати найкорисніше задля розв’язання проблеми. Проєктний метод розв’язує багато педагогічних завдань:

- створення позитивної мотивації в процесі навчання;
- формування навичок розумової праці, узагальнених інтелектуальних умінь у процесі пошуку джерел інформації з обраної теми, формулювання результатів і висновків;
- вироблення прийомів індивідуальної та колективної праці (у залежності від проєкту);
- оволодіння письмовим і усним мовленням.

Сутність дослідницької технології полягає у побудові навчального процесу в такий спосіб, коли вивчення й засвоєння знань, формування вмінь та навичок, оволодіння компетентностями, розвиток розумових здібностей відбувається у процесі дослідницької діяльності учнів під керівництвом учителя. У процесі дослідницької діяльності учні опановують окремі навички спостереження, експериментування, зіставлення й узагальнення фактів, роблять певні висновки. Використання на уроках алгебри та геометрії дослідницьких прийомів та методів сприяє засвоєнню методів і стилю мислення, властивих математиці, виховання свідомого ставлення до свого досвіду, формування рис творчої діяльності та пізнавального інтересу до різних аспектів математики.

Також існує низка авторських педагогічних технологій, що застосовуються в класах різних профілів навчання: укрупнення дидактичних одиниць – УДО (П. Ерднієв), технологія

навчання у математиці на основі розв'язання задач (Р. Хазанкін), система інтенсивного навчання В. Ф. Шаталова, Комбінована система М. П. Гузика, дистанційна школа «Ангстрем», програма «Інтелект України» тощо.

Змішане навчання (blended learning) – сучасна освітня технологія, що базується на інтеграції класно-урочної системи та технології електронного навчання (e-learning). У період пандемії стало особливо актуальним змішане навчання (ЗН), яке розглядається через спектр таких ознак:

- ✓ змішане навчання належить до формального навчання у рамках діяльності освітньої установи;
- ✓ це цілеспрямований процес здобуття знань, умінь та навичок у рамках певних навчальних дисциплін, частина якого реалізується у віддаленому режимі;
- ✓ під час вивчення навчальної дисципліни використовуються інформаційно-технічні та інтерактивні засоби навчання;
- ✓ ІКТ використовуються не тільки для зберігання і доставки навчального матеріалу, але й для реалізації контрольних заходів, організації навчальної взаємодії (консультацій, обговорення);
- ✓ має місце самоконтроль учня за часом, місцем, маршрутами та темпом навчання [3].

Науковці та практики-методисти виокремлюють типові моделі змішаного навчання, які можна обрати за основу:

1. Моделі ротацій, коли відбувається чергування форм навчання за фіксованим розкладом; навчальний час розподілено між індивідуальним електронним навчанням і очним навчанням у закладі освіти разом із учителем, який також здійснює дистанційну підтримку при електронному навчанні. Найпоширенішими моделями ротацій є «онлайн станції», ротація за лабораторіями, «перевернуте навчання», індивідуальна ротація.

2. Гнучка модель (Flex модель): переважне використання електронного навчання, тобто зміст навчання поставляється в он-лайн режимі, при цьому учні можуть бути в цей час в школі.

3. Модель самостійного змішування (Self-blend модель): вивчення одного або декількох електронних навчальних курсів повністю онлайн.

4. Модель збагаченого віртуального навчання, за якої протягом навчання, учні розподіляють свій час між відвідуванням очних занять і дистанційним навчанням. Відмінність цієї моделі від «перевернутого класу» в тому, що школяри не відвідують навчальний заклад кожного дня. Вона також відрізняється від моделі «Self-blend» тим, що це не просто методика вивчення курсу, а модель роботи всього навчального закладу.

Кожна модель відрізняється переважанням однієї із трьох складових технологій змішаного навчання: 1. Пряма особиста взаємодія учасників освітнього процесу. 2. Інтерактивна взаємодія, опосередкована комп'ютерними телекомунікаційними технологіями та електронними інформаційно-освітніми ресурсами. 3. Самостійне навчання.

Навчання у класах з поглибленим вивченням математики передбачає істотне збільшення частки самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів. Підвищенню результативності самостійної пізнавальної діяльності учнів у нових умовах функціонування профільної школи допоможе застосування однієї з форм ЗН – «Перевернуте навчання» [10].

«Перевернуте навчання» – це модель навчання, при якій учитель пропонує матеріал для самостійного вивчення вдома, а у класі час використовується на виконання практичних завдань та вправ. Розглянемо реалізацію технології «Перевернутий клас» на прикладі вивчення теми «*Логарифми та їх властивості*» у класі з поглибленим вивченням математики.

Предметні результати, яких необхідно досягти на даному уроці: учень (учениця) формулює означення логарифма та властивості логарифмів; перетворює вирази, що містять логарифми.

Приклади завдань із теми на кожен рівень засвоєння навчального матеріалу (репродуктивний, продуктивний, дослідницький).

Репродуктивний Знайдіть значення виразу $\frac{\log_8 128 - \log_8 2}{2 \log_6 2 + \log_6 9}$.

Продуктивний Обчисліть: $7^{2 \log_7 3 + \log_{\sqrt{7}} 4}$.

Спростіть вираз: $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$.

Виразіть $\log_{25} 12$ через a і b , якщо $a = \log_5 4$, $b = \log_5 3$.

Дослідницький Доведіть властивості логарифмів MMI.

Проектуємо домашнє завдання. Вибираємо відео для перегляду учнями, а також одне або кілька завдань задля перевірки розуміння матеріалу. Аналізуємо, з якою метою учні дивляться відео, виконують вправи. Розподіл часу, який учень витрачає на виконання домашнього завдання, представимо у таблиці 4.

Таблиця 4

Інструктивна карта для виконання домашнього завдання

Подивись відеоролик https://www.youtube.com/watch?v=OkO9Vgo87pc&ab_channel=%D0%9F%D1%96%D0%B4%D0%B3%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%97%D0%9D%D0%9E		13 хв
Запиши властивості логарифмів та їх доведення в зошит (за необхідністю скористайся підручником)	Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : профіл. рівень : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номеровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. С. 29–40 Істер О. С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. Київ : Генеза, 2019. Стор. 40–55.	5–6 хв
Виконай вправи (тест, інтерактивне завдання) https://learningapps.org/13605344		10 хв
Задай запитання вчителю, якщо виникли труднощі	За допомогою e-mail, viber або на уроці	

Проектуємо діяльність на уроці. Отже, учні вдома познайомилися з основними поняттями теми, а також перевірили своє розуміння запропонованого матеріалу. Тому на уроці необхідно виходити на продуктивний і дослідницький рівень. Опис діяльності на уроці може бути таким:

1. На початку уроку необхідно виявити та проаналізувати труднощі, що виникли під час виконання домашнього завдання. Вчитель відповідає на запитання учнів, за допомогою додаткових запитань наштовхує учнів на відповіді. Перевірка домашнього завдання, усні вправи різного рівня складності.

2. Постановка завдання (формування вмінь та навичок). Виконання письмових вправ: розв'язання завдань на обчислення, на доведення, на побудову графіків функцій.

3. Організація дослідницької діяльності. Поділяємо клас на дві групи, кожна з яких отримує завдання: доведіть методом математичної індукції властивості логарифмів:

1) $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$, де $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, $\beta \in R$

2) $\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n$, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – додатні, $a > 0$, $a \neq 1$

4. Представлення та оцінювання результату дослідницької діяльності. Кожна група представляє роботу, робить висновок, оцінює свою роботу.

5. Підведення підсумків. Рефлексія. Домашнє завдання.

Під час проведення уроку за технологією «Перевернутий клас» педагогу необхідно фіксувати ускладнення, проблемні моменти уроку. Для самоаналізу пропонуємо відповісти на запитання: Чи відповідає урок моделі «Перевернутий клас»? Які компетентності формуються в учнів на даному занятті? Що потрібно змінити у домашньому завданні, у проведенні уроку для його подальшого застосування у професійній діяльності вчителя?

Висновки. Представлені результати дослідження було обговорено на семінарі, проведеному за участю вчителів природничо-математичного циклу Одеського приватного ліцею «Мрія». Виявлено, що реалізація профільного навчання вчителями математики відбуватиметься ефективно за умови розуміння та врахування ними особливостей і відмінностей цільової, змістової і процесуальної моделей математичних дисциплін для різних рівнів навчання.

Список використаних джерел

1. Акуленко І. А. Методика навчання математики в профільній школі: моніторинг навчальних досягнень студентів : методичний посібник для організації моніторингу навчальних досягнень студентів / за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : видавець Чабаненко Ю. А. 2012. 84 с.
2. Акуленко І. А. Компетентісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект): монографія. Черкаси : видавець Чабаненко Ю. А. 2013. 460 с.
3. Бугайчук К. Л. Змішане навчання: теоретичний аналіз та стратегія впровадження в освітній процес вищих навчальних закладів. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2016. № 4 (54). С. 1–18.
4. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://nus.org.ua/wp-content/uploads/2019/06/standart-1206.pdf>
5. Закон України про повну загальну середню освіту (із змінами). Редакція від 01.08.2020. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text>
6. Закон «Про освіту». Редакція від 01.01.2021. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text>

7. Іванова С. В. Формування геометричних умінь старшокласників шкіл (класів) гуманітарного профілю : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Київ, 1999. 221 с.
8. Іванова С. В., Чуприна О. С. Підготовка майбутніх вчителів математики до формування геометричних компетенцій учнів суспільно-гуманітарного профілю на основі використання дослідницьких методичних завдань. Друга Всеукр. наук. конф. «Актуальні проблеми суспільно-гуманітарних наук». 29-30 лист. 2013 р. Нац. мет. акад. України : Дніпропетровськ. С. 67–72.
9. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк; за ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг : Книжкове видавництво Карєєвського, 2009. 316 с.
10. Кушнірук А. С. Застосування технології «Перевернутого навчання» в підготовці майбутніх учителів математики. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах* : зб. наук. праць. Запоріжжя : КПУ, 2019. Вип. 64, Т. 1. С. 139–143.
11. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-9 класи. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
12. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. URL: <https://uman-rvoms.gov.ua/navchalni-programi-dlya-89-klasiv-z-pogliblenim-vivchennyam-12-33-08-18-06-2020/>
13. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://rada.info/upload/users_files/02146959/e971b695934c0b9b5013d002d698bcfe.pdf
14. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://rada.info/upload/users_files/02146959/828babe8f5aa78569243a87a59f77197.pdf
15. Національна рамка кваліфікацій. URL: <https://mon.gov.ua/ua/tag/natsionalna-ramka-kvalifikatsiy>
16. Недялкова К. В. Загальна методика навчання математики : практичний курс. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.
17. Недялкова К. В. Застосування мікрокалькулятора на різних етапах уроків математики. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*. Суми : Сум ДПУ, 2019. № 1 (13). С. 35–47.
18. Ордановська О. І. Підготовка майбутніх вчителів фізико-математичних дисциплін до роботи у профільній школі. Одеса : «Освіта України», 2015. 340 с.
19. Прач В. С. Евристичне навчання математики : Подорож у світ евристики. Донецьк : Ноулідж, 2012. 275 с.
20. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.
21. Хуторской А. В. Практикум по дидактике и современным методам обучения. СПб. : Питер, 2004. 541 с.
22. V. Ivanov, L. Dimitrov, S. Ivanova, O. Olefir "Heuristic Techniques as Part of Heuristic Methods and Interaction of Personality Types in their Application", *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal*, vol. 6, no. 1, pp. 208–217 (2021).

4.2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ПІДГОТОВКИ І ПРОВЕДЕННЯ СУЧАСНИХ УРОКІВ МАТЕМАТИКИ НА РІЗНИХ ОСВІТНІХ РІВНЯХ

*Тамара Коростіянець, Світлана Іванова,
Катерина Нєдялкова, Анастасія Кушнірук*

Вступ. Питання про підвищення ефективності та якості уроків математики як основної колективної форми організації навчання у закладах загальної середньої освіти було і залишається актуальним. Наразі набуто позитивного досвіду у практиці навчання математики щодо поліпшення якості уроків, пов'язаний із використанням НІТ навчання, нетрадиційних підходів, сучасних педагогічних технологій, урахуванням особливостей розвитку дітей цифрового покоління тощо. Накопичений досвід потребує впровадження і подальшого вдосконалення.

Огляд останніх публікацій за темою. Проблему, що обговорюється, можна вважати достатньо розробленою науковцями у психолого-педагогічній галузі: ретроспективний аналіз засвідчує, що зацікавленість питаннями ефективно організації колективного навчання з'являється ще за часів Я. Коменського – систематизатора і популяризатора класно-урочної системи – і Песталоцці – засновника розвивального навчання. Ідеї «вільного виховання і навчання», реформаторська педагогіка і рух альтернативного навчання безсумнівно вплинули на традиційний урок, але не позбавили його лідируючої позиції в якості основної форми організації шкільного навчання [5]. За радянських часів проблему підвищення ефективності уроку активно розробляли М. І. Махмутов (надав типи аналізів уроку, класифікацію уроків), О. М. Матюшкін (розробив ідею реалізації проблемних ситуацій на уроці), Г. П. Бєвз (розробив схему аналізу уроку математики) та інші науковці.

На сучасному етапі розвитку психолого-педагогічної науки проблемі підвищення якості уроку також приділяється значна увага: виокремлено риси високопродуктивного уроку, сформульовано вимоги до якісного уроку і принципи його побудови, зокрема у навчанні математики (З. І. Слєпкань); даються характеристики сучасного уроку, який передбачає застосування інтерактивних технологій (О. І. Пометун); розроблено класифікацію уроків, у основу якої покладено провідну діяльність учнів (когнітивну, креативну або оргдіяльнісну) та виокремлено перспективні методи і прийоми навчання на уроках кожного типу (А. В. Хуторской); розглядаються особливості комп'ютерно-орієнтованих уроків у евристичному навчанні математики (О. І. Скафа); досліджується питання щодо методів і прийомів підвищення інтересу, організації мотивації та рефлексії на уроках (І. Й. Карпінська, А. В. Хуторской).

Водночас, наразі при організації і проведенні уроків математики відкритими залишаються питання щодо врахування мотиваційного складника навчання; реалізації профільного навчання, включаючи допрофільну підготовку, пропедевтику поглибленого навчання математики; вивчення методичних особливостей навчання математики на рівні стандарту; дотримання особистісно орієнтованого підходу тощо.

Мета дослідження – визначення й апробація шляхів підвищення ефективності організації і проведення уроків на різних освітніх рівнях навчання математики у закладах загальної середньої освіти.

Виклад основного матеріалу. Сучасна педагогіка тлумачить урок як цілісний, логічно завершений, обмежений у часі, регламентований обсягом навчального матеріалу основний елемент педагогічного процесу, який забезпечує активну і планомірну навчально-пізнавальну

діяльність групи учнів певного віку і рівня підготовки, спрямовану на розв'язання визначених завдань [3, с. 204].

При розробці та проведенні майстер-класів (як презентацію власного педагогічного досвіду і творчих ідей [5]) авторами було дотримано вимог щодо сучасного уроку математики, а саме:

- 1) цілеспрямованість;
- 2) раціональна побудова свідомості учнів;
- 3) оптиміальний вибір засобів, методів і прийомів навчання і виховання;
- 4) організаційна чіткість.

Ставлячи за мету досягти високої якості уроку, при їх підготовці та проведенні було враховано *шляхи підвищення ефективності уроків математики*, визначені З. І. Слєпкань [15, с.107]:

- 1) раціональний вибір мети і завдань уроку, його змісту і структури;
- 2) застосування методів і прийомів активного навчання учнів;
- 3) вміле поєднання колективних, групових та індивідуальних форм навчання, спрямоване на впровадження диференціації навчально-виховного процесу на основі досягнення обов'язкових результатів навчання;
- 4) систематичне використання різних видів самостійної роботи учнів;
- 5) посилення зв'язку теоретичного матеріалу і задач; посилення прикладної спрямованості;
- 6) раціональне поєднання традиційних наочних посібників і технічних засобів навчання з новими інформаційними технологіями;
- 7) удосконалення міжпредметних зв'язків;
- 8) реалізація органічного зв'язку навчання, розвитку і виховання учнів;
- 9) удосконалення форм і методів контролю успішності учнів.

Проаналізуємо зміст майстер-класу у формі відкритого уроку, що було проведено у 7–М класі Одеського приватного ліцею «Мрія» (учні цього класу орієнтовані на подальше поглиблене вивчення математики).

Тема уроків 1–2: Найпростіші геометричні фігури та їх властивості. Аналогія у геометрії.

Мета уроку 1: Узагальнити і систематизувати знання учнів щодо властивостей найпростіших геометричних фігур. Сформувати уявлення про аналогію як форму умовиводу та методу наукового пізнання.

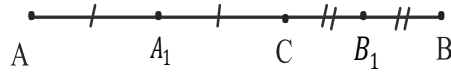
На початку уроку повідомляється тема, створюється позитивна мотивація до навчання.

Учитель: Які найпростіші геометричні фігури вам відомі? (...) Із яких фігур можна створити безліч інших? Так, точка і пряма. І навіть пряму можна уявити як безліч точок. Тому не дарма Леонардо да Вінчі сказав: «Точка – це перша основа геометрії» – епіграф до уроку. Точка і пряма – перші поняття геометрії, їх не можна визначити. А от променю можна дати означення. Що ми називаємо променем? (...) *За аналогією* ми даємо означення відрізка. (Підводимо до поняття аналогії).

Ми сказали «за аналогією». Що означає це поняття?

Розглянемо дві задачі (перша задача вирішується учнем на дошці, готове розв'язання другої представлено на слайді).

Задача 1. На відрізку АВ, який дорівнює 20 см, позначено точку С. Знайдіть відстань між серединами відрізків АС і СВ.



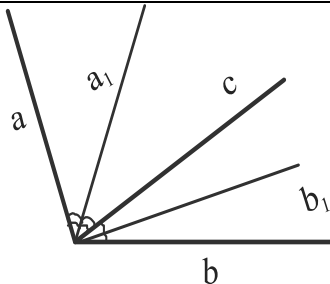
Розв'язання.

Нехай т. С належить відрізку АВ, точки A_1 і B_1 – середини відрізків АС і СВ відповідно. Тоді $A_1C = \frac{1}{2}AC$, $CB_1 = \frac{1}{2}CB$. Знайдемо довжину відрізка $A_1B_1 = A_1C + CB_1 = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB$.

Оскільки за умовою задачі $AB=20$ см, маємо: $A_1B_1 = \frac{20}{2} = 10$ см.

Відповідь: 10 см.

Задача 2. Промінь с ділить кут (ab), що дорівнює 140° , на два кути. Знайдіть кут між бісектрисами кутів (ac) і (cb).



Розв'язання.

Нехай промінь с ділить кут (ab) на два кути, промені a_1 і b_1 – бісектриси кутів (ac) і (cb) відповідно. Тоді $\angle(a_1c) = \frac{1}{2}\angle(ac)$, $\angle(b_1c) = \frac{1}{2}\angle(bc)$. Знайдемо градусну міру кута (a_1b_1) : $\angle(a_1b_1) = \angle(a_1c) + \angle(b_1c) = \frac{1}{2}\angle(ab)$.

Оскільки за умовою задачі $\angle(ab)=140^\circ$, маємо: $\angle(a_1b_1) = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$.

Відповідь: 70° .

Учитель: чи помітили ви щось спільне в обох задачах? Так, і в умові, і в розв'язанні. В першій задачі мова йде про середину відрізка, а в другій – про бісектрису кута. Говорять, що ці задачі *аналогічні*.

Аналогія допомагає науковцям роботи відкриття: літаки було створено за *аналогією* із польотом птахів (слайд); кажан у польоті випускає ультразвукові коливання, завдяки яким орієнтується у темряві: за *аналогічним принципом* учені створили радіолокатор (слайд).

Учитель: Аналогія настільки важлива у науці, що відомі люди висловлювалися про неї (рис. 1).

«Можливо, не існує відкриттів ні в елементарній, ні у вищій математиці, ні, мабуть, у бідь-якій іншій галузі, які б могли бути зроблені ... без *аналогії*» (Дьєрдь Пойа (1887 – 1985), угорський, швейцарський і американський математик).

«Пізнання світу є пізнання самого себе, оскільки людина – найбільша таємниця, джерело *аналогій* для Всесвіту» (Новаліс (1772 – 1801), німецький письменник, поет, містик).

«Часто траплялося, що суттєвий успіх був досягнутий проведенням послідовної *аналогії* між непов'язаними, на перший погляд, явищами» (Альберт Ейнштейн (1879 – 1955), фізик – теоретик, лауреат Нобелівської премії).



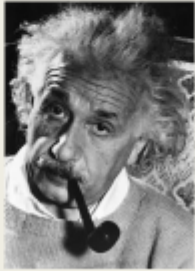


Рис. 1. Висловлення про аналогію

Заповнимо порожні місця таблиці (кожен учень одержує роздруковані картки).

Відрізки	Кути
Кінці відрізка	Сторони кута
	Промінь ділить кут на два кути
Рівні відрізки суміщаються накладанням	
Середина відрізка	
	Градусна міра кута
Аксіома (основна властивість) відкладання відрізків	
	Аксіома (основна властивість) вимірювання кутів

Далі учням пропонується дидактична гра: «Так – Ні» (логічні задачі) (слайд – рис. 2). Кожному учневі надано два прапорця: якщо «вірно» – учень показує зелений прапорець, якщо «невірно» – червоний прапорець. У ході гри вчитель має можливість зробити висновки щодо знань кожного учня, наводить за потреби контрприклад.

Гра «Так - Ні» (логічні задачі).

1. Якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні?
2. Чи може пара суміжних кутів складатися:
 - а) із двох гострих кутів;
 - б) із двох прямих кутів?
3. Для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут?
4. На прямій позначено п'ять точок. Чи є вірним таке твердження:
 - а) будь-які три з даних точок лежать між двома іншими;
 - б) серед даних точок знайдуться три, що лежать між двома іншими?
5. Якщо кути рівні, то вони вертикальні?
6. Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні?
7. Якщо точка С лежить на промені АВ, то вона обов'язково лежить і на відріжку АВ?
8. Якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий?
9. Якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то вони суміжні?
10. Якщо сума двох кутів не дорівнює 180° , то вони не суміжні?

Рис. 2. Зміст дидактичної гри

Наступний етап уроку – розв'язування задач.

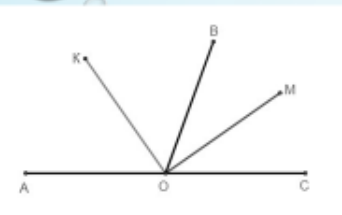
1. *Задачі на доведення:* (умова задачі та схема застосування методу від супротивного на слайді – рис. 3).

Задача. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, є тупим. Доведіть методом від супротивного, що жоден із решти утворених кутів не може бути прямим.

Схема доведення від супротивного	
Твердження Якщо А, то В	
Доведення	
1. Припущення. Нехай А, але не В	Припускаємо, що умова теореми справджується, а висновок — ні
2. Міркування	Міркуємо, спираючись на аксіоми, раніше доведені теореми, умову задачі
3. Суперечність	Отримуємо нове твердження, що суперечить або даній умові, або одній з аксіом, або раніше доведеній теоремі
4. Висновок. Тоді В	Переконаємося, що наше припущення хибне, тобто дане твердження є правильним

Рис. 3. Задача 1 на застосування методу від супротивного

Під час розв'язування задачі 2 бажано застосувати евристичну бесіду (рис. 4).



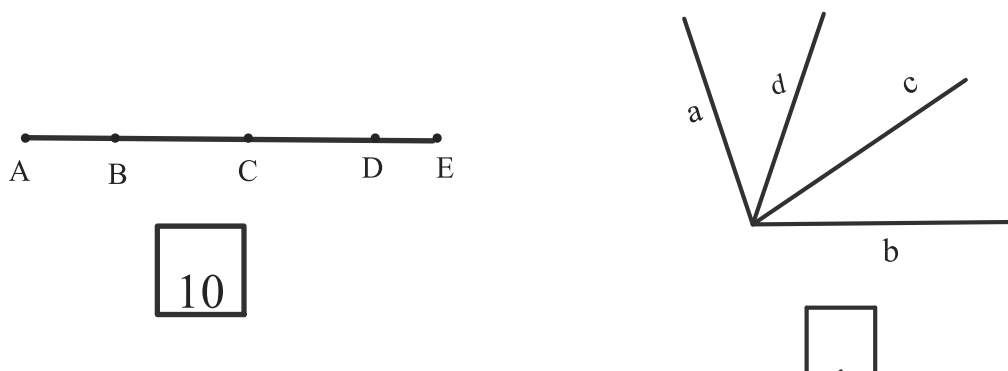
Задача. Доведіть, що коли бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні, то точки A , O і C лежать на одній прямій.

- ✓ Якими є кути AOB і BOC ?
- ✓ Якою властивістю володіє бісектриса?
- ✓ Що означає, що бісектриси перпендикулярні?
- ✓ Як по-іншому можна сказати, що точки A , O і C лежать на одній прямій?
- ✓ Чому дорівнює градусна міра розгорнутого кута?
- ✓ Отже, треба довести, що градусні міри всіх кутів у сумі складають 180 градусів.

Рис. 4. Задача 2 із застосуванням евристичної бесіди

У ході вирішення задач обговорюються поняття, що складають логічну основу шкільного курсу геометрії: «доведення» (посилання на аксіому, теорему, дані задачі, означення), «метод доведення» (від супротивного, аналітичний, синтетичний), «аксіома» (твердження, що приймається без доведення), «теорема» (твердження, справедливність якого встановлюється за допомогою доведення).

Логічна задача 3: (слайд) Яке число треба поставити у порожній квадрат?



Тому, хто першим дає відповідь, додається один бонусний бал до результату контрольної роботи.

Тип другого уроку з даної теми – самостійна робота (диференційована, навчального характеру).

Мета уроку 2: підготовка до тематичної контрольної роботи.

Завдання представлено на карточках. Учні обирають задачі різного рівня складності, одержують консультації учителя у разі утруднень.

*Задачі для підготовки до контрольної роботи з теми:
«Найпростіші геометричні фігури та їх властивості»*

1. На промені з початком у точці А побудуйте відрізки АВ і АС так, щоб $AB = 8$ см, $AC = 5$ см.

а) Яка з трьох даних точок лежить між двома іншими?

б) Яку довжину має відрізок ВС ?

1 б.

2. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 124° . Знайдіть градусні міри решти кутів.

1 б.

3. Один із суміжних кутів на 28° менший від другого. Знайдіть ці кути.

2 б.

4. Промінь OL ділить кут MON на два кути так, що $\angle MOL = 84^\circ$ і $\angle LON = 18^\circ$. Промінь ОК — бісектриса кута MON. Знайдіть кут KOL.

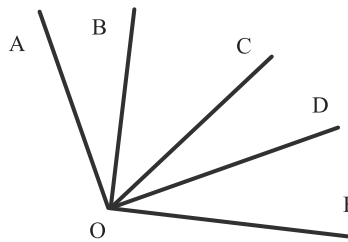
2 б.

5. На рисунку $\angle AOB = \angle COD$,

$$\angle AOC = \angle COE.$$

Доведіть, що $\angle BOC = \angle DOE$.

3 б.



6. Точки М, К і Р лежать на одній прямій, $MP = 24$ см, відрізок КР у 5 разів менший від відрізка МК. Знайдіть відрізок МК.

3 б.

Зауважимо, що до цих уроків було дібрано банк задач (усних, графічних, логічних, дослідницьких, на доведення, на обчислення, прикладних), до якого вчитель може звертатися у разі доцільності (за наявності часу). Вчитель по ходу другого уроку проводить індивідуальне консультування. Учні обирають завдання, розраховуючи очікуваний бал на контрольній роботі (виявляємо рівень мотивації, очікувань від результатів навчальної діяльності).

Отже, під час наведених уроків було реалізовано пропедевтику поглибленого навчання математики, методику узагальнюючого повторення, зроблено акцент на формуванні логічного мислення учнів, доречно застосовано НІТ навчання й особистісно орієнтований підхід, враховано мотиваційний складник навчання математики і вікові можливості школярів.

Підвищенню інтересу до вивчення й розуміння математики, на нашу думку, сприяє застосування на уроках елементів технології «Сторітеллінг», посилення прикладної спрямованості задачного матеріалу, використання завдань випереджального характеру тощо.

Пропонуємо розглянути урок з теми «Розв'язування задач практичного змісту. Площі многокутників», проведеного у формі майстер-класу із застосуванням технології «Сторітеллінг» у 9–М класі Одеського приватного ліцею «Мрія».

Сторітеллінг (storytelling – розповідь історій) – це ефективний метод донесення інформації до аудиторії шляхом розповіді смішних, зворушливих або повчальних історій із реальними або вигаданими персонажами. Застосування такого методу на уроках математики, на нашу думку, може підвищити інтерес школярів до її вивчення і розуміння [6].

Мета уроку: узагальнити і систематизувати знання учнів з теми «Площа многокутників»; формувати в учнів навички й уміння застосовувати формули для знаходження площ многокутників при розв'язуванні практичних задач; розвивати в учнів креативне мислення,

уяву; критичність до реальності отриманих результатів; встановлювати зв'язки між вивченим матеріалом, здатність знаходити вихід із нестандартних ситуацій; виховувати розуміння важливості свідомого і міцного володіння системою математичних знань, умінь та навичок, необхідних у повсякденному житті.

Епіграфи до уроку: «Розум полягає не тільки в знанні, але й в умінні застосовувати знання на ділі» (Аристотель); «Знати – добре, але вміти – краще» (Емануель Гейбель).

Кожному з учнів набагато цікавіше не просто застосовувати формули для розв'язування задач, а «проживати історію» з цікавим сюжетом, яскравими ілюстраціями та іншими креативними елементами.

Сюжет уроку «Дачні ідеї для зручності, краси та комфорту»: учням пропонувалося облаштувати для сім'ї дачу на березі Чорного моря. Основними персонажами історії були члени родини: бабуся, мати, батько, молодші брати й сестри; самі учні та їхні друзі.

1. Бабуся не уявляє дачу без городу, отже ... Довжина городу прямокутної форми становить 12 м, а ширина – 5 м. Для поливу городу використали 10 л води на кожен квадратний метр. Скільки літрів води використали? (усне завдання).

2. Мати – найпрекрасніша жінка на Землі, вона – «квітка» у кожній родині. Уявіть собі клумбу із квітами. Яка з клумб, у вигляді квадрата чи у вигляді ромба, має більшу площу? Квадрат і ромб мають однакові периметри. Поясніть відповідь (усне пояснення, достатньо проілюструвати малюнками).

3. Для зручності та краси облаштуємо двір. Дачне подвір'я має форму трапеції з основами 20 м й 10 м і висотою 8 м. Скільки необхідно взяти плит квадратної форми з діагоналлю 0,6 м, щоб покрити ними двір? Відповідь округліть до сотень.

4. Батько пропонує цього літа поміняти вікна в усьому будинку. Одне вікно має розміри 1,3 м × 1,1 м. Обчисліть, скільки скла піде для скління $\square$ таких вікон? На обріз скла йде 10% його загальної площі (учні пропонують кількість вікон у залежності від розмірів дачної будівлі).

5. Облаштуємо кімнату для молодших братів і сестер. Підлога кімнати має форму прямокутника розміром 5,5 м на 7,5 м. Цю підлогу планують застелити ковроліном шириною 3 м, використавши для цього два шматки однакової довжини. Вартість ковроліну такої ширини у маркеті становить 200 грн за 1 м². У маркеті діє акція: якщо площа придбаного ковроліну становить 50 або більше квадратних метрів, то покупцеві надають знижку 8 % від вартості купленого ковроліну.

1). Яку суму грошей (у грн) заплатить покупець, якщо купить 50 м² ковроліну та скористається акційною пропозицією?

2). На скільки гривень менше заплатить покупець порівняно з покупкою 50 м² ковроліну за акційною пропозицією, якщо вибере найбільш економний варіант покупки ковроліну? (ЗНО 2019, пробна сесія)

6. Кімната-вітальня для всієї родини. Екрани телевізорів, зображених на рис. 1 і 2, мають форму прямокутників, сторони яких пропорційні. Діагоналі екранів цих телевізорів дорівнюють відповідно 32 дюйма і 48 дюймів. Визначте, у скільки разів площа екрана телевізора, зображеного на другому рисунку, більша за площу екрана телевізора, зображеного на першому рисунку (завдання випереджального характеру, ЗНО – 2016).



Рис. 1



Рис. 2

7. Альтанка – чудове місце зібратися з друзями літнього вечора. Дах альтанки складається з рівних рівнобедрених трикутників. Один з кутів трикутника дорівнює 60° , а протилежна сторона – 4 м. Знайдіть площу даху альтанки.

Розповідаючи історії, ми змушуємо учнів відчувати емоції, надаємо динаміку розповіді. Вигадка чи правда – історії захоплюють своїм сюжетом, персонажами і дією. Саме тому розповідь є відмінним способом передачі знань і життєвого досвіду. Ми утримуємо інтерес до теми і мотивуємо школярів залучитися до процесу навчання, доповнюючи теоретичний матеріал яскравими героями і подіями.

Під час використання елементів технології «Сторітеллінг» потрібно розповідати історію, яку вважатимуть за вдачу ваші учні. Перш за все, вона повинна бути в гармонії з цілями уроку і ненав'язливо вписуватися у його зміст. Розповідь має зацікавити учнів, викликати емоції, «зачепити» інтелектуально або сподобатися естетично. Унікальність полягає в тому, що при всій своїй ефективності історії не є точними інструментами. Для них немає жорстких правил, тільки загальні принципи. За допомогою оповідань навіть найскладніші аналітичні дані знаходять «людське обличчя». Цінність історій у тому, що вони є потужним засобом переконання і мотивації, а разом з тим розважають учнів і надовго фіксуються у їхній пам'яті.

У ході проведення майстер-класу нами було використано мультимедійні засоби: інтерактивне завдання на початку уроку задля актуалізації знань, презентація задачного матеріалу з яскравими зображеннями відповідних складових «дачі».

На відкритому уроці у 9-М класі були присутні вчителі Одеського приватного ліцею «Мрія», викладачі та студенти ДЗ «ПНПУ ім. К. Д. Ушинського». Майстер-клас викликав жвавий інтерес у присутніх, учні виявляли активність у ході уроку, під час аналізу обговорювалися доцільність та можливість застосування технології «Сторітеллінг» у навчальному процесі у закладах загальної середньої освіти.

Ще один з шляхів підвищення ефективності уроку, на нашу думку, – використання навчальних самостійних робіт. На нашу думку, самостійна робота учнів – це форма організації їх навчальної діяльності, що здійснюється під прямим або непрямым керівництвом викладача, в ході якого учні переважно або повністю самостійно виконують різного виду завдання з метою розвитку знань, умінь і особистісних якостей.

У дидактичній і методичній літературі можна зустрінути численні класифікації типів і видів самостійної роботи учнів за різними основами і критеріями. Однак, якого б типу і виду самостійної роботи учнів не організовував учитель, важливо, щоб він ураховував і глибоко розумів специфіку виду діяльності самих учнів. Самостійна діяльність учня, в якій би формі вона не виступала, завжди має єдину підставу в процесі навчання – індивідуальне пізнання. Вона базується на трьох видах діяльності учня [11]:

1) діяльність по засвоєнню понять, теорій, закономірностей або застосування готової інформації у знайомих ситуаціях навчання (при вирішенні типових пізнавальних задач);

2) діяльність, метою якої є визначення можливих модифікацій дій, засвоєних закономірностей у змінених умовах ситуацій навчання;

3) діяльність, спрямована на самостійне відкриття закономірностей (вирішення творчих задач).

Як правило, майже на кожному уроці математики проводяться самостійні роботи тренувального характеру для закріплення вивченого, для його застосування, для оволодіння необхідними вміннями та навичками. Вони складаються зазвичай з типових вправ і задач (тобто задач, що виконують «за зразком»), аналогічно тим, які виконувалися за допомогою вчителя. Це можуть бути також: самостійне відтворення відомих учням висновків формул, доведення теорем, складання таблиць і т.п., складання задач і вправ самими учнями, організація роботи над помилками. Математичні і навчальні завдання стають ядром будь-якої самостійної роботи учнів на уроках математики.

З метою розвитку в учнів інтересу до вивчення математики та підвищення їх математичної культури потрібно підкреслити ще зміну форм виконання самостійної роботи. На традиційних уроках учитель викликає учнів по черзі до дошки або школярі вирішують завдання самостійно в зошитах. Монотонність навчального процесу, яка відбувається на уроці, набридає учням, втрачається їх активність, ефективність таких самостійних робіт мала.

Продемонструємо зміст майстер-класу, що було проведено у 7–М класі Одеського приватного ліцею «Мрія».

Тема уроків 1–2: узагальнення і систематизація знань учнів з теми «Формули скороченого множення (ФСМ)».

Мета уроків 1–2: узагальнити і систематизувати матеріал теми; створити умови контролю (самоконтролю і взаємоконтролю) засвоєння знань і умінь, сприяти формуванню вмінь застосовувати прийоми: узагальнення, порівняння, виділення головного; розвиток математичного кругозору, мислення й мовлення, уваги і пам'яті, пізнавальної активності учнів.

1. На початку уроку повідомляється тема, створюється позитивна мотивація до навчання.

Учитель: для того щоб було легше узагальнити всі отримані знання з теми, ми з вами вирушимо в невелику подорож по країні формул скороченого множення, під час подорожі ми відвідаємо різні міста цієї країни, де ви продемонструєте свої знання, вміння та навички. У процесі подорожі ви маєте: закріпити вивчений матеріал, показати рівень засвоєння теми, проконтролювати й оцінити свої знання. У кожного з вас на столі оціночний лист, де ви будете фіксувати свої результати. Підпишіть свої оціночні листи. Але для того, щоб потрапити у країну ФСМ, вам потрібна віза. Візу видають за знання.

2. Актуалізація отриманих знань. Пропонується графічний диктант, діти визначають, чи є у них «віза» (виконуємо в зошитах: «+» це правильно, «-» це неправильно).

Чи є правильним твердження?

- 1). Вираз $2x^2y^3x^3$ – одночлен стандартного виду (–)
- 2). Вираз, що представляє собою суму одночленів – многочлен (+)
- 3). Одночлени з однаковою буквеною частиною – подібні одночлени (+)
- 4). Вираз $(x + 5)^2$ завжди більше або дорівнює 0 (+)
- 5). Квадрат двочлена $(a-2b)$ дорівнює $a^2-4ab-4b^2$ (–)
- 6). Вираз (x^2-y^2) являє собою різницю квадратів (+)
- 7). $(x^3 + y^3)$ – куб суми (–)
- 8). Рівняння $x^2 - 25 = 0$ має два корені 5 і –5 (+)
- 9). Вираз $16x^2y^3$ – це квадрат одночлена $8x^2y^3$ (–)

10). Вираз $(x-y)^3$ являє собою куб різниці (+)

Обмінюємося зошитами, перевіряємо по слайду й оцінюємо роботу сусіда по парті.

10 правильних відповідей – «5 балів»; 9–8 правильних відповідей – «4 бали»; 7–5 правильних відповідей – «3 бали»; менше 5 правильних відповідей – «2 бали».

Діти, що одержали «5», «4», «3» отримують дозвіл на відвідування країни (візу). Хто має «2», одержує додаткові запитання на знання словесних формулювань ФСМ.

3. Закріплення вивченого матеріалу. Починаємо нашу подорож.

Оціночний лист.

III -----

Графічний диктант	Місто Теоретичних знань	Місто Формул	Місто Істини	Місто Рівнянь	Місто Ерудитів	Місто Тест	Активність у подорожі	Усього балів	Оцінка

Місто Теоретичних знань

На кожній парті є картка-доміно. Працюємо у парах. Картка містить запитання і відповідь. Першим починає учень, у якого картка містить слова «Старт» і «Фініш». Він задає стартове запитання (він же дає заключну відповідь). Кожен учень повинен уважно стежити за ходом гри, щоб не пропустити свою відповідь. Відповівши, учень задає своє запитання і т.д. Учитель або учні вказують на помилку, якщо пролунала неправильна відповідь. За гру «Доміно» в оцінний лист ставимо один бал, якщо вірно відповідаєте, і 0 балів, якщо пропускаєте свою відповідь.

«Математичне доміно».

Фініш: Відповідь: Добутку суми цих виразів на неповний квадрат їх різниці.

Старт: Питання: Що називають многочленом?

Відповідь: Суму одночленів.

Запитання: Що називають одночленом?

Відповідь: Добуток чисел, змінних і їх степенів.

Запитання: Які доданки називають подібними?

Відповідь: Доданки з однаковою буквеною частиною.

Запитання: Як звести подібні доданки?

Відповідь: Скласти їх числові коефіцієнти, а результат помножити на загальну буквену частину.

Запитання: Як помножити одночлен на многочлен?

Відповідь: Одночлен помножити на кожний член многочлена, а результати додати.

Запитання: Як перемножити одночлени?

Відповідь: Перемножити числові коефіцієнти, а потім перемножити степені з однаковими основами і результати перемножити.

Запитання: Як помножити два степеня з однаковими основами?

Відповідь: Основа залишається та ж сама, а показники степенів додаються.

Запитання: Як піднести степінь у степінь?

Відповідь: Основа залишається та ж сама, а показники степенів перемножуються.

Запитання: Як помножити многочлен на многочлен?

Відповідь: Кожен член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена і результати додати.

Запитання: Чому дорівнює квадрат суми двох виразів?

Відповідь: Квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого на другий плюс квадрат другого виразу.

Запитання: Чому дорівнює квадрат різниці?

Відповідь: Квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого на другий плюс квадрат другого виразу.

Запитання: Чому дорівнює добуток різниці і суми двох виразів?

Відповідь: Різниці квадратів цих виразів.

Запитання: Чому дорівнює добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми?

Відповідь: Різниці кубів цих виразів.

Запитання: Чому дорівнює сума кубів двох виразів?

Продовжуємо подорож: «Місто Формул».

Робота у парах. У кожній парі учнів є лист із завданням № 1. Застосувавши принцип відповідності, заповніть таблицю.

А) $(a+b)^2$	1) $(-b-a)(b-a)$
Б) $(a-b)^2$	2) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
В) a^2-b^2	3) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Г) $(a+b)^3$	4) $(a+b) \cdot (a^2-ab+b^2)$
Д) $(a-b)^3$	5) $(a-b) \cdot (a+b)$
Е) a^3+b^3	6) $a^2-2ab+b^2$
Ж) a^3-b^3	7) $(b-a)^2$
	8) $(a-b) \cdot (a^2+ab+b^2)$
	9) $(-b+a)^2$
	10) $a^2+2ab+b^2$
	11) $(b+a)^2$
	12) $(-a-b)^2$

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
10, 11, 12	6, 7, 9	1,5	2	3	4	8

У оціночний лист поставити: якщо всі правильні відповіді – 5 балів, 6 правильних – 4 бали, 5 правильних – 3 бали, 4 правильних – 2 бали, менше 4 правильних – 0 балів.

Вирушаймо далі: «Місто Істини». (Лист із завданням № 2). Кожен учень самостійно знаходить помилку і записує правильну відповідь у відповідну графу.

	Знайти помилку	Помилка	Правильна відповідь
1	$(4y-3x)(3x+4y) = 8y^2-9x^2$	$8y^2$	$16y^2$
2	$100m^4-4n^6 = (10m^2-2n^2)(10m^2+2n^2)$	$2n^2$	$2n^3$
3	$(3x+a)^2 = 9x^2-6ax+a^2$	$-6ax$	$6ax$
4	$(6a^2-9c)^2 = 36a^4-108a^2c+18c^2$	$18c^2$	$81c^2$
5	$x^3+8 = (x+2)(x^2-4x+4)$	$-4x$	$-2x$
6	$(3x+1)^3 = 27x^3+9x+9x+1$	$9x$	$27x^2$
	Кількість балів		

За кожне правильне завдання – 1 бал. Впишіть кількість балів у оціночний лист.

Напевно, настав час розминатися? Давайте трохи відпочинемо.

Фізкультхвилинка. Учитель називає числа або буквені вирази. Якщо звучить число, яке є квадратом будь-якого числа, то діти плещуть у долоні 2 рази, якщо кубом – 3 рази, якщо одночасно і квадратом і кубом – 4 рази, інакше дивляться на сусіда і – посміхаються: 4; 27; 8; 1; 15; 49. МОЛОДЦІ! А зараз закрийте очі та кінчиком носика напишіть слово «математика» у повітрі.

Наступне місто – «Місто Рівнянь».

Видатний фізик Альберт Ейнштейн – основоположник теорії відносності – говорив так: «Мені доводиться ділити час між політикою і рівняннями. Однак рівняння, по-моєму, набагато важливі. Політика існує тільки для даного моменту, а рівняння будуть існувати вічно». (Лист із завданням №3). Працюємо у групі по 4 учня: після того, як у кожного учня групи розв'язання оформлено в зошитах, діти переписують у бланк відповідей і дають його на перевірку (за швидкість додається один бал).

Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2 - (x-5)(x+5)=79$; 2) $(2-x)^2 - x \cdot (x+1,5)=4$; 3) $(x+1) \cdot (9-x^2)=0$.

1.	1,5.
2.	0
3.	-3; -1; 3.

Із кожної групи до дошки виходить один представник і вирішує рівняння із поясненням.

Далі потрапляємо у «Місто Ерудитів». Ви знаєте, що за допомогою формул скороченого множення можна прискорити (раціоналізувати) обчислення, навіть робити це подумки. Наприклад:

$$31^2 = (30 + 1)^2 = 900 + 60 + 1 = 961;$$

$$29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841;$$

$$31 \cdot 29 = (30+1)(30-1) = 900 - 1 = 899.$$

Чудовий «фокус», пов'язаний з піднесенням до квадрату чисел, які закінчуються цифрою 5. Про нього розповість ... (повідомлення учня).

Проведемо відповідні міркування для 852. Маємо:

$$85^2 = (80 + 5)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 5^2 = 80(80+10) + 25 = 80 \cdot 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225$$

Помічаємо, що для обчислення 85^2 достатньо було помножити 8 на 9 і до отриманого результату приписати справа 25. Аналогічно: $35^2 = 1225$ ($3 \cdot 4 = 12$ і до отриманого числа приписали праворуч 25). Щоб ціле число з половиною піднести до квадрату, потрібно помножити ціле число на сусіднє більше число і до результату приписати $\frac{1}{4}$. Наприклад, $(6\frac{1}{2})^2 = 42\frac{1}{4}$; $(7\frac{1}{2})^2 = 56\frac{1}{4}$. Швидко і просто. Давайте потренуємося.

Піднесіть до квадрату: 45^2 , 95^2 , 125^2 , $(9\frac{1}{2})^2$, $(20\frac{1}{2})^2$.

Завдання на кмітливість. Змінивши позицію однієї цифри, добийтеся, щоб рівність була правильною: $102=100$. Якщо ви зрозуміли і у вас усе вийшло, то в оцінний лист поставте 1 бал.

Нарешті, «Місто-Тест» (різнорівнева тестова робота, у двох варіантах, із самоперевіркою. Букву, під якою записана правильна відповідь треба вписати у таблицю).

Тест «Формули скороченого множення». 1 варіант.

Застосуйте формули скороченого множення і виберіть правильну відповідь.

1. $(2x+5)^2$

Відповіді: а) $4x^2+25$; б) $4x^2+10x+25$; в) $4x^2+20x+25$.

2. $25x^2-16$

Відповіді: а) $(4-5x)(4+5x)$; б) $(5x-4)(4+5x)$; в) $5x^2-4$.

3. $(9-a)(a+9)$

Відповіді: а) $81-a^2$; б) a^2-81 ; в) a^2+81 .

4. $8-a^3c^3$

Відповіді: а) $(2-ac)(4+4ac+a^2c^2)$ б) $(2+ac)(4+4ac+a^2c^2)$ в) $(2-ac)(4+2ac+a^2c^2)$

5. $100x^2-20xy+y^2$

Відповіді: а) $(y+10x)^2$ б) $(y-10x)^2$ в) $20x^2+y^2$

6. $(0,5x+7)(7-0,5x)$

Відповіді: а) $49-0,25x^2$ б) $49+0,25x$ в) $0,5x^2+14$

7. $(20-1)^2$

Відповіді: а) 399 б) 421 в) 361

8. 49^2-39^2

Відповіді: а) 880 б) 889 в) 394

Таблиця відповідей:

Номер завдання	1	2	3	4	5	6	7	8
Відповідь								

Тест «Формули скороченого множення». 2 варіант.

Застосуйте формули скороченого множення і виберіть правильну відповідь.

1. $(y^8-2x^4y)^2$

Відповіді: а) $4x^8y^2+4x^4y^9+y^{16}$ б) $y^{16}-4x^4y^9+4x^8y^2$ в) $y^{16}-2x^4y^9+4x^8y^2$

2. $4y^6-9a^4$

Відповіді: а) $(3a^2+2y^3)(2y^3-3a^2)$ б) $(3a^2+2y^3)(3a^2-2y^3)$ в) $(3a^2+2y^3)(3a^2+2y^3)$

3. $(c^2+a^4)(a^4-c^2)$

Відповіді: а) a^4+c^8 б) a^4-c^8 в) a^8-c^4

4. $0,001x^3-8$

Відповіді: а) $(0,1x-2)(0,01x^2+0,2x+4)$ б) $(0,1x-2)(0,01x^2+0,4x+4)$
в) $(0,1x+2)(0,01x^2-0,2x+4)$

5. $25a^2+49-70a$

Відповіді: а) $(5a-7)^2$ б) $(5a+7)^2$ в) $(-7-5a)^2$

6. $-25-2a-0,04a^2$

Відповіді: а) $(5+0,2a)$ б) $(5-0,2a)^2$ в) $-(5+0,2a)^2$

7. 299^2

Відповіді: а) 90001 б) 89999 в) 89401

8. $299 \cdot 301$

Відповіді: а) 90001 б) 89999 в) 89401

Таблиця Відповідей.

Номер завдання	1	2	3	4	5	6	7	8
Відповідь								

(Самоперевірка, правильні відповіді на слайді). У оціночний лист виписуємо кількість балів: 8 правильних – 5 балів; 7–6 правильних – 4 бали; 5–4 правильних – 3 бали; менше 4 правильних – 0 балів.

4. Підсумок уроку.

- Діти! Наша подорож підійшла до кінця. Підведемо підсумок: для чого потрібні формули скороченого множення?

Сьогодні, виконуючи різноманітні завдання, ви іноді припускалися помилок. І це не дивно, адже будь-яка людина, опановуючи нові знання, може помилятися. Важливо вчасно знайти і виправити ці помилки, зрозуміти, чому вони з'явилися, і намагатися надалі не допускати їх.

Давайте оцінимо свою активність на уроці (1–3 бали) і поставимо загальну оцінку за урок: 25–21 балів – «12–10», 20–16 балів – «9–7», 15–10 балів – «6–4».

5. Домашнє завдання: тест «Формули скороченого множення».

6. Рефлексія. З вами дуже приємно працювати! А свій настрій після уроку позначте на малюнках у оціночному листі (оберіть відповідний смайлик).

Проаналізуємо ще один майстер-клас, під час проведення якого було реалізовано ідею «уроку однієї задачі». Як правило, «уроки однієї задачі» використовують у старшій школі для поглиблення, систематизації та узагальнення знань та вмінь учнів [4; 12]. На таких уроках організовується робота учнів щодо розв'язання запропонованої задачі різними способами, порівняння цих способів, вибір більш раціонального. Вважаємо, що такі уроки доцільно проводити і в основній школі. Крім того, пропонуємо поширити трактування терміну «урок однієї задачі» і до них віднести такі уроки, на яких передбачено розв'язування складної задачі, обговорення різних способів виконання окремих етапів її розв'язування, розгляд як окремих випадків, так і узагальнень даної задачі. Отже, це не просто «урок однієї задачі», а, як іноді влучно кажуть, – «урок-бенефіс однієї задачі» або «урок-свято однієї задачі».

Нами був проведений майстер-клас, розрахований на 2 години, у 8–М класі (з поглибленим вивченням математики) Одеського приватного ліцею «Мрія».

Тема уроків 1–2. Розв'язування задачі поглибленого рівня з теми «Чотирикутники».

Мета: узагальнити і систематизувати знання учнів щодо теми «Чотирикутники»; формувати вміння доводити геометричні твердження; розвивати в учнів дослідницькі вміння.

Заняття починаємо з висловлення надії на плідну співпрацю з учнями у ході уроку і проведення математичної розминки за такими вправами.

1. Розглянемо типову систематизаційну схему (діаграму Ейлера-Вена) щодо чотирикутників, на якій представлено різні види (паралелограми, прямокутники, ромби, квадрати; трапеції). Використовуючи цю діаграму, легко сформулювати означення чотирикутників різних видів. Наприклад, паралелограм – це чотирикутник ... Сформулюйте, користуючись схемою, означення прямокутника.

2. Чи є обов'язковою в означення прямокутника теза про те, що всі кути мають бути прямими? Якщо ні, то чи достатньо одного прямого кута? Як довести рівність інших кутів 90° ?

3. Задача за готовим рисунком (рис. 5). У паралелограмі ABCD, менша сторона якого дорівнює 5 см, проведено бісектрису АК. Відрізок KC дорівнює 4 см. Знайти довжину більшої сторони паралелограма.

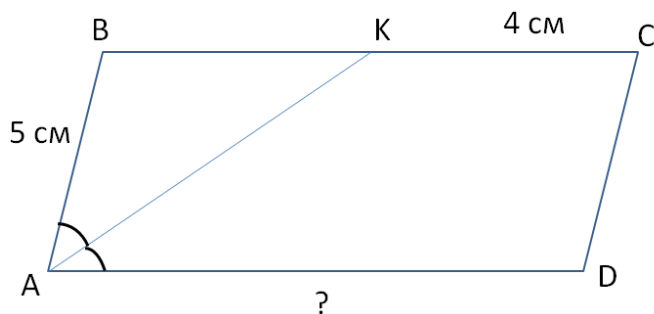


Рис. 5. Задача за готовим рисунком

На наступному етапі розглядаємо задачу підвищеної складності.

Задача*. У паралелограмі ABCD з сторонами 4 см і 7 см, проведено бісектриси усіх кутів. Знайти довжину відрізка FN, обґрунтувавши розв'язання (рис. 6).

Для мотивування учнів щодо розв'язування цієї задачі використовуємо технологію «Сторітеллінг», а саме: розповідаємо історію, пов'язану із цією задачею.

«Дана задача була запропонована на одній із математичних олімпіад. Умова задачі, на перший погляд, здалася учасникам олімпіади простою, вони одразу почали її розв'язувати. Але потім, після перевірки, виявилось, що правильно задачу не розв'язав жодний учасник олімпіади. Лише деякі з них зробили перші кроки у розв'язанні. Чому так сталося?»

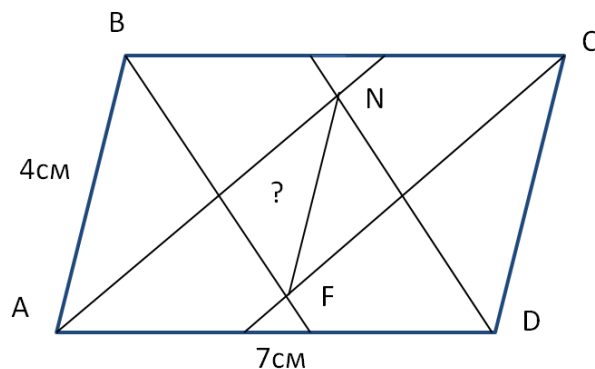


Рис. 6. Основна задача уроку

Передбачається, що учні висловлять припущення: задача складна, бо незрозуміло, як пов'язаний відрізок FN зі сторонами заданого паралелограма.

Пропонується розв'язати допоміжні задачі за готовими рисунками (табл. 1). Під час складання плану доведення допоміжної задачі 1 використовуємо евристичний метод. Щоб довести, що чотирикутник є прямокутником, що спочатку треба довести? Які теоретичні відомості можна використати, щоб довести, що чотирикутник є паралелограмом? Які теоретичні відомості можна використати, щоб довести паралельність AM і СК? Чому дорівнює сума $\angle 1$ і $\angle 6$, з урахуванням того факту, що AM і BM – бісектриси відповідних кутів паралелограма?

Для розв'язання допоміжної задачі 2 створюємо план: 1) доводимо, що трикутник ABP – рівнобедрений; 2) доводимо рівність трикутників BMP і CKD; 3) доводимо, що чотирикутник MPCK – паралелограм; 4) робимо висновок: $MK = PC = BC - BP = b - a$.

Таблиця 1

Допоміжні задачі

Допоміжна задача 1	Допоміжна задача 2
Довести, що чотирикутник MKNF – прямокутник.	1) Довести, що $MK \parallel BC$; 2) Визначити, чому дорівнює МК.

Повертаємося до задачі* і записуємо її розв'язання.

На цьому етапі доречно знову звернутися до історії про задачу* з математичної олімпіади. Просимо учнів зробити припущення, чому цю задачу не розв'язали учасники олімпіади? З чим пов'язані труднощі при її розв'язуванні?

Далі пропонуємо учням сформулювати доведене твердження: *діагоналі чотирикутника, утвореного при перетині бісектрис усіх кутів паралелограма, дорівнюють різниці його сторін*. Демонструємо інтелект-карту у вигляді опорної схеми щодо доведення даного твердження (рис. 7).

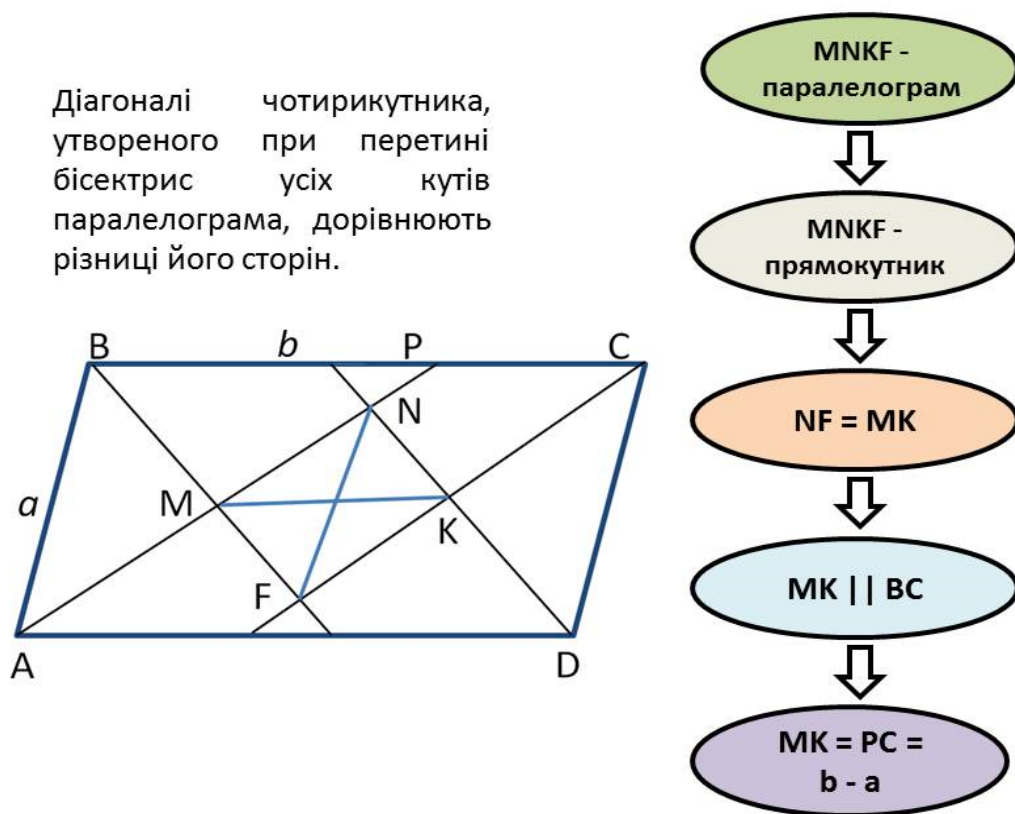


Рис. 7. Опорна схема доведення твердження

Підсумовуємо, які теоретичні відомості використовуються під час доведення даного твердження. Встановлення переліку теоретичних відомостей проводимо з використанням дидактичної гри «Аукціон»: учні по черзі називають означення, або ознаку, або властивість геометричних фігур; виграв той учасник гри, хто формулює геометричний факт, використаний під час доведення, останнім. Зроблено висновок: при доведенні використано 13 теоретичних положень, з них 6 – з теми «Чотирикутники».

Наступний етап уроку – дослідження окремих випадків (конкретизації) і узагальнення одержаного твердження.

Встановлено, якщо заданий паралелограм і проведено бісектриси його кутів, то при їх перетині отримуємо прямокутник. Чи буде справедливим таке твердження при заміні паралелограма, заданого умовою, на ромб, або прямокутник, або трапецію?

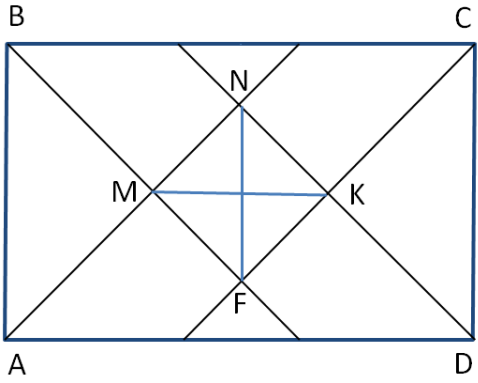
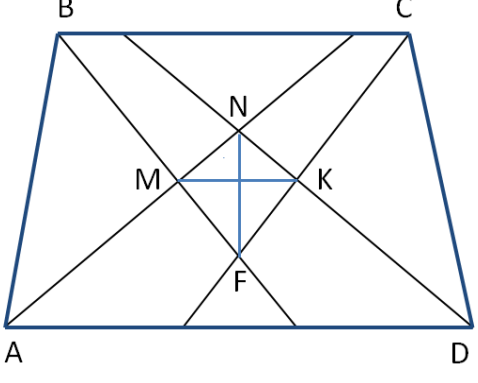
Створюємо 2 дослідницькі групи. Перша група учнів встановлює вид чотирикутника, який отримуємо при перетині бісектрис усіх кутів прямокутника, а друга – рівнобічної трапеції (табл. 2).

Учні першої групи у результаті дослідження встановлюють і обґрунтовують, що при перетині бісектрис усіх кутів прямокутника утворюється квадрат. Розглядаються різні способи доведення цього твердження.

Учні другої групи встановлюють, що при перетині бісектрис усіх кутів рівнобічної трапеції утворюється чотирикутник, який має цікаві властивості – вісь симетрії, два прямих кута, по дві рівні сторони та ін.

Таблиця 2

*Чотирикутники, утворені при
перетині бісектрис усіх кутів заданих геометричних фігур*

Прямокутник	Рівнобічна трапеція
	
MNKF – квадрат	MNKF – чотирикутник з віссю симетрії NF

Таким чином, нами запропоновано варіацію «уроку однієї задачі» для учнів 8 класу з метою розвитку дослідницьких умінь учнів; узагальнення і систематизації знань з теми «Чотирикутники» й удосконалення умінь їх застосування у складних, нетипових ситуаціях.

У ході майстер-класу було реалізовано дослідницьку технологію навчання, елементи методики евристичного навчання, методики узагальнюючого повторення, технологію сторітеллінгу, групового навчання та НІТ, застосовувалися інтелект-карти у вигляді опорних схем.

Учні 8–М класу із захопленням працювали на протязі 2-х спарених уроків, проявивши при цьому знання та вміння, сформовані на високому рівні, з теми «Чотирикутники». Учні вміють створювати гіпотези щодо різних способів доведення геометричних тверджень, розробляти плани доведення та їх успішно реалізовувати, демонструють уміння працювати в команді, доброзичливість та взаємоповагу.

Комплексний багатоаспектний аналіз проведених у Одеському приватному ліцеї «Мрія» майстер-класів у формі відкритих уроків, частину з яких було наведено у представленому дослідженні дозволив зробити висновок про їх відповідність статусу *високопродуктивного, результативного уроку* завдяки наявності таких складників: створення і підтримання високого рівня пізнавального інтересу і самостійної інтелектуальної активності учнів; обсяг і міцність здобутих знань, умінь, навичок і компетентностей; застосування різноманітних методів, засобів і технологій навчання; формування і розвиток особистісних якостей учнів; економне і доцільне використання часу; продуктивний і доброзичливий психологічний клімат.

При обговоренні проведених майстер-класів як групової форми методичної роботи [2] присутнім учителям і студентам із метою якісної підготовки до уроку було рекомендовано:

- ✓ реалізовувати наступні *умови*: учитель вільно володіє фактичним матеріалом уроку; матеріал подається на високому рівні, а контролюється згідно здібностей учнів; учитель знає методику кожного питання, весь арсенал засобів, прийомів і методів; учитель знає індивідуальні особливості учнів класу; урок заздалегідь продуманий до дрібниць; створено відповідний психологічний клімат;
- ✓ дотримуватися таких *дидактичних принципів*: зв'язку теорії з практикою (посилювати прикладну спрямованість, вчити застосовувати знання у нестандартних ситуаціях); доступності (учень діє на межі своїх можливостей, учитель визначає ці можливості та рівень складності завдань); свідомості (учні повинні усвідомлювати, що і навіщо вивчається; вчитель позбавляється формалізму викладу); міцності (даються орієнтири запам'ятовування, відбувається систематичне повторення); наочності (відпрацювання вміння спостерігати, правильно сприймати інформацію); оптимізації (виділення головного, врахування часу).

Висновки. У результаті проведеної роботи запропоновано й апробовано шляхи підвищення ефективності поглибленого навчання математики, а саме: ознайомлення учнів з основами наукових досліджень, методами доведень математичних тверджень на етапі пропедевтики поглибленого навчання; посилення прикладної спрямованості навчання математики; проведення уроків «однієї задачі», «однієї теореми» з метою підвищення зацікавленості учнів, підготовки школярів до олімпіад тощо; використання сучасних педагогічних технологій, зокрема «Перевернутий клас», «Сторітеллінг»; доречне використання ІКТ; системне застосування методів проблемного навчання.

Розроблено методичні рекомендації щодо проведення уроків у класах з навчанням математики на рівні стандарту, із-поміж яких: активне залучення завдань у тестовій формі; застосування теорії поетапного формування розумових дій при формуванні математичних понять в учнів; використання інтелект-карт; залучення задач прикладного змісту; конкретизація ідеї, методу доведення математичного твердження; створення ситуації «успіху»; стимулювання пізнавальної активності учнів протягом усього уроку.

Досвід проведення майстер-класів у формі відкритих уроків у приватному ліцеї «Мрія» дозволив авторам окреслити методичні особливості організації і проведення уроків, пов'язані зі специфікою роботи у такому навчальному закладі загальної середньої освіти, що надає можливості:

- у повній мірі реалізувати особистісно орієнтований підхід до навчання і виховання завдяки малокомплектним класам (кількість учнів класу у приватному навчальному закладі зазвичай не перевищує 15 осіб);
- активно використовувати НІТ навчання, враховуючи чудову технічну оснащеність приватних шкіл;
- урізноманітнювати форми роботи на уроці та в позаурочний час, залучаючи дидактичні ігри, квести, роботу в парах, інтелектуальні перегони та ін., що також обумовлено малокомплектністю класів;
- реалізовувати проєктну технологію у навчанні математики з великою ефективністю;
- розглядати навчальний заклад як експериментальний майданчик для впровадження передового педагогічного досвіду і реалізації нових педагогічних ідей.

Список використаних джерел

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Київ : Вища школа, 1989. 367 с.
2. Дулова А. С., Соламатіна Л. М. Методичні рекомендації з проведення майстер-класу як групової форми методичної роботи http://www.kharkivosvita.net.ua/files/Metod_rekom.pdf
3. Зайченко І. В. Педагогіка. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів, 2-е вид. Київ : «Освіта України», «КНТ», 2008. 528 с.
4. Карпінська І. Й. Нестандартні уроки з математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2001. 48 с.
5. Квасніцька Ю. В. Урок як основна форма навчання / <https://vseosvita.ua/library/urok-ak-osnovna-forma-navcanna-34623.html>
6. Кушнірук А. С. Застосування методу сторітеллінгу в підготовці майбутніх учителів математики. *Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи*: збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 20-21 вересня 2019 р. / Міністерство освіти і науки України, ДЗ «ПНПУ імені К. Д. Ушинського» [та ін.]. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. С. 144–146.
7. Махмутов М. И. Современный урок: вопросы теории. Москва : Педагогика, 1981. 192 с.
8. Методичні рекомендації: "Що таке майстер-клас? Організація та проведення майстер-класів" <https://vseosvita.ua/library/metodicni-rekomendacii-so-take-majster-klas-organizacija-ta-provedenna-majster-klasiv-163902.html>
9. Особливості вивчення математики в профільних класах у сучасних умовах. Режим доступу: <http://revolution.allbest.ru/pedagogics/00000938.html/>.
10. Пометун О. І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: наук.-метод. посібн. / О. І. Пометун, Л. В. Пироженко. Київ : Видавництво А.С.К., 2004. 192 с.
11. Самостоятельная работа в теории и практике. Сущность самостоятельной работы / П. И. Пидкасистый. Москва : Педагогика. 2004. 240 с.
12. Сиваківський П. О. Про проблеми різних доведень одного твердження в шкільному курсі геометрії. *Математика в школі*. 2000. № 3. С. 36–39.
13. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технологии. Монография. Донецк : Изд-во ДонГУ, 2004. 439 с.
14. Скафа О. І. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник / О. І. Скафа, О. В. Тутова. Донецьк : вид-во «Вебер», 2009. 320 с.
15. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
16. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика. Розвиток критичного мислення. Модульне навчання. Харків : Вид. група „Основа”, 2007. 128 с. (Б-ка журн. „Математика в школах України”; Вип. 4(52)).
17. Хуторской А. В. Практикум по дидактике и современным методам обучения. СПб. : Питер, 2004. 541 с.

РОЗДІЛ 5

Методика підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики

5.1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ПІДГОТОВКИ ЗДОБУВАЧІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Анастасія Кушнірук

Вступ. Наразі пріоритетним напрямком середньої освіти є підготовка високоосвіченої людини, здатної до творчої праці. При цьому модернізується система освіти, змінюються основні цілі навчання та виховання, удосконалюються засоби, активно впроваджуються нові форми (зокрема дистанційне навчання), застосовуються новітні педагогічні технології. Унаслідок цього переосмислюється роль учителя у навчальному процесі, коректується діяльність педагогів.

Державна підсумкова атестація (ДПА) та зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) – важливі кроки у підведенні підсумків спільної роботи вчителя та учня протягом декількох років. З огляду на це до підготовки до ДПА та ЗНО потрібно підходити відповідально як з боку вчителя, так і з боку учнів.

Для учнів ДПА та ЗНО з математики – досить складні випробування, формати проведення яких спрямовані на об'єктивне оцінювання навчальних досягнень учнів. Тому перед методистами та вчителями математики постають важливі завдання, головними з яких є підвищення фахового та технологічного рівнів педагогічної діяльності. Адже якість навчального процесу багато у чому залежить від майстерності вчителя, що є основною передумовою для формування стійких знань, умінь та навичок учнів.

З 2002 до 2005 року технологію тестування в Україні розробляв центр тестових технологій Міжнародного фонду «Відродження». З 2005 року зовнішнє оцінювання проводить Український центр оцінювання якості освіти (УЦОЯО) – державна установа, що здійснює зовнішнє незалежне оцінювання результатів навчання, здобутих на певному освітньому рівні, та проводить моніторингові дослідження якості освіти. Він є бюджетною установою, заснованою Кабінетом Міністрів України і належить до сфери управління Міністерства освіти і науки України. Спочатку ЗНО відбувалося з трьох найбільш поширених при вступі до закладів вищої освіти предметів: української мови, історії, математики (а з 2007 року було додано у деяких регіонах хімію, біологію і фізику) та носило експериментальний характер.

З 2008 року ЗНО є обов'язковим для всіх випускників, бажаючих вступити до закладів вищої освіти, проводиться у формі тестування і є одночасно вступними іспитами до цих закладів освіти. Українська модель тестування немає точного аналогу за кордоном, вона базується та орієнтується на європейський досвід. «Зовнішнє оцінювання проводиться з метою забезпечення прав осіб на рівний доступ до вищої освіти та оцінювання відповідності результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти, державним вимогам» [11].

Починаючи з 2016 року, результат за частину тесту ЗНО з математики зараховується як результат ДПА. З 2021 проходження ДПА у формі ЗНО з математики стане обов'язковим. Для проведення ДПА з математики буде розроблено два варіанти сертифікаційних робіт: 1) математика (завдання рівня стандарту), тестовий зошит налічуватиме 28 завдань різних форм, на виконання яких відведено 150 хвилин; 2) математика, тестовий зошит з 34 завданнями, на виконання яких відведено 210 хвилин.

Отже, наразі результати зовнішнього оцінювання використовуються:

- для визначення конкурсного балу під час відбору осіб, які вступають на навчання до закладів вищої освіти на основі повної загальної освіти;
- як оцінки за державну підсумкову атестацію за освітній рівень повної загальної середньої освіти;
- для визначення стану функціонування системи загальної середньої освіти та прогнозування її подальшого розвитку.

Результати з певного навчального предмета визначаються за:

- ✓ рейтинговою шкалою 100–200 балів – для усіх учасників, які подолали поріг «склав / не склав»;
- ✓ критеріальною шкалою 1–12 балів – для випускників системи середньої освіти поточного навчального року, які обрали цей навчальний предмет для проходження ДПА у формі ЗНО.

Визначення тестового балу здійснюється на основі схем нарахування балів за виконання завдань сертифікаційної роботи, розроблених Українським центром для відповідного предмета, та схем оцінювання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Рішення про встановлення порога «склав / не склав» ухвалює експертна комісія з визначення рейтингової оцінки. З урахуванням встановленого порога «склав / не склав» здійснюється генерування таблиці за шкалою 100–200 балів. Таблиці за шкалою 1–12 балів розробляються та ухвалюються експертною комісією з визначення оцінки рівня навчальних досягнень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасних психолого-педагогічних дослідженнях приділяється значна увага різним аспектам підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики: змістовий складник розкрито у підручниках та збірниках завдань науковців та вчителів-методистів (В. Бевз, М. Бурда, О. Біляніна, Ю. Захарійченко, О. Істер, А. Капіносів, І. Клочко, А. Мерзляк, Є. Нелін, М. Якір та ін.); методичний супровід процесу підготовки висвітлено Ю. Захарійченко, К. Недялковою, О. Школьним, В. Швецем та ін.; психологічний аспект підготовки школярів до ЗНО надано Н. Бобак, Н. Грязною, В. Луценко, І. Новіковою, Н. Олійніковою, М. Чибісовою та ін.

Мета дослідження: виокремити й охарактеризувати основні напрями модернізації підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики.

Виклад основного матеріалу. Вивчення наукової та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, врахування закономірностей організації педагогічного процесу у закладах середньої освіти, аналіз власного професійного досвіду та досвіду вчителів-практиків дозволили встановити такі напрями модернізації підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики:

1. Осучаснення інформаційно-довідкового складника.
2. Оновлення методичних рекомендацій.
3. Усвідомлення значущості психологічного аспекту.
4. Розвиток математичної компетентності.

Інформаційно-довідковий складник модернізації підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики

Загальні відомості про організацію ЗНО за інформацією веб-ресурсу Освіта.ua та testportal.gov.ua структуровано у таблиці 1. Здобувачі повної середньої освіти та їхні батьки можуть ознайомитися на зазначених сайтах із нормативними документами щодо проведення зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання на сучасному етапі.

Загальні відомості про організацію ЗНО

Коли і де проходить зовнішнє незалежне оцінювання?	Зовнішнє незалежне оцінювання проводять наприкінці навчального року. Пункт тестування влаштовують в одному з навчальних закладів недалеко від місця проживання. Щоб узяти участь у зовнішньому оцінюванні, слід зареєструватися. Реєстрація відбувається за місцем навчання. У запрошенні, яке видається після реєстрації, зазначається точна інформація про час і місце проходження зовнішнього оцінювання.
Що потрібно взяти із собою?	На тестування необхідно взяти запрошення та паспорт. Запрошення є перепусткою до пункту тестування, і без нього Вам не дозволять узяти участь у зовнішньому оцінюванні. Не забудьте взяти капілярні чи гелеві ручки з чорнилом (пастою) насиченого чорного кольору.
Коли потрібно прибути на місце тестування?	Дата, час і місце тестування зазначені в запрошенні, яке отримаєте після реєстрації. До пункту тестування необхідно прибути не пізніше ніж за 30 хвилин до початку. Якщо прийдете до аудиторії/класу після початку тестування, Вам не дозволять узяти в ньому участь.
Як довго триває тестування?	Тестуванню передують інструктаж і кодування бланків відповідей. На це відведено 15 хвилин. Час для виконання всіх запропонованих завдань укаzano на обкладинці тестового зошита і складає 150 або 210 хвилин.
Як готуватися до зовнішнього незалежного оцінювання?	Ретельно ознайомтеся з Програмовими вимогами. Вони містять вичерпний перелік тем, включених у зовнішнє оцінювання. Ознайомтеся також із Порядком допуску до участі та правилами проходження зовнішнього незалежного оцінювання. Використовуйте підручники і посібники, рекомендовані Міністерством освіти і науки України. Перевірте себе, виконавши тести попередніх років.
Як забезпечується об'єктивність та неупередженість результатів зовнішнього незалежного оцінювання?	Тестові завдання розробляють спеціально підготовлені фахівці, які чітко дотримуються режиму секретності. Матеріали тестування до пунктів проведення доставляють спеціальним зв'язком. Важливою складовою системи захисту є спеціальний пластиковий пакет/контейнер, у якому матеріали надходять до кожної аудиторії. Процедура проведення тестування зобов'язує перевірити цілісність пакета, що інструктор та один з учасників тестування засвідчують у протоколі своїми підписами.
Кому надають інформацію про результати зовнішнього незалежного оцінювання?	Інформацією про результати зовнішнього незалежного оцінювання мають право скористатися лише учасники тестування. У школі отримаєте сертифікат Українського центру оцінювання якості освіти, в якому буде вказаний Ваш результат. Він буде поданий у стандартних шкалах від 1 до 12 та від 100 до 200 балів.

Існує необхідність ознайомитися з «Правами та обов'язками учасників ЗНО», які визначено Порядком проведення зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти [11].

Зміст сертифікаційної роботи з математики визначено Програмою зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, затвердженою Міністерством освіти і науки України (наказ № 1513 від 04.12.2019 року) [10].

Кількісний розподіл завдань сертифікаційної роботи 2020 року за змістовими блоками наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

Кількісний розподіл завдань (2020 рік)

№ з/п	Змістовий блок	Кількість завдань	Частка від загальної кількості завдань (%)
1	Алгебра і початки аналізу	23	66
2	Геометрія	12	34
	Усього	35	100

Кількісний розподіл завдань сертифікаційної роботи 2020 року за формами наведено у таблиці 3.

Таблиця 3

Кількісний розподіл завдань за формами (2020 рік)

Розділи програми	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		з вибором однієї правильної відповіді	на встановлення відповідності	відкрита форма з короткою відповіддю	відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	5	1	1	–	7
	Рівняння і нерівності	4	–	1	1	6
	Функції	4	1	1	1	7
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	2	–	3
Геометрія	Планіметрія	3	1	2	–	6
	Стереометрія	3	1	1	1	6
	Разом	20	4	8	3	35

Суттєвою відмінністю тестового зошита з математики у 2021 році буде вміщення довідкових матеріалів, що обумовлено орієнтацією завдань не тільки на знаннясвий аспект, а й на виявлення рівня сформованості математичної компетентності учасників.

Методичні рекомендації щодо підготовки учнів до ЗНО з математики

Найбільш упевнено учні будуть себе почувати, якщо вони матимуть достойну теоретичну та практичну підготовку, свідомо володітимуть фактичним матеріалом, уміннями та навичками. Тобто власне математичний компонент є ключовим у підготовці до ЗНО [4].

Пропонуємо узагальнені методичні рекомендації, які бажано, на нашу думку, враховувати вчителю математики при організації підготовки учнів до ЗНО з математики:

1. Проводити регулярне тематичне тестування з математики поряд із традиційними тематичними контрольними роботами.

2. Поступово готувати школярів до специфічної діяльності з виконання завдань ЗНО у щоденному навчальному процесі [3]. Тобто бажано включати у зміст майже кожного уроку тестові завдання різних форм: тести множинного вибору, альтернативні тести, перехресного вибору, завдання із короткою і розгорнутою відповідями, аналогічні тим, що зустрічають на ЗНО (причому робити це не тільки у старших класах). Такі завдання можуть виконувати як навчальну, так і контролюючу функції [7].

3. Організовувати систематичне повторення навчального матеріалу з тестовим бліц-опитуванням (як письмовим, так і усним).

4. Значну увагу вчителям математики слід приділяти узагальненню і систематизації знань учнів, застосовуючи такі методи і прийоми розумової діяльності, що дозволять «розкласти матеріал по полицях», швидше зорієнтуватися під час реального випробування [2]. Тим більше, що на період з початкової школи до 11 класу накопичилося достатньо матеріалу для систематизації та узагальнення і у межах конкретно взятої теми, і в рамках усього шкільного курсу математики, і на рівні міжпредметних зв'язків.

5. Реалізовувати рівневу диференціацію, урахувати профільну диференціацію у процесі навчання математики.

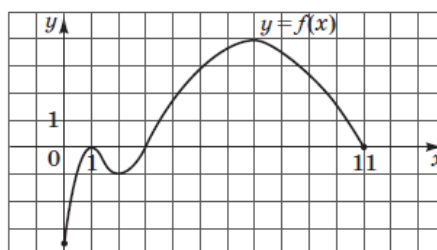
6. Під час підготовки учнів до тестування необхідно приділяти увагу формуванню вмінь переформулювання умов і вимог завдань. Як показує аналіз тестових завдань, запропонованих на ЗНО різних етапів, деякі з них мають незвичне формулювання для учнів, хоча і часто неважке розв'язання. Така заміна звичних формулювань умов задач призводить до втрати бажаних балів на ЗНО.

У цьому контексті наведемо приклади завдань ЗНО основних, додаткових, пробних сесій та демонстраційних варіантів сертифікаційних робіт минулих років [10; 11].

Приклад. Обчисліть значення виразу $25 - 2a - 2b$, якщо $a + b = 6$.

А	Б	В	Г	Д
1	23	21	13	19

Приклад. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[0; 11]$ та диференційованої на проміжку $(0; 11)$. Установіть відповідність між числом (1–4) та проміжком (А–Д), якому належить це число.



Число

1 $f(8)$

2 $f'(7)$

3 найменше значення функції $y = f(x)$ на її області визначення

4 $\int_1^3 f(x) dx$

Проміжок

А $(-\infty; 2]$

Б $(-0,2; -0,5]$

В $(-0,5; 2]$

Г $(2; 4]$

Д $(4; +\infty)$

Приклад. У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки – однакової форми і розміру. Якого *найменшого* значення може набувати m , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25?

7. Специфіка оцінювання навчальних досягнень учнів у формі тестування така, що деякі отримані результати треба вміти інтерпретувати, тобто надавати у незвичній для учнів формі. Наприклад, указати у відповіді найменший цілий розв'язок нерівності, або знайти якусь залежність між знайденими коренями рівняння тощо. Тому необхідно заздалегідь готувати учнів до такої роботи, формуючи у них уміння інтерпретувати результати з урахуванням умови задачі.

Приклад. Верстат з автоматичним управлінням працює зі сталою продуктивністю і виготовляє 40 деталей за t год ($t > 5$). Укажіть вираз для визначення кількості деталей, які виготовив верстат за 5 год.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{t}{8}$	$\frac{40}{t-5}$	$\frac{8}{t}$	$8t$	$\frac{200}{t}$

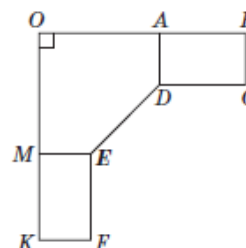
Приклад. Розв'яжіть систему $\begin{cases} y + x = 3, \\ x^2 + 4 = 8y. \end{cases}$ Якщо пара $(x_0; y_0)$ є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь, то запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$. Якщо пари $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$ є розв'язками цієї системи рівнянь, то запишіть у відповідь *найменший* із добутків $x_1 \cdot y_1$ та $x_2 \cdot y_2$.

8. Велику увагу слід приділяти розв'язуванню задач прикладного спрямування з використанням основних математичних формул, геометричні завдання практичного змісту тощо [5; 8].

Приклад. Блок соціальної реклами складається з 4 рекламних роликів: про шкідливість паління, про охорону навколишнього середовища, про дотримання правил дорожнього руху та про велосипедне місто. Ролик про шкідливість паління заплановано показати двічі – першим і останнім, а інші три ролики – по одному разу. Скільки всього існує варіантів формування цього блоку соціальної реклами за вказаним порядком рекламних роликів?

А	Б	В	Г	Д
6	8	12	24	120

Приклад. На кресленні кутової шафи (вид зверху) зображено рівні прямокутники $ABCD$ і $KMEF$ та п'ятикутник $EMOAD$ (див. рисунок). Визначте довжину відрізка ED , якщо $OK = OB = 1,2$ м, $KM = AB = 0,5$ м, $KF = 0,3$ м. Укажіть відповідь, найближчу до точної.



А	Б	В	Г	Д
0,5 м	0,55 м	0,65 м	0,6 м	0,7 м

9. Учителю необхідно робити акцент на розв'язуванні завдань, які викликають труднощі в учнів. Як засвідчує досвід проведення різних випробувань, зокрема і ЗНО, до таких завдань можна віднести текстові задачі і задачі на відсоткові розрахунки, завдання із параметрами.

Розв'язання цих завдань потребує від учнів розуміння умови та вимоги, вміння «перекладу» на мову математики, знання основних алгоритмізованих кроків розв'язання [1]. Складними для учнів також виявляються завдання із розділів «Тригонометрія» та «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики».

Приклад. Для приготування чайної суміші змішали індійський та цейлонський чай у відношенні 10:13, причому індійського чаю взяли 180 г.

- 1) Скільки грамів чайної суміші отримали?
- 2) На скільки відсотків у суміші цейлонського чаю більше, ніж індійського?
10. Удосконалення вмінь і навичок усних та письмових обчислень [2; 9].

Приклад. Обчисліть $(0,3)^2 \cdot 10^4$.

А	Б	В	Г	Д
600	900	6000	9000	3^6

Приклад. Скільки всього цілих чисел містить інтервал $(\sqrt{8}; \sqrt{81})$?

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

Приклад. Вартість P (у грн) поїздки на таксі обчислюється за формулою:

$$P = \begin{cases} P_{\min} + 2.4 \cdot (S - 6) + 0.5t, & \text{якщо } S > 6, \\ P_{\min}, & \text{якщо } S \leq 6, \end{cases}$$

де S – відстань (у км), яку проїхало таксі під час поїздки, $P_{\min}$ – мінімальна вартість поїздки (у грн), t – час (у хв.), протягом якого швидкість таксі не перевищувала 5 км/год. Користуючись формулою, обчисліть вартість поїздки (у грн) на таксі, якщо $S = 10,5$ км, $P_{\min} = 28$ грн, $t = 12$ хв.

Приклад. Дерев'яний брусок має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 10 см, 20 см, 80 см. Скільки лаку потрібно для того, щоб один раз покрити ним усю поверхню цього бруска, якщо на 1 м^2 витрачається 100 г лаку?

А	Б	В	Г	Д
0,52 г	26 г	52 г	160 г	520 г

11. Бажано демонструвати учням «штучні» способи розв'язування завдань (послідовне виключення варіантів відповідей, підстановка відповідей, побудова «реального» рисунку, планіметричного креслення або стереометричної моделі тощо).

Приклад. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $x^2 < 9$.

А	Б	В	Г	Д
-8	-4,5	-2	3	8

Приклад. Яку з наведених властивостей має функція $y = \sqrt{x}$?

- А набуває лише невід'ємних значень
- Б спадає по всій області визначення
- В парна
- Г періодична
- Д має дві точки екстремуму

Приклад. Укажіть проміжок, якому належить значення виразу $\operatorname{ctg} 25^\circ$

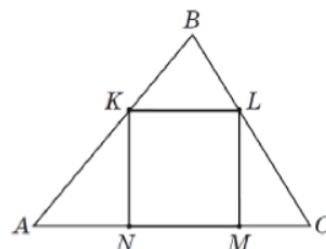
А	Б	В	Г	Д
$\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; +\infty)$

Приклад. У майстерні мали виготовити 240 стільців за n днів, причому щодня планували виробляти однакову кількість стільців. Однак, на прохання замовника, завдання виконали на 2 дні раніше запланованого терміну. Для цього довелося денну норму виготовлення збільшити на 4 стільці. Визначте n .

Приклад. Точка $A(3; 1)$ належить колу з центром у точці $O(-2; 1)$. Знайдіть радіус цього кола.

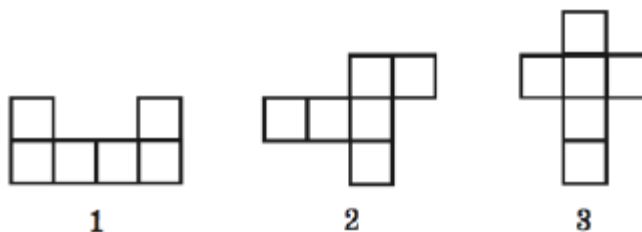
А	Б	В	Г	Д
10	5	3	2	1

Приклад. У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC , дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ см.



А	Б	В	Г	Д
7,5 см	12,5 см	17,5 см	15 см	20 см

Приклад. На рисунку зображено три фігури з номерами 1, 2, 3. Серед цих фігур укажіть розгортки куба.



А	Б	В	Г	Д
лише фігура 3	лише фігури 1 і 2	лише фігури 1 і 3	лише фігури 2 і 3	фігури 1, 2 і 3

Приклад. У прямокутній системі координат на площині задано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Площа трапеції дорівнює 42. Визначте абсцису вершини D , якщо $A(-1; 3)$, $B(1; 6)$, $C(7; 6)$.

Приклад. Визначте кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b} + \vec{c}$ у градусах, якщо відомо, що $\vec{a}(2; 2)$, $\vec{b}(2; 4)$ і $\vec{c}(-2; -6)$.

12. Як показує досвід, більшість учнів засвоюють теоретичний зміст курсу математики старшої школи формально, що призводить, наприклад, до появи неможливих (у межах умови задачі) відповідей. Тому позбавлятися, ліквідовувати формалізм знань, які набуваються учнями – було і залишається одним із головних завдань учителя математики, зокрема і під час підготовки учнів до ЗНО (яка, власне, має відбуватися постійно і систематично, «по цеглинах», починаючи з 5-го класу).

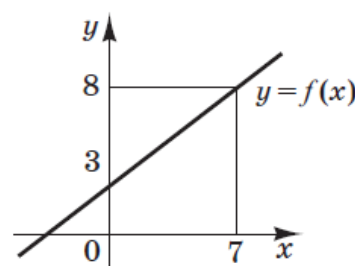
Приклад. Обчисліть $\sin 210^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Приклад. Знайдіть відстань від точки $A(2; 3; -6)$ до координатної площини xOy .

А	Б	В	Г	Д
-6	2	3	6	7

Приклад. Обчислити $\int_0^7 f(x) dx$, використовуючи зображений на рисунку графік лінійної функції $y = f(x)$.



13. Як засвідчило проведення ЗНО минулими роками, учні виявляють недостатньо розвинені навички письмової математичної аргументації, що призводить до втрати балів за розв'язання відкритих завдань з розгорнутою відповіддю (у більшій мірі це стосується завдань із геометрії). Тому вчителям слід проаналізувати критерії оцінювання завдань із розгорнутою відповіддю ЗНО, що відбувалися попередніми роками, і приділяти більше уваги формуванню в учнів навичок письмової математичної аргументації (що, звичайно, також треба починати не з 11-го класу), не зважаючи на постійний брак часу.

Приклад. У прямокутному трикутнику ABC точка M є серединою гіпотенузи AB , довжина якої дорівнює 26 см. Точка O віддалена від вершин B і C на 15 см, а від сторони BC – на $10\sqrt{2}$ см. З точки O на катет BC опущено перпендикуляр OK , точка K належить відрізку OM .

1. Доведіть, що чотирикутник $KMAC$ є трапецією.
2. Визначте площу трапеції $KMAC$.

Приклад. У нижній основі циліндра проведено хорду AB , довжина якої дорівнює s . Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом α . Через хорду AB проведено площину β паралельно осі циліндра на відстані d ($d \neq 0$) від неї.

1. Зобразіть переріз циліндра площиною β та вкажіть його вид.
2. Обґрунтуйте відстань d .
3. Визначте площу цього перерізу.

Зазначимо, що представлені оновлені методичні рекомендації до успішного проходження учнями ЗНО з математики було розроблено з урахуванням загальних дидактичних принципів, психолого-педагогічних закономірностей навчання математики учнів різних вікових груп, спеціальної методики навчання окремих розділів і тем шкільного курсу математики, а також досвіду, що був накопичений протягом проведення ЗНО з математики за минулий період.

Психологічний аспект підготовки здобувачів середньої освіти до проходження ЗНО

Основними компонентами підготовки до ЗНО з математики є: по-перше, суто математичний, що включає в себе володіння фактичним матеріалом з основних тем і розділів ШКМ, сформованість основних ЗУН, логічної культури тощо; по-друге психолого-педагогічний, що містить мотиваційний аспект, цілепокладання, сформованість вольових рис характеру, емоційну врівноваженість, моральну підготовку тощо.

Обидва компоненти є важливими майже у рівній мірі, оскільки відомо, як емоційний стан, невтриманість, особливості темпераменту можуть негативно позначитися на результатах такого відповідального випробування, що фактично визначає в значній мірі подальшу долю дитини. Враховуючи актуальність проблеми, психологами і педагогами було розроблено *систему порад*, які б допомогли учням якісно підготуватися до ЗНО і впоратися з надмірним психологічним навантаженням під час ЗНО [10]. Погоджуючись із авторами статті [6], ми конкретизували і розширили поради у контексті підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики.

На етапі підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання пропонуються такі рекомендації.

1. *Тренуйтеся.* Перед офіційним тестуванням варто виконувати якнайбільше опублікованих тестів – просто заради тренування. Не можна навчитися добре виконувати тести, не тренуючись на них самих, підмінюючи цю практику іншими видами контролю й самоконтролю. Ці тренування не тільки приводять до знайомства з типовими конструкціями тестових завдань, але дають інший досвід – самоспостереження й оптимальної саморегуляції під час тестування. На нашу думку, доцільно виконувати саме роздруковані тести з математики внаслідок специфіки предмету, але не виключаємо і проходження тестування онлайн.

2. *Контролюйте час.* Тренуйтеся із секундоміром у руках. Засікайте час виконання тестів, обмежуйте його. Без подібних обмежень, які змушують працювати у максимально швидкому темпі, без імітації змагальної ситуації неможливо змодельовати той стрес (напругу), що викликає будь-яке тестування (випробування). ЗНО з математики містить завдання на перевірку оволодіння учнями обчислювальних навичок (як усних, так і письмових).

3. *Випробовуйте.* У тренуваннях застосовуйте правильну тактику, тобто дотримуйтеся всіх рекомендацій, як правильно вирішувати окреме завдання або тест у цілому. Наприклад, не слід двічі перечитувати малозрозумілу інструкцію, а потрібно відразу ж познайомитися з варіантами відповідей. Тоді зміст відповідей прояснить вам, що ж саме є необхідним в інструкції до даного завдання. Це конкретний приклад тактики, яку треба випробувати. Завдання сертифікаційної роботи з математики розподіляються за змістом на розділи «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія», а також за формами: з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності, відкрита форма з короткою відповіддю, відкрита форма з розгорнутою відповіддю. У залежності від підготовленості, обирайте обсяг і зміст завдань, які будете розв'язувати. Пам'ятайте, що більшість завдань ЗНО з математики можна розв'язати кількома способами, на етапі підготовки випробовуйте це. Будь-яку тактику можна засвоїти й ефективно застосовувати, тільки активно тренуючись у тестуванні.

4. *Облаштуйте інтер'єр.* Уведіть у інтер'єр кімнати, де буде проходити підготовка до тестування, жовтий і фіолетовий кольори – вони підвищують інтелектуальну активність. Роздрукуйте основні математичні формули, довідковий матеріал тестових зошитів.

5. *Складіть план занять.* Для початку визначте свій хронотип – «сова» або «жайворонок», і залежно від цього максимально використовуйте ранкові або вечірні години. Встановлюючи план для щоденної підготовки, необхідно чітко визначити, що саме сьогодні буде вивчатися. Не просто «трохи позаймаюсь», а які саме розділи й теми будете повторювати.

6. *Чергуйте заняття й відпочинок.* 40 хвилин занять, потім 10 хвилин – перерва; вживайте більше фруктів, соків (особливо цитрусових та тих, що містять вітамін С у великій кількості), горіхів. На прикінцевому етапі підготовки збільшуйте час занять і зменшуйте кількість перерв.

Наступні поради стануть у нагоді під час проходження ЗНО.

7. *Згадайте все.* Якщо перед входом до аудиторії Ви сильно нервуетесь, знайдіть можливість змочити холодною водою зап'ястя, скроні, внутрішній бік ліктьового суглобу (місця, де близько до поверхні шкіри проходять артерії та вени). А також, випийте склянку звичайної води або іншого напою, який принесли з собою на тестування. Зробіть дихальні вправи на розслаблення або закрийте очі, згадайте на хвилинку щось смішне або приємне. Після того як налаштувалися на роботу, уважно прочитайте запитання. Розпочніть із завдання, яке точно знаєте як розв'язується. Поступово згадаються й інші. Не знаєте відповідь – залишіть завдання і приступайте до наступного. Можна повернутися до нього пізніше...

8. *Пропускайте.* Треба навчитися пропускати важкі або незрозумілі завдання. Пам'ятайте: у тесті завжди найдуться такі, з якими Ви обов'язково впораєтесь. Просто нерозумно не дібрати балів тільки тому, що Ви не добрались до «своїх» завдань, а застрягли на тих, навчальний матеріал яких Вам невідомий. Звичайно, така тактика може принести успіх далеко не завжди. Зверніть увагу на завдання на встановлення відповідності: три–чотири запитання з однієї теми й обмежена кількість відповідей.

9. *Вгадуйте.* Якщо Ви не впевнені у виборі відповіді, але інтуїтивно можете віддати перевагу якійсь відповіді перед іншими, то інтуїції варто довіряти! Така довіра, як правило, приводить до приросту балів.

10. *Виключайте.* Багато завдань можна швидше вирішити, якщо не шукати відразу правильну відповідь, а послідовно виключати ті, які явно не підходять. Метод виключення дозволяє концентрувати увагу всього на одній–двох ознаках.

11. *Скорочуйте вибір.* Якщо кілька відповідей (1–2) із чотирьох або п'яти варіантів здаються Вам зовсім невідповідними, а інші – доречними з рівною імовірністю, то у цьому випадку правильніше буде не пропускати це завдання, а намагатися вибрати відповідь із інших просто навмання. Шляхом такої тактики ви отримаєте більше балів.

12. *Думайте тільки про поточне завдання.* Коли Ви бачите нове завдання, забувайте все, що було у попередньому. Ця установка дає безцінний психологічний ефект при невдачі в минулому завданні (якщо воно виявилось вам не «по зубах»). Думайте тільки про те, що кожне нове завдання – це шанс набрати бали.

13. *Читайте завдання до кінця.* Поспіх не повинен призводити до того, що ви будете намагатися зрозуміти умови завдання за «першими словами» і добудовувати кінцівку у власній уяві. Це вірний спосіб зробити прикрі помилки у найлегших завданнях. Особливу увагу звертайте саме на запитання завдання.

14. *Не засмучуйтеся.* У будь-якому професійно підготовленому тесті чимало завдань, з якими повинні впоратися не всі учнів (так заплановано). Тому немає ніякого сенсу розхлюпувати емоційну енергію на передчасну досаду. Навіть якщо Вам здається, що Ви допустили занадто багато помилок і просто завалили тест, пам'ятайте, що дуже часто таке

відчуття є помилковим: при порівнянні ваших результатів із іншими може з'ясуватися, що інші допустили ще більше помилок.

15. Налаштуйтеся на успіх. Готуючись до іспиту, подумки малюйте собі картину тріумфу. Ніколи не думайте про те, що не впораєтесь із завданням.

16. Заплануйте два кола. Сплануйте середній час на кожне завдання таким чином, щоб за дві третини (максимум три чверті) часу пройти всі завдання «по першому колу». Тоді Ви встигнете набрати максимум балів на легких для Вас («своїх») завданнях, а потім зможете подумати й добрати щось на важких, які Вам спочатку довелося пропустити. При проходженні ЗНО з математики можна розподілити по два кола на завданнях різної форми: з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності, відкрита форма з короткою відповіддю, відкрита форма з розгорнутою відповіддю.

17. Вчасно заповнюйте бланки відповідей. Доцільно заповнювати бланки відповідей ЗНО з математики поступово, після розв'язання певної кількості завдань. Так Ви не будете нервувати при позначенні клітинок, вписуванні числових значень, це дасть Вам уявлення про обсяг вирішених завдань, часову можливість розв'язання завдань із розгорнутою відповіддю.

18. Забудьте про шпаргалки. Тестовий зошит з математики з 2021 року містить довідковий матеріал із усього шкільного курсу алгебри, початків аналізу і геометрії.

19. Напередодні обов'язково виспиться. Багато хто вважає: для того щоб повністю підготуватися до іспиту, не вистачає всього однієї, останньої перед ним ночі. Це неправильно. Ви втомитесь; не треба себе перевтомлювати. Навпаки, з вечора прогуляйтесь, перед сном прийміть душ або ванну. Виспиться якнайкраще, щоб встати з відчуттям бойового настрою. Вранці перед тестуванням зробіть зарядку, прийміть контрастний душ, гарно поснідайте.

Такі психолого-педагогічні поради можна надавати учням як пам'ятку, до якої вони можуть постійно звертатися, і під час навчальних занять проговорювати їх по-можливості, акцентувати на них увагу, доводити їх до свідомості учнів, щоб у необхідний момент вони могли скористатися цими порадами.

Висновки. Під підготовкою здобувачів середньої освіти до розв'язання тестових завдань ЗНО ми розуміємо комплексний процес, який складається з діагностики рівня сформованості предметної математичної компетентності учня, визначення кола проблемних питань і розробки індивідуальної траєкторії формування математичної компетентності; та включає психологічний супровід й інформаційно-довідкову підтримку суб'єктів освітньої діяльності щодо організації проведення ЗНО з математики.

Звісно, якісна підготовка потребує сучасного підходу до вирішення проблеми; на нашу думку, актуальними є такі напрями модернізації підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики:

1. Осучаснення інформаційно-довідкового складника.
2. Оновлення методичних рекомендацій.
3. Усвідомлення значущості психологічного аспекту.
4. Розвиток математичної компетентності.

Список використаних джерел

1. Іванцова Н. А., Кушнірук А. С. Навчання учнів розв'язуванню задач у курсі алгебри основної школи. *Пошук молодих*. Випуск 8. Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції «Компетентісний підхід до вивчення природничо-математичних дисциплін в основній і старшій школі» (14-15 квітня 2009 року, м. Херсон). Укладач : Шарко В. Д. Херсон : ПП Вишемирський В. С., 2009. С. 79–81.
2. Істер О. С. Математика : комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання. 2-ге вид. випр. Київ : Генеза, 2020. 400 с.
3. Кушнірук А. С. Тестування при вивченні формул скороченого множення. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова*. Серія № 3. *Фізика і математика у вищій і середній школі* : зб. наук. праць. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. № 3. С. 66–71.
4. Недялкова К. В. Зовнішнє незалежне оцінювання з математики: методичний аспект. *Математика* (газета). № 18 (510), травень 2009. С. 3–12.
5. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрические задачи с практическим содержанием. 2-е изд., доп. Москва : МЦНМО, 2015. 216 с.
6. Упоратися з тестом допоможе тренування. URL: <http://www.osvita.org.ua/ukrtest/articles/02/>
7. Школьний О. В. Теоретико-методичні засади оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи : автореферат дис. ... докт. пед. наук : 13.00.02 / Олександр Володимирович Школьний. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015. 43 с.
8. Шулик Т. В., Козаченко Ю. О. Розв'язування задач практичного змісту як ефективний спосіб реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики в сучасній школі. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. Слов'янськ, 2018. Випуск 8. С. 162–171. URL : <http://ddpu.edu.ua:8083/ddpu/handle/123456789/292>
9. Shkolnyi, O. V. Modern Thematic Preparation for EIA in Mathematics in Ukraine: Numbers and Expressions, Functions / O. V. Shkolnyi, Yu. O. Zakhariichenko. *Актуальні питання природничо-математичної освіти: збірник наукових праць*. Суми : СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2019. Вип. 1 (13). С. 5–11.
10. <https://osvita.ua/>
11. <http://testportal.gov.ua/>

5.2. МЕТОДИКА РОЗРОБКИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ТРАЄКТОРІЙ ПІДГОТОВКИ СТАРШОКЛАСНИКІВ ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Алла Тумбрукакі, Олена Друзьяк

Вступ. На сучасному етапі реформування національної системи освіти однією із актуальних залишається проблема оцінювання, аналізу та корегування результатів процесу навчання. Головною метою оцінювання є оптимізація та вдосконалення навчального процесу, пошук та здійснення індивідуальної траєкторії навчання для кожного учня. Ці положення тісно пов'язані з компетентнісним підходом до сучасної освіти, який передбачає набуття учнями знань, умінь і навичок, рівень засвоєння яких дозволить учневі усвідомлено та цілеспрямовано діяти у певних навчальних і життєвих ситуаціях.

У 2021 році випускники закладів освіти, які здобуватимуть повну загальну середню освіту обов'язково складатимуть державну підсумкову атестацію у формі ЗНО з математики.

Для проведення ДПА з математики у 2021 році розроблено два варіанти сертифікаційних робіт:

- рівня стандарту (тестовий зошит налічуватиме 28 завдань різних форм, на виконання яких відводиться 150 хвилин);
- рівня стандарту та профільного рівня (тестовий зошит із 34 завданнями, на виконання яких відводиться 210 хвилин).

У зв'язку з цим, якісна підготовка старшокласників до складання підсумкової атестації з математики набуває актуальності; особливої уваги потребуватимуть учні з низьким рівнем підготовки з математики.

Огляд останніх публікацій за темою. Компетентнісний підхід до формування змісту та організації навчального процесу покладено в основу створення критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти. Психолого-педагогічні аспекти контролю вивчали А. Алексюк, С. Архангельський, Ю. Бабанський, О. Безносок, В. Безпалько та інші; сучасні підходи до організації контролю навчання досліджували В. Бочарнікова, І. Булах, Л. Добровська, В. Ільїна, І. Романюк. Упровадженню рейтингової системи оцінювання присвячено праці В. Аванесова, А. Андрющука, С. Донецької, О. Задорожної, Л. Лисенка, Т. Лукіної, В. Федорова. Структуру, зміст та види контролю у навчальному процесі відображено у дослідженнях І. Зимової, В. Блинова, А. Бодалева, В. Столина, А. Кузьмінського, В. Омеляненко. Дослідження І. Волощука, С. Гончаренка, М. Євтуха, І. Зязюна, Н. Ничкало, В. Сидоренка та інших науковців присвячено проблемам розвитку особистості, її ціннісних орієнтацій, пізнавальних здібностей.

На нашу думку, якісна підготовка здобувачів середньої освіти до складання підсумкової атестації у формі ЗНО тісно пов'язана із проблемою формування індивідуальних освітніх траєкторій учнів, дослідженню яких присвячено праці І. Бухтіярова, І. Воронкової, Е. Климова, Т. Ковальнової, Н. Рибалкін, Н. Суртаєва, А. Тубельського, А. Хуторського та інших учених. Індивідуальна освітня траєкторія – один із можливих проєктів навчальної діяльності школяра. Складання індивідуальної освітньої програми пропонується учневі для осмислення власного індивідуального освітнього маршруту.

Слід зауважити, що на сучасному етапі реформування шкільної математичної освіти актуальними є низка питань, які потребують подальшого дослідження, зокрема, розробка практичних рекомендацій та методичних указівок щодо підготовки здобувачів середньої освіти до складання державної підсумкової атестації у формі ЗНО з математики.

Мета дослідження: виявлення проблемних питань та вдосконалення методичних рекомендацій, які бажано враховувати вчителю математики при організації підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики у контексті реформування шкільної математичної освіти.

Виклад основного матеріалу. Зовнішнє незалежне оцінювання проводиться щороку із використанням технологій педагогічного тестування. Сертифікаційна робота з математики налічує 34 завдання різних форм: із вибором однієї правильної відповіді (16 завдань), на встановлення відповідності (4 завдання), відкритої форми із короткою (9 завдань) та розгорнутою (5 завдань) відповідями.

Типи завдань сертифікаційної роботи та схеми нарахування балів за виконання завдань представлено у таблиці 1 (* – завдання, результат виконання яких буде зараховано як результат державної підсумкової атестації для випускників, які вивчали математику на рівні стандарту) [6].

Таблиця 1

Типи завдань сертифікаційної роботи та схеми нарахування балів за виконання завдань

<i>Форма / опис завдання</i>	<i>Схема нарахування балів</i>
<i>Завдання з вибором однієї правильної відповіді (№1–16*). Завдання має основу та чотири або п'ять варіантів відповідей, з яких лише один правильний. Завдання вважають виконаним, якщо учасник/ця зовнішнього незалежного оцінювання вибрав/ла й позначив/ла відповідь у бланку відповідей А.</i>	0 або 1 бал: 1 бал, якщо вказано правильну відповідь; 0 балів, якщо вказано неправильну відповідь, або вказано більше однієї відповіді, або відповіді на завдання не надано.
<i>Завдання на встановлення відповідності («логічні пари») (№17–20*). Завдання має основу та два стовпчики інформації, позначених цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Виконання завдання передбачає встановлення відповідності (утворення «логічних пар») між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Завдання вважають виконаним, якщо учасник/ця зовнішнього незалежного оцінювання зробив/ла позначки на перетинах рядків (цифри від 1 до 3) і колонок (букви від А до Д) у таблиці бланка відповідей А.</i>	0, 1, 2 або 3 бали: 1 бал – за кожну правильно встановлену відповідність («логічну пару»); 0 балів – за будь-яку «логічну пару», якщо зроблено більше однієї позначки в рядку та/або колонці; 0 балів – за завдання, якщо не вказано жодної правильної відповідності («логічної пари») або відповіді на завдання не надано.
<i>Завдання відкритої форми з короткою відповіддю (№21–29): – структуроване завдання (№21–24*) має основу та дві частини й передбачає</i>	– структуроване завдання 0, 1 або 2 бали: 1 бал – за кожну правильно вказану відповідь; 0 балів,

розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник/ця зовнішнього незалежного оцінювання, здійснивши відповідні числові розрахунки, записав/ла, дотримуючись вимог і правил, відповіді до кожної з частин завдання в бланку відповідей <i>A</i>; – неструктуроване завдання (№25*, №26* №27–29) має основу та передбачає розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник/ця зовнішнього незалежного оцінювання, здійснивши відповідні числові розрахунки, записав/ла, дотримуючись вимог і правил, кінцеву відповідь у бланку відповідей <i>A</i>.	якщо вказано обидві неправильні відповіді або відповіді на завдання не надано; – неструктуроване завдання 0 або 2 бали: 2 бали, якщо вказано правильну відповідь; 0 балів, якщо вказано неправильну відповідь або відповіді на завдання не надано.
<i>Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю (№30–34).</i> Завдання (№30*, №31*, №32, №34) має основу та передбачає розв'язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник/ця зовнішнього незалежного оцінювання в бланках відповідей <i>B</i> і <i>B</i> навів/ела усі етапи розв'язання й обґрунтував/ла їх, зробив/ла посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження, проілюстрував/ла розв'язання задачі рисунками, графіками тощо. Завдання №33 має основу та передбачає доведення твердження. Завдання вважають виконаним, якщо учасник/ця зовнішнього незалежного оцінювання в бланку відповідей <i>B</i> навів/ела усі етапи доведення й обґрунтував/ла їх, зробив/ла посилання на використані математичні факти.	№ 30, 34 оцінюють у 0, 1, 2, 3, 4, 5 або 6 балів; № 31 оцінюють у 0, 1, 2, 3 або 4 бали; № 32 оцінюють у 0, 1 або 2 бали; № 33 оцінюють у 0, 1, 2 або 3 бали.

Проте, слід зауважити, що ефективність тестового контролю залежить від методики його проведення. Для того, щоб тестовий контроль знань був результативним, необхідно дотримуватися таких психолого-педагогічних вимог щодо його застосування [2]:

1. Поступове впровадження тестового контролю, що дає змогу психологічно підготувати учнів. Розпочинати слід із простих тестів, уводячи через деякий час більш складні конструкції.
2. Тестовий контроль має гарантувати об'єктивність оцінювання знань, умінь і навичок учнів.
3. Дотримання організаційної чіткості у проведенні тестового контролю передбачає:

- наявність організаційного моменту, під час якого вчитель пояснює тестові завдання, дає відповіді на запитання учнів, обов'язково визначає час, необхідний для виконання роботи;
- обов'язковий аналіз результатів тестування.

Вищезазначені міркування використовуються при побудові індивідуальної освітньої траєкторії, під якою ми розуміємо персональний шлях реалізації особистісного потенціалу кожного учня в освіті; тобто це програма його індивідуальної активності, спрямованість і зміст якої визначаються волевиявленням особистості як готовністю здійснювати усвідомлений вибір і діяти відповідно до етичної вольової відповідальності [1].

Ми розглядаємо освітню програму, з одного боку, як організаційно-управлінське знання, що дозволяє реалізувати принцип особистісної орієнтації освітнього процесу шляхом визначення умов, які сприяють досягненню учнями з різними освітніми потребами та можливостями встановленого стандарту освіти. З іншого боку, освітня програма визначається як індивідуальна траєкторія учня, створена з урахуванням його індивідуальних особливостей. Визначення освітньої програми як індивідуальної траєкторії є її провідною характеристикою і дозволяє уявити освітню програму своєрідною моделлю шляхів досягнення освітнього стандарту, коли вибір шляху реалізації стандарту залежить від індивідуальних особливостей конкретного учня.

З метою виявлення кола проблемних питань та апробації методики розробки індивідуальних траєкторій підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики на базі Одеського приватного ліцею «Мрія» для вчителів-математиків проводилися лекції, наукові диспути, практикум із розв'язання завдань ЗНО різних рівнів складності.

Розглянемо деякі завдання, що обговорювалися на практикумі.

Числа та вирази

1. Обчисліть значення виразу:

- $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}$;
- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7}$;
- $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$.

Коментар. Перше завдання дає підказку: подання дробу виду $\frac{1}{4 \cdot 5}$ у вигляді різниці $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, що дає можливість значно спростити обчислення значень подібних числових виразів, не зважаючи на кількість доданків.

Після обчислення представлених числових виразів доцільно звернути увагу на тотожні перетворення виразів зі змінними такого виду:

2. Спростіть вираз

$$\frac{1}{a \cdot (a+1)} + \frac{1}{(a+1) \cdot (a+2)} + \frac{1}{(a+2) \cdot (a+3)} + \frac{1}{(a+3) \cdot (a+4)} + \frac{1}{(a+4) \cdot (a+5)} = \dots = \frac{5}{a \cdot (a+5)}$$

Коментар. Провести аналогію між попереднім числовим виразом і раціональними дробами, що є доданками даного виразу та їх подання у вигляді різниці:

$$\frac{1}{a \cdot (a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}, \quad \frac{1}{(a+1) \cdot (a+2)} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}, \quad \dots$$

3. Спростити вираз

$$\frac{1}{a \cdot (a+3)} + \frac{1}{(a+3) \cdot (a+6)} + \frac{1}{(a+6) \cdot (a+9)} + \frac{1}{(a+9) \cdot (a+12)} + \frac{1}{(a+12) \cdot (a+15)}$$

і знайти його значення, якщо $a = 5$.

Коментар. Відмінність даного виразу від попереднього у тому, що різниця дробів відрізняється однаковим числовим множником, якого не дістає у вказаному виразі:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} - \frac{1}{a+3} &= \frac{3}{a \cdot (a+3)}, \\ \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{a \cdot (a+3)} + \frac{1}{(a+3) \cdot (a+6)} + \frac{1}{(a+6) \cdot (a+9)} + \frac{1}{(a+9) \cdot (a+12)} + \frac{1}{(a+12) \cdot (a+15)} \right) &= \\ = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{a \cdot (a+3)} + \frac{3}{(a+3) \cdot (a+6)} + \frac{3}{(a+6) \cdot (a+9)} + \frac{3}{(a+9) \cdot (a+12)} + \frac{3}{(a+12) \cdot (a+15)} \right) &= \\ = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+15} \right) &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{15}{a \cdot (a+15)} \right) = \frac{5}{a \cdot (a+15)}.\end{aligned}$$

4. Доведіть тотожність:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

Коментар. Запропонувати учням представити доданки у вигляді різниці двох дробів:

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} &= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}, \\ \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} &= \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}, \\ \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} &= \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}.\end{aligned}$$

Зауваження. Такого виду завдання є підготовчими до сприйняття методу невизначених коефіцієнтів, який застосовується у розкладанні раціонального дробу на суму простіших дробів.

5. Позбавтесь від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{1}{\sqrt{5}}; 2) \frac{2}{\sqrt{8}}; 3) \frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}; 4) \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

Коментар. Необхідно повторити властивості арифметичного квадратного кореня та формули скороченого множення.

6. Обчисліть:

$$\begin{aligned}1) & \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}; \\ 2) & \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}; \\ 3) & \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}+\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}; \\ 4) & \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{38}+\sqrt{35}}; \\ 5) & \frac{40}{8-\sqrt{24}} + \frac{10}{\sqrt{34}+\sqrt{24}} + \frac{110}{12+\sqrt{34}}.\end{aligned}$$

Коментар. Зробивши аналіз доданків, які знаходяться у знаменниках дробів, бажано з учнями дійти висновку, що є необхідність позбавитися від ірраціональності в знаменниках, щоб отримати дробу з однаковими знаменниками.

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

- 1) якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система має єдиний розв'язок;
- 2) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язків;
- 3) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків.

Коментар. На першому етапі з'ясовується кількість розв'язків даних систем, що у подальшому дає змогу розв'язати системи лінійних рівнянь із параметрами:

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними з параметром

7. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} ax + y = 2, \\ 9x + ay = 6 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

Коментар. Після розв'язання запропонованих систем складання пропорції $\frac{a}{9} = \frac{1}{a} = \frac{2}{6}$ не викликає утруднень у учнів.

8. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} 3x + ay = 5, \\ ax + 12y = a + 4 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

$$\frac{3}{a} = \frac{a}{12} = \frac{5}{a+4}.$$

9. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} ax + 2y = 3, \\ 8x + ay = a + 2 \end{cases}$ не має розв'язків?

$$\frac{a}{8} = \frac{2}{a} \neq \frac{3}{a+2}.$$

Коментар. Після розв'язання першої системи з параметрами дві наступні системи учні розв'язують за обговореним алгоритмом.

Метод інтервалів для розв'язування рівнянь та нерівностей

Алгоритм застосування методу інтервалів для розв'язування алгебраїчних нерівностей $f(x) \geq 0$:

- 1) Знайдіть область визначення функції $f(x)$.
 - 2) Знайдіть нулі функції $f(x)$.
 - 3) Зобразіть область визначення функції та нулі функції на числовій прямій.
 - 4) Перевірте знаки функції на кожному з утворених проміжків.
 - 5) Запишіть відповідь: проміжки, які відповідають знаку нерівності ($f(x) < 0$ – «-», $f(x) > 0$ – «+»).
10. Розв'яжіть нерівність $(3x - 2)(x - 3)^3(x + 1)^3(x + 2)^4 < 0$

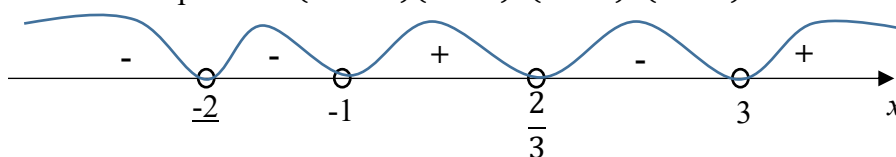


Рис. 1. Ілюстрація до завдання 10

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 3\right)$.

Коментар. Зауважимо, що застосування методу інтервалів у 9 та 11 класі мають певні відмінності. Проте, задля запобігання помилок під час визначення знаків функції на проміжках у випадку, коли нулі функції кратності більше за 1, доцільно ознайомити учнів із, так званим, «методом пелюсток», під час застосування якого на числовій прямій зображуються усі проміжки між кратними нулями функції (початок і кінець проміжку співпадають, утворюючи «пелюстки»).

Метод пелюстків

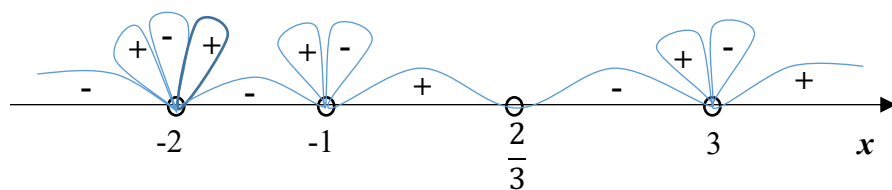


Рис. 2. Ілюстрація до методу «пелюстків»

Розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем із застосуванням методу інтервалів (або розбиття на проміжки)

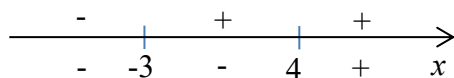
Алгоритм застосування методу:

- 1) знаходимо значення змінної, при яких дорівнюють нулю вирази, що стоять під знаком абсолютних величин;
- 2) відмічаємо на числовій прямій отримані значення, розбиваючи її на проміжки;
- 3) розв'язуємо рівняння на кожному проміжку окремо, розкривши знаки абсолютних величин; при цьому отримаємо сукупність мішаних систем.

11. Розв'яжіть рівняння $2|x + 3| - |x - 4| = 4$.

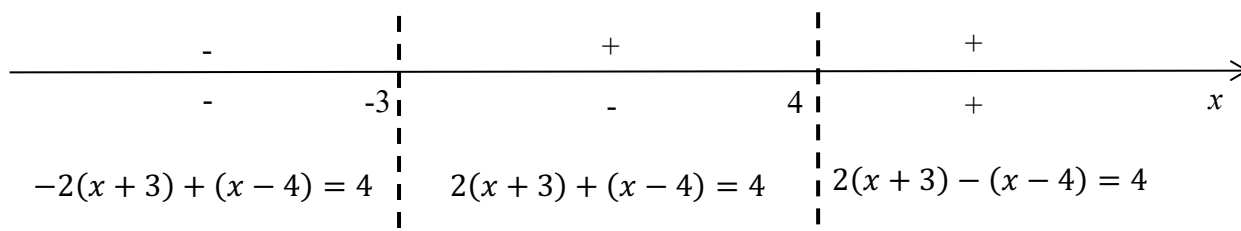
1) $x + 3 = 0$, $x_1 = -3$,

2) $x - 4 = 0$, $x_2 = 4$.



3)
$$\begin{cases} x < -3, \\ -2(x + 3) + (x - 4) = 4; \\ -3 \leq x < 4, \\ 2(x + 3) + (x - 4) = 4; \\ x > 4, \\ 2(x + 3) - (x - 4) = 4. \end{cases}$$

Коментар. Сукупність нерівностей можна розташувати у формі таблиці, що наведено нижче. Отримані корені повинні належати проміжкам, на яких розглядаються рівняння.

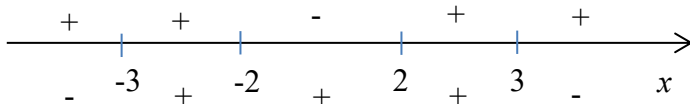


12. Розв'яжіть рівняння $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$.



$$\begin{cases} x < 2, \\ -(x-2) - (x-3) - (2x-8) = 9; \\ 2 \leq x < 3, \\ (x-2) - (x-3) - (2x-8) = 9; \\ 3 \leq x < 4, \\ (x-2) + (x-3) - (2x-8) = 9; \\ x \geq 4, \\ (x-2) + (x-3) + (2x-8) = 9; \end{cases}$$

13. Розв'яжіть рівняння $|x^2 - 4| - |9 - x^2| = 5$.



$$\begin{cases} \begin{cases} x < -3, \\ x > 3, \end{cases} \\ (x^2 - 4) + (9 - x^2) = 5, \\ \begin{cases} -3 \leq x \leq -2, \\ 2 \leq x \leq 3, \end{cases} \\ (x^2 - 4) - (9 - x^2) = 5, \\ \begin{cases} -2 < x < 2, \\ -(x^2 - 4) - (9 - x^2) = 5, \end{cases} \end{cases}$$

Коментар. Для розв'язання даного рівняння складають сукупність п'ятих мішаних систем; але необхідно звернути увагу на той факт, що на першому та п'ятому, а також на другому та четвертому проміжках, знаки виразів співпадають. Отже, сукупність буде складатися із трьох систем.

Зазначимо, що вибір завдань, розглянутих на практикумі саме у такій послідовності із указаних тем, на нашу думку, сприятиме вдосконаленню фахових компетентностей учителів-математиків щодо підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики.

Якісній реалізації такого процесу, на наш погляд, сприятимуть і вправи проблемного характеру, в яких учні мають оцінити на безпомилковість, раціональність, обґрунтованість і повноту представлені розв'язання завдань із різних тем шкільного курсу математики [5].

Розглянемо декілька прикладів.

1. Розв'язати нерівність: $\frac{x-4}{x-3} > 0$.

Розв'язання: Нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x-4 > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$, розв'язавши яку отримаємо

$x > 4$. Перевіримо $x = 5$. Відповідь: $(4; +\infty)$.

Коментар: відповідь неправильна, так як не досліджено знак знаменника.

Правильна відповідь: $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$.

2. Розв'язати нерівність: $\frac{x-4}{2-x} > 0$.

Розв'язання: Представлена нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x - 4 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases}$, розв'язуючи яку

одержимо: $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. Це і є відповідь.

Коментар: одержана система не має розв'язків. Фактично було розв'язано сукупність нерівностей.

Правильна відповідь: $(2; 4)$.

3. Розв'язати нерівність: $\frac{x-5}{3-x} > 0$.

Розв'язання: Така нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}$, розв'язуючи яку

одержимо: $\emptyset$. Це і є відповідь.

Коментар: Представлена нерівність рівносильна сукупності двох систем, одна з яких дійсно не має розв'язків.

Правильна відповідь: $(3; 5)$.

4. Розв'язати нерівність: $(x-2)(3-x)(x-4) > 0$.

Розв'язання: Скористаємося методом інтервалів. $f(x) = (x-2)(3-x)(x-4)$; $f(x) = 0$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$. Наносимо нулі функції на числову вісь. Визначаємо знак $f(x)$ у точці $x = 0$, яка належить лівому проміжку. $f(0) = -2 \cdot 3 \cdot (-4) = 24 > 0$. Отже, на проміжку $(-\infty; 2)$ $f(x) > 0$. Функція $f(x)$ не має коренів парної кратності, тому при переході через точки 2, 3, 4 знак цієї функції усякий раз змінюється на протилежний. Відповідь: $(-\infty; 2) \cup (3; 4)$.

Коментар: розв'язання правильне, достатньо обґрунтоване.

У рамках проводимого дослідження на базі Одеського приватного ліцею «Мрія» нами було здійснено добірку тестових завдань задля проведення діагностичного експерименту з учнями 9–11 класів із метою виявлення рівня сформованості математичної компетентності школярів у контексті підготовки до ЗНО. Наводимо варіанти завдань тестування для учнів 9 класів математичного (М) та філологічного (Ф) напрямів. (У дужках позначено, для якого класу дане завдання було запропоновано). Кількість завдань для математичного класу – 12, для філологічного – 10. На виконання завдань відводилася 1 година (з урахуванням організаційного моменту).

9 клас.

ЗАВДАННЯ

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді та позначте його у бланку відповідей.

1. (9М, 9Ф) Виконайте множення $0,4x^2 \cdot 5x^3$.

А	Б	В	Г	Д
$2x^5$	$20x^5$	$2x^6$	$0,2x^5$	$0,2x^6$

2. (9Ф) Учитель роздав учням певного класу 72 зошити. Кожен учень отримав однакову кількість зошитів. Якому з поданих нижче чисел може дорівнювати кількість учнів у цьому класі?

А	Б	В	Г	Д
14	11	10	9	7

2. (9М) У Оксани є певна кількість горіхів. Коли вона розклала їх у купки по 5 горіхів, то два горіхи залишилися, а коли розклала їх по 3, то зайвих горіхів не виявилося. Яка кількість горіхів із запропонованих МОГЛА БУТИ в Оксани?

А	Б	В	Г	Д
32	45	57	63	81

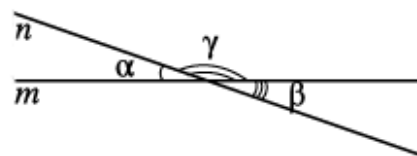
3. (9М, 9Ф) Розв'яжіть систему $\begin{cases} 3x - 2y = 9, \\ x + 2y = -5. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ обчисліть суму $x_0 + y_0$.

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	1	2	-4

4. (9М, 9Ф) Розв'яжіть рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
3; 5	-3; -5	-3; 5	3; -5	8; 15

5. (9М, 9Ф) На рисунку зображено прямі m і n , що перетинаються. Визначте градусну міру кута γ , якщо $\alpha + \beta = 50^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
130°	140°	145°	155°	310°

6. (9Ф) Укажіть хибне твердження.

А. Якщо в чотирикутнику кожна сторона дорівнює протилежній стороні, то такий чотирикутник – паралелограм.

Б. Якщо всі кути чотирикутника рівні, то такий чотирикутник – прямокутник.

В. Діагоналі прямокутника рівні.

Г. Діагоналі прямокутника є бісектрисами його кутів.

Д. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

6. (9М) У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту BM . Визначте довжину сторони AB , якщо $BM = 12$, $\angle A = \alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{12}{\cos \alpha}$	$12 \cos \alpha$	$12 \operatorname{tg} \alpha$	$12 \sin \alpha$	$\frac{12}{\sin \alpha}$

Розв'яжіть завдання 7–9 (для 9Ф класу), 7–10 (для 9М класу). Одержані числові відповіді запишіть у зошиті та *бланку відповіді*.

7. (9Ф) Обчисліть значення виразу $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

7. (9М) Обчисліть значення виразу $\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}$.

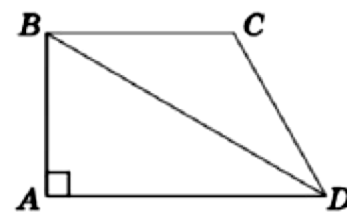
8. (9Ф) Шлях від пристані A до пристані B теплохід, що рухається за течією річки, долає за 2 години. На зворотний шлях він витрачає на 15 хвилин більше. Швидкість течії річки дорівнює 2 км/год, власна швидкість теплохода є сталою. Визначте *власну* швидкість теплохода (у км/год).

8. (9М) Автобус вирушив з міста A до міста B , відстань між якими становить 150 км. Через 30 хв. Із міста A до міста B тією самою дорогою вирушив автомобіль, швидкість якого в $1\frac{1}{5}$ рази більша за швидкість автобуса. Скільки часу (у год) витратив на дорогу з міста A до міста B автомобіль, якщо він прибув до міста B одночасно з автобусом? Уважайте, що автобус та автомобіль рухалися зі сталими швидкостями.

9. (9Ф) У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута D до сторони BC проведено перпендикуляр DK . $BK = 4$ см, $KC = 6$ см. Визначте довжину перпендикуляра DK (у см).

9. (9М) На стороні BC ромба $ABCD$ як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає сторону DC у точці K . Відстані від точки K до вершин B і C дорівнюють 7 см та $\sqrt{15}$ см відповідно. Визначте периметр ромба $ABCD$ (у см).

10. (9М) Діагональ BD прямокутної трапеції $ABCD$ є бісектрисою кута ADC й утворює з основою AD кут 30° (див. рисунок). Визначте довжину середньої лінії трапеції $ABCD$ (у см), якщо $BD = 20\sqrt{3}$ см.



Розв'яжіть завдання 10 (для 9Ф класу), 11–12 (для 9М класу). Запишіть у *бланку відповідей* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдання. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдання таблицями, графіками.

10. (9Ф) Задано функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 6 - x$.

1. Побудуйте графік функції $f(x)$.

2. Побудуйте графік функції $g(x)$.

3. Розв'яжіть графічно рівняння $f(x) = g(x)$.

11. (9М) Ресторан швидкого харчування в рекламних цілях спочатку знизив ціну комплексного обіду на 20%, але згодом нову ціну підвищив на 30%. Як змінилась початкова ціна (зменшилась чи збільшилась)? На скільки відсотків кінцева ціна відрізняється від початкової?

12. (9М) Задано функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 6 - x$.

- 1). Побудуйте графік функції $f(x)$.
- 2). Побудуйте графік функції $g(x)$.
- 3). Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

Тести для 10 та 11 класів доповнені завданнями зі стереометрії. Зошити для тестування учнів 9–11 класів розроблено у вигляді, максимально наближеному до зошитів для складання ЗНО з математики (Додаток 1).

Аналіз учнівських робіт дає змогу визначити типові помилки. У багатьох учнів виникла проблема побудови моделі до текстової задачі у вигляді рівняння чи системи рівнянь; отже, необхідна цілеспрямована робота щодо аналізу умови та використання для складання рівняння таблиць, схем, рисунків тощо.

Наприклад, для розв'язання наступної задачі можна запропонувати подання короткої умови у вигляді таблиці (рис. 3, 4) або з використанням схеми (рис. 5).

Задача: «У двох кімнатах – 76 осіб. Коли з першої кімнати вийшло 30, а з другої – 40 осіб, то людей у кімнатах залишилося порівну. По скільки осіб було у кімнаті спочатку?».

Скорочений запис змісту задачі, на наш погляд, доцільно представити так:

	Було, осіб	Вийшло, осіб	Залишилося, осіб
I	?	30	?
II	?	40	?

Рис. 3. Коротка умова задачі

Після аналізу даних таблиці можна її уточнити, позначивши одну з шуканих величин x та виражаючи іншу через x .

	Було, осіб	Вийшло, осіб	Залишилося, осіб
I	?	-30	?
II	?	-40	?

Рис. 4. Пошук розв'язання задачі

Після проведеної роботи легко скласти рівняння:

$$x - 30 = 76 - x - 40.$$

Геометричне зображення змісту задачі наочно ілюструє зв'язок між даними і шуканими, допомагає доцільно вибрати невідоме x і скласти просте для розв'язання рівняння:

$$2x + 10 = 76.$$

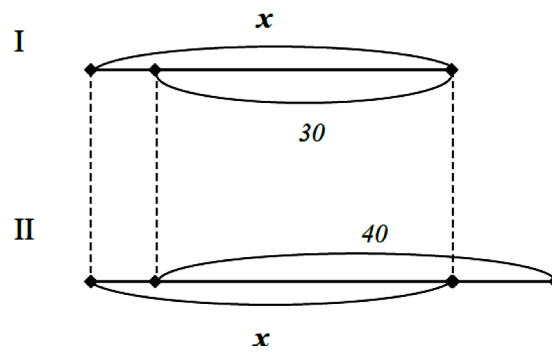


Рис. 5. Геометрична інтерпретація умови задачі

У процесі складання рівняння потрібно з'ясувати, про які величини йдеться в тексті задачі, які зв'язки існують між цими величинами і шуканим, значення яких величин можна прирівняти. Залежно від цього доцільно ввести невідоме і скласти рівняння. Розглянута задача є простою, проте, дає можливість відпрацювати з учнями різні способи запису короткої умови, вдосконалити вміння знаходження зв'язків між даними та шуканими величинами тощо.

Розв'язування рівняння графічним методом також викликало труднощі у деяких учнів.

Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{1}{x} = x$.

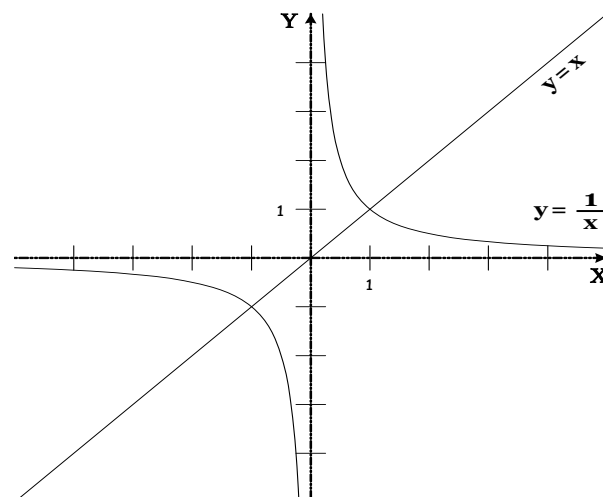


Рис. 6. Ілюстрація до розв'язання рівняння

Коментар. Перед роботою над подібними завдання необхідно повторити функції, що вивчались, формули, якими вони задані та їх графіки.

1 крок – побудувати графік функції $y = \frac{1}{x}$;

2 крок – побудувати графік функції $y = x$;

3 крок – знайти абсциси точок перетину графіків функцій.

Відповідь: $\{-1; 1\}$.

Обговорення завдань, які пропонуються у тестах ЗНО з математики, а також результатів тестування, типових помилок, яких припустилися учні дозволило окреслити коло проблемних питань щодо організації підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики, а саме:

- ✓ недостатня психологічна готовність і вмотивованість до такого виду випробувань;
- ✓ відносна безсистемність знань із різних розділів шкільного курсу математики;

- ✓ наявність психологічного бар'єру, пов'язаного з острахом розв'язання завдань підвищеного рівня складності;
- ✓ недостатня сформованість вміння створювати математичну модель задачі прикладного змісту;
- ✓ певні утруднення технічного характеру (заповнення бланку відповідей, представлення результату у потрібній формі тощо);
- ✓ невміння контролювати час та ін.

Після тестування учнів Одеського приватного ліцею «Мрія» з метою подолання труднощів у підготовці до ЗНО і розробки індивідуальної траєкторії формування математичної компетентності було застосовано такі заходи:

- індивідуальне консультування учнів 9–11 класів (заняття з учнями дали можливість, зокрема, з'ясувати: свідомим був вибір певної відповіді або вибраним навмання?; отже, результати тестування потребували корекції);
- реалізація індивідуальної траєкторії формування математичної компетентності учня, задля чого поетапно заповнювалася індивідуальна «Карта учня».

Карта учня

1. Прізвище, ім'я _____
2. Клас _____
3. Середній бал успішності з алгебри _____
4. Середній бал успішності з геометрії _____
5. Результат за тестом ЗНО _____
Коментар: _____

6. Ступінь мотивації (на початковому етапі) _____

Ступінь мотивації (на прикінцевому етапі) _____

7. Коротка характеристика від учителя математики (або директора школи) _____
8. Рекомендації консультанта (викладача ЗВО) за результатами співбесіди _____

Загалом, *методичні рекомендації* щодо організації підготовки учнів до ЗНО з математики на сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти можуть бути сформульовані у такий спосіб:

- систематично включати завдання ДПА та ЗНО з математики минулих років у самостійні та контрольні роботи;
- складати контрольні роботи у вигляді тестів, які містять завдання різних форм: з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності, відкритої форми з короткою та розгорнутою відповіддю; а також, періодично, пропонувати учням заповнювати таблицю відповідей на кшталт такої, яку потрібно буде заповнювати під час реального тестування ЗНО;
- вимагати від учнів у розгорнутих відповідях ретельних пояснень кожного кроку розв'язання; для реалізації цього необхідно постійно усно чи письмово обґрунтовувати

кожний крок навіть простих розв'язань (назви теорем, властивостей, означень, ознак тощо);

- звертати увагу учнів на завдання, що можна розв'язувати як із використанням апарату геометрії, так і знань із курсу шкільної алгебри (наприклад, при вивченні лінійного рівняння з двома змінними застосовувати відомості про лінійну функцію, розглядати відповідні завдання, що пропонуються у тестах ЗНО та варіанти їх розв'язань різними способами тощо);
- розробляти індивідуальну траєкторію формування математичної компетентності здобувача середньої освіти.

Висновки. Аналіз досвіду методистів і вчителів-математиків, учнівських робіт, завдань ЗНО з математики попередніх років дозволяє стверджувати про актуальність розробки індивідуальних програм формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти у контексті їхньої підготовки до ДПА з математики у формі ЗНО. Задля цього необхідно спеціальне конструювання навчальних текстів і дидактичних матеріалів для кожного учня (або групи учнів) та методичних рекомендацій для їх використання, контроль за особистим розвитком кожного учня у процесі опанування знаннями та набуттям компетентностей. Для реалізації вищезазначеного навчальні матеріали мають забезпечувати прояв власного досвіду учня, його попередні досягнення; контролю та оцінюванню повинен підлягати не тільки результат, але і, головним чином, процес навчання.

Список використаних джерел

1. Коростіянець Т.П. Технологія формування професійно-педагогічної компетентності майбутніх учителів математики за індивідуальними освітніми траєкторіями. Науковий журнал Причорноморського науково-дослідного інституту економіки та інновацій "Інноваційна педагогіка". Вип. 13. Одеса, 2019. С. 96–100.
2. Лутченко Л. І., Пасічник Н. О. Основи педагогічного оцінювання: Навчально-методичний посібник. Кіровоград : Лисенко В.Ф, 2012. 72 с.
3. Недялкова К. В. Методичний аналіз дидактичного матеріалу щодо підготовки і проведення зовнішнього незалежного оцінювання учнів з математики. *Наша школа*. 2009. № 1. С. 10–13.
4. Недялкова К. В., Алієва Т. О. Психолого-педагогічний аспект зовнішнього незалежного оцінювання з математики. *Актуальні проблеми методики навчання математики: матеріали II регіональної науково-практичної конференції (14–15 травня 2008 р.)*. Одеса : Наука і техніка, 2008. С. 37–48.
5. Недялкова К. В., Тумбрукакі А. В. Формування вмінь майбутніх учителів математики оцінювати навчальні досягнення учнів: методичні рекомендації. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2020. 36 с.
6. Сайт українського центру оцінювання якості освіти URL: <https://testportal.gov.ua>

РОЗДІЛ 6

Мотивація навчальної діяльності здобувачів середньої освіти на уроках математики

6.1. ФОРМУВАННЯ МОТИВАЦІЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

Тамара Коростіянець

Вступ. Кожен учитель хоче, щоб його учні добре вчилися, з інтересом і бажанням займалися у школі. У цьому зацікавлені і батьки учнів. Але часто і вчителям, і батькам доводиться із прикрістю констатувати: «не хоче вчитися», «міг би чудово займатися, але бажання немає». У цих випадках ми зустрічаємося з тим, що в учня не сформувалися потреби у знаннях, відсутній інтерес до навчання. У чому сутність потреби у знаннях? Як вона виникає? Як вона розвивається? Які педагогічні засоби можна використовувати для формування в учнів мотивації до отримання знань? Ці питання хвилюють багатьох педагогів і батьків. Учителі знають, що школяра не можна успішно навчати, якщо він відноситься до учіння й отримання знань байдуже, без інтересу, не усвідомлюючи потреби в них. Тому перед фахівцями стоїть завдання: формування і розвиток у дитини позитивної мотивації до навчальної діяльності; накопичений досвід вчителів-математиків щодо формування позитивної мотивації навчання потребує впровадження і подальшого вдосконалення.

Огляд останніх публікацій за темою. Дослідженням мотивації присвячені роботи вчених-психологів О. М. Леонтєва, Б. Ф. Ломова, Ф. С. Нємова, Є. П. Ільїна, в яких доводиться, що мотивація пояснює цілеспрямованість дій, організацію діяльності, яка спрямована на досягнення мети. Сутність поняття «мотивація навчання» розкривається у роботах А. К. Маркової, В. Я. Ляудіса, М. В. Матюхіної, Н. Ф. Тализіної, Л. І. Божович.

Б. Ф. Ломов, К. К. Платонов, Е. С. Кузьмін та інші вчені трактують мотиваційну сферу особистості як сукупність стійких мотивів, які мають певну ієрархію та виражають спрямованість особистості. А. І. Гебос виділив фактори, які сприяють формуванню в учнів позитивного мотиву до навчання. Відтак, проблема мотивації досліджується досить широко; проте, незважаючи на велику кількість психолого-педагогічних досліджень у цій області, а також звернення ряду авторів до вивчення особливостей мотивації навчання у школярів, зазначену проблему не можна вважати вирішеною у плані розвитку фахових компетентностей учителів математики щодо формування позитивної навчальної мотивації учнів.

Мета дослідження – визначити й експериментально обґрунтувати шляхи підвищення мотивації вивчення математики учнями середньої школи у контексті сучасних освітніх тенденцій.

Виклад основного матеріалу. Дії людини виходять із певних мотивів і спрямовані на певні цілі; мотив – це те, що спонукає людину до дії. Не знаючи мотивів, не можна зрозуміти, чому людина прагне до однієї, а не іншої мети; отже, не можна зрозуміти справжній сенс його дій. Мотивація – найважливіший компонент структури навчальної діяльності, а для особистості – основний критерій її сформованості, що полягає у задоволенні від самої діяльності. Коли школярі приступають до занять з математики, жоден учитель не може поскаржитися на відсутність у них інтересу до предмета. Але чим старше діти, тим інтерес до математики значно знижується. Звідси випливає важливість проблеми розвитку мотивів на кожному уроці. Іноді ми чуємо від учнів: «Нам тоді все зрозуміло, коли цікаво». Значить, дитині повинно бути цікаво на уроці. Треба мати на увазі, що інтерес (за І. Гербертом) – це синонім навчальної мотивації. Якщо розглядати процес навчання у вигляді ланцюжка: «хочу – можу – виконую з інтересом – особистісно значущо», то ми знову бачимо, що інтерес

стоїть у центрі цієї побудови. Тисячі разів цитується стосовно школі давня мудрість: «Можна привести коня до водопою, але змусити його напиться не можна». Так, можна посадити дітей за парти, домогтися ідеальної дисципліни, але без пробудження інтересу, без внутрішньої мотивації освоєння знань не відбудеться; це буде лише видимість навчальної діяльності. Так як же сформувати у дитини інтерес до навчання? Через самостійність і активність, пошукову діяльність на уроці та вдома, створення проблемної ситуації, різноманітність методів навчання, новизну матеріалу, емоційне забарвлення уроку.

Термін «мотивація» використовується у сучасній психології у подвійному сенсі: як поняття, що розкриває систему чинників, які визначають поведінку (це потреби, мотиви, цілі, наміри, прагнення і багато іншого); і як характеристика процесу, що стимулює і підтримує поведінкову активність на певному рівні. Будь-який метод навчання є багатофункціональним; однією із важливих складових кожного методу є його мотиваційна функція, що покликана привернути увагу до навчання, зробити його цікавим, мобілізувати психологічну енергію і зусилля, підтримати прагнення, примножити допитливість і старання.

Мотиви і стимули у навчальній діяльності школярів відіграють важливу роль. Учень треба усвідомлювати необхідність вирішення поставлених перед ним завдань, інакше у нього може виникнути відчуття непотрібності придбання цих знань, марної трати часу. Такий учень навряд чи буде добре вчитися. Важливо знайти такі форми і методи навчальної роботи, які викликали би в учнів потребу в даному виді діяльності або її результатах. Усвідомлення дитиною результату свого розвитку на поточний момент (що він із себе представляє, що він вміє або не вміє робити, що йому необхідно знати для життя, що знають і вміють інші люди, які оточують його і що вони думають про нього) необхідно особистості задля того, щоб розуміти, ким вона може стати, чого може навчитися, де отримані знання можуть стати їй у пригоді у подальшому житті. Від усвідомлення і розуміння подібних проблем і залежить рівень бажання або небажання школяра вчитися.

Якщо проаналізувати структуру основних типів уроків, то можна виділити етап, властивий усім урокам: мотивація навчальної діяльності. На початку уроку математики необхідно створити умови для усвідомлення учнем того, що корисного і нового він дізнається на уроці, де зможе застосувати засвоєне, які переваги йому дасть оволодіння матеріалом на уроці. В ході уроку математики необхідно створити умови для збереження і посилення вихідної мотивації для виникнення нових додаткових мотивів: для цього викликати орієнтацію на усвідомлення і розуміння способів дій, їх оцінку, порівняння, отримання задоволення від самого процесу навчання. Наприкінці уроку математики бажано створити умови для оцінки досягнення завдань, поставлених на початку уроку, визначення причини успіху або невдачі, постановці завдань для подальшої діяльності. Головне завдання кінця уроку полягає у тому, щоб кожен учень усвідомив набутий позитивний (негативний) досвід. Отже, мотивація навчання у рамках уроку являє собою завершений цикл і проходить ряд етапів: від мотивації на початку роботи (готовність, включеність) до мотивації під час виконання роботи і, нарешті, до мотивації завершення роботи (задоволеність або незадоволеність результатами, постановка подальших цілей тощо).

Учитель-математик повинен усвідомлювати: щоб навчання було по-справжньому ефективним, в учня повинна виникнути внутрішня потреба у знаннях, уміннях і навичках, які пропонує вчитель, а також бажання активно діяти з їх набуття. Через високий рівень мотивації в учня формується мета і його навчання стає активним, незалежним від учителя, переходить у самостійну цілеспрямовану діяльність. Якщо на уроці учень переживає свої успіхи – це

потужний фактор розвитку мотивації. Як і будь-який інший вид мотивації, навчальна мотивація визначається цілою низкою специфічних для цієї діяльності факторів:

по-перше, вона визначається самою освітньою системою, освітнім закладом, де здійснюється навчальна діяльність;

по-друге, – організацією освітнього процесу;

по-третє, – суб'єктними особливостями того, хто навчається (вік, стать, інтелектуальний розвиток, здібності, рівень домагань, самооцінка, взаємодія з іншими учнями і т. д.);

по-четверте, – суб'єктними особливостями педагога і, перш за все, системою його відношення до учнів, до справи;

по-п'яте, – специфікою навчального предмета.

Аналіз психолого-педагогічної літератури, практика навчання не дозволяють назвати або виділити єдину сукупність методичних прийомів, які впливають на формування мотивації. Можна згадати про історизм, зв'язок знань із долями людей, які відкрили те чи інше математичне поняття, твердження, що зробили внесок у розвиток математики; демонстрацію практичного застосування знань у зв'язку з життєвими планами і намірами школярів; проблемне та евристичне навчання; використання інтерактивних і нових інформаційних технологій та інші. Розглянемо деякі з указаних напрямів, які використовувалися при проведенні майстер-класів з учнями Одеського приватного ліцею «Мрія».

Дослідницька діяльність – самостійна діяльність учнів, але вчитель може керувати процесом появи і подолання труднощів, прогнозувати їх появу. При визначенні завдань і конкретних методичних прийомів здійснення педагогічної підтримки слід виходити з індивідуальних і вікових особливостей школярів, усвідомлення ними проблем і труднощів у дослідницькій діяльності. Під дослідницьким завданням розуміються конкретні аспекти поставленої наукової проблеми, з'ясування яких направлено на її розв'язання. Такі завдання передбачають вирішення проблеми, що не є очевидним і не може бути одержаним шляхом прямого застосування відомих схем. Розв'язання проблеми є складним процесом розумової діяльності людини, спрямованої на перетворення предмета, описаного у змісті завдання, вирішення протиріччя між умовою і вимогою завдання, отримання пізнавального результату. Розв'язання дослідницьких завдань має для учнів велике розвивальне і виховне значення: вони сприяють розвитку мислення, його певного стилю, культури, формують геометричні уявлення, навички самостійної та дослідницької роботи, сприяють глибокому розумінню математики.

Однак практика показує, що на самостійну роботу учнів відводиться не велика частина уроку, причому абсолютна більшість самостійних робіт на уроках математики дається на закріплення викладеного вчителем матеріалу безпосередньо після його вивчення і на перевірку знань учнів, – відтак, переважає репродуктивний вид діяльності школярів.

Розглянемо приклади задач дослідницького характеру.

1. Прямокутники із заданою площею. На картатому папері намалюйте усі прямокутники, у яких площа дорівнює 24 клітинам. (Сторони повинні йти по межах клітин.) Скільки вийде таких прямокутників? Якому значенню площ відповідає тільки один прямокутник? Два різних прямокутника? Три різних прямокутника? Як залежить кількість варіантів від значення площі? Знайдіть із усіх прямокутників із однаковою площею той, у якого периметр найменший.

Коментар. Завдання підводить учня до поняття простих і складених чисел. Організувати дослідження можна таким чином: учень намагається намалювати всі шукані прямокутники, щось пропускає. Йому вказують на помилку і обговорюють, як діяти, щоб нічого не

пропустити (упорядкований перебір). Потім пропонують вивчити більш прості випадки: прямокутники з площею 1, 2, 3 і так далі. Розглянуті випадки об'єднують у групи: значення площ, які відповідають одному прямокутнику, двом прямокутникам, трьом і так далі. Потім треба пов'язати групи із властивостями чисел.

2. При вивченні багатокутників і їх спільних властивостей учням можна запропонувати наступні комбінаторні завдання.

1). Скільки діагоналей має чотирикутник? Розв'язання: безпосередньою перевіркою переконуємося, що число діагоналей дорівнює 2.

2). Скільки діагоналей має п'ятикутник? Розв'язання аналогічно попередньому. Число діагоналей дорівнює 5.

3). Скільки діагоналей має шестикутник? Розв'язання аналогічно попередньому. Число діагоналей дорівнює 9.

4). Скільки діагоналей має n -кутник? Розв'язання: зафіксуємо якусь вершину n -кутника. З огляду на те, що діагоналлю є відрізок, що з'єднує не сусідні вершини багатокутника, отримуємо, що через дану вершину проходить $n - 3$ діагоналі. Оскільки загальне число вершин дорівнює n , через кожную з них проходить $n - 3$ діагоналі, і при такому підрахунку кожна діагональ рахується двічі, то загальна кількість діагоналей дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$.

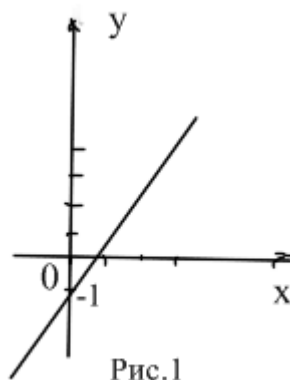
3. Розглянемо приклади задач дослідницького характеру з курсу алгебри 9 класу.

Задача 1. Чи може корінь рівняння $-3(x - 4) - b = x - 11$ бути додатним числом? За якої умови?

Розв'язання. Дану задачу можна вирішити як аналітичним, так і графічним способом.

I спосіб (аналітичний). Виразимо змінну x через b : $x = (b + 1) : 2$. Корінь є додатним числом, якщо $b > -1$.

II спосіб (графічний). Виразимо з даного рівняння b : $b = 2x - 1$. Покладемо, $b = y$ і побудуємо графік функції $y = 2x - 1$. За рис. 1 бачимо, що значення функції змінюються в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, аргумент також змінюється в інтервалі $(-\infty; +\infty)$. З графіка видно, що $x > 0$, якщо $y > -1$, тобто $b > -1$.



Задача 2. Чи вірно, що при будь-якому значенні k система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = k \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок?}$$

Розв'язання. Виразимо x із другого рівняння системи і підставимо у перше. Отримаємо

$(y + k)^2 + y^2 = 9$ або $2y^2 + 2yk + k^2 - 9 = 0$. Обчислимо дискримінант останнього рівняння: $D = -k^2 + 18$. Система має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$, тобто при $k_1 = -3\sqrt{2}$ або

$k_2 = 3\sqrt{2}$. Але для будь-якого значення k не можна стверджувати, що вихідна система має єдиний розв'язок. Отже, на запитання задачі треба відповісти негативно.

Задача 3. Чи можуть не перетинатися графіки функцій $y = ax^2 + 3x - 4$ і $y = ax - 5$?

Розв'язання. Знайдемо умову, за якої графіки даних функцій перетинаються. Для цього складемо рівняння $ax^2 + 3x - 4 = ax - 5$, $ax^2 + x(3 - a) + 1 = 0$. Його дискримінант

$D = a^2 - 10a + 9$. Рівняння не має розв'язку, якщо $D < 0$, тобто $a \in (1; 9)$. Отже, графіки функцій $y = ax^2 + 3x - 4$ і $y = ax - 5$ не перетинаються при $a \in (1; 9)$. Отже, до задачі треба дати таку відповідь: так, графіки вихідних функцій можуть не перетинатися.

4. Наведемо приклади задач дослідницького характеру з курсу алгебри 11 класу.

Задача. Палуба корабля нагадує дві параболі, що перетинаються. Скільки необхідно фарби для її покриття, якщо довжина корабля 80 м, ширина по центру – 20 м; на кожен квадратний метр необхідно 0,25 кг фарби.

Розв'язання. Введемо систему координат у такий спосіб: початок координат помістимо у центрі корабля, а вісь x вздовж палуби (рис. 2).

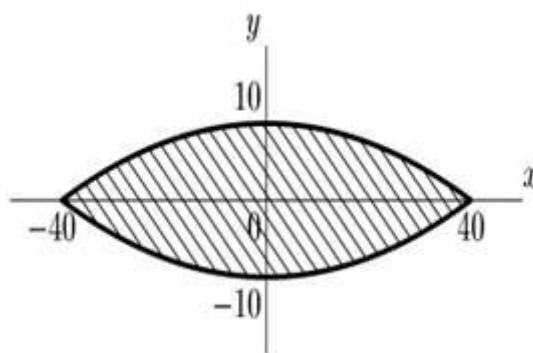


Рис. 2. Ілюстрація до задачі

Щоб знайти площу палуби, визначимо рівняння однієї із парабол. Так як точки $(-40; 0)$, $(40; 0)$, $(0; 10)$ належать параболі, то розв'язанням системи рівнянь
$$\begin{cases} 40a^2 + 40b + c = 0 \\ 40a^2 - 40b + c = 0 \\ c = 10 \end{cases}$$
 є такі

числа $a = -\frac{1}{160}$, $b = 0$, $c = 10$. Таким чином, рівняння шуканої параболі має вигляд $y = -\frac{1}{160}x^2 + 10$.

Площа половини палуби корабля обчислюється так: $S = \int_{-40}^{40} (-\frac{1}{160}x^2 + 10)dx$; для фарбування половини палуби необхідно $0,25S = \frac{400}{3}$ кг фарби. Тому для покриття всієї палуби необхідно $2 \cdot 0,25S = 2 \cdot \frac{400}{3} \approx 266,7$ (кг).

У педагогічній літературі прийом створення проблемної ситуації розглядається мало не як найголовніший і універсальний у інтерактивному навчанні; цим прийомом часто користуються при вивченні нового матеріалу. Проблемна ситуація характеризує певний психологічний стан учня, що виникає у процесі виконання завдання, для якого немає готових засобів і яке вимагає засвоєння нових знань про предмет, способи або умови виконання завдання.

Для створення проблемної ситуації (наприклад, на початку уроку на етапі актуалізації та повторення для того, щоб встановити зв'язок між діяльністю вчителя і школяра, забезпечити перехід від раніше вивченої теми до нової теми, готовність до чергового етапу роботи,

включити у продуктивну навчальну діяльність) розбираються кілька питань (усно, фронтально, можливо із записом на дошці) на повторення і актуалізацію раніше отриманих знань та задається запитання або ставиться завдання, що підводить до вивчення нової теми; при цьому організовується «живий» діалог, починається обговорення проблеми, пошук розв'язання або виведення правила або формули.

Наведемо декілька прикладів використання проблемних ситуацій при вивченні нового матеріалу на уроках математики.

Тема «Ділення звичайних дробів» (6 клас). Постановка проблеми: $x = \frac{3}{5} : \frac{9}{25}$. (Учні ще не вміють виконувати ділення звичайних дробів і разом із учителем визначають тему уроку і формулюють його завдання. Користуючись означенням операції ділення, знаходимо x . Поруч запис множення на зворотне число. Результат однаковий).

Геометрія 8 клас. Теорема Піфагора. Розв'язати задачу: «Катети прямокутного трикутника 3 см і 4 см, на гіпотенузі побудовано квадрат. Знайти площу квадрата».

Застосуємо висхідний аналіз:

- ✓ у чому полягає головна мета розв'язання задачі? (Знайти площу квадрата);
- ✓ що заважає досягненню мети? (Не відома сторона квадрата);
- ✓ що потрібно для усунення проблеми? (Знайти сторону квадрата);
- ✓ що потрібно для цього? (Встановити зв'язок між сторонами прямокутного трикутника).

(Далі йде доведення теореми Піфагора, а після повертаємося до вирішення поставленої проблеми і закінчуємо розв'язання задачі).

Проблемну ситуацію можна створити, наприклад, при побудові бісектриси кута, поділі відрізка навпіл, вивченні дій з десятковими дробами тощо.

Пояснення нового матеріалу є ефективним, якщо зміст інформації, що передається і форма її подачі забезпечують необхідну активність учнів; і від того, як учитель організовує пояснення, багато в чому залежить якість знань, які набуваються школярами. Нерідко при вивченні геометрії параграф підручника починається відразу з означення або формулювання теореми, тому вчителю самому доводиться обмірковувати вступні зауваження, пов'язувати цю тему з попередньою, створювати проблемні ситуації, відшукувати матеріал, який би зацікавив учнів. Наприклад, урок, присвячений трапеції, можна почати відразу з означення, а можна розпочати так: «Чи доводилося вам чути слово «трапеція» раніше? Чи знаєте ви, що воно означає?» При вивченні поняття чотирикутника обов'язково треба дати його класифікацію, в яку включити поняття «трапеція». Учні пропонується дати самим означення (вони мають помітити паралельність тільки двох сторін).

Вивчення питання про суму n -перших членів арифметичної прогресії у 9-му класі можна почати з розповіді: «Приблизно 200 років тому в одній із шкіл Німеччини на уроці математики вчитель запропонував учням знайти суму перших 100 натуральних чисел. Всі почали поспіль складати числа, а один учень майже відразу ж дав правильну відповідь. Ім'я цього учня — Карл Фрідріх Гаус. Пізніше він став великим математиком. Як вдалося Гаусу так швидко підрахувати цю суму?» Як знайти швидко суму перших 100 натуральних чисел — проблемна ситуація для дітей. Припущення учнів: напевно, він виписував все числа на листочку, а може взяв у довіднику або знав якесь правило і т.д. За допомогою вчителя формулюється гіпотеза: Гаус знав якесь правило (формулу) для швидкого підрахунку. Потім йде пошук розв'язання: $(1 + 100) \times 50 = 5050$. Так як послідовність чисел 1, 2, 3, ..., 100 є арифметичною прогресією,

то за цим правилом ми можемо знайти суму будь-яких перших членів арифметичної прогресії; виводимо формулу суми n -перших членів арифметичної прогресії.

При вивченні у 7 класі теми «Формули скороченого множення» можна влаштувати змагання: учитель просить кого-небудь із учнів назвати два послідовних натуральних чисел, наприклад 130 і 129. Тепер учитель і клас обчислюють на швидкість різницю квадратів цих чисел. Переможцем, причому миттєво, стає вчитель. Від школярів лунає фраза: «Ви щось знаєте, чого не знаємо ми!». «Так, — заявляє учитель. — Ви також дізнаєтеся «це щось» на сьогоднішньому уроці і зможете швидко виконувати такі обчислення».

Формуванню позитивної мотивації до навчання математики сприяє залучення елементів історизму; наприклад, можна згадувати історію свого міста.

Хто знає, де знаходиться цей пам'ятник, на честь кого він поставлений (рис. 3)?

Виконавши наступне завдання у парах, ви зможете відповісти на запитання. Вам необхідно закінчити розкладання на множники (7 клас, формули скороченого множення).



Рис. 3. Фото пам'ятника у м. Одесі

$$\text{А) } 50b - 2a^2b = 2b(25 - a^2) =$$

$$\text{Б) } -3a^2 + 6ab - 3b^2 = -3(b^2 - 2ab + a^2) =$$

$$\text{И) } 2a^3 + 128 = 2(a^3 + 64) =$$

$$\text{Н) } a^{16} - 81 = (a^3 - 9)(a^3 + 9) =$$

$$\text{П) } 4a^2 - 25b^2 = (2a)^2 - (5b)^2 =$$

$$\text{Е) } p^2 - 16m^2n^2 =$$

$$\text{Л) } 72 - 2c^2 = 2(36 - c^2) =$$

$$\text{С) } 4x^{12} - 1\frac{11}{25}y^{16} = 4x^{12} - \frac{36}{25}y^{16} =$$

Пам'ятник АПЕЛЬСИНУ, що врятував Одесу, було відкрито 2 вересня 2004 року в День міста.

Хто бачив цей пам'ятник (рис. 4)? Чи знаєте Ви, де він знаходиться?

Розв'яжіть рівняння $16x^3 - 9x = 0$ з коментарями.

$$1 \text{ крок: } x(16x^2 - 9) = 0;$$

$$2 \text{ крок: } x(4x - 3)(4x + 3) = 0;$$

$$3 \text{ крок: } x = 0 \text{ або } 4x - 3 = 0$$

$$\text{або } 4x + 3 = 0;$$

$$4 \text{ крок: } 4x = 3; 4x = -3;$$

$$5 \text{ крок: } x = \frac{3}{4}; x = -\frac{3}{4}; x = 0.$$

6 крок: відповідь. (У якості винагороди за правильну відповідь діти дізнаються, що це пам'ятник Ісааку Бабелю, на вул. Рішельєвській у м. Одесі).



Рис. 4. Фото пам'ятника у м. Одесі

Як Ви думаєте, а кому зведено цей пам'ятник (рис. 5)?

Дізнається, коли
вирішите таке рівняння:

$$x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0.$$

2 вересня 1994, коли
Одеса святкувала своє 200 –
річчя, на початку вулиці
Дерибасівської було відкрито
пам'ятник людині, на честь
якого і названа ця вулиця. В
одній руці де Рібас тримає
план майбутнього міста, в
інший – лопату (як символ
творення).



Рис. 5. Фото пам'ятника у м. Одесі

А чи впізнаєте Ви цю скульптуру (рис. 6)?

Розповідь, коли знайдете значення виразу $\frac{85^2 - 17^2}{85^2 + 2 \cdot 85 \cdot 17 + 17^2}$.



Рис. 6. Фото пам'ятника у м. Одесі

У центрі Одеси з'явився
усміхнений банкір із величезним
гаманцем. Такий незвичайний арт-
об'єкт розмістився на лавці на
Рішельєвській вулиці біля відділення
банку МТБ; скульптуру було
виконано на замовлення банку: там
запевняють, що потерти гаманець
скульптури – це до грошей.

На уроках математики доцільно використовувати висловлення відомих математиків і вчених: у ході уроку при вирішенні вправ школярі можуть дізнатися ім'я вченого, чие висловлення є епіграфом уроку, або цей учений довів теорему, вперше ввів математичний термін та інше, що є предметом вивчення на уроці.

Приклад 1. На мультимедійній дошці написано епіграф: «Для того, щоб удосконалити розум, треба більше міркувати, ніж заучувати». Діти, які виконали правильно завдання:

Д) $3\sqrt{2}(2 - 5\sqrt{32}) - 2\sqrt{18} = -120$;

Е) $\sqrt{12} - (\sqrt{15} - 3\sqrt{5})\sqrt{5} = 15 - 3\sqrt{3}$;

К) $(1 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1) = 17$;

$$A) (5\sqrt{3} - \sqrt{11})(\sqrt{11} + 5\sqrt{3}) = 64;$$

$$P) 2\sqrt{8a} + 0,3\sqrt{45c} - 4\sqrt{18a} + 0,01\sqrt{500c} = \sqrt{5c} - 8\sqrt{2a};$$

$$T) (\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 = 14 - 4\sqrt{6}$$

прочитають ім'я вченого: Д Е К А Р Т.

Приклад 2. Перед вами 10 розв'язаних прикладів, серед яких є правильні, а деякі – з помилкою. Визначте правильну рівність (назвіть її номер), в інших виправте помилки. Якщо завдання буде виконано правильно, ви дізнаєтеся прізвище вченого, який одним із перших склав таблицю логарифмів:

$$1) \log_3 2 + \log_2 2 = \log_2 64 = 6;$$

$$2) \log_5 5^3 = 2;$$

$$3) \log_3 45 - \log_3 35 = \log_3 40;$$

$$4) 3 \cdot \log_2 4 = \log_2 (4 \cdot 3);$$

$$5) \log_3 15 + \log_3 3 = \log_4 45;$$

$$6) 2 \cdot \log_5 6 = \log_5 12;$$

$$7) 4 \cdot \log_9 3 = \log_9 81 = 2;$$

$$8) \log_2 16^2 = 8;$$

$$9) \log_5 5^5 = 1;$$

$$10) 5 \cdot (\log_3 3 + \log_3 27) = 20.$$

Номери правильних відповідей: 1, 5, 7, 8, 10. (Непер)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Н	О	К	С	Е	В	П	Е	Т	Р

Приклад 3. На мультимедійній дошці написано епіграф: «Математика – це мова, на якій написана книга природи». Подано таблицю:

1	$3x^3 + 6x^2$	А	$(a + 5)^2$
2	$x^2 - 5x + 6$	Л	$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
3	$x^2 - 36$	Й	$5x - 10x^2$
4	$a^2 + 10a + 25$	Л	$16 - 24y + 9y^2$
5	$x^3 + 8$	Е	$1 - 49y^2$
6	$3a - 3c + xa - xc$	Г	$3x^2(x + 2)$
7	$(4 - 3y)^2$	І	$(a - c)(3 + x)$
8	$(1 - 7y)(1 + 7y)$		$(x - 3)(x - 2)$
9	$5x(1 - 2x)$		$(x - 6)(x + 6)$

Установіть відповідність між прикладами і відповідями. Правильне виконання завдання підкаже ім'я вченого, вислів якого став епіграфом до уроку (Галілей).

Висновки. У сучасних умовах результатом освітнього процесу має стати особистість, виховання та розвиток якої полягає, перш за все, у розвитку системи її потреб та мотивів. Педагог повинен розуміти, що якими б знаннями і методиками він не володів, без позитивної мотивації, без створення ситуації успіху такий урок приречений на провал і пройде повз свідомості учнів, не залишивши сліду ні в душі, ні у розумі. У представленій статті розглянуто деякі напрями підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти:

залучення елементів історизму, використання прикладних і дослідницьких завдань, використання проблемного та евристичного навчання, інтерактивних і нових інформаційних технологій. Визначені напрями зазнали апробацію із позитивним результатом при проведенні майстер-класів у Одеському приватному ліцеї «Мрія».

Список використаних джерел

1. Ильин Е. П. Мотивация и мотивы. Санкт-Петербург : Питер, 2000. 512 с.
2. Маркова А. К., Матис Т. А., Орлов А. Б. Формирование мотивации учения. Москва, 1990. 254 с.
3. Степанова О. А. Специфика реализации принципа индивидуализации образования в современных условиях. <http://viperson.ru/wind.php?ID=425595>
4. Усе про мотивацію / уклад. А. Г. Дербеньова. Харків : Вид. група «Основа», 2012. 207 с.

6.2. МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ І ПРОВЕДЕННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ЩОДО ПІДВИЩЕННЯ МОТИВАЦІЇ ВИВЧЕННЯ УЧНЯМИ МАТЕМАТИКИ

Катерина Недялкова, Євген Шинкаренко

Вступ. Формування навчальної мотивації учнів залишається однією із проблем сучасної школи, що не випадково. Набуття математичної компетентності на високому рівні вимагає від здобувачів середньої освіти значних вольових зусиль, інтелектуального напруження, максимальної уваги та працездатності, що не кожному учневі по силах. Однак, у межах здібностей та індивідуальності кожного учня можна зацікавити та налаштувати на творчу реалізацію освітнього процесу всіх його учасників. З цією метою важливо організовувати спеціальну систему педагогічного супроводу школяра задля розвитку і підвищення його мотивації щодо вивчення окремих предметів, у тому числі і математики.

Огляд останніх публікацій за темою. Мотивацією особистості як психологічним феноменом ґрунтовно займалися такі вчені, як О. М. Леонтьєв, Б. Ф. Ломов, Ф. С. Нємов, Є. П. Ільїн, Е. С. Кузьмін та ін., визначаючи понятійний апарат проблеми. Питання мотивації у процесі здійснення навчальної діяльності розроблені у працях Л. С. Виготського, В. В. Давидова, В. В. Рєпкіна та ін. Дослідники А. К. Маркова, Т. А. Матіс, А. Б. Орлов розробляли проблематику мотивації учіння.

Не обминули увагою зазначену проблему і вчені-математики, видатні педагоги. Про необхідність умотивованості вивчення того чи іншого розділу математики і розвитку інтересу до неї в учнів ще у 1989 році говорив академік Б. В. Гнеденко у праці «О роли математики в формировании у учащихся научного мировоззрения и нравственных принципов», яку було опубліковано у науково-методичному журналі «Математика в школе».

Проблема мотивації вивчення учнями математики завжди була у центрі уваги викладачів кафедри математики і методики її навчання ДЗ «ПНПУ імені К. Д. Ушинського». Останніми роками К. В. Недялковою і Т. П. Коростіянець було проведено дослідження мотиваційної сфери школярів [5], теоретичним підґрунтям якого стала методика А. Дербеньової щодо мотивації вивчення учнями математики [7].

Мета дослідження – розробка й апробація методики організації і проведення педагогічного експерименту щодо підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти.

Виклад основного матеріалу. У даному дослідженні ми спиралися на досвід вивчення мотиваційної сфери учнів щодо навчання математики С. Д. Овєчкіної і А. В. Колчанова, представлений у методичних рекомендаціях [6]. Авторами надано основні змістові блоки діагностики, описано методику оцінки результатів у відповідності з психолого-педагогічними принципами, запропоновано інтерактивний інструментарій автоматизованої обробки результатів діагностики. В основу представленої методики було покладено наукові розробки М. В. Гінзбурга [3] щодо вивчення навчальної мотивації. Дослідниками [6] при складанні діагностичної анкети було враховано вікові особливості здобувачів освіти у відповідності з основними показниками мотивації. Отож, анкета містить змістові блоки, що враховують: особистісний смисл навчання, ступінь розвитку цілепокладання, види мотивації, внутрішні та зовнішні мотиви, тенденції на досягнення успіху у навчанні (або уникнення невдач), реалізація

мотивів навчання у поведінці. Кожний блок представлений декількома запитаннями, причому дитина може обрати два варіанта відповіді.

Зазначена методика зазнала з нашого боку незначної корекції, пов'язаної із трактуванням деяких понять, інтерпретацією результатів і організаційними моментами.

Розглянемо методику, що може бути застосована на діагностувальному етапі проведення педагогічного експерименту з підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти.

1 блок. Досліджується рівень стійкого інтересу до математики.

З точки зору психології інтереси – емоційні прояви пізнавальних потреб особистості. Їх задоволенню сприяє ліквідація «прогалин» у знаннях, осмислення й аналіз навчального матеріалу, ознайомлення з історичними фактами, що набули значущості тощо.

У методиці дослідження першого блоку представлено першими чотирма запитаннями (Додаток 2). Одержані бали можна співставити із рівнем стійкого інтересу до математики за таблицею 1.

Таблиця 1

Оціночна шкала рівня стійкого інтересу до математики

Загальна кількість балів	Рівень	Коментар
Від 33 до 38 балів	високий	Характеризується проявом стійкого інтересу учня до вивчення математики, усвідомленням необхідності отримання і вдосконалення універсальних навчальних дій, їх застосуванню.
Від 22 до 32	середній	Свідчить про те, що учень позитивно ставиться до навчання математики, конкретні цілі зосереджені за інтересом, діяльність школяра вимагає уважного контролю з боку вчителя / батьків
Менше 22 балів	низький	Характеризується відсутністю інтересу до навчання математики, що може бути спричинено низькими мотиваційними установками і слабким рівнем підготовленості.

2 блок. Досліджується поведінковий компонент навчальної діяльності з математики.

Даний компонент, в аспектах навчання математики, характеризується поведінковою реакцією, що передбачає наявність таких складників: регуляція поведінки у процесі зовнішнього впливу, збереження внутрішньої стабільності на нормальному рівні – саморегуляція, а також усвідомлення й оцінка власних дій – самоконтроль. Для вивчення поведінкового компонента навчальної діяльності з математики методикою передбачено запитання 5–9 (Додаток 2). Загальна кількість набраних балів за цими запитаннями визначає рівень поведінкового компоненту навчальної діяльності з математики (табл. 2).

Оціночна шкала рівня поведінкового компоненту навчальної діяльності з математики

Загальна кількість балів	Рівень	Коментар
Від 40 до 47 балів	високий	Характеризується усвідомленням школярем необхідності отримання і вдосконалення одержаних умінь і навичок, їх застосувань; свідчить про зацікавленість математикою, продуктивність роботи, цілепокладання, а також здатність до самостійного дослідження.
Від 20 до 39	середній	Свідчить про наявність у здобувача середньої освіти уявлень про конкретну мету навчання математики – оволодіння основними знаннями, вміннями, навичками; однак учень утруднюється застосувати одержані знання до пізнання реальної дійсності.
Менше 20 балів	низький	Характеризується необхідністю уважного контролю за учнем з боку вчителя. Дитина нерідко докладає значних зусиль до оволодіння знаннями, але не завжди їй це вдається за різними причинами: наприклад, перехід із початкової школи до основної, новий спосіб подання навчальної інформації тощо.

3 блок. Досліджується самооцінка навчальних здібностей з математики.

Велику роль у розвитку школяра та формуванні його особистості відіграє адекватна самооцінка. У процесі навчання математики самооцінка учня визначається такими факторами: цілеспрямованість, результативність, довільність. На уроках математики бажано приділяти увагу створенню психологічного настрою здобувачів освіти, що передбачає у процесі роботи аналіз власних результатів. Важливо пам'ятати про взаємозв'язок оцінки вчителя і власної оцінки того, хто навчається. У цьому аспекті також важливим є порівняння поточних результатів навчання школяра із попередніми.

Для аналізу рівня самооцінки учня щодо його навчальних здібностей із математики методикою передбачено запитання 10–14, причому запитання 14 пропонує не вибір варіантів відповідей, а оцінку учнем своїх реальних (з його точки зору) успіхів із математики за шкалою від 1 до 12 балів (Додаток 2). Ця відповідь необхідна задля того, щоб з'ясувати кореляцію перших трьох запитань цього блоку (10–13) із конкретною оцінкою, що ставить собі учень; далі ці дані можна співставити із реальною успішністю дитини з математики. У таких спосіб, ми виділяємо школярів із завищеною, заниженою та адекватною самооцінкою, причому бали за відповідями розподіляються так:

- від 32 до 37 балів – високий рівень самооцінки навчальних здібностей з математики;
- від 20 до 31 бала – середній рівень самооцінки навчальних здібностей з математики;
- менше 20 балів – низький рівень самооцінки навчальних здібностей з математики.

Загалом, за всіма блоками учень може набрати максимум 122 бали; загальна кількість балів за всіма блоками дослідження визначає, до якого рівня вмотивованості до вивчення математики можна віднести досліджуваного: високого, нормального, заниженого, низького (табл. 3).

Таблиця 3

*Розподіл балів за методикою
та їх відповідність рівням мотивації вивчення математики*

Рівні мотивації	Бали за рівнем усталеного інтересу до математики	Бали за поведінковий компонент навчальної діяльності	Бали за самооцінку навчальних здібностей з математики	Загальна кількість балів
Високий	Від 33 до 38	Від 40 до 47	Від 32 до 37	Від 105 до 122
Нормальний	Від 28 до 32	Від 31 до 39	Від 25 до 31	Від 83 до 104
Занижений	Від 22 до 27	Від 20 до 30	Від 20 до 24	Від 62 до 82
Низький	Менше 22	Менше 20	Менше 20	Менше 62

Адаптована до наших вимог методика [6] надає таку характеристику рівнів мотивації до вивчення математики школярами:

- ✓ *високий рівень* свідчить про наявність у здобувача середньої освіти активності у навчальній діяльності з математики, здатність до досліджень у математичній галузі, позитивну мотиваційну установку;
- ✓ *нормальний (середній) рівень* проявляється в учня, здатного ставити перед собою певні навчальні цілі та задачі, але при цьому не завжди досягати очікуваного результату за різними обставинами; дитина потребує уважного контролю з боку вчителя і батьків;
- ✓ *занижений рівень* проявляється в учня, для якого потрібен постійний контроль з боку вчителя та батьків; дитині важко застосовувати одержані знання з математики у стандартних ситуаціях, при цьому для отримання цих знань докладаються значні зусилля;
- ✓ *низький рівень* характеризується відсутністю в учня інтересу до математики, слабкою вмотивованістю до її вивчення.

У діагностувальному етапі педагогічного експерименту щодо підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти прийняло участь 42 учня 5–9 класів Одеського приватного ліцею «Мрія» (майже третина учнів школи).

Школярі заповнювали *Анкету* (Додаток 2) у Гугл-формі.

Для обробки результатів опитування було складено *Оціночний лист* для кожного учасника експерименту, приклад якого надано у таблиці 4. У лівому верхньому куточку листа можна зазначати номер учасника або його шифр, якщо є намір зберегти конфіденційність (за таких умов відповідність результату певному учаснику буде відома обмеженій кількості осіб).

Оціночний лист

Номер Листа №1	Змістові блоки мотивації вивчення учнем математики													
	Рівень усталеного інтересу до математики				Поведінковий компонент навчальної діяльності з математики					Самооцінка навчальних здібностей з математики				
№ питан ня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
відп овіді	а, г	а, б	а, в	а, б	б, г	г, д	а, в	б, е	а, б	а, б	а, б	в, д	а, б	11
бали за 1 і 2 відп	2+4	4+5	4+5	4+5	4+5	5+5	4+2	5+5	5+4	5+5	4+2	5+4	4+5	
$\sum$ за 2	6	9	9	9	9	10	6	10	9	10	6	9	9	
$\sum$ заг	33				44					34				
рівень	високий				високий					високий				
Характеристика за рівнем (за блоками)	Наявність усталеного інтересу до вивчення математики; усвідомлення необхідності одержання і вдосконалення універсальних навчальних дій				Усвідомлення необхідності отримання знань, позитивна мотиваційна установка, зацікавленість математикою, більш глибоке знання предмету, здатність до самостійних досліджень					Високий рівень самооцінки; самооцінка правильна; самооцінка адекватна успішності (за останній навчальний семестр – 11 балів з математики)				
Рівень мотивації	Загальна сума балів: 111 балів Рівень мотивації до навчання математики: високий Характеристика за рівнем: у здобувача середньої освіти наявні активність у навчальній діяльності з математики, здатність до досліджень у математичній галузі, позитивна мотиваційна установка.													

За результатами діагностувального етапу педагогічного експерименту ми дійшли таких висновків:



із 42 учнів основної школи 23,8% (10 школярів) досягли високого рівня мотивації вивчення математики;



38,1% (16 учнів) мають нормальний рівень зазначеної мотивації;



решта учасників експерименту розподілилась порівну між заниженим і низьким рівнями мотивації вивчення математики і становить по 19,05% (по 8 учнів) від усіх опитаних.

Як бачимо, одержані результати у цілому відповідають закону нормального розподілу. Загальні результати опитування наочно подані на гістограмі (рис. 1).

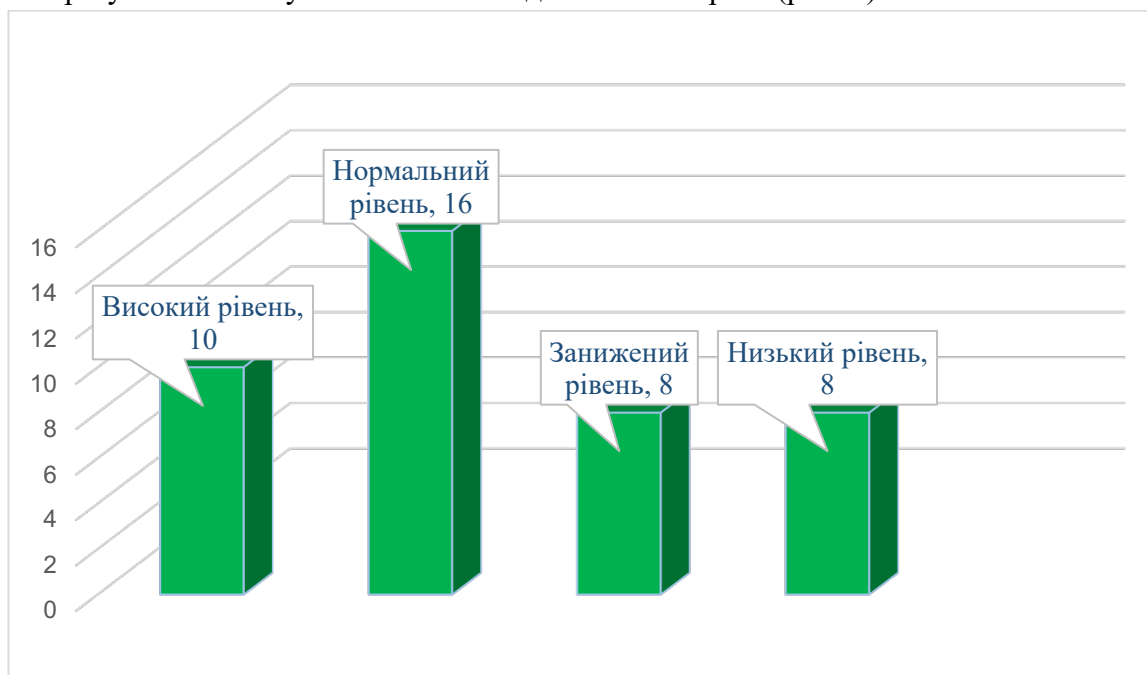


Рис. 1. Розподіл учасників діагностувального етапу експерименту за рівнями мотивації вивчення математики

Проаналізуємо також отримані результати за змістовими блоками методики і розподілимо учасників діагностувального етапу експерименту за трьома рівнями: низький, середній, високий (ці рівні також визначено і помічено в *Оціночному листі* (табл. 4)).

За даними щодо першого змістового блоку, що визначав рівень усталеного інтересу до математики здобуто такий розподіл учасників експерименту за рівнями (рис. 2):

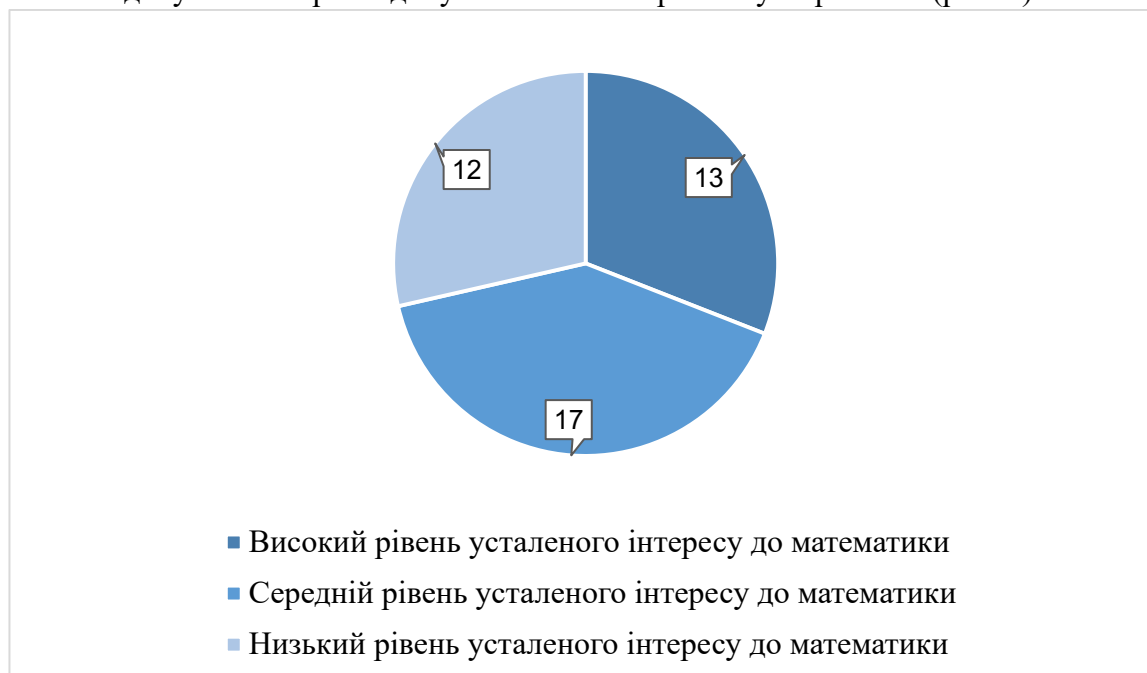


Рис. 2. Розподіл учасників експерименту за рівнями щодо змістового блоку 1

Аналіз даних засвідчує, що із 42 опитаних 31% (13 учнів) мають високий рівень усталеного інтересу до вивчення математики; 40% (17 школярів) – середній рівень

досліджуваної особливості та 29% (12 учнів) знаходяться на низькому рівні усталеного інтересу до вивчення математики.

Результати розподілу школярів за даними щодо другого змістового блоку методики, який визначав рівень поведінкового компоненту навчальної діяльності з математики представлено на рисунку 3.

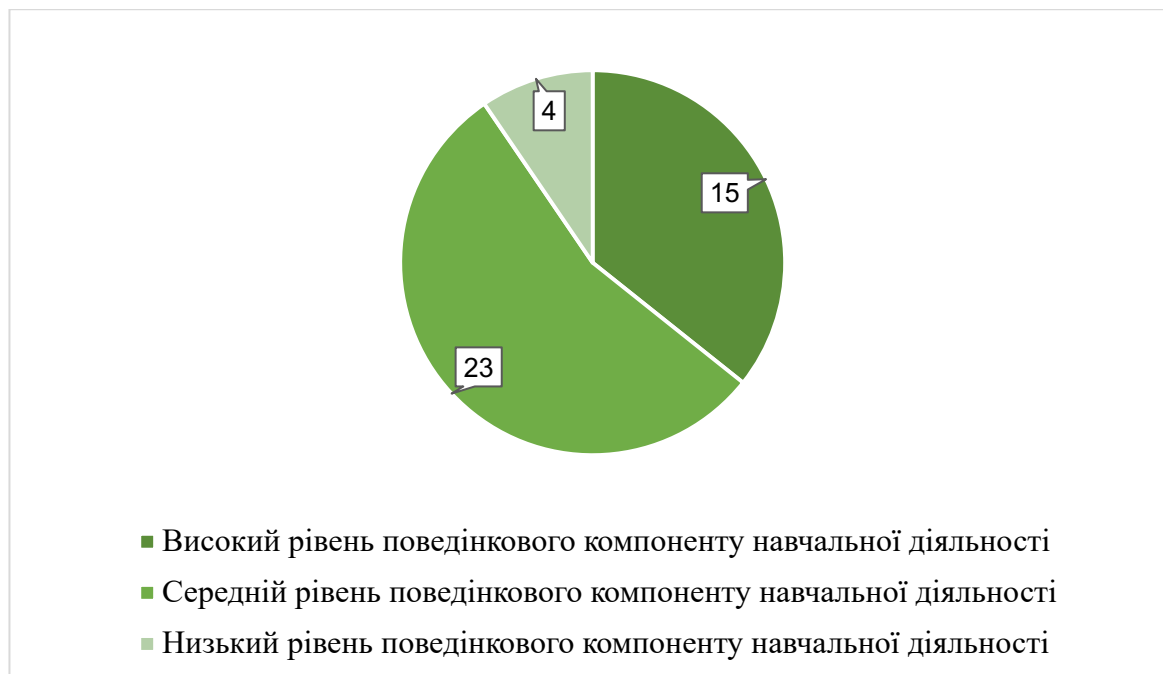


Рис. 3. Розподіл учасників експерименту за рівнями щодо змістового блоку 2

Отже, маємо, що із 42 дітей, які взяли участь у діагностувальному етапі експерименту 36% (15 учнів) знаходяться на високому рівні поведінкового компоненту навчальної діяльності з математики; 55% (23 школяра) – на середньому рівні досліджуваної особливості та лише 10% (4 учня) відповідають низькому рівню поведінкового компонента навчальної діяльності з математики.

І, нарешті, результати за третім змістовим блоком методики, що визначав рівень самооцінки навчальних здібностей учнів з математики подано на рисунку 4.

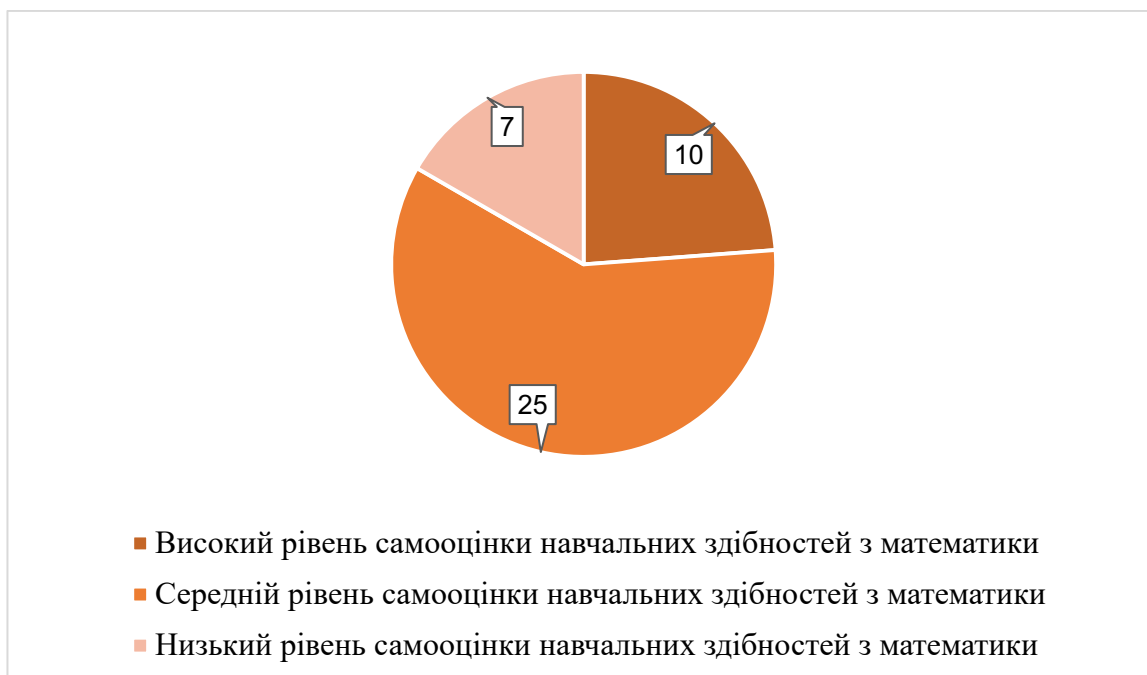


Рис. 4. Розподіл учасників експерименту за рівнями щодо змістового блоку 3

Аналіз отриманих даних дозволяє констатувати, що 24% (10 учасників) знаходяться на високому рівні самооцінки навчальних здібностей з математики; 60% (25 дітей) відповідають середньому рівню досліджуваної особливості та 17% (7 дітей) мають низький рівень самооцінки навчальних здібностей з математики.

Якісно та кількісно оброблені результати діагностувального етапу педагогічного експерименту з підвищення мотивації вивчення математики учнями можуть слугувати джерелом додаткової інформації для вчителя математики щодо ефективності навчального процесу, особливостей мотиваційної сфери класу і школи у цілому, необхідності впроваджувати корекційні заходи щодо окремого учня або, загалом, класу; така інформація може бути корисною адміністрації школи, психологічній службі (психологу), батькам.

На нашу думку, одержані результати діагностувального експерименту свідчать про наявність позитивного мотиваційного клімату, притаманного даному освітньому середовищу, сприятливому для набуття математичної компетентності, реалізації творчого потенціалу особистості. Водночас, мотивація навчальної діяльності – феномен, який потребує постійної уваги учасників освітнього процесу: вдосконалення мотиваційних установок, перехід позитивних мотивів в усталені позитивні мотиви у тих учнів, яким притаманний високий і нормальний рівні; підвищення мотивації вивчення математики для здобувачів середньої освіти, що знаходяться на заниженому і низькому рівнях зазначеної мотивації.

Отже, постає питання у розробці технології підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти і реалізації формувального етапу педагогічного експерименту. При розробці такої технології важливо виходити із особливостей організації освітнього процесу у конкретному закладі загальної середньої освіти, індивідуальних і вікових особливостей учнів класу, педагогічного досвіду вчителів-математиків, їхнього стилю навчання і співпраці зі школярами тощо.

На думку вчителів-математиків Одеського приватного ліцею «Мрія», що став базою дослідження, таку технологію слід розробляти, враховуючи:

1) оцінку – найважливіший інструмент для мотивування учнів (на жаль, був і залишається); якщо дотримуватися справедливості оцінювання і максимальної об'єктивності, можна досягти позитивних зрушень у мотивації;

2) похвалу – один із різновидів оцінювання, що дозволяє здобути прихильність учнів до вчителя; особливо добре працює, коли вчитель «новий» для класу. Однак не слід цим прийомом зловживати: треба залишатися справедливим, оскільки діти дуже тонко відчують фальш;

3) зауваження у щоденнику (електронному) – вони більше спрямовані на батьків, причому на тих, які уважні до своїх дітей (на жаль, є й інші батьки). Треба дуже ретельно ставитися до записів у щоденник (електронний щоденник), щоб налаштувати батьків на співпрацю і діяти сумісними зусиллями: хто ще, як не батьки, краще знає своїх дітей і як на них можна ефективно вплинути?;

4) розподіл навчального навантаження – бажано, щоб заняття з математики з їх інтелектуальним напруженням не були першими уроками: сучасний світ зі всіма його гаджетами «забирає» дорогоцінний сон дитини; на жаль, однак це реалії сьогодення – дуже велика спокуса поспілкуватися після опівночі, лягти спати зі смартфоном під ковдрою і «досипати» на перших уроках (сказане більшою мірою стосується старшокласників);

5) використання мультимедіа – дозволяє дещо розвантажити напруження уроку, залучаючи наочність, креативні підходи та додати емоційності. За досвідом роботи, дуже добре себе зарекомендували інтерактивні тести для тематичного оцінювання, а також різні вікторини та опитування;

6) залучення інтегрованих уроків – навіть і, на перший погляд, із непов'язаних предметів (математика і фізична культура, наприклад). У такому разі дітям стає цікаво, як математика «працює» у реальному житті: при підрахунку витрат на ремонт (розрахунок площ, будівельних матеріалів, калькуляція кошторису тощо), у кулінарії, у літературі, в економіці (підрахунок заробітної платні, відсотків тощо); такі уроки додають умотивованості до вивчення математики;

7) окреслення перспектив для подальшого успішного життя – для особистісного і кар'єрного росту. Наприклад, можна організовувати зустрічі з професіоналами: керівниками різних організацій, інженерами, медиками та ін., і у форматі діалогу дізнаватися, чи знадобилася їм математика у дорослому житті, як вони ставилися до цього предмету, коли самі були школярами. У цьому ж контексті можна відвідувати різні заходи разом із учнями, наприклад, з інвестування якихось проєктів, виставок тощо.

Загалом, нами було визначено й апробовано у рамках формувального етапу педагогічного експерименту щодо підвищення мотивації вивчення математики учнями такі напрями: доречне застосування ІКТ; здійснення математичних експериментів; проведення освітніх квестів; залучення елементів історизму; проведення уроків-корекцій мотивації; використання передових педагогічних технологій, зокрема «Сторітеллінг», «Перевернутий клас» та ін.; моніторинг мотиваційної сфери учня (класу, навчального закладу).

З метою реалізації зазначених напрямів викладачами кафедри математики і методики її навчання Університету Ушинського було здійснено низку заходів, орієнтованих як на учнів (майстер-класи у формі відкритих уроків, тестування, індивідуальне консультування, освітній квест, математичні експерименти, анкетування та ін.), так і на вчителів-математиків (лекції, семінари, тренінги, диспути, практикуми), більшість із яких описано у представленій монографії.

Зупинимося докладніше на такій формі навчання, зокрема математики у сучасній школі, як освітній квест. Квест (від англійського слова quest - “пошук, предмет пошуків, пошук пригод”). У літературі це один із способів побудови сюжету в фольклорних творах, подорож персонажів до певної мети через подолання труднощів (наприклад, міф про Персея або про дванадцять подвигів Геракла). Перші ігри-квести з’явилися на початку 1990-х як комп’ютерні головоломки, а перший квест «Escape the room» – у 2006 році; мета таких ігор – вибратися із замкненої кімнати, виконавши серію завдань. Освітній квест – організований вид дослідницької діяльності учнів, який містить різні завдання, причому перехід до наступного завдання можливий тільки за умови виконання попереднього. Фактично це гра, в якій учасники виконують логічні, дослідницькі та інші завдання, будують маршрути і шукають вирішення проблеми [1]. Підготовка до квесту – це важка і клопітка праця організаторів заходу. Пошук ідеї, різноманітних завдань, визначення місця проведення, складання сюжету займає багато часу та зусиль. Змістова лінія освітнього квесту може містити такі складники [2]:

- вступ, пояснення основних правил, визначення часу, вибір ролей учасників та реалізація сценарію квесту;
- головне завдання – визначення цілі після виконання всіх етапів квесту;
- список інформаційних джерел, які потрібні для виконання завдань;
- опис процедури роботи, що повинні виконати учасники на кожному етапі заходу;
- визначення критеріїв оцінювання, у залежності від типу завдання;
- висновок – аналіз досвіду, отриманого учасниками квесту.

З урахуванням усіх наведених рекомендацій нами було організовано освітній квест із математики і реалізовано для учнів 7–Ф і 7–М класів Одеського приватного ліцею «Мрія». На проведення заходу було відведено два послідовних уроку з математики; приміщення для проведення квесту складалося із трьох об’єднаних кімнат (це дозволяло наблизити умови проведення заходу до реальних сучасних квест-румів). У ідею квесту було покладено пошук «кладу», що сховано піратами у Карибському морі – сюжет, який подобається майже усім підліткам. Для створення відповідної атмосфери заходу було залучено реальні предмети: макет корабля, піратський флаг (Веселий Роджер), «корабельні» ліхтарі, піратський капелюх, сундук із «коштовностями» та ін. Учасникам необхідно було знайти 13 «чорних» міток, кожна із яких містила задачу (завдання), розв’язання яких дозволяло поєднати листи із завданнями в єдину карту, на якій було зашифровано місце, де сховано «клад» – сундук із «монетами» (цукерками у вигляді монет, обгорнутих у золоту фольгу). Поїдання «кладу» було чудовим призом і емоційним завершенням усього заходу.

Завдання для виконання школярами було обрано такі, що сприяють розвитку логічного мислення учнів, із дослідницьким компонентом тощо. Наприклад:

Завдання. Знайди невірні умовиводи:

- а) деякі моряки – пірати; отже, деякі моряки не є піратами;
- б) усі пірати – розбійники; отже, кожний пірат не є розбійником;
- в) усі пірати – розбійники; отже, усі розбійники – пірати.

Завдання. Вкажі на географічній карті такі об’єкти: Індія, Естонія, Туніс, Швейцарія, Монголія, Бразилія, Японія. З кожного із зазначених слів утвори нове слово і виведи (та запиши) правило (формулу), за яким це слово одержано.

Безсумнівно, освітній квест із математики є потужним засобом розвитку позитивної мотивації до вивчення учнями цього предмету, оскільки викликає зацікавленість і включеність

сучасних дітей у освітній процес (і може, навіть, за цими критеріями конкурувати зі смартфонами й іншими гаджетами).

Аналіз проведеного заходу дозволив організаторам дійти наступних висновків:

1. Кількість учасників шкільного освітнього квесту не повинна перевищувати 10 осіб; у іншому випадку організаторам (ведучому) важко досягти освітню мету (залишається тільки розважальний аспект заходу), створити продуктивну, творчу атмосферу. У приватному навчальному закладі кількість учнів класу зазвичай і становить 10–12 учнів; якщо ж клас або інший тимчасовий колектив учасників (наприклад, загін літнього оздоровчого табору) містить більше, ніж 10 осіб, бажано ділити його на групи (при цьому реалізовувати змінений сценарій заходу, оскільки діти із заохоченням розкриють завчасно один одному цікаві «таємниці» й інтрига зникне).

2. Колектив учасників має бути більш-менш однорідним за віком і рівнями підготовленості і вмотивованості до вивчення математики: це забезпечить умови для рівноправної участі всіх дітей і реалізації їхнього інтелектуального потенціалу і творчих здібностей. З цією метою можна за певних обставин об'єднувати дітей профільних класів, які незначно відрізняються за віком (у випадку Одеського приватного ліцею «Мрія» це можуть бути колективи 7–М і 8–М, 8–М і 9–М, 7–Ф і 8–Ф або 8–Ф і 9–Ф класів, де «М» – класи природничо-математичного спрямування, а «Ф» – класи з поглибленим вивченням філологічних наук).

3. Завдання, що залучаються для реалізації навчально-розвивальної мети освітнього квесту бажано обирати не такі, що визначають рівень сформованості знань, умінь і навичок із окремих тем шкільного курсу математики (тобто реалізують предметну математичну компетентність), а ті, що сприятимуть розвитку математичної компетентності як ключової компетентності, яка дає можливість особистості ефективно діяти у різних сферах життєдіяльності; а також практичної математичної компетентності як набутий учнями у процесі навчання комплекс певних прийомів математичної діяльності та навичок їх застосувань до розв'язування практичних задач. Це можуть бути завдання логічного характеру, на маніпулювання із деякими предметами, моделювання, конструювання тощо. Водночас, запропоновані завдання мають бути посилюючими для учасників, оскільки вони обмежені у часі та й зацікавленість дітей може швидко згаснути.

4. При організації і проведенні освітнього квесту треба продумувати все до дрібниць, включаючи антураж і матеріальні об'єкти, що створюють атмосферу заходу, відповідну його ідеї, меті та сюжету. Однак тут треба не захопитися і не перетворити навчально-виховний (позаурочний, позашкільний) захід на просту розвагу – у освітнього квесту інша мета: за рахунок емоційного підйому, максимальної зацікавленості та включеності дітей у процес досягти триєдиної мети: освітньої, розвивальної і виховної.

Наразі формувальний етап педагогічного експерименту з підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти триває. Організатори експерименту – автори статті – мають намір провести найближчим часом повторне опитування щодо з'ясування зрушень у мотиваційній сфері учасників експерименту і розробки у відповідності з цим подальших заходів.

Висновки. Під час дослідницької роботи авторами було визначено й апробовано напрями підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти:

- ✓ доречне застосування ІКТ;
- ✓ здійснення математичних експериментів;

- ✓ проведення освітніх квестів;
- ✓ залучення елементів історизму;
- ✓ проведення уроків-корекцій мотивації;
- ✓ використання передових педагогічних технологій;
- ✓ моніторинг мотиваційної сфери учня (класу, навчального закладу).

Моніторинг мотиваційної сфери може відбуватися на діагностувальному та формувальному етапах педагогічного експерименту, причому на формувальному етапі бажано проводити його двічі – на проміжному і прикінцевому періодах задля достовірності одержаних результатів і проєктування подальшої діяльності. Вивчення мотиваційної сфери учня може відбуватися за методикою А. Дербеньової [7] або за методикою С. Д. Овечкіної і А. В. Колчанова [6].

Подальше вивчення проблеми автори вбачають у розробці інших напрямів підвищення мотивації вивчення учнями математики і здійсненні порівняльного аналізу застосування двох зазначених методик діагностики мотивації.

Список використаних джерел

1. Використання квесту як засобу активізації навчальної діяльності учнів. URL: https://osvita.ua/school/lessons_summary/edu_technology/34730/.
2. Вівсик О., Жигайло О. Особливості організації і методики проведення позакласної роботи з математики з використанням елементів квест-технологій. URL: <https://op.ua/pedclass/naukova-stattya/osoblivosti-organizaciyi-i-metodiki-provedennya-pozaklasnoyi-roboti-z-matematiki-z-vikoristannyam-elementiv-kvest-tehnologiy>.
3. Гинзбург М. Р. Диагностика учебной деятельности и интеллектуального развития детей. Москва : Просвещение, 1981. 265 с.
4. Ильин Е. П. Мотивация и мотивы. Санкт-Петербург : Питер, 2000. 512 с.
5. Коростіянець Т. П., Недялкова К. В. Підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти. *Актуальні питання гуманітарних наук* : міжвуз. зб. наук. праць молодих вчених Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Дрогобич, 2020. Вип. 31. Т. 3. С. 249–258.
6. Овечкина С. Д., Колчанов А.В. Диагностика мотивации учащихся основной школы к изучению математики: методические рекомендации. Краснодар : КубГУ, 2017. 42 с.
7. Усе про мотивацію / уклад. А. Г. Дербеньова. Харків : Вид. група «Основа», 2012. 207 с.

РОЗДІЛ 7

**Формування практичної математичної
компетентності здобувачів
середньої освіти**

7.1. МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ І ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З РОЗВИТКУ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ

Олександр Світной

Вступ. У сучасній шкільній математиці логічні задачі відіграють вельми важливу роль. З такими задачами учні зустрічаються вже в початковій школі. Розв'язування логічних задач сприяє розвитку математичної інтуїції, стимулює допитливість учнів, виробляє вміння застосовувати свої знання на практиці. Послідовні, правильні логічні міркування сприяють вихованню алгоритмічної культури, розвитку логічного мислення, математичних здібностей, інтелекту учнів. Отже, через розв'язання логічних задач реалізується проблемне навчання, практична спрямованість навчання математики.

Педагогічна практика засвідчує, що у більшості учнів здоровий глузд випереджає математичну підготовку. Це обумовлює високий інтерес учнів до розв'язування логічних задач, які відрізняються від звичайних тим, що, здебільшого, не потребують обчислень, а вирішуються за допомогою міркувань. Можна говорити, що логічна задача – це особлива інформація, що необхідно обробити у відповідності з заданою умовою, при цьому мати певне бажання це зробити, тобто мати відповідну зацікавленість. У свою чергу, розв'язування логічних задач сприяє підвищенню інтересу до вивчення математики, формує відповідну мотивацію.

Розв'язання і складання логічних задач сприяють розвитку мислення у значно більшій мірі, ніж розв'язання тривіальних, типових задач, які в основному розвивають пам'ять учнів. Логічні задачі є оптимальним засобом розвитку творчого мислення та евристичної діяльності учнів. Процес розв'язання логічних задач подібний із процесом розв'язання справжніх творчих задач у науці і техніці та відтворює усі етапи творчого мислення. При розв'язуванні

логічних задач використовується ряд евристичних прийомів, методів, які можуть бути сформовані в учнів послідовно, починаючи з початкової школи.

Не викликає сумніву, що для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування практичних задач. Якісної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає і вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язуванні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним із головних завдань шкільного курсу математики є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної математичної компетентності.

Огляд останніх публікацій за темою. Останнім часом у навчально-методичній і науково-популярній літературі, збірниках олімпіадних задач [1–4, 6, 8–13, 15, 16] пропонуються до розв'язання школярам багато різних логічних задач, серед яких – задачі «на переливання», «на зважування», «на перекладання предметів». Методи розв'язування цих задач ґрунтуються на комбінуванні частинами цілого. Такі задачі сприяють саме розвитку практичної математичної компетентності.

Мета дослідження: проаналізувати методичні особливості організації і проведення математичного експерименту для здобувачів середньої освіти, спрямованого на розвиток логічного мислення учнів і формування практичної математичної компетентності.

Основний виклад матеріалу. Ставлення школярів до навчання залежить від багатьох факторів: від вікових і психологічних особливостей, від особистості вчителя і його педагогічної майстерності, від складності досліджуваного предмета, від позитивного або негативного досвіду, пов'язаного з отриманням знань, ну і, звичайно ж, від внутрішньої мотивації.

Дитина за своєю суттю – це дослідник від природи. З самого народження вона мацає, чіпає і пробує на смак, їй усе цікаво, нове і дивне. Але з часом пізнавальний інтерес дитини зменшується, і в шкільному віці при вивченні «важких» предметів практично згасає. Тому перед учителями стоїть завдання: підвищити мотивацію до вивчення предмету і покращити ефективність навчальної діяльності.

З огляду на вищезазначене, набувають наукової і практичної значущості тематичні заходи – математичні експерименти. При проведенні цих заходів спостерігається зацікавленість учасників, які проєктували і здійснювали алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі.

На допомогу вчителю у цьому напрямку приходить експериментальна і дослідницька діяльність. У процесі експериментування школяр отримує можливість задовольнити свою природню допитливість. Мотивувати на експеримент може здивування, цікавість або ж протиріччя. Дитина пізнає об'єкт у ході практичної діяльності з ним. Таким чином, займаючись математичним експериментом, кожен учень стає активним учасником дослідження.

Отже, організація математичного експерименту в закладі загальної середньої освіти є доречною під час:

- ✓ відкриття нових моделей і зв'язків;
- ✓ дослідження сутності предмета;
- ✓ перевірки гіпотез;
- ✓ визначення підходів до формального доведення;

- ✓ перевірки можливих результатів;
- ✓ підтвердження результатів, здобутих аналітично тощо.

Успіх дослідницької діяльності учнів в основному забезпечується правильним плануванням видів і форм завдань, використанням ефективних систем завдань, а також умілим керівництвом учителя цією діяльністю.

Навчальна дослідницька діяльність – це спеціально організована, пізнавальна творча діяльність учнів, яка за своєю структурою відповідає науковій діяльності та є ширшою, ніж експериментальна. Вона характеризується: цілеспрямованістю, активністю, предметністю, самостійністю, вмотивованістю і свідомістю; результатом такої діяльності є формування пізнавальних мотивів, дослідницьких умінь, суб'єктивно нових для учнів знань або способів діяльності [7; 14]. Знання, отримані учнем самостійно шляхом спроб і помилок, перебору різних інструментів, застосування всіляких формул і дій залишаться у його пам'яті надовго, а цінність розумового процесу (який, на жаль, не можна описати і виміряти) важко буде переоцінити.

Наведемо конкретний приклад експериментальної діяльності школярів під час математичних досліджень на тематичних заняттях з теми «Математичний експеримент зі зважуванням». Останнім часом з'явилося багато цікавих навчально-методичних посібників, збірників олімпіадних задач із математики, в яких розглядаються задачі на зважування [9, 10, 16]. Ці задачі пропонуються з метою ознайомлення учнів із методами їх розв'язування, що не розглядаються у шкільних підручниках.

Розв'язування задач «на зважування» сприяє розвитку математичної інтуїції, стимулює допитливість учнів, виробляє вміння застосовувати свої знання на практиці. Послідовні, правильні логічні міркування сприяють вихованню алгоритмічної культури, розвитку логічного мислення, математичних здібностей, інтелекту школярів. Відомо, що важливим фактором успішної роботи над задачею є впевненість учня у тому, що він зможе її розв'язати. Інтерес до задачі, бажання у ній розібратися і впевненість у тому, що вона йому «по силах» є необхідними передумовами успішного розв'язання задачі.

Дослідження проводилося нами на базі Одеського приватного ліцею «Мрія». Тематичне заняття «Математичний експеримент зі зважуванням», яке проводилося для відвідувачів шкільного літнього оздоровчого Табору Відпочинку, мав за мету

-  розвиток логічного мислення учнів;
-  реалізацію прикладної спрямованості навчання математики;
-  формування предметної математичної компетентності;
-  підвищення мотивації до вивчення предмета;
-  відкриття нових моделей і зв'язків;
-  дослідження сутності предмета;
-  перевірку гіпотез;
-  перевірку можливих результатів.

Під час проведення заходу для реалізації його мети майстерно застосовувалися ІКТ, забезпечуючи наочність, доступність, науковість викладу матеріалу.

У першу чергу потрібно було ознайомити учасників із приладдям, яке застосовувалося в експерименті, дати можливість учням згадати: які ваги вони зустрічали, їх призначення, як вагами користуватися (рис. 1).



Рис. 1. Різновиди терезів

Проведений захід складався із двох частин: урок 1 і урок 2. Перший урок був за темою «Визначення легшого (важчого) предмета». На ньому розглядалися реальні предмети (фрукти, овочі, монети, кулі, кубики різного кольору і різних розмірів, іграшки – «динозаврики», «монстрики» та ін.). Предмети порівнювали за вагою. Спочатку за допомогою гирьок, потім без їх використання. Важливий момент цього етапу – підібрати предмети, різні за габаритами і різні за вагою. Учні повинні дійти висновку, що предмет, великий за розмірами може бути легким і навпаки. На другому уроці розглядалися уявні предмети; при цьому завдання демонструвалися на слайдах презентації. На цьому етапі розв’язання задач обґрунтовується за допомогою логічних міркувань.

Після тренувальних вправ учням було запропоновано скласти і намалювати свою задачу на „зважування” за аналогією із тими задачами, що розглянуто у презентації. Також уасникам експерименту пропонувалися задачі про фальшиві монети, задачі на обмежену кількість зважувань, задачі на визначення кількості зважувань.

Задачі на зважування – досить поширений вид математичних олімпіадних завдань; вони різко відрізняються від звичайних шкільних задач, які учні звикли розв’язувати на уроці. Щоб розв’язати таку задачу, необхідно уявити відповідну ситуацію і проаналізувати всі можливі варіанти; необхідно описати певні дії і зроблені з них висновки. У таких завданнях той, хто розв’язує задачу повинен локалізувати предмет, який відрізняється від інших по вазі за обмежене число зважувань. Пошук розв’язання у цьому випадку здійснюється шляхом операцій порівняння, правда, не лише одиночних елементів, але і груп елементів між собою. Розв’язуючи такі задачі, потрібно розібрати всі варіанти. Якщо шукаєте фальшиву монету, то корисно поділити всі монети на три кучки, при цьому кількість зважувань зменшується.

У задачах на зважування часто йде мова про терези без гир. Ними можна порівнювати предмети (важчий, легший, однакові), але не можна виміряти їх точну вагу.

Розглянемо кілька таких задач.

Задача 1. У пакеті є 9 кг манної крупи. За допомогою трьох зважувань, маючи гирю масою 250 г, розділити крупу у два пакети: в один – 2 кг, у другий – 7 кг.

Завдання для самостійного опрацювання.

Задача 2. У пакеті 9 кг крупів. За допомогою терезів із гирями 50 г і 200 г треба розкласти ці крупи у два пакети: в один – 2 кг, в другий – 5 кг. Спробуйте це зробити за три зважування. Знайдіть два способи розв’язування цієї задачі.

Задача 3. У пакеті 3 кг 600 г крупи. Є шалькові терези і гиря 200 г. Як поділити крупу на три пакети: 800 г і 2 кг за допомогою трьох зважувань?

Дуже часто використовується постановка завдання, що вимагає визначити або мінімальне число зважувань, потрібне для встановлення певного факту, або навести алгоритм визначення цього факту за певну кількість кроків (зважувань). Пошук розв’язання здійснюється шляхом операцій порівняння, причому, не тільки одиночних елементів, а й груп елементів між собою. Завдання даного типу найчастіше розв’язуються методом міркувань.

Аналіз літератури з теми дослідження дозволив дійти висновку, що всі завдання на зважування можливо поділити на наступні типи:

- завдання на порівняння за допомогою ваг;
- завдання на зважування на вагах з гирями;
- завдання на зважування на вагах без гир.

Пропонуємо декілька завдань такого виду (рис. 2–10).

Що легше?

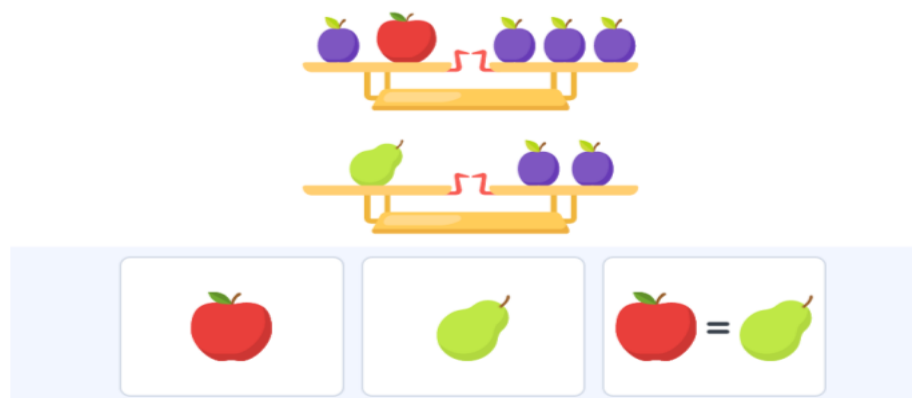


Рис. 2. Завдання 1

Що важче?

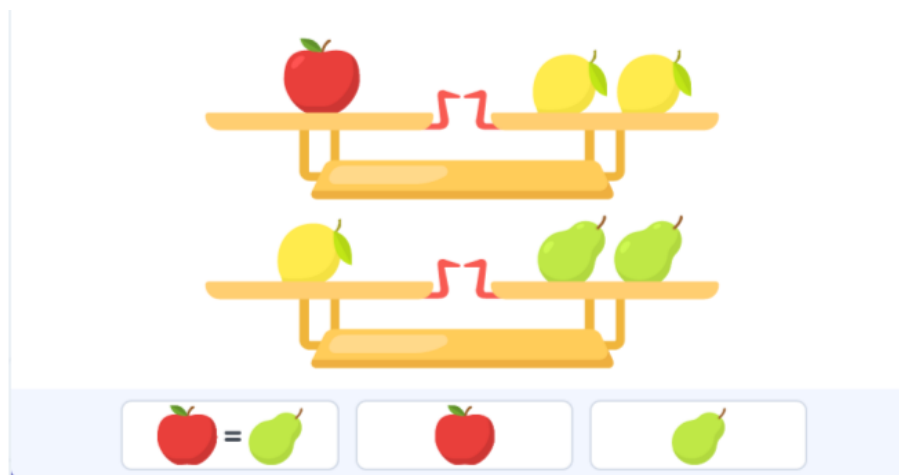


Рис. 3. Завдання 2

Обери самий легкий фрукт

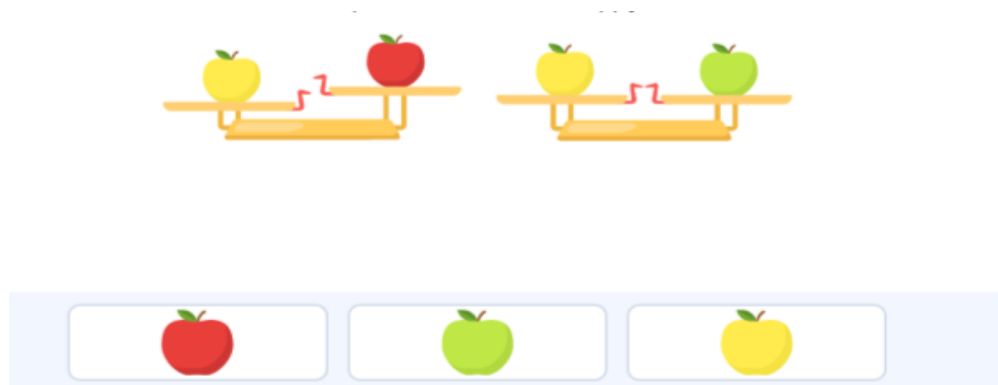


Рис. 4. Завдання 3

*Яблуко важче груші. Лимон легше груші.
Розклади фрукти у порядку збільшення ваги.*



Рис. 5. Завдання 4

*Що важче і
наскільки?*



Рис. 6. Завдання 5

Що легше і на скільки?

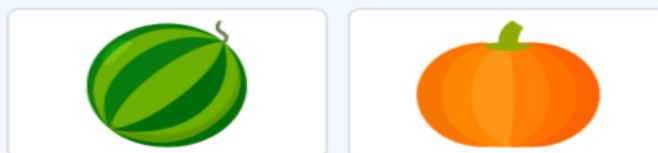


Рис. 7. Завдання 6

Обери правильний малюнок.



Рис. 8. Завдання 7

*Якщо прибрати з лівої чашки вагів гирю у 2 кг, то ваги будуть у рівновазі.
Знайти вагу кавуна.*



Рис. 9. Завдання 8

Червона коробка легша за зелену. Обери правильний малюнок.

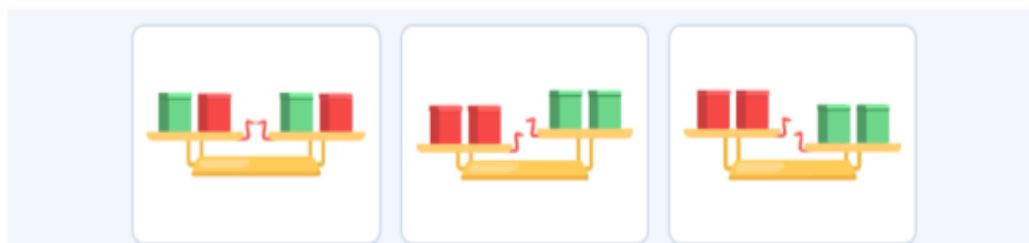


Рис. 10. Завдання 9

Найчастіше в якості об'єктів, які зважуються, використовуються монети.

Задача 1. Серед трьох монет одна фальшива (легша від двох інших, однакових за масою). За допомогою одного зважування на терезах без гир виділити фальшиву монету.

Розв'язання. Одну монету покладемо на шальку терезів, а другу – на іншу шальку. Якщо вони зрівноважилися, то третя монета – фальшива. Якщо не зрівноважилися, то фальшива монета лежить на тій шальці, яка піднялася догори.

Задача 2. Серед восьми монет одна фальшива (легша від інших, однакових за масою). За допомогою трьох зважувань на терезах без гир виділити фальшиву монету.

Розв'язання. Ділимо монети на рівні кучки – по 4 монети у кожній. Зважимо кучки. Ту кучку, яка легша, знову ділимо на дві однакові кучки – тепер по дві монети у кожній. Знову проводимо зважування. Визначасмо, яка з них легша. Одну монету покладемо на одну шальку терезів, а другу – на іншу шальку. Фальшива монета лежить на тій шальці, що піднялась догори. Задача розв'язана.

Задача 3 (класична головоломка).

Одна з 9 монет фальшива, вона важить легше справжньої. Як визначити фальшиву монету (ФМ) за 2 зважування?

Розв'язання. Ключова ідея розв'язання таких завдань – правильна трисекція, тобто послідовний поділ безлічі варіантів на три рівні частини. Після першої трисекції має залишитися не більше трьох підозрілих монет (ПМ), після другої – не більше однієї ПМ, якою і є ФМ.

Зважуємо монети 1, 2, 3 і 4, 5, 6, відклавши 7, 8, 9. Якщо 1, 2, 3 легше, то серед них ФМ; важче, то ФМ серед 4, 5, 6; якщо рівні, то ФМ серед 7, 8, 9.

Далі зважуємо першу і другу монети з купки, де є ФМ. Якщо ваги в рівновазі, то третя монета фальшива. Якщо не в рівновазі, то ФМ монета на тій шальці, яка легше.

Існує алгоритм для визначення ФМ за найменшу кількість зважувань у разі, якщо відомо, що ФМ важче або легше справжньої.

Узагальнення.

Задача 4. Нехай є n монет і одна з них – фальшива (n більше двох). Відомо, що вона легша справжньої. За яку найменшу кількість зважувань можна знайти ФМ?

Розв'язання.

1. Викладемо на шальці по $n:3$ монет, інші відкладемо.
2. Якщо кількість монет не кратно 3, то кладемо на шальці однакове число монет, рівне $(n-1):3$ або $(n+1):3$, у залежності від того, яке з них натуральне.
3. Далі, якщо одна з шальок переважила, то ФМ на іншій чаші, а у разі рівноваги – ФМ серед відкладених.
4. Далі повторюємо це для групи монет, серед яких знаходиться ФМ.
5. ФМ в умові може бути важче справжньої, у цьому випадку міркуємо також, тільки ФМ монета буде на тій чаші, яка переважила.

Учасникам експерименту було запропоновано домашнє завдання.

Розв'язати задачу: Є 10 мішків з золотом. В кожному по 10 монет. У дев'яти мішках монети справжні, а в одному – всі фальшиві. Одна справжня монета важить 5 грамів, а фальшива – 4 грами. Є ваги, що показують вагу в грамах. Необхідно за одне зважування точно визначити, в якому мішку фальшиві монети.

Під час проведення експерименту школярі демонстрували зацікавленість, «включеність» у процес розв'язання цікавих задач, спостерігався емоційний підйом.

Особливий інтерес викликали задачі, що пропонувались на слайдах у презентації, а також самостійне складання аналогічних задач, використовуючи різні предмети.

Для організатора даного заходу найважчим було розкриття ідейної сторони розв'язування задач на знаходження фальшивих монет, що можна пояснити віковими особливостями учасників експериментального заходу (5–6 клас).

Аналіз розробленого дослідження дозволяє відзначити, що проведення заходів у форматі математичного експерименту є ефективним для розвитку логічного мислення школярів. Учні познайомились із нестандартними методами розв'язування практичних задач, що збагатило їх новими ідеями та підходами.

Висновки. Проведене дослідження дозволяє надати методичні рекомендації щодо організації і проведення математичного експерименту на матеріалі шкільного курсу математики, що базуються на основних поняттях і принципах експериментальної математики.

З'ясовано, що при проведенні шкільного математичного експерименту слід дотримуватися таких порад:

- група учасників не повинна перевищувати 10 осіб;
- колектив учасників може бути тимчасовим (наприклад, група дітей літнього Табору Відпочинку);
- мета експерименту має бути визначеною як конкретна і реальна;
- завдання для учнів мають бути цікавими, посильними та адекватними віку;
- завдання теоретичного змісту обов'язково мають супроводжуватися практичними завданнями з маніпулюванням із предметами, використанням математичного обладнання тощо;
- необхідно забезпечити наочність, підготувати презентацію;
- завдання мають вирішуватись із емоційним підкріпленням;

- можливий музичний супровід тощо.

Список використаних джерел

1. Апостолова Г. В., Бакал О. П. Розв'язуємо задачі логічного характеру: навчальний посібник. Біла Церква : КОІПОПК, 2010. 160 с.
2. Басанько А. М., Романенко А. О. За лаштунками підручника з математики: збірник розвиваючих задач для учнів 5–7 класів. Тернопіль : Підручники і посібники, 2003. 128 с.
3. Буковська О. І. Математична логіка. 5–9 класи. Харків : Вид. група «Основа», 2005. 176 с.
4. Гуменюк О. Цікаві математичні задачі. Київ : Академія, 1998. 76 с.
5. Збірник з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єрміна: Вид-во «Ранок», 2011. 320 с.
6. Лоповок Л. М. Збірник математичних задач логічного характеру. Київ: Рад. Шк., 1972. 142 с.
7. Лудченко А. А., Лудченко Я. А., Примаков Т. А. Основы научных исследований. Учебное пособие / Под ред А. А. Лудченко. Київ : Общество „Знания”, 2001. 113 с.
8. *Математика в школах України*. 2008. № 14-15.
9. Математичні олімпіади школярів України, 2001–2006 рік / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. Львів : Каменяр, 2008. 384 с.
10. Матеріали Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру».
11. Поліщук О. Р., Зайчук О. Р. Математична логіка. 5–6 класи. Харків : Вид. група «Основа», 2007. 110 с.
12. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. Київ : Видавництво «А.С.К.», 2004. 344 с.
13. Тадєєв В. О. Неформальна математика. 6–9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2003. 288 с.
14. Шейко В. М., Кушнарєнко Н. М. Організація і методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. Київ., 2006. 307 с.
15. Харік О. Ю. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 5–7. Харків : Вид. група «Основа», 2008. 143 с.
16. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. 208 с.

7.2. МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ І ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ ШКОЛЯРІВ

Алла Тумбукакі

Вступ. Сучасні зміни у суспільстві вимагають від системи освіти підготовки учнів до швидкоплинних процесів у житті, вмінь систематизувати та аналізувати потік інформації, що повсякчасно поповнюється й успішно застосовувати отримані знання для вирішення завдань, які повсякденно постають перед людиною. На сучасному етапі створення єдиного освітнього інформаційного простору відбувається підвищення інтересу до проблеми формування критичного мислення особистості як важливого завдання системи освіти.

Виходячи з аналізу зарубіжних та українських досліджень, зазначимо пріоритетність формування критичного мислення в освіті багатьох країн світу на підставі особистісної й соціальної значущості даного феномену. Потенціал критичного мислення людини стає основою для забезпечення якості її життя, її життєвого успіху. Отже, критичне мислення

формує креативний підхід до практичного використання набутого знання в усіх галузях життєдіяльності, що готує людей до змін й активного творчого перетворення дійсності.

Огляд останніх публікацій за темою. Зародження ідеї розвитку критичного мислення пов'язують із ім'ям американського філософа, психолога та педагога Дж. Дьюї. Найбільш відомими розробниками теорії критичного мислення є М. Ліпман, Р. Пауль, Е. Глассер, Д. Клустер, Д. Халперн. Їх наукові підходи достатньо відомі в освітньому просторі. Також важливими у висвітленні вказаної проблеми є праці Н. Дауда, З. Хусіна, Ф. Станкато, Ч.-К. Ченга, П. Х'юстона, Д. Мошмана, П. Пінтрича, Б. Такмана, що зробили значний внесок в опрацювання проблем розумового розвитку. Зрозуміло, що проблема формування критичного мислення в умовах відкритого освітнього середовища розглядається досить різнопланово, сучасні дослідження відкривають нові сторони проблеми.

Мета дослідження: розробити методичні рекомендації щодо організації і проведення математичного експерименту (на матеріалі шкільного курсу математики), спрямованого на реалізацію шляхів формування критичного мислення здобувачів середньої освіти.

Виклад основного матеріалу. Визначивши критичне мислення як «активний» процес, Д. Дьюї протиставляв його «пасивному» мисленню, в якому людина просто отримує ідеї та інформацію ззовні. Для Д. Дьюї та інших дослідників сутність критичного мислення полягає у тому, що воно є «активним» процесом, який передбачає у навчанні самостійність у постановці проблем, знаходження відповідної інформації тощо.

Наприкінці минулого століття визначення критичного мислення змінювалося. Серед моделей і технологій формування критичного мислення, на нашу думку, слід відзначити підхід Дженні Д. Стіл, Курт С. Мередіт, Чарльз Темпл й Уолтер Скотт, за яким мислити критично означає проявляти допитливість, використовувати дослідницькі методи, зокрема, ставити перед собою питання та здійснювати планомірний пошук відповідей. Суттєвими є зауваження Д. Клустера [1], який визначив критичне мислення як «соціальне», «індивідуальне», «самостійне». Крім того, інформація є відправним, а не кінцевим пунктом критичного мислення; щоб породити складну думку, потрібно розглянути певну кількість даних, текстів, фактів, ідей. Критичне мислення починається із постановки питань і з'ясування проблем, які потрібно вирішити. Отже, людина, що мислить критично, прагне до переконливої аргументації щодо обраного нею власного вирішення проблеми як найбільш логічного й раціонального серед інших можливих. Д. Дьюї визначив критичне мислення як «рефлексивне», що звертається до процесу міркування і його перевірки, як свідомого пошуку недоліків та суперечностей, К. Поппер – «раціональне», Д. Джонсон – «здорове», Р. Пол – «ясне», «точне», «акуратне», «конкретне», «глибоке», «неупереджене». С. Брукфілд характеризував критичне мислення як «раціональне», «емоційне», «скептичне» та водночас «позитивне», «продуктивне», «активне». Акцентуючи багатовимірність у застосуванні критичного мислення, Р. Пол і Л. Елдер визначили критичне мислення як спосіб мислення про будь-який предмет, зміст чи проблему, в яких мислитель покращує якість свого мислення, свідомо визнаючи власну відповідальність за структури, що властиві мисленню, і за нав'язані інтелектуальні стандарти. Цілком природним є той факт, що за останнє десятиріччя проблема формування критичного мислення набула певного розвитку внаслідок синтезу моделей і технологій проблемного та розвиваючого навчання, широкого доступу та інтеграції інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні. Отже, можна констатувати наявність характеристик критичного мислення, які розроблено кількома науковими школами із

досліджень питань розвитку критичного мислення. Надамо кілька відповідних визначень критичного мислення [4]:

- підхід до мислення, за якого особливу увагу приділено вмінню сформулювати самостійні твердження або думки і підкріпити їх аргументами (учні виявляють своє вміння критично мислити, коли вони в усній або письмовій формах роблять інтерпретації і підкріплюють це своїми аргументами; учні використовують критичне мислення рецептивно, коли вони аналізують / критикують аргументи інших людей;
- самокероване, самодисципліноване мислення, що прагне до міркувань на найвищому рівні та відкритості;
- саморегульоване, самоконтрольоване й самокореговане мислення (воно вимагає самодисципліни, щоб ставити під сумнів нову інформацію та постійно аналізувати результати).

Отже, *критичне мислення* можна визначити як окремий тип мислення, який характеризується активністю, цілеспрямованістю, самостійністю, дисциплінованістю та рефлексивністю і передбачає розвиток у процесі навчання такі здатності людини, як-от: визначати проблеми, аналізувати, синтезувати, оцінювати інформацію із будь-яких джерел, висувати альтернативи й оцінювати їх, обирати спосіб розв'язання проблеми чи власну позицію щодо неї й обґрунтовувати свої погляди, робити свідомий вибір і діяти [4].

Аналіз досвіду формування критичного мислення у процесі навчання, зокрема математики, дозволяє стверджувати, що ефективність цього процесу прямопропорційно пов'язана із створенням відповідної атмосфери, спеціального навчального середовища. Задля успішної реалізації такого підходу у навчанні важливо підготувати учнів до активної участі у процесі навчання; висловлення власних суджень з приводу навчальних предметів, критично ставитись до власних здобутків, а також, навчальних результатів однокласників. Таким чином, навчання спрямоване на міркування та обговорення актуальних проблем, а також на висловлення та обґрунтування конкретних шляхів щодо їх вирішення. При цьому в учнів активно формуються вміння щодо висування логічних доводів та аргументів, навички формулювати свої переконання, брати участь у конструктивному діалозі з метою доведення власних переконань, а також об'єднуватися задля вирішення спільних проблем із застосуванням власного досвіду.

Для реалізації зазначеної вище моделі, враховуючи особливості критичного мислення, на думку педагогів та дослідників слід дотримуватись таких принципів:

- ✓ активності та зворотного зв'язку (тобто, організація активної взаємодії на основі відкритого й аргументованого обговорення питань і проблем, що дозволить виражати й відображати інтереси та позиції усіх учасників);
- ✓ рівноправності позицій (визнається цінність досвіду кожного учасника колективної діяльності);
- ✓ довірливості у спілкуванні та намагання розуміти свого співбесідника (забезпечується створення та підтримка атмосфери максимальної психологічної довіри);
- ✓ особистої відповідальності (кожний учасник має усвідомлювати відповідальність за власні дії та думки, їх достовірність і наукову обґрунтованість та якомога уважно і толерантно ставитися до інших).

Отже, вчитель при такому формуванні освітнього середовища має можливість впливати на спрямованість учнів на саморозвиток, їхню підготовку до активної ролі у навчанні та розвиток рефлексивних здібностей учнів. Із боку викладача для успішної реалізації вказаної

моделі необхідним є вміння поєднувати інноваційні технології свідомого навчання учнів, яке передбачає вміння міркувати відносно доцільності застосування нових підходів та ідей щодо опрацювання власних переконань.

Слід зазначити, що головні завдання цього підходу полягають у тому, щоб під час навчання виробляти та відстоювати незалежні позиції, знаходити й аналізувати інформацію, опановувати й аналізувати аргументацію, ефективно розв'язувати проблеми, займатися самоаналізом. Досвід організації зазначеного підходу дає можливість виокремити такі етапи:

- підготовка;
- постановка проблеми;
- дослідження;
- рефлексія.

Головною метою етапу підготовки є організація середовища психологічного комфорту, сприятливого для навчання, налагодження довірливих міжособистісних контактів серед учасників, що сприятиме підвищенню їхньої мотивації щодо відкритого спільного обговорення, активізації розумової діяльності.

Окреслення кола проблемних питань має відображати важливі аспекти власних поглядів. На цьому етапі доцільно використовувати такі техніки: запитання, що фокусують увагу, прогнози, припущення, передбачення, мозкова атака, гіпотези.

Дослідницький етап дає можливість усвідомити значущість критичного підходу. Він спрямований на опанування засобів проведення дослідження, виявлення власних засобів реалізації активності, що стимулює формування мислення та планування змін. За таких умов актуалізуються рефлексивні процеси. На цьому етапі доцільно використовувати такі засоби й техніки: пошук аргументів, круглий стіл, дебати, дискусія, підготовка та реалізація проєктів, дидактичні ігри.

Етап рефлексії є необхідним для інтерпретації результатів розв'язання проблемної ситуації, осмислення безпосередньо самого процесу виконання діяльності та розуміння досягнутого рівня.

Отже, зважаючи на вищесказане, серед мисленнєвих операцій, умінь, стратегій, які застосовують критичні мислителі, вчені називають здатність людини: бачити проблеми, аналізувати факти, порівнювати, робити висновки, генерувати та організовувати ідеї, оцінювати, формулювати інтерпретації й обґрунтовані судження, за допомогою яких захищати думку, розв'язувати проблеми, ухвалювати рішення. Внаслідок цього, учителю необхідно більше уваги приділяти розвитку мислення учнів, формуванню їхньої розумової діяльності. У процесі пізнання законів природи вчений-математик користується особливими математичними засобами, науковими методами дослідження (методами наукового пізнання). У процесі навчання учні також почувають себе першовідкривателями математичних істин, і тому наукові методи математичного дослідження у той же час слугують і методами розумової діяльності учнів [2]. Завдання вчителя при організації кожного виду навчально-пізнавальної діяльності – прямо чи опосередковано формувати в учнів прийоми розумової діяльності; тільки вони можуть стати для учнів реальним інструментом самостійного пізнання.

Розумові дії класифікуються за різними основами. Якщо розглядати розумові прийоми за ступенем використання їх у різних галузях людської діяльності, то можна виділити: а) загальні і б) специфічні розумові дії. Перші – застосовуються у всіх галузях знань, другі – для тієї чи іншої галузі знань.

Загальні або узагальнені методи і прийоми розумової діяльності поділяються на дві великі групи – алгоритмічного та евристичного типів. Перші – це прийоми правильного мислення, що відповідають законам формальної логіки. Проте, формування прийомів розумової діяльності алгоритмічного типу – необхідна, але не достатня умова розвитку мислення, що сприяє вдосконаленню репродуктивного мислення і є важливим компонентом творчої діяльності. Крім того, алгоритмічні прийоми – фонд знань, на основі яких учень може вирішувати нові для нього задачі, оволодівати більш складними прийомами розумової діяльності. Водночас, алгоритмічна діяльність не вичерпує творчого мислення.

До евристичних прийомів відносять: порівняння, аналогію, узагальнення, конкретизацію, абстрагування та інші. Вони стимулюють пошук розв’язання нових проблем, спрямовують думки учня всередину змісту.

Критичне мислення є складною діяльністю, й хоча можна навчати критичного мислення та його компонентам як окремого предмету, вони формуються та використовуються найкраще у зв’язку з конкретною сферою знань. Продемонструємо його формування на прикладі вивчення окремих тем курсу шкільної математики. Слід зазначити, що якщо учні не будуть використовувати набуті вміння та навички на уроках із різних предметів, зокрема математики, то вони просто зникнуть з часом. Тому важливо запроваджувати навчання критичного мислення на уроках якомога частіше, щоб учні мали можливість тренувати його та відповідно оцінювали себе. Особливо важливим є те, що критичне мислення найкраще формується тоді, коли учні працюють із певним змістом, який розкривається, наприклад, при вивченні конкретних тем шкільного курсу математики.

У процесі співпраці з Одеським приватним ліцеєм «Мрія» нами було проведено тематичні заняття «Математичний експеримент із частинами цілого», спрямовані на розвиток критичного мислення учнів, які відпочивали у шкільному літньому Таборі Відпочинку. Метою цих занять було:

- формування поняття дробу, ділення цілого на пропорційні частини;
- відкриття нових моделей і зв’язків;
- формування вмінь висувати гіпотези;
- перевірка отриманих результатів;
- реалізація прикладної спрямованості навчання математики;
- підвищення мотивації до вивчення предмета.

Групи, в яких проводилися ці заняття, відвідували діти 10–11 років. Зважаючи на різну математичну підготовку, яка була обумовлена як віком, так і успішністю з математики завдання, запропоновані на початку заняття, були посильними кожному. Поступово складність завдань підвищувалася, проте, підготовлені ілюстрації, роздаткові матеріали та коментарі ведучого спрощували процес роботи над завданнями.

Завдання було представлено на слайдах.

Експерименти з частинами цілого



На якому рисунку зафарбована третина круга?

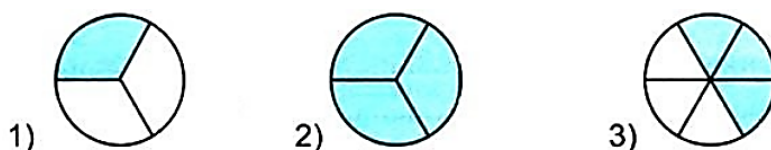


Рис. 1. Завдання 1

На якому рисунку зафарбована $\frac{1}{4}$ квадрата?

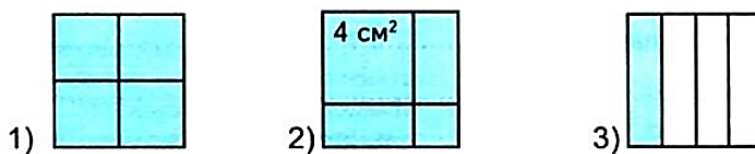


Рис. 2. Завдання 2

Яка частина фігури зафарбована у червоний колір? В зелений колір? В жовтий колір?



Рис. 3. Завдання 3

Коментар. Завдання 1–3 не складні і дають змогу згадати поняття дробу. При цьому до бесіди залучаються всі діти, створюються ситуації успіху, що налаштовує на успішне виконання наступних завдань.

Завдання 4. Від мотузки відрізали шосту частину. Що це означає?

- 1) Від мотузки відрізали 6 однакових частин.
- 2) Мотузку розділили на 6 рівних частин та відрізали одну частину.
- 3) Від мотузки відрізали 6 м.

Коментар. Завдання 4 є підготовчим до практичного завдання 5.

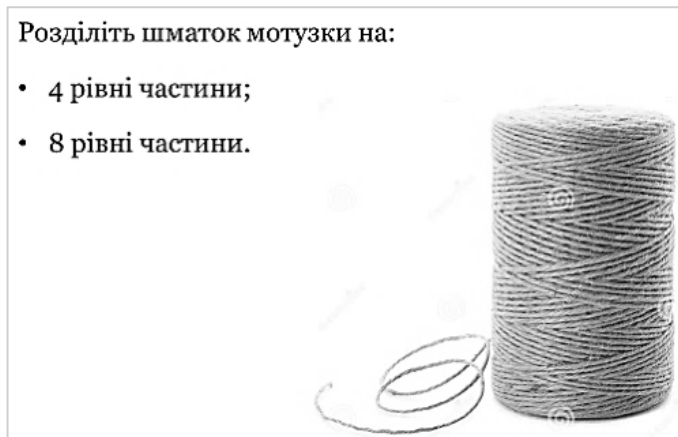


Рис. 4. Завдання 5

Коментар. У рамках завдання 5 спочатку знаходилась $\frac{1}{4}$ та $\frac{1}{8}$ частини цілого, що дало змогу порівнювати дроби з однаковими чисельниками. Потім, ціла частина змінювалась (це дало змогу зробити висновок, що від величини цілого змінюється величина однієї частини з чотирьох (восьми)). У кожної дитини були мотузки певної довжини, від якої вони відрізали $\frac{1}{4}$ та $\frac{1}{8}$, а потім порівнювали отримані частини.

Півмішка цукру важить 20 кг. Скільки важить повний мішок?



Рис. 5. Завдання 6

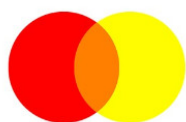
Третина бруска масла важить 500 г. Скільки важить цілий брусок?



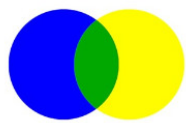
Рис. 6. Завдання 7

Коментар. Завдання 6–7 спрямовані на знаходження цілого за його частиною. Ілюстрації значно спрощують розв’язування завдань.

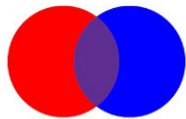
Для реалізації завдання 8 ознайомлюємо дітей з базовими кольорами, якими є: червоний, жовтий та синій. Комбінуючи ці кольори можна отримати помаранчевий, зелений та фіолетовий, а також їх різноманітні відтінки. У таблицях представлено співвідношення кольорів для отримання потрібного кольору або відтінку (рис. 7). Базові кольорові рідини було підготовлено із використанням харчових барвників на водній основі.



ЧЕРВОНИЙ + ЖОВТИЙ = ПОМАРАНЧЕВИЙ



ЖОВТИЙ + СИНІЙ = ЗЕЛЕНИЙ



СИНІЙ + ЧЕРВОНИЙ = ФІОЛЕТОВИЙ

Комбінація	Частини	Отриманий відтінок	
Червоний + жовтий	1:1	Помаранчевий	←
Червоний + жовтий + фіолетовий	2:2:1	Теракотовий	←
Червоний + жовтий + чорний	2:2:1	Темно-помаранчевий	←

Комбінація	Частини	Отриманий відтінок	
Синій + жовтий	1:1	Трав'янистий	←
Синій + жовтий + білий	2:2:1	Світло-зелений	←
Синій + жовтий + чорний	2:2:1	Темно-зелений	←

Комбінація	Частини	Отриманий відтінок	
Червоний + синій	1:1	Базовий фіолетовий	←
Базовий фіолетовий + білий	1:1	Бузковий, лавандовий	←
Базовий фіолетовий + чорний	2:1	Темно-фіолетовий	←
Червоний + жовтий + синій	2:1:2	Пурпуровий	←

Рис. 7. Комбінації кольорів

Коментар. Завдання 8 має на меті формування в учнів вміння ділити ціле на частини, пропорційні вказаним числам, а потім відтворювати кольорову рідину у відповідності з даними таблиць.

В якості мірки ведучим було приготовлено пластикові склянки різної місткості (25 мл, 50 мл, 100 мл). На прикладі отримання помаранчевого кольору із використанням мірок різної місткості впевнюємося, що колір у кожному випадку отримаємо однаковий. На наступному

етапі, комбінуючи у різних співвідношеннях червоний із жовтим та фіолетовим, отримаємо теракотовий. Різницю отриманих відтінків демонструємо за допомогою білих серветок, які занурюємо у рідини у різних склянках.

Отримання з базових кольорів відтінків зеленого та фіолетового відбувається за такою ж схемою.

Наступне проблемне завдання 9, що вельми зацікавило учнів – приготувати фруктовий коктейль за поданим рецептом (рис. 8).

Фруктовий коктейль

- Яблучний сік – 3 л
- Вишневий сік – 2 л
- Сік чорної смородини – 1 л



Рис. 8. Рецепт коктейлю

Було поставлено *задачу*: приготувати коктейль із заданими смаковими якостями (зразок оригіналу готувався заздалегідь). Для коктейлю в учнів було три літри соку (по 1 л кожного). Проблема, поставлена перед учнями, передбачала обговорення різних гіпотез задля її вирішення. Наприклад, обговорювалось питання про те, що рецепт розрахований на 6 л коктейлю, а у наявності – лише 3 л. Шляхом висловлення різних припущень та міркувань, учні сформулювали думку про те, що міркою для складових коктейлю може бути не тільки літрова ємність, а й будь-яка ємність, що буде однаковою для всіх видів соку. Результатом вирішення поставленої проблеми був фруктовий коктейль, смакові якості якого було порівняно з оригіналом незалежним спостерігачем (вихователем групи учнів). Виготовлений напій наприкінці заняття із задоволенням скуштували всі учасники; відтак, заняття було завершено на позитивній емоційній ноті.

Аналізуючи проведене заняття, було з'ясовано, що проведення шкільного математичного експерименту передбачає дотримання таких умов:

- 1) група учасників не повинна перевищувати 10 осіб;
- 2) колектив учасників може бути тимчасовим (наприклад, група дітей літнього Табору відпочинку);
- 3) мета експерименту має бути чітко сформульованою;
- 4) завдання для учнів мають бути цікавими, посильними та адекватними віку;
- 5) завдання теоретичного змісту обов'язково мають супроводжуватися практичними завданнями з маніпулюванням із предметами, використанням математичного обладнання тощо;
- 6) необхідно забезпечувати наочність, роздатковий матеріал, підготувати презентацію;
- 7) завдання мають вирішуватись із емоційним підкріпленням, яке створює відповідний психологічний клімат.

Аналізуючи розглянуті теоретичні положення, практичний досвід науковців та власні спостереження під час проведення експерименту, можна сформулювати кілька порад учителям щодо *формування критичного мислення в учнів на уроках математики*. Вчитель має починати з перебудови навчальних груп, з метою визначення готовності до описаного підходу

до навчання. Групи можуть бути сформовані як з учнів, цілком орієнтованих на критичний погляд на проблему, так і змішаного типу (аналізуючи досвід проведення математичного експерименту у літньому Таборі Відпочинку, де група учнів була різнорідною за вмотивованістю до навчання математики та загальною математичною підготовкою, можна стверджувати, що робота в таких групах є також ефективною щодо формування компонентів критичного мислення). У таких групах стимулюється вільна та водночас відповідальна атмосфера, обговорюються помилки, проблемні ситуації, протилежні позиції, відшукуються шляхи їх подолання. Для формування критичного мислення учнів необхідно використовувати можливості модернізації освітнього процесу через впровадження цифрових технологій в освіту. Також, виникає необхідність удосконалення та організації ефективних програм навчання та дослідження якості навчального процесу.

У зв'язку з вищезазначеним, доречними будуть рекомендації щодо організації відповідного навчального середовища [1]:

- стимулювання учнів до висловлювання, використання різних засобів для виконання завдань, зокрема із залученням ІКТ, без будь-якого остраху помилитися чи отримати неправильну відповідь тощо;
- використання такого дидактичного матеріалу, що провокує допитливість учнів, спонукає до роздумів, сприяє діалогу, розмаїттю трактувань, яке може обиратися за власним бажанням у відповідності з розумінням його значущості;
- заохочування учнів до вибору різних способів роботи та самостійного використання, аналізу й засвоєння найбільш раціональних із них;
- оцінювання (самооцінювання та взаємооцінювання) відповіді та результатів діяльності учнів, а також аналіз міркувань, навчального процесу (досліджень, дискусій), навчальних досягнень тощо.

Висновки. Підводячи підсумки, зауважимо, що ефективний розвиток критичного мислення може бути забезпечений за умови включення у процес навчання розв'язання реальних проблем і прийняття учнями самостійних рішень у різноманітних ситуаціях. Адже у сучасному, швидко мінливому просторі великою цінністю є здатність розв'язувати реальні проблеми й ухвалювати оптимальні розв'язки, а не лише демонструвати набутий набір умінь і навичок.

Зазначимо, що особливої уваги в організаційно-методичному забезпеченні курсу, спрямованого на формування критичного мислення заслуговують дискусійні форми роботи, зокрема дебати, обговорення, круглі столи, особливості їх організації для продуктивного обміну думками і компромісного вирішення проблем. Водночас, теорія і практика проведеного дослідження доводить важливість навичок постановки питань та аргументації, що обумовлюють здатність уточнювати власні переконання, формувати самостійну позицію, краще розуміти думки інших і, як наслідок, формувати власний критичний погляд на світ. Отже, формування критичного мислення учнів у процесі формування практичної математичної компетентності є ефективнішим за умови створення атмосфери допитливості та пріоритетів дослідницької роботи, можливості оцінювати вартість запропонованих засобів задля задоволення власних потреб і цілей, самостійно застосовувати їх до реальних життєвих задач, проблем, ситуацій.

У результаті такого підходу сучасні школярі готуються до критичного сприйняття їхнього оточення, вміння формулювати проблему, формувати ставлення до неї, а також обмірковувати шляхи її вирішення.

Список використаних джерел

1. Лобашев В. Д. Структурный подход к моделированию ведущих элементов процесса обучения. *Инновации в образовании*. 2006. № 3. С. 99–111.
2. Недялкова К. В. Загальна методика навчання математики: практичний курс. Навчальний посібник. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.
3. Практикум по развитию критического мышления / В. И. Евдокимов, Т. А. Олейник, С. А. Горькова, М. А. Микитюк. Харьков : Торнадо, 2002. 134 с.
4. Пометун О. І. Критичне мислення як педагогічний феномен. *Український педагогічний журнал*. 2018. № 2. С. 89–98.
5. Теорія та практика змішаного навчання : монографія / В. М. Кухаренко, С. М. Березенська, К. Л. Бугайчук, Н. Ю. Олійник, Т. О. Олійник, О. В. Рибалко, Н. Г. Сиротенко, А. Л. Столяревська; за ред. В. М. Кухаренка. Харків : «Міськдрук», НТУ «ХП», 2016. 284 с.

7.3. МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ І ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З РОЗВИТКУ ПРОСТОРОВОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ

Анастасія Іщенко

Вступ. Професіоналізм педагога, його вміння підбирати доцільні методи і засоби в процесі навчання сучасних дітей – стратегічний потенціал освіти. Навчання як інноваційний

процес має бути випереджаючим, який прокладає шлях у майбутнє, в якому контроль змінюється довірою, творчістю, залученістю, адже сучасному поколінню школярів необхідно реалізовувати нові принципи, способи і форми освоєння світу. Розвиток науки і техніки ставить перед нами нові питання і завдання, вимагає появи нових професій. Згідно Атласу нових професій, незабаром з'явиться більше 160 різних професій у 19 сферах, і в більшості з них для успішного навчання і професійній реалізації необхідно володіти розвиненим просторовим мисленням [2].

Огляд останніх публікацій за темою. Питання, пов'язані зі специфікою формування інтелектуальних операцій, розвитку мислення дітей активно досліджувалися багатьма вітчизняними та зарубіжними авторами. У педагогічній літературі не перший рік існують різні методики розвитку просторового мислення (наприклад, З. В. Кирилової); запропоновані спеціальні контрольні тести (В. Г. Зархін, Х.-М. Х. Кадаяс, А. Пардала, А. Е. Симановский); виявлена система показників просторового мислення (З. І. Калмикова, І. Л. Каплунович, І. С. Якиманська); методично розроблена діагностика розвитку мислення школярів (Г. Берулава, З. І. Калмикова, С. Л. Рубінштейн) і їх просторових уявлень (М. М. Зепнова, Е. А. Мерзон, М. М. Поддьяков); створені системи рівнів розвитку просторового мислення (Г. Д. Глейзер, Н. Д. Мацько, І. С. Якиманська). Сучасні дослідження філософських (Д. Є. Скворцов), психологічних (А. В. Малінкін) та нейропсихологічних (Н. К. Корсакова та Л. І. Московічюте) аспектів формування, особливостей формування наочно-образного мислення дають можливість з іншого боку розглядати і вивчати можливості контролю розвитку просторового мислення учнів. Під іншим кутом на розвиток мислення, сприйняття навколишнього технологічного світу, який стрімко наближується до штучного інтелекту, використовує нанотехнології, надає альтернативних пояснень для багатьох явищ, дивляться автори і послідовники теорії поколінь (Нейл Хоув, Вільям Штраус, Марк МакКріндл, Е. Шамис, А. Антипов). Актуальними є й дослідження підготовки сучасного вчителя до впровадження технологій формування і розвитку просторового мислення школярів (А. В. Василенко, С. Б. Верченко, А. Пардала, Н. С. Подходова, М. А. Федотова, А. Я. Цукарь).

Мета дослідження: проаналізувати методичні особливості організації і проведення математичного експерименту для здобувачів середньої освіти, спрямованого на розвиток логічного мислення учнів і формування практичної математичної компетентності.

Виклад основного матеріалу. Одна з форм пізнання оточуючої дійсності, що найбільш активно розвивається – моделювання процесів, які можуть статися, тобто випереджувальне моделювання у різних його формах, особливо за допомогою нових інформаційних технологій. Очевидно, що необхідно організовувати процес навчання так, щоб можна було розвивати природну здатність людського розуму включати всю інформацію у певний контекст і цілісність. Люди різних поколінь у таких умовах діють і ведуть себе по-різному, це різноманіття відображено у так званій теорії поколінь. Отже, виходячи з цієї теорії, слід коригувати методологію освіти і виховання.

Теорія поколінь розглядалася американськими вченими Нейлом Хоувом і Вільямом Штраусом (1991). Автори наводять таку класифікацію: «мовчазне» покоління (1923–1943 роки народження), покоління «бебібумерів» (1943–1963 роки народження), покоління X (1963–1983 роки народження), покоління Y (1983–2000 роки народження), покоління Z (2000–2020 роки народження). В останньому було виділено ще і покоління «альфа», появу якого (з 2010 року) обґрунтовують темпом зростання сучасних технологій (термін, запропонований австралійським ученим Марком МакКріндлом (2015)). Люди різних поколінь

поводяться по-різному, зазначають автори. Наприклад, у покоління Z висока толерантність, вони відкриті великій кількості інформації. Вважається, що люди покоління Y егоїстичні, несерйозні, які не відриваються від смартфонів і не вміють концентруватися, вони вирости з інтернетом, придумали слова Селфі і Snapchat, тривалий час живуть з батьками і взагалі нібито цураються дорослішання. Часові межі поколінь, безумовно, відносні.

Мілленіалів, або покоління Y, підозрюють у манії величі. «Ікси» здатні навіть монотонну роботу доводити до кінця, вони більш консервативні, пускаються в авантюри, запускають стартапи на перервах і не бояться висловлювати свої думки, хто за свободу, а хто заради хайпу. А «Альфа» – покоління, яке піклується про свободу вибору і персоналізацію всього на світі, оскільки вони не бачили іншої реальності.

У сучасних дітей часто виявляються проблеми із утриманням концентрації. Текст поступається місцем картинкам і інфографіці, що пов'язують з необхідністю справлятися з великою кількістю інформації, яка перероблюється за день. Сьогодні ми навчаємо дітей нового покоління, і теорію поколінь, безсумнівно, не слід ігнорувати. Наскільки актуальна для школярів заміна текстового подання інформації на образну, графічну? Наскільки якісним є сприйняття образів, який рівень образного та просторового мислення у них? Цей напрямок і став предметом нашого дослідження [18].

Зазначені питання досліджуються у різних науках і їх розділах: філософії, психології, нейропсихології тощо. З точки зору філософії, образне мислення – один з найважливіших засобів для наповнення людської свідомості образами, необхідними для протікання процесу людського пізнання, відмічає Д. Є. Скворцов [11]. Образне мислення, на його думку, – це активний процес синтезу понять і образів, обумовлений зв'язком абстрактного мислення і чуттєвого досвіду в свідомості людини, і необхідністю опори на метафоричний спосіб об'єктивації результатів пізнання, що витікає з цього. Автор також висвітлює властивості цього виду мислення. Перша – рухливість. Образне мислення акцентовано у більшій мірі не на об'єктах, а на процесах формування об'єктів, воно фіксує зміни в їх минулих формах. Другою властивістю він вважає спрямованість, що має джерелом волю. Образне мислення має якість спрямованості не тільки до істини, але і до перемоги в суперечці, встановлення контролю над тим, хто говорить, переконання за допомогою риторичних, а не логічних засобів, або відмови від своєї позиції на користь більш переконливої думки іншого. Третя риса образного мислення – здатність оперувати досвідом минулого, фіксувати зміни у сьогоденні і передбачати досвід майбутнього. Час представлено у мисленні у всій його повноті, і це означає, що судження, які виробляє мислення несуть у собі властивість деякої абсолютності. Поняття образного мислення, зазначає автор у своєму дослідженні, спирається на розуміння образу як інструменту думки. Образ є актом синтезу різних предметів за допомогою чуттєвих даних, це свого роду рухоме «розміщення» будь-якого предмета пам'яті у відповідне йому середовищі. Образ включає у себе річ та її «фон», тобто кілька пов'язаних об'єктів. У цій пов'язаності криється проблема істинності образу. Образи, які виникають у пізнанні можуть виявитися помилковими, тобто продуктами вільної гри фантазії, вільних зв'язків. Контроль образів необхідно здійснювати, тому що людина все ж потребує метафор і аналогій, щоб перейти від світу становлення до світу суцього, від чуттєвого досвіду до умогляду істини.

Порушення екології мислення призводить до сплутаності, нав'язливих станів, зупинці думки, іноді й до самозаборони мислити, травматичним емоційним станам, афектам, вказує Скворцов Д. Є. Образ може стати фікцією для процесу пізнання, однак для збереження культурної та особистої ідентичності він важливий як засіб. Образне мислення більш природне

для свідомості, ніж абстрактне, яке вимагає практики і дисципліни. Аналіз пари схема-образ народжує гіпотезу, пов'язану з проблемою розуміння. Ця гіпотеза, на думку вченого, полягає у твердженні, що розуміння виникає як результат послідовного впливу на свідомість двох одиниць мислення: схеми і образу. Відповідно, мова йде про два способи розуміння – схематичне й образне [11].

Відомо, що людина живе і діє в умовах просторово організованого зовнішнього і внутрішнього середовища. Відображення цієї властивості – просторової організації світу – необхідно для багатьох видів діяльності (оцінка відстані, здійснення рухів, рішення конструктивних завдань, розуміння розрядної будови чисел, оцінка просторових розпізнавальних ознак букв, уявлення про схему власного тіла і т.п.). З нейропсихологічних досліджень, відмічають Н. К. Корсакова та Л. І. Московічюте [8], відомо також, що при ураженні скронево-тім'яно-потиличної області порушується можливість оперування із просторово орієнтованими об'єктами. На цій підставі можна висловлювати судження, що ця зона забезпечує у психічній діяльності фактор просторового і квазіпросторового аналізу і синтезу. Тому у наочно-розумової діяльності, моделлю якої є аналіз змісту сюжетної картинки, спостерігаються певні труднощі. Із загального «поля» картинки хворий імпульсивно вихоплює якусь деталь і надалі висловлює припущення про зміст картинки, не проводячи зіставлення деталей один із одним і не здійснюючи корекції свого припущення відповідно до змісту картинки [8, с. 26]. Порушення цілісності оцінки ситуації, звуження обсягу, фрагментарність – характерні для правопівкульних дисфункцій раніше описаних мозкових зон – у повній мірі проявляються і при лобовій локалізації патологічного процесу.

Цей аспект важливості оцінки рівнів образного та просторового мислення у дітей та можливостей їх розвитку ще раз підкреслює актуальність та важливість обраної теми дослідження.

В області психологічної науки, відмічає А. В. Малінкін, одним із найбільш актуальних наразі питань досі є питання специфіки формування інтелектуальних операцій у процесі розвитку мислення людини. Обумовлюється це, перш за все: необхідністю більш глибокого вивчення принципів розвитку інтелектуальних здібностей особистості [7]; важливістю дослідження умов, які визначають успішність оволодіння інтелектуальними операціями (з якого віку навчати, на якому матеріалі, в якій послідовності тощо); а також недостатньою науковою розробленістю питання і, відповідно, визнанням необхідності комплексного аналізу.

Отже, рівень розвитку наочного мислення може служити одним із показників психологічної готовності дитини до навчання у школі. Виявлені рівень і особливості розвитку цього виду мислення можуть стати підставою для постановки корекційно-розвивальних завдань при розробці програми, спрямованої на формування у дитини передумов до успішного навчання у школі.

Специфіка формування інтелектуальних операцій тісно пов'язана з віковою періодизацією розвитку мислення людини, однак вона не має чітких меж, оскільки підпорядковується «закону нерівномірного і гетерохронного розвитку». Також слід зазначити, що розкривається специфіка інтелектуальних операцій за рахунок реалізації цілого ряду психологічних компонентів: навчання, розвитку, контролю і т.д., зазначає дослідниця. Ще відомий швейцарський психолог і філософ Ж. Піаже, відзначав, що інтелектуальні операції можуть бути сформовані за умови наявності внутрішнього плану. При цьому лише розумові дії можуть бути перебудовані: тільки у розумі можливе подання процесу, який здатний одночасно включати у себе як прямі, так і зворотні дії. Він увів певну періодизацію

інтелектуального розвитку дитини. Розглянемо деякі з них. Період оволодіння навичками мисленевих уявлень, уявного маніпулювання з обмеженим набором ідей, засвоєння соціальних норм поведінки і т.д. (від 2-х років до 7-ми років); період розвитку навичок розумових операцій, появи передумов абстрактного мислення, формування моральної відповідальності (від 7-ми до 11-ти років); період розвитку здібностей до оперування абстрактними поняттями, розуміння сутності явищ, розвитку понятійного мислення і т.д. (з 11-ти років до 17-ти років). А. В. Малінкін додає, що розвиток мислення людини також базується на подвійній детермінації: природній і соціальній. Дана точка зору передбачає, що пізнавальні здібності людини необхідно розглядати у рамках певних розумових процесів [7], які здійснюються за рахунок інтелектуальних операцій. При порушеннях психічного розвитку, коли має місце інтелектуальне зниження різного ступеня, і наочне мислення, і рівень володіння інтелектуальними діями на основі його форм – наочно-дієвого і наочно-образного – можуть служити показником розумового розвитку дитини і передумовою для його успішного навчання у школі.

Необхідність розвитку просторового мислення учнів у шкільній математичній освіті знайшла своє відображення у різні часи у дослідженнях Б. Г. Ананьєва, А. Н. Леонтьєва, І. Я. Лернера, Б. Ф. Ломова, Р. С. Немова та ін., де описані механізми і види психічних процесів, пов'язаних із розвитком просторового мислення. У науково-методичних дослідженнях А. Д. Александрова, Г. Д. Глейзера, Н. Ф. Четверухина, І. С. Якиманської та ін. розглядалися різні підходи до вирішення цієї проблеми у процесі навчання геометрії. Просторове мислення, на думку І. С. Якиманської, – це специфічний різновид образного мислення, основу якої складають геометричні образи. Основна функція просторового мислення – «оперувати образами у математичному (абстрактному, умовно-схематичному) просторі» [4].

До того ж, просторове мислення є базою, на якій будується велика частина навчальної та трудової діяльності. На даний момент формування просторового мислення у дітей в більшості випадків пущено на самоплив – частково цим займаються батьки у дошкільний період, частково – на уроках математики і геометрії у школі. В основному ці заняття спрямовані на молодших школярів і не є в достатній мірі наочними. Завдання залишаються в основному задачами у підручниках і мало переносяться на оточуючий світ. І вчителю доводиться компенсувати недоліки підручника своєю власною діяльністю, додаючи, де потрібно, відповідний матеріал, вправи, демонструючи ті чи інші погляди на предмет, аргументи та ін.

Безумовно, наше дослідження не є винятковим у вивченні проблем розвитку просторового мислення. Як ми зазначали, останнім часом приділяється багато уваги питанням розвитку просторового мислення з боку психологів, фізіологів, не обходять його педагоги та методисти. Так, наприклад, Е. Ф. Рибалко, Б. Г. Ананьєв розглядають просторове мислення як особливу діяльність спостереження, а С. Л. Рубінштейн – як розумову діяльність. Однак, у своїй роботі Федотова М. А. підкреслює, що судячи з результатів досліджень за різні періоди (Г. Г. Маслової, Н. Ф. Четверухина, І. С. Якиманської, С. Б. Верченко), багато школярів, закінчивши дев'ятий клас, не мають достатньо розвиненого просторового мислення, необхідного для продовження освіти і застосування отриманих знань на практиці [13, с. 19]. Дослідниця вважає, що створення об'ємних моделей на базі матеріального об'єкта у сучасних програмах 3D моделювання допоможе розвитку просторового мислення, розвине уяву, навчить розуміння простору, а також дасть корисні навички володіння основами конструювання.

Складно з нею не погодитися, оскільки у формуванні у дітей загальних пізнавальних здібностей входить і конструктивна діяльність, завдяки якій відбувається успішне сприйняття зовнішніх властивостей предметного світу, таких як величина, форма, просторові і розмірні відношення, розуміння деяких суттєвих зв'язків на основі їх наочного моделювання, створення нових оригінальних образів та ін. Конструкторська діяльність вимагає від дітей досить складних просторових орієнтувань, адже саме у просторі складаються з конкретних ознак форми, величини, протяжності, об'ємності предметів, а також їх структурні одиниці: частини, деталі [12].

Витіснення іграшок комп'ютерними іграми, практично відсутня ручна праця – все це може привести до більш низького рівня розвитку наочно-дієвого мислення. Тому актуальним стає додаткове вивчення мислення дітей з урахуванням сучасних умов їхнього розвитку [14].

Багато дослідників з метою діагностики, а також ліквідації прогалин у розвитку просторового мислення пропонують системи спеціальних вправ або завдань (К. І. Камбар, В. Н. Литвиненко, Г. Н. Нікітіна, А. Пардала, С. В. Петров, А. Я. Цукар). Просторова уява і мислення – тема досліджень таких вчених, як А. С. Борейко, А. Д. Ботвинников, Г. Д. Глейзера, Є. М. Кондрушенко, В. І. Корчажінської та ін. В їх роботах розглядається природа сприйняття простору і механізм виникнення просторових уявлень, що дуже важливо для нас у процесі здійснення контролю розвитку просторового мислення. Розвиток просторових уявлень і уяви у молодших школярів вивчали М. Г. Боднар, Л. С. Виготський, Л. В. Вайткунене, Е. Н. Власова, О. І. Галкіна, М. М. Зепнова, І. Л. Каплунович, В. П. Манеева, Г. Г. Маслова, Е. А. Мерзон, А. Е. Симановський, П. А. Сорокун, Г. Сердакова, Н. Ф. Четверухин, О. С. Якуніна та ін. Формуванню просторових уявлень у дітей шкільного віку були присвячені роботи вітчизняних психологів Б. Г. Ананьєва, Б. Ф. Ломова, Е. Ф. Рибалко. Розвиток просторового мислення учнів середніх класів основної школи відображено в роботах Н. В. Большакової, А. Н. Загорського, А. А. Постнова, З. Р. Федосеевой. Проблему запасу просторових уявлень в учнів початкової школи і 5-6 класів та розвиток їх просторового мислення досліджували С. Б. Верченко, С. В. Гуревич, Е. В. Знам'янська, С. В. Кирилова, І. А. Кочеткова, Н. С. Кулакова, Н. Д. Мацько, Є. Г. Оводова, Н. С. Подходова, Л. О. Рослова [1].

На нашу думку, найбільш повно і точно визначення, зміст, а також структура просторового мислення відображено у роботах І. С. Якиманської та її співавторів. Вона розглядає три рівня розвитку просторового мислення у залежності від можливостей дитини вирішувати той чи інший тип завдань, тобто відповідно до одного з трьох типів оперування образом.

Перший напрям пов'язаний зі сприйняттям. Сюди відноситься зорове сприйняття предметів, зображення навколишнього дитини світу і геометричних фігур, вивчення взаємного розташування фігур, зокрема, їх об'єднання та перетину. Другий напрям – перевірка сформованості уявлень дітей про рівні і подібні фігури. Третій напрям – контроль уявлень дітей про перетворення фігур, зокрема, поворот і симетрію.

Етап, найбільш оптимальний для продуктивного розвитку просторового мислення, за І. С. Якиманською, припадає на період 9–13 років. Причому діти цього віку знаходяться в основному на першому рівні розвитку просторового мислення. Саме в цей період важливо забезпечити активне його формування.

Дослідження І. В. Асланян у цьому напрямі надали можливість побудувати досить струнку систему контролю розвитку просторового мислення: всі завдання системи згруповані за напрямками і видами, надано класифікацію контролюючих завдань за видами:

- 1) завдання-інструкції;
- 2) завдання з помилками;
- 3) завдання на виділення елементів будь-якої фігури;
- 4) практичні завдання;
- 5) завдання на об'єднання і перетин фігур;
- 6) завдання на поворот фігури або її частин і симетрію;
- 7) завдання на зміну точки відліку.

Така систематизація дозволяє застосувати на практиці різноманітні завдання у рамках кожного з напрямків [1].

З огляду на особливості просторових уявлень, їх відмінність від первинних образів, Н. С. Подходова [10] виділяє наступні типи завдань і умови їх виконання, враховуючи особливості формування уявлень як узагальнення перцептивних образів:

1. Завдання на розвиток уявлень повинні: а) виконуватися за відсутності наочної основи; б) пропонуватися не тільки по лінії образів, які відображають різну фактуру моделей, колір, матеріал і т.п., але і по лінії різноманітності положень моделей фігур в образах, адже положення фігури у просторі не визначає її назву.

2. Завдання на представлення: а) корисно виконувати із закритими очима, але, допомагаючи собі, якщо потрібно, руками, тобто жестикулюючи; б) при їх виконанні вимагають тиші і відсутності напруженості в учнів; в) пропонується складати самим учням; г) виконують функцію навчання перекладу з вербальної мови на мову образів і навпаки (у випадку складання таких завдань учнями), а значить, сприяють розвитку вміння описувати простір і уважному ставленню до тексту будь-якої задачі; д) неефективні у формі завдань типу «хто швидше».

3. Завдання на перевірку сформованості уявлень найбільш ефективні у формі практичної діяльності, створення речових моделей (у разі об'ємних фігур) або малюнків (у разі плоских фігур) відповідних геометричних об'єктів.

А. Пардала [9] виділяє види вправ, дидактичним призначенням яких є формування і розвиток просторових уявлень учнів: математичні ігри, пов'язані із просторовими уявленнями; дослідження конкретних геометричних об'єктів – фігур і перетворень; конструктивні завдання; прикладні задачі; проєкційні стереометричні завдання; завдання на проєктування геометричних тіл, побудова перетинів; діагностичні завдання на перевірку сформованості просторових уявлень.

У дослідженні А. Я. Цукаря [15] охарактеризовані завдання на просторову уяву наступних видів: оцінювання форми і розмірів фігури; відшукування зображення з декількох даних для пред'явленого об'єкта; знаходження об'єкта із деякого набору, який відповідає даному зображенню; завершення зображення відомого об'єкта за його фрагменту; ідентифікація різних зображень одного і того ж просторового об'єкта; побудова проєкцій заданої фігури; впізнавання фігури по її проєкції; побудова зображення об'єкта по його проєкції; визначення взаємного розташування кількох фігур по їх зображенню; зображення об'єкта за його описом; виготовлення моделі за її кресленням, за пред'явленим об'єктом, за описом; впізнавання і зображення об'єкта, отриманого (уявним) зміною (за допомогою повороту, симетрії, паралельного переносу) положення заданого; впізнавання і зображення фігури, складеної із заданих за відомим правилом; зображення перетину заданих фігур (у тому числі після уявного їх переміщення); зображення частин фігур після її уявного розчленування.

С.Б. Верченко у своєму дослідженні представила наступну систему завдань, які сприяють розвитку просторової уяви: на розпізнавання моделей; на розгляд креслень; на одночасну роботу з моделлю, кресленням і малюнком.

У дослідженнях О. М. Кабанова-Меллер, А. Д. Ботвіннікова, І. С. Якиманской [3; 6] підкреслюється, що своїх найбільш розвинених форм просторове мислення досягає в процесі діяльності з графічним матеріалом (кресленням), заснованій на створенні і перетворенні зорових образів і полягає у читанні, створенні та перетворенні креслення. В основі правильного читання креслення лежить уміння розглядати одну і ту ж фігуру з різних точок зору, тому що визначити форму зображеного на кресленні об'єкта можна тільки шляхом кількарязового аналізу під кутом зору різних проєкцій. Однак, як показують учені, оволодіння прийомами сприйняття просторових образів та їх графічних зображень, як би ефективні вони не були, не забезпечують ще успішності оперування ними [3; 6].

Ми виділяємо чотири види завдань на розвиток просторового мислення учнів, пов'язаних з реальними об'єктами, їх зображеннями, моделями та ін. Для розгляду таких завдань, уведемо кілька додаткових понять. Об'єкт, який підлягає якому-небудь моделюванню і потім відтворенню, будемо називати прообразом, а плоску фігуру, яка б відтворювала і представляла прообраз – образом. Образ, який представляє об'єкт на плоскій поверхні, будемо називати зображенням цього об'єкта. Отже, а) завдання на створення просторового образу (певного або невизначеного прообразу), визначення його виду і властивостей (завдання першого виду); б) завдання, в яких потрібно встановити відповідність між образом і прообразом, або між двома різними образами (завдання другого виду); в) завдання, вирішення яких починається з розгляду вже певного образу, і полягає або у відновленні прообразу, або у визначенні властивостей прообразу (завдання третього виду); г) завдання на уявне перетворення просторових образів (завдання четвертого виду).

Розробленій нами системі завдань притаманні всі необхідні характеристики:

- спільність: завдання підпорядковані загальній ідеї розвитку просторового мислення;
- спосіб побудови: кожна задача – узагальнення попередньої, або її конкретизує, або є аналогом, або є ключовим завданням;
- рівень організації: строго детерміноване розташування рівнів зв'язків між завданнями;
- зв'язність елементів у системі: можливість графічно представити сукупність задач зв'язковим графом;
- повнота: сукупність завдань включає у себе завдання на всі поняття, пов'язані з проектуванням, зображенням і т.п.;
- цільова достатність: наявність достатньої кількості завдань для тренінгу; аналогічних завдань для закріплення способу розв'язання; задач для індивідуальної і групової роботи; задач для самостійної діяльності учнів і т. п.;
- цільова орієнтація: місце кожного завдання визначено відповідно до рівнів і основними діями, спрямованими на розвиток умінь створювати й оперувати образами;
- послідовність (розташування): завдання чотирьох видів розподілені за рівнями.

У процесі математичного експерименту ми отримали результати, що використання даної системи завдань при навчанні геометрії і її елементів сприяє розвитку просторового мислення учнів. Емпіричне дослідження у межах математичного експерименту щодо встановлення рівня просторового мислення сучасних учнів (покоління Альфа) було проведено на базі Одеського приватного ліцею «Мрія». До експерименту були залучені учні 4–6 класів – відвідувачі

шкільного літнього оздоровчого Табору Відпочинку. Загальний обсяг вибірки склав понад 60 дітей, з них 59% – дівчатка і 41% – хлопчики.

Завдання, що розв'язували школярі у ході експерименту, представлені на рис. 1–8.

Завдання 1. Знайдіть помилку в зображеннях:

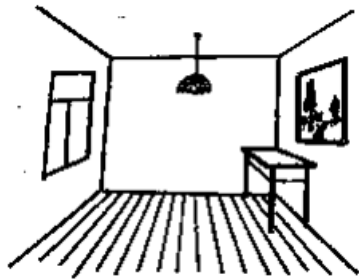


Рис. 1. Завдання 1

Завдання 2. Чи перетинаються прямі? Перевірте на око.

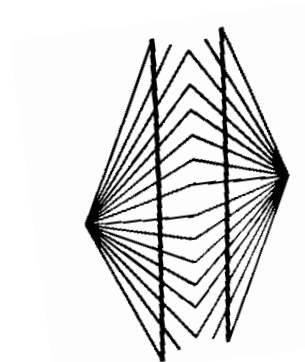
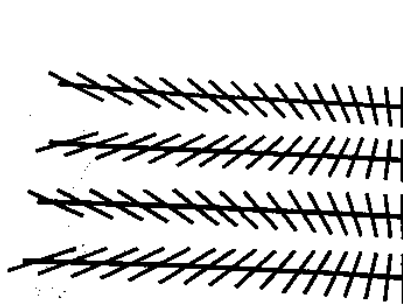


Рис. 2. Завдання 2

Завдання 3. Встановіть відповідність між фігурами А, Б, В та їх образами після складання вздовж прямої MN:

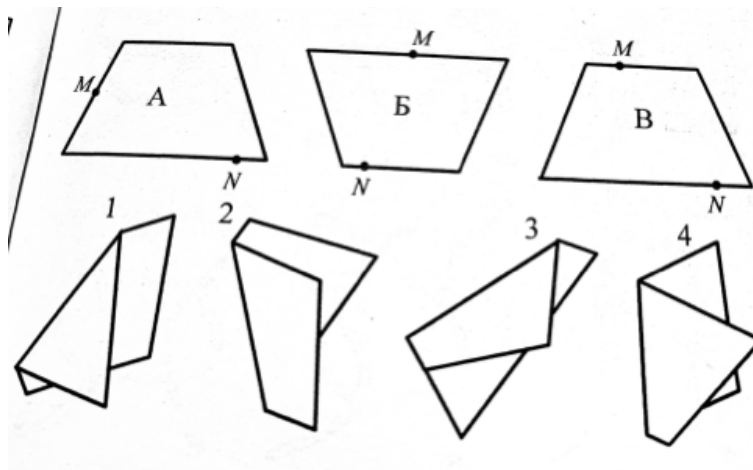


Рис. 3. Завдання 3

Завдання 4. Прочитайте слова за допомогою дзеркала:

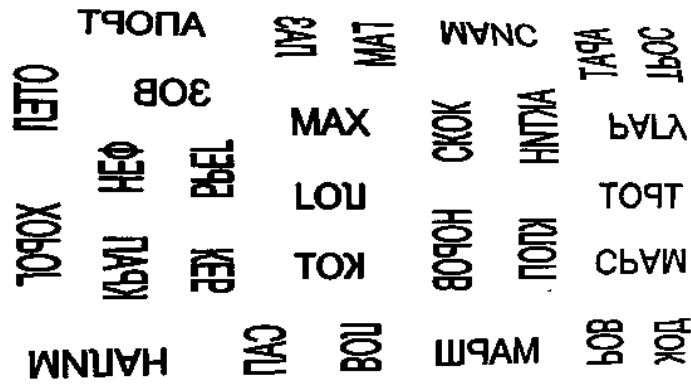


Рис. 4. Завдання 4

Завдання 5. Чи зав'яжеться вузол, якщо потягнути за кінці канату?

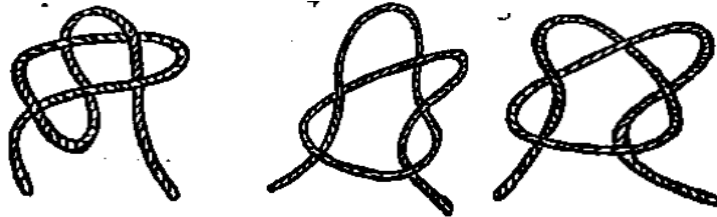


Рис. 5. Завдання 5

Завдання 6. Юра обмотує мотузку навколо дерев'яної деталі. Як виглядає намотування на передній частині, ми бачимо на малюнку:



Як виглядає намотування на зворотному боці?

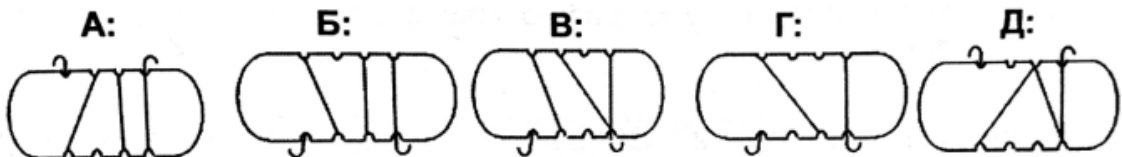


Рис. 6. Завдання 6

Завдання 7. Квадратний аркуш паперу зверху сірий, знизу білий. Аня зробила розрізи і зігнула папір. По яких лініях зроблено розрізи?

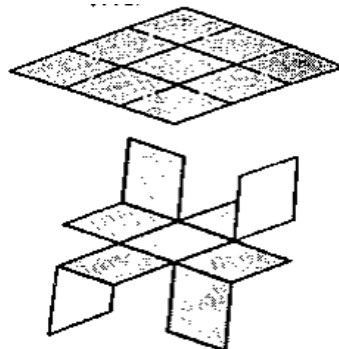
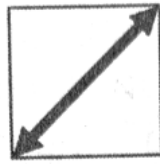


Рис. 7. Завдання 7

Завдання 8. У майстра є плитки з малюнком:



Який візерунок у нього не може вийти?

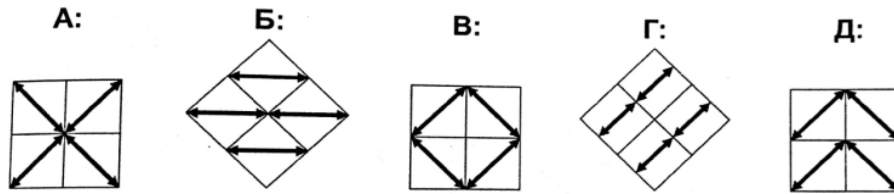


Рис. 8. Завдання 8

Підсумовуючи результати експерименту, нами було отримано такі дані (табл. 1).

Таблиця 1

Результати експериментальної роботи

Номер задачі	Відсоток правильних відповідей	Вік дітей, які надавали правильну відповідь
1	65% надали правильну відповідь	9-10 років – 37%, 11 років – 28%
2	30%, відповідь перевірялась за допомогою лінійки	9-10 років – 15%, 11 років – 15%
3	23%, відповідь перевірялась на моделях шляхом перегинання фігури та пошуку «на око» відповідної фігури з наведених.	9-10 років – 8%, 11 років – 15%
4	90%, останні 10% «читали» слова нетривіальним способом – з оберненої сторони листа з надрукованими словами	9-10 років – 67%, 11 років – 23%
5	85% виконали завдання «на око», правильність розв'язання перевіряли за допомогою мотузки	9-10 років – 40%, 11 років – 45%
6	72% надали правильну відповідь	9-10 років – 33%, 11 років – 39%
7	98% надали правильну відповідь	9-10 років – 48%, 11 років – 49%
8	79% надали правильну відповідь	9-10 років – 38%, 11 років – 41%

Під час проведення експерименту школярі демонстрували зацікавленість, «включеність» у процес розв'язання цікавих задач, деякі завдання були несподіванкою для них (експеримент з розрізанням листа Мебіуса, наприклад). Особливий інтерес викликали задачі, розв'язування яких підкріплювалось практичною перевіркою: серія завдання з вузлами, що було завершено тренуванням виконання вузла «вісімка» та простого вузла альпіністів. Для організаторів даного заходу найважчим було підтримувати емоційний рівень постійно високим.

Додатково учням можна запропонувати серію завдань на вгадування «за тінню» та на зафарбовування (рис. 9–14).

Додаткове завдання 1. Звірі зібралися під ковдрою. Як вони там розташовуються?



Рис. 9. Додаткове завдання 1

Додаткове завдання 2. Що побачать птахи у відображенні?



Рис. 10. Додаткове завдання 2

Додаткове завдання 3. Який силует на заході сонця можна побачити?

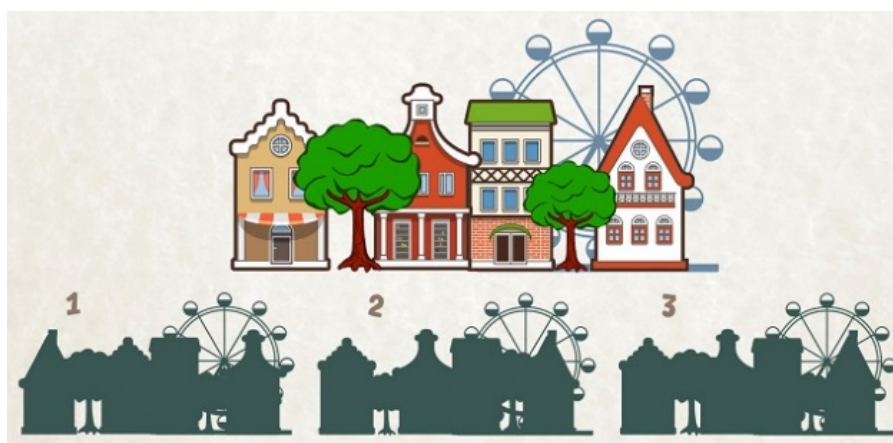


Рис. 11. Додаткове завдання 3

Додаткове завдання 4. Як виглядає вікно зсередини?

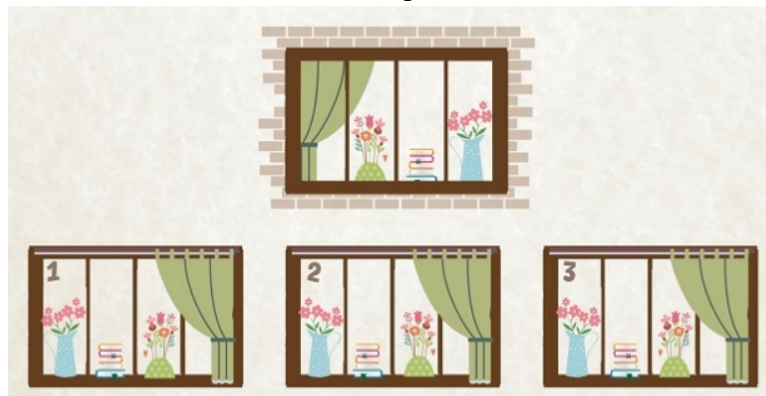


Рис. 12. Додаткове завдання 4

Більш складними є такі завдання:

Додаткове завдання 5. Розглянь фігуру в різних ракурсах, обери варіант відповіді.

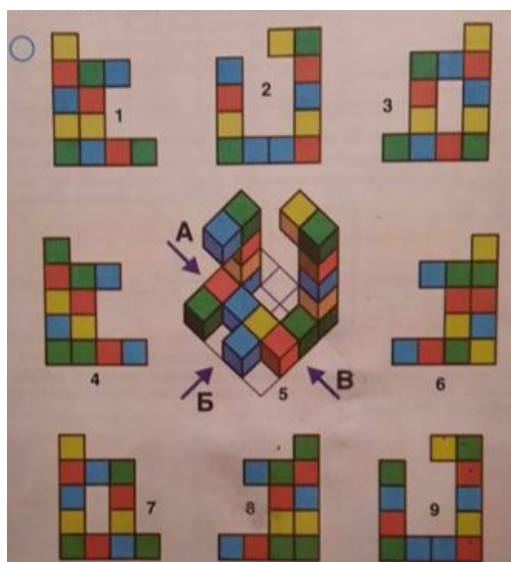


Рис. 13. Додаткове завдання 5

У цій серії завдань найвищий рівень складності має наступне завдання:

Додаткове завдання 6. Розфарбуй малюнок таким чином, щоб на ньому було три куби різного кольору на жовтому фоні та щоб не залишилось незафарбованих квадратів.

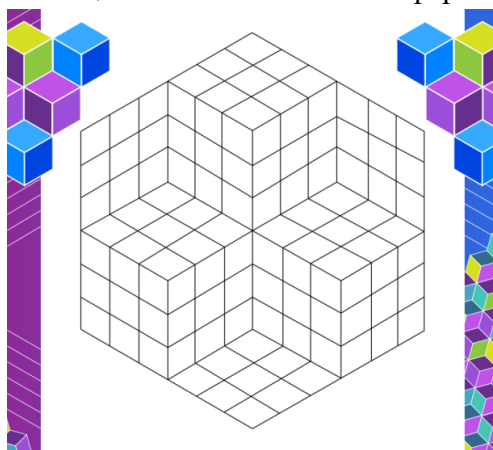


Рис. 14. Завдання 6

Висновки. Аналіз результатів проведеної роботи дозволив дійти висновку, що при проведенні шкільного математичного експерименту слід дотримуватися таких порад:

- ✓ обмежувати кількість учасників та дотримуватися їхньої вікової однорідності;
- ✓ завдання для учнів мають бути цікавими, мати здебільшого практичний зміст;
- ✓ бажано включати завдання на координацію рухів тощо.

Результати експерименту можна сформулювати таким чином:

1. Просторове мислення відіграє вагомую роль в успішності навчання учнів різних статево-вікових груп не тільки з предметів математичного циклу, а й природничо-наукового і гуманітарного профілів.

2. Значущість просторового мислення у навчальній успішності учнів найбільш висока у молодшому шкільному віці. Ймовірно, це обумовлено онтогенетичною спорідненістю просторового і наочно-образного видів мислення, домінуючого у даному віці, а також участю зорово-просторових функцій у процесах диференціювання, впізнавання і відтворення букв і цифр, із яких починається оволодіння листом, читанням і рахунком.

3. Цілеспрямований розвиток просторового мислення молодших школярів сприяє корекції несформованих компонентів просторового мислення, формуванню навчальних навичок і, тим самим, підвищенню навчальної успішності.

4. У молодшому шкільному віці не виявлено відмінностей в успішності вирішення просторових задач хлопчиками і дівчатками.

Доцільно більше уваги приділяти формуванню практичної математичної компетентності з огляду на те, що практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, готовності молоді до повсякденного життя, найважливіших видів суспільної діяльності, оволодіння професійною освітою.

Подальше дослідження буде спрямоване на виявлення можливостей розвитку просторових уявлень за допомогою таких безкоштовних додатків, як Escape Car, Nonogram, Euclidean, «Піфагорія» тощо та кореляції рівнів розвитку просторових уявлень учнів та їхніх математичних досягнень.

Список використаних джерел

1. Асланян И. В. Методика контроля развития пространственного мышления учащихся 5-6 классов средней школы при изучении геометрического материала с позиций фузионизма: автореф. дис. ...канд. пед. наук: 13.00.02. Астрахань, 2006. 24 с. URL: <http://nauka-pedagogika.com/viewer/177475/a?#?page=22>
2. Атлас новых профессий 3.0. / под ред. Д. Варламовой, Д. Судакова. Москва : Интеллектуальная Литература, 2020. 456 с.
3. URL: https://storage.tusur.ru/files/133096/Atlas_3.0.pdf
4. Ботвинников А. Д., Якиманская И. С. Особенности оперирования учащихся разными видами графических изображений. *Известия АПН СССР*. 1968. Вып. 143. С. 195–231.
5. Василенко А. В., Профессиональная подготовка учителя к развитию пространственного мышления учащихся. *Высшее образование в России*. 2016. № 1 (197). с. 136–140.
6. Верченко С. Б. Развитие пространственных представлений учащихся при изучении геометрического материала в 4-5 классах средней школы: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Москва, 1983. 215 с.

7. Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов воображения в курсе черчения. *Формирование и развитие пространственных представлений у учащихся : избранные труды / под ред. Н. Ф. Четверухина*. Москва : Просвещение, 1964. С. 75–84.
8. Малінкін А. В. Специфіка формування інтелектуальних операцій в процесі розвитку мислення людини. *Аспекти і тенденції педагогічної науки: матеріали III Міжнар. науч. конф.* Санкт-Петербург : Своє видавництво, 2017. С. 1–3.
9. URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/273/13417/>
10. Н. К. Корсакова, Л.И. Московичюте. Клиническая нейропсихология: уч. пособие. Москва : МГУ, 1988. 50 с.
11. URL: <http://psychology.univer.kharkov.ua/dist2020/materialy/ZaikaKN.pdf>
12. Пардала А. Формирование пространственного воображения учащихся при обучении математике в средней школе (с учетом специфики школы республики Польша): дис..докт. пед. наук. 13.00.02. Москва, 1993. 406 с.
13. Подходова Н. С. Теоретические основы построения курса геометрии 1–6 классов: дис... докт. пед. наук: 13.00.02. СПб., 1999. 384 с.
14. Скворцов Д. Е. Образное мышление как предмет философскоантропологического анализа: автореф. дис.... канд. филос. наук: 09.00.13. Волгоград, 2015. 32 с.
15. Федотова М. А. Развитие пространственного мышления у детей 10–12 лет. Научные тенденции: *Педагогика и психология*. 2017. № 17. С. 19–20.
16. URL: <http://ljournal.ru/article/spc-04-12-2017-17.pdf>
17. Федотова Н. В., Суленко И. А. О необходимости формирования пространственного мышления. *Современные наукоемкие технологии*. 2008. № 8. С. 44–47. URL: <http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=24125>
18. Филяева Е. Н. Развитие наглядно-действенного мышления современных дошкольников. *Молодой учёный. Психология*. 2018. № 17 (203). С. 275–277.
19. Цукарь А. Я. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием образного мышления: дис.... докт. пед. наук.: 13.00.02. Новосибирск, 1999. 364 с.
20. Чашечникова О. С. Формування просторової уяви учнів старшої школи. *Педагогіка і психологія*. 1996. № 3. С. 83–85.
21. Четверухин Н. Ф. Проблема изображения пространственных фигур в условиях педагогического процесса. *Математика в школе*. 1998. № 4. С. 66–72.
22. Шамис Е., Антипов А. Теория поколений. Москва : Институт Синергия; 2016. 398 с.

ВИСНОВКИ

Для реалізації мети і завдань за кожним із напрямів науково-дослідної роботи *«Дослідження науково-методичних засад формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти»* виконавцями проєкту було здійснено низку заходів: лекцій, практикумів, семінарів, тренінгів, консультацій, диспутів, круглих столів, тематичних занять, освітніх квестів, майстер-класів у формі відкритих уроків.

Так, слід відзначити тренінг для вчителів початкових класів Одеського приватного навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія»» із опрацювання методики навчання учнів 1–4 класів нумерації чисел.



Основною ідеєю методики є моделювання чисел у кожному із концентрів із використанням Монтесорі-матеріалів: арифметичних штанг, чисел та кружечків, «золотого матеріалу». Професором Скворцовою С. О. та старшим викладачем Гаєвець Я. С. розроблено системи навчальних завдань на ілюстрацію чисел за допомогою математичних матеріалів у кожному із концентрів.

Загалом, концепція НУШ орієнтує вчителя на врахування індивідуальних особливостей учнів. З огляду на це, представляє інтерес дослідження професора Скворцової С. О. із вивчення нейрофізіологічних особливостей дозрівання як функціонального, так і нейронного апарату мозку дітей 6–10 років, у процесі якого визначено особливості учнів – представників цифрового покоління, одночасне перебування яких у фізичному і віртуальному світі накладає певні особливості на перебіг пізнавальних процесів у них: погіршуються пам'ять, здібності до аналізу і логічного опрацювання інформації, спостерігається кліпове мислення, комп'ютерний сьорфінг тощо. Професором Скворцовою С. О. визначено засоби корекції цих особливостей у освітньому процесі шляхом застосування обґрунтованих методик навчання.

Необхідно відзначити високу якість проведених майстер-класів (з метою презентації власного педагогічного досвіду і творчих ідей) досвідченими викладачами, методистами – виконавцями проєкту, зокрема доцентом Коростіянець Т. П., під керівництвом якої було визначено деякі шляхи вдосконалення методики формування в учнів математичних понять і обговорено з учителями математики Одеського приватного ліцею «Мрія».



Доцентом Івановою С. В. на майстер-класах у формі відкритих уроків було реалізовано ідею «уроку однієї задачі», впроваджено технологію застосування «інтелект-карт»; визначено деякі шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження.

На майстер-класах у формі відкритих уроків доцента Кушнірук А. С. було доведено ефективність технології «Сторітеллінг» в контексті формування позитивної мотивації до навчання математики, реалізації поглибленого вивчення цього предмета.





Доцентом Недаляковою К. В. під час майстер-класів у формі відкритих уроків було реалізовано пропедевтику поглибленого навчання математики, методику узагальнюючого повторення, зроблено акцент на формуванні логічного мислення учнів, позитивної мотивації їхньої навчальної діяльності.

Загалом, під час проведення науково-дослідної роботи особливу увагу було приділено реалізації навчання математики на поглибленому рівні, мета якого полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значним математичним складником.

Колективом виконавців у контексті реалізації профільного навчання математики було розроблено методичні рекомендації щодо підвищення ефективності навчання математики на поглибленому рівні та на рівні стандарту. Доцентами Івановою С. В. та Кушнірук А. С. разом із учителями математики Одеського приватного ліцею «Мрія» було проаналізовано цільову, змістову та процесуальну модель математики як навчального предмету в школі та її відмінності при навчанні математики на різних освітніх рівнях; доведено ефективність технології «Перевернутий клас» при реалізації профільного навчання, особливо в умовах дистанційного та змішаного навчання.

Цікавим і корисним у рамках проведеного дослідження є діагностичний експеримент із дослідження мотивації вивчення математики учнями 5–11 класів, який засвідчив наявність проблеми. З метою її вирішення доцентами Коростіянець Т. П. і Недаляковою К. В. було розроблено й апробовано, з позитивним результатом, технологію підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти.

Особливої уваги заслуговує робота виконавців проєкту з проблеми підготовки школярів до ЗНО у контексті того, що у 2021 році ЗНО з математики є обов'язковим і зараховується як результат ДПА. Викладачами розроблено методичні рекомендації щодо підготовки учнів до ЗНО з математики, дотримання яких при вдалій реалізації забезпечить якісну підготовку здобувачів середньої освіти до такого випробування. Слід зазначити, що авторська добірка завдань ЗНО відповідає вимогам, які пред'являються до них: завдання було дібрано пропорційно реалізації змістових ліній у ШКМ, за різними рівнями складності, з формулюваннями завдань, бланками відповідей, формами відповідей, подібними до текстів ЗНО (на написання роботи учнями було відведено 60 хв.).

Також у рамках цього напряму дослідження проводилася робота з учителями математики Одеського приватного ліцею «Мрія»: старшим викладачем Тумбрукакі А. реалізовано практикум: «Розв'язання завдань ЗНО підвищеного рівня складності», що забезпечило розвиток математичної і методичної компетентності фахівців.



Не викликає сумніву, що для успішної участі в сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування практичних задач. Якісної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язуванні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним із головних завдань цього курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності.



З огляду на вищезазначене, набувають наукової і практичної значущості тематичні заходи – математичні експерименти, розроблені та реалізовані доцентом Светним О. П., старшими викладачами Іщенко А. Л. і Тумбрукакі А. В.

При проведенні цих заходів спостерігалась зацікавленість учасників, які проєктувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі.

Виконавцями проєкту майстерно застосовувалися ІКТ, забезпечуючи наочність і доступність викладу.



До основних результатів проведеного дослідження слід віднести такі:

1. Визначено основні засади Концепції Нової української школи, мету і загальні результати математичної освітньої галузі за Державним стандартом загальної початкової освіти (ДС, 2019 р.).

Здійснено порівняльний аналіз Типових освітніх програм НУШ1 (керівник О. Я. Савченко) та НУШ2 (керівник Р. Б. Шиян). Порівняно мету, завдання математичної освітньої галузі; так, НУШ1 (Савченко О. Я.) ставить завдання розвитку математичного мовлення учнів, необхідного для опису математичних фактів, відношень і закономірностей; водночас в НУШ1 (Савченко О. Я.) відсутнє завдання, визначене у НУШ2 (Шиян Р. Б.): вироблення вміння сприймати, перетворювати та оцінювати отриману інформацію, використовуючи різні джерела, у тому числі і засоби ІКТ.

Визначено відмінності у структурах та у змістових лініях у ТОП НУШ1 і ТОП НУШ2, зокрема у НУШ1 відсутня змістова лінія «Лічба», а у НУШ 2 відсутня змістова лінія, пов'язана із сюжетними математичними задачами.

2. Встановлено, що виходячи із вікових особливостей перебігу пізнавальних процесів сучасних учнів, є потреба у розробці методик навчання, які передбачають послідовність опрацювання розумових дій, виходячи із практичних дій з роздатковим матеріалом. Розроблено концептуальні засади організації навчальних досліджень із використанням математичних матеріалів: від роботи з предметною основою (матеріальна дія) до аналізу малюнків, схем, таблиць (матеріалізована дія), до коментування виконуваних дій, і, нарешті, до згорнутої, автоматизованої, розумової дії.

3. Розроблено зміст діяльності вчителя зі створення проблемної ситуації із відкриття учнями початкової школи прийомів обчислення, методику їх розв'язування. Створено системи навчальних завдань для організації навчальних досліджень з математичними матеріалами з опанування учнями прийомів обчислення (частинами, порозрядно, округлення, на підставі правила додавання суми до числа, віднімання суми від числа, укрупнення розрядних одиниць тощо) у кожному із концентрів.

4. Розроблено комплекс математичних матеріалів для формування в учнів початкової школи навичок табличного множення та ділення: шаблон таблиці множення, шаблон таблиці Піфагора, тренажери з рухомими рисками-повзунками для роботи в парах із відтворення результатів таблиць. Розроблено системи навчальних завдань з цими матеріалами та методику роботи над ними.

5. Встановлено, що вдосконалення методики навчання математичних понять здобувачів середньої освіти може відбуватися за такими напрямками:

- своєчасна пропедевтика навчання школярів математичних понять;
- ознайомлення учнів із основними фактами теорії понять: види понять, види означень, відношення між поняттями тощо;
- більш активне залучення наочності, що можна реалізувати колами Ейлера при вивченні математичних понять;
- приділення належної уваги питанням логічних основ шкільного курсу математики, що сприятиме систематизації знань, глибокому розумінню предмету, підвищенню логічної культури учнів;
- урізноманітнення форм роботи, наприклад, залучення завдань у тестовій формі;

- адекватний добір учителем методів і прийомів формування математичних понять на різних етапах: уведення поняття, забезпечення засвоєння відповідного означення, закріплення поняття.

6. Визначено напрями розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо формування в учнів понять шкільного курсу математики, із-поміж яких:

- 1) усвідомлення фахівцями ролі та значущості формування в учнів понятійного мислення;
- 2) удосконалення вміння вчителів виконувати логіко-дидактичний і логіко-математичний аналізи навчального матеріалу;
- 3) усвідомлення ними значущості та сутності психолого-дидактичних основ формування математичних понять в учнів;
- 4) удосконалення вміння вчителів залучати прийом використання контрприкладу;
- 5) дотримання вчителями математики основних етапів роботи з поняттям;
- 6) володіння фахівцями різноманітними організаційними формами реалізації основних етапів роботи над формуванням понять.

7. Визначено деякі шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження, а саме:

- проведення ґрунтовної роботи над формуванням таких понять, як «обернена теорема», «необхідна умова», «достатня умова», «теорема-властивість», «теорема-ознака» та ін.;
- проведення системної роботи з учнями щодо визначення набору достатніх умов поняття;
- реалізація творчого підходу вчителя до вибору методу і способу доведення твердження;
- узагальнення з учнями методів і способів доведення математичних тверджень;
- застосування технології «Інтелект-карт» у процесі доведення учнями тверджень.

8. З'ясовно методичні аспекти застосування різних методів і способів доведень математичних тверджень у шкільному курсі математики, зокрема:

- ✓ з метою підвищення інтересу учнів до доказових міркувань;
- ✓ у зв'язку з вивченням нової теми;
- ✓ для закріплення даної теореми;
- ✓ для реалізації диференційованого навчання;
- ✓ як дієвий засіб розвитку логічного мислення учнів.

9. Визначено напрями розвитку фахових компетентностей учителів-математиків щодо навчання учнів доводити математичні твердження, із-поміж яких:

- 1) усвідомлення фахівцями ролі та значущості формування в учнів культури доказових міркувань;
- 2) розуміння вчителями ролі, сутності пропедевтики навчання учнів доводити математичні твердження та вміння її здійснювати;
- 3) удосконалення вміння виконувати логіко-математичний аналіз доведення;
- 4) дотримання вчителями математики основних етапів роботи з теоремами та їх доведеннями;
- 5) володіння фахівцями різноманітними організаційними формами реалізації основних етапів роботи над теоремами;
- 6) усвідомлення вчителями значущості та доречності застосування різних способів доведень теорем і вміння їх реалізовувати.

10. З'ясовано теоретико-методичні засади профільного навчання математики у контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти, що ґрунтуються на принципах, особливостях спрямування (академічне або професійне) профільного навчання, розумінні його як виду диференційованого навчання, що враховує освітні потреби, нахили і здібності кожного учня і створює умови до соціального і професійного самовизначення учнів.

11. Виявлено, що реалізація профільного навчання учителями математики відбуватиметься ефективно за умови розуміння ними особливостей і відмінностей цільової, змістової і процесуальної моделі математики як навчального предмету при поглибленому його вивченні та навчанні на рівні стандарту.

12. Запропоновано й апробовано шляхи підвищення ефективності поглибленого навчання математики, а саме:

- ознайомлення учнів з основами наукових досліджень, методами доведень математичних тверджень на етапі пропедевтики поглибленого навчання;
- посилення прикладної спрямованості навчання математики;
- проведення уроків «однієї задачі», «однієї теореми» з метою підвищення зацікавленості учнів, підготовки школярів до олімпіад тощо;
- використання сучасних педагогічних технологій, зокрема «Перевернутий клас», «Сторітеллінг»;
- доречне використання ІКТ;
- системне застосування методів проблемного навчання.

13. Розроблено методичні рекомендації щодо проведення уроків у класах з навчанням математики на рівні стандарту, із-поміж яких:

- ✓ активне залучення завдань у тестовій формі;
- ✓ застосування теорії поетапного формування розумових дій при формуванні математичних понять в учнів;
- ✓ використання інтелект-карт;
- ✓ залучення задач прикладного змісту;
- ✓ конкретизація ідеї, методу доведення математичного твердження;
- ✓ створення ситуації «успіху»;
- ✓ стимулювання пізнавальної активності учнів протягом усього уроку.

14. Узагальнено теоретико-методичні засади підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики, що ґрунтуються на:

- готовності вчителів до реалізації методики підготовки здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики протягом усіх років навчання у школі (дидактико-методичний складник);
- підготовці учнів до розв'язування завдань ЗНО (предметний математичний складник);
- інформаційно-технічній обізнаності щодо організації проведення ЗНО з математики (організаційний складник);
- психологічній готовності здобувачів середньої освіти до ЗНО з математики (мотиваційний складник).

15. Визначено коло проблемних питань у контексті підготовки старшокласників до ЗНО з математики, пов'язаних із:

- недостатньою психологічною готовністю і вмотивованістю до такого виду випробувань;
- відносною безсистемністю знань із різних розділів шкільного курсу математики;

- наявністю психологічного бар'єру, пов'язаного з страхом розв'язання завдань підвищеного рівня складності;
- недостатньою сформованістю вміння створювати математичну модель задачі прикладного змісту;
- певними утрудненнями технічного характеру (заповнення бланку відповідей, представлення результату у потрібній формі тощо) ;
- невмінням контролювати час та ін.

16. Здійснено авторську добірку тестових завдань ЗНО й апробовано методику підготовки учнів до ЗНО з математики.

17. Проведено індивідуальне консультування учнів 9–11 класів із метою подолання труднощів у підготовці до ЗНО і розробки індивідуальної траєкторії формування математичної компетентності; результати занесено в індивідуальну «Карту учня».

18. Запроваджено авторську методику підвищення мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти, яка передбачає:

- дослідження мотиваційної сфери учня та класу;
- застосування ІКТ;
- здійснення математичних експериментів;
- проведення освітніх квестів;
- залучення елементів історизму;
- проведення уроків-корекції мотивації;
- використання передових педагогічних технологій, зокрема «Сторітеллінгу», «Перевернутий клас» та ін.

19. Розроблено опитувальник (у Google-формі) й апробовано методику діагностики мотивації вивчення математики учнями 5–9 класів.

20. За результатами діагностувального експерименту визначено індивідуальну траєкторію формування позитивної мотивації вивчення математики здобувачами середньої освіти та зафіксовано в індивідуальній «Карті учня».

21. Виявлено деякі методичні особливості проведення уроку-корекції мотивації вивчення учнями математики, а саме: основним завданням на такому уроці є не засвоєння знань, формування умінь і навичок, компетентностей, а формування позитивного ставлення до вивчення предмета, що певним чином впливає на добір учителем змісту, методів, форм і засобів навчання математики.

22. Розроблено методичні рекомендації до організації і проведення освітніх квестів з математики, серед яких:

- кількість учасників шкільного освітнього квесту не повинна перевищувати 10 осіб; у протилежному випадку організаторам (ведучому) важко досягти освітню мету (залишається тільки розважальний аспект заходу), створити продуктивну, творчу атмосферу;
- колектив учасників має бути більш-менш однорідним за віком і рівнями підготовленості і вмотивованості до вивчення математики: це забезпечить умови для рівноправної участі всіх дітей і реалізації їхнього інтелектуального потенціалу і творчих здібностей;
- завдання, що залучаються для реалізації навчально-розвивальної мети освітнього квесту бажано обирати не такі, що реалізують *предметну математичну компетентність*, а ті, що сприятимуть розвитку математичної компетентності як

ключової компетентності, а також *практичної математичної компетентності*. Це можуть бути завдання логічного характеру, на маніпулювання із деякими предметами, моделювання, конструювання тощо. Водночас, запропоновані завдання мають бути посильними для учасників, оскільки вони обмежені у часі і зацікавленість дітей може швидко згаснути;

- при організації і проведенні освітнього квесту треба продумувати все до дрібниць, включаючи антураж і матеріальні об'єкти, що створюють атмосферу заходу, відповідну його ідеї, меті та сюжету.

23. Розроблено методичні рекомендації щодо організації і проведення математичного експерименту на матеріалі шкільного курсу математики, що базуються на основних поняттях і принципах експериментальної математики. Отже, організація математичного експерименту в закладі загальної середньої освіти є доречною під час:

- ✓ відкриття нових моделей і зв'язків;
- ✓ дослідження сутності предмета;
- ✓ перевірки гіпотез;
- ✓ визначення підходів до формального доведення;
- ✓ перевірки можливих результатів;
- ✓ підтвердження результатів, здобутих аналітично тощо.

24. З'ясовано, що при проведенні шкільного математичного експерименту слід дотримуватися таких порад:

- група учасників не повинна перевищувати 10 осіб;
- колектив учасників може бути тимчасовим (наприклад, група дітей літнього Табору відпочинку);
- мета експерименту має бути визначеною як конкретна і реальна;
- завдання для учнів мають бути цікавими, посильними та адекватними віку;
- завдання теоретичного змісту обов'язково мають супроводжуватися практичними завданнями з маніпулюванням із предметами, використанням математичного обладнання тощо;
- необхідно забезпечити наочність, підготувати презентацію;
- завдання мають вирішуватись із емоційним підкріпленням;
- можливий музичний супровід тощо.

25. Розроблено тематичні заняття, спрямовані на формування логічного, критичного і просторового видів мислення:

- 1) «Математичний експеримент зі зважуванням»;
- 2) «Математичний експеримент із частинами цілого»;
- 3) «Математичний експеримент: ігри розуму»,
метою яких було:
 - ✓ реалізація прикладної спрямованості навчання математики;
 - ✓ підвищення мотивації до вивчення предмета;
 - ✓ відкриття нових моделей і зв'язків;
 - ✓ дослідження сутності предмета;
 - ✓ перевірка гіпотез;
 - ✓ перевірка можливих результатів.



Одержані результати науково-дослідної роботи **«Дослідження науково-методичних засад формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти»** активно обговорюються на конференціях, семінарах, круглих столах, зустрічах із фахівцями, методистами, вчителями, викладачами, студентами.

Перспективу подальших досліджень щодо формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти ми вбачаємо в ґрунтовній розробці проблеми профільного навчання математики у закладах загальної середньої освіти на сучасному етапі її розвитку, включаючи допрофільну підготовку, пропедевтику поглибленого навчання математики, методичні особливості навчання математики на рівні стандарту, врахування мотиваційного складника навчання тощо. Доцільно також більше уваги приділити формуванню практичної математичної компетентності з огляду на те, що практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, готовності молоді до повсякденного життя, найважливіших видів суспільної діяльності, оволодіння професійною освітою.

Вважаємо, що завдання науково-дослідної роботи **«Дослідження науково-методичних засад формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти»**, реалізованої під керівництвом доцента кафедри, кандидата педагогічних наук Катерини Василівни Недялкової виконано у повному обсязі; відтак, мету дослідження досягнуто.

ЗОШИТ 1

БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ

Клас 11

Прізвище _____

Ім'я _____

Увага! Правильні відповіді до завдань 1–6 позначають тільки так: ✕.
Неправильну відповідь можна виправити, замалювавши попередню позначку та поставивши нову:

	А	Б	В	Г	Д
				✕	

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Правильні відповіді до завдань 7–8

позначають тільки так: ✕.

Їх записують у таблицях, кожне завдання окремо.

7	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

8	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Відповіді до завдань 9–11 записуйте тільки десятковим дробом, урахувуючи положення коми, по одній цифрі в кожній клітці.

9				,			
10				,			
11				,			

Місце для виправлення помилкових
відповідей до завдань 10–11.

9				,			
10				,			
11				,			

ЗАВДАННЯ

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді та позначте його в *бланку відповідей*.

1. Спростіть вираз $\frac{3x+12}{x^2-16}$. (1 б.)

A	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4-x}$	$\frac{3}{x+4}$	$\frac{3}{x-4}$	$-\frac{3}{x+4}$	$\frac{1}{x-4}$

A large rectangular area filled with a grid of small squares, intended for drawing a picture.

2. Відомо, що $a < b$. Серед наведених нерівностей укажіть правильну нерівність.
(1 б.)

A	Б	В	Г	Д
$-2a < -2b$	$\sqrt{2}a > \sqrt{2}b$	$\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$	$a - 4 > b - 4$	$0,5 - a > 0,5 - b$



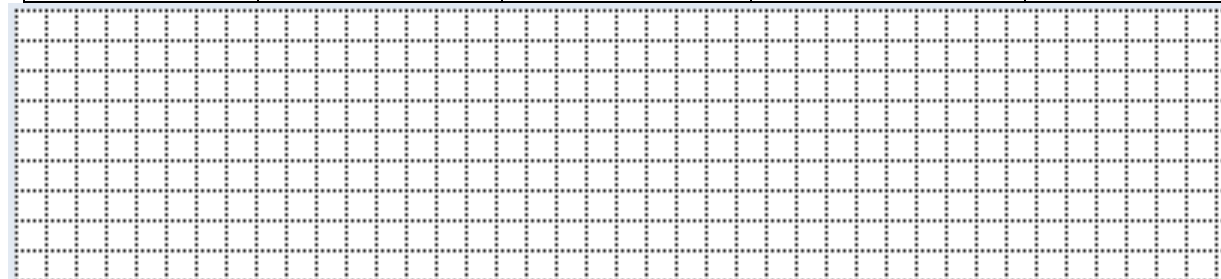
3. У Оксани є певна кількість горіхів. Коли вона розклала їх у купки по 5 горіхів, то два горіхи залишилися, а коли розклала їх по 3, то зайвих горіхів не виявилось. Яка кількість горіхів із запропонованих МОГЛА БУТИ в Оксани? (1 б.)

А	Б	В	Г	Д
32	45	57	63	81

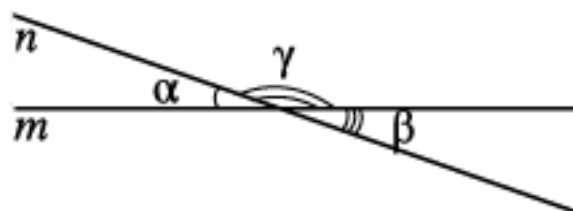


4. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 3x - 2y = 9, \\ x + 2y = -5. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ обчисліть суму $x_0 + y_0$. (1 б.)

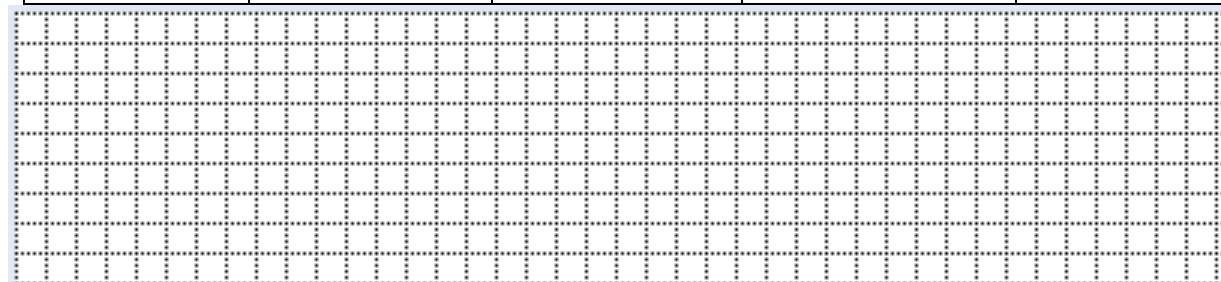
А	Б	В	Г	Д
-2	-1	1	2	-4



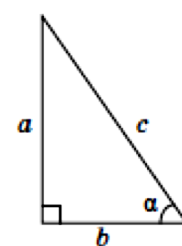
5. На рисунку зображено прямі m і n , що перетинаються. Визначте градусну міру кута γ , якщо $\alpha + \beta = 50^\circ$. (1 б.)



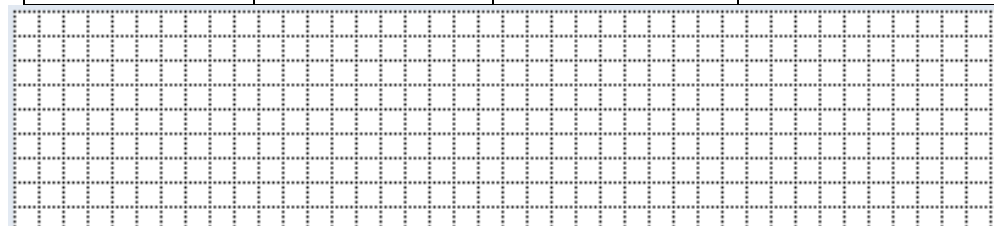
А	Б	В	Г	Д
130°	140°	145°	155°	310°



6. На рисунку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b , гіпотенузою c та гострим кутом α . Укажіть правильну рівність. (1 б.)



А	Б	В	Г	Д
$\cos \alpha = \frac{a}{b}$	$\cos \alpha = \frac{c}{b}$	$\cos \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{c}{a}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$



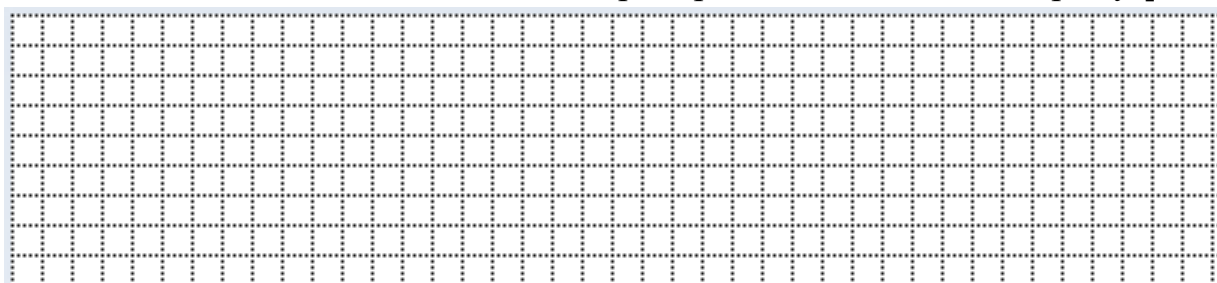
У завданнях 7–8 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Постав позначки в таблицях відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви) у *бланку відповідей*.

7. Розв'яжіть рівняння (1–3). Установіть відповідність між кожним рівнянням та твердженням (А– Д), що є правильним для цього рівняння. (3 б.)

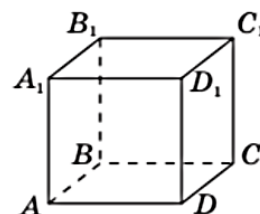
Рівняння

Твердження

- | | | | |
|---|---------------------|---|---|
| 1 | $x + \pi = 0$ | А | коренем рівняння є ірраціональне число |
| 2 | $\cos x = \sqrt{3}$ | Б | коренем рівняння є число 16 |
| 3 | $\sqrt{x} = 4$ | В | рівняння не має коренів |
| | | Г | рівняння має два корені |
| | | Д | корінь рівняння належить відріzkу $[-2; 2]$ |



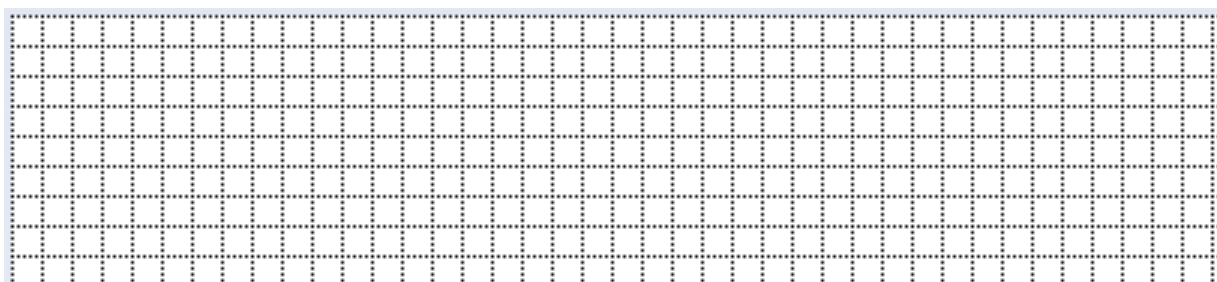
8. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (3 б.)



Початок речення

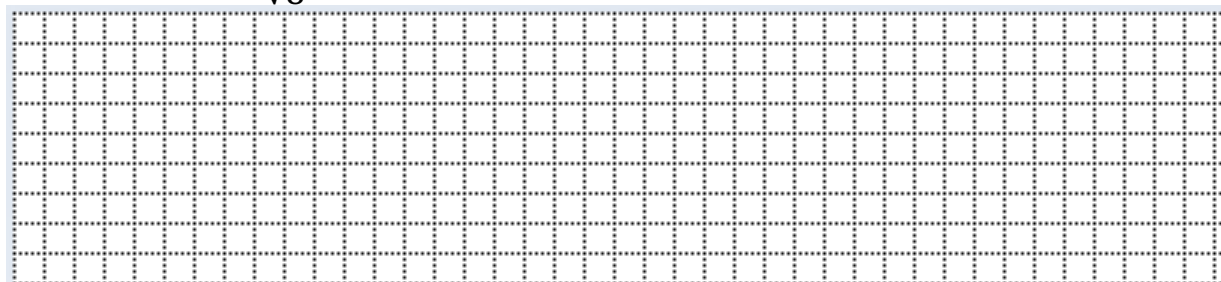
Закінчення речення

- | | |
|----------------|--|
| 1 Пряма CB | А паралельні площині $AA_1 B_1 V$ |
| 2 Пряма CD_1 | Б перпендикулярна площині $AA_1 B_1 V$ |
| 3 Пряма AC | В належить площині $AA_1 B_1 V$ |
| | Г має з площиною $AA_1 B_1 V$ лише дві спільні точки |
| | Д утворює з площиною $AA_1 B_1 V$ кут 45° |

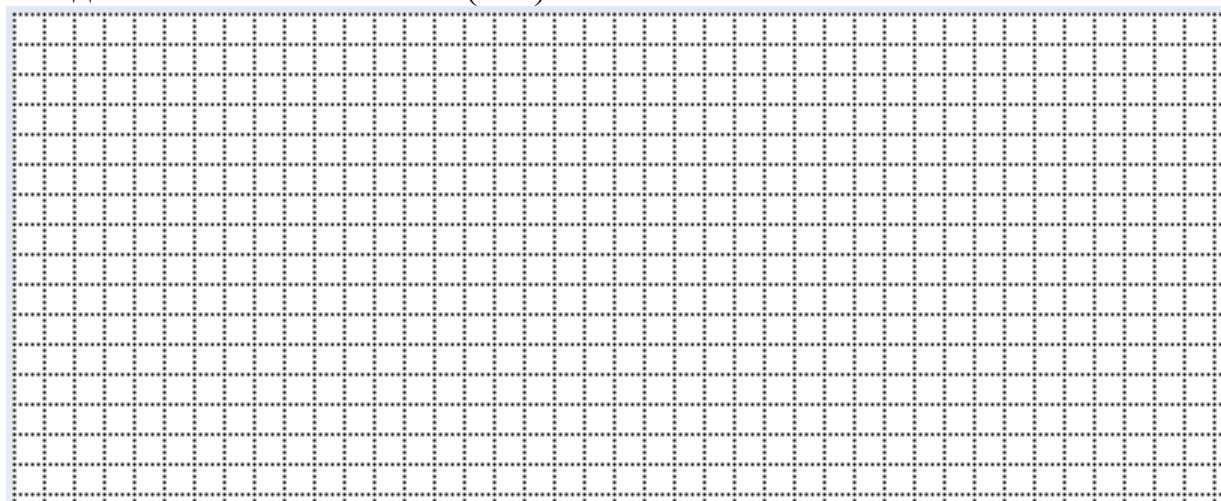


Розв'яжіть завдання 9–11. Одержані числові відповіді запишіть у зошиті та бланку відповіді.

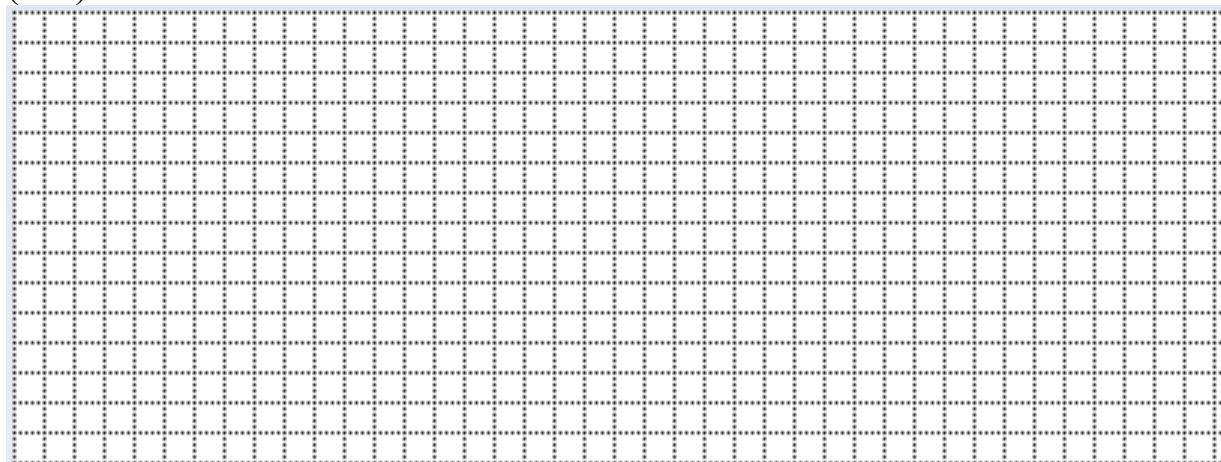
9. Обчисліть $\frac{2^{-1,6} \cdot 4^{4,8}}{\sqrt[3]{8^2}}$. (2 б.)



10. Автобус вирушив з міста A до міста B , відстань між якими становить 150 км. Через 30 хв. із міста A до міста B тією самою дорогою вирушив автомобіль, швидкість якого в $1\frac{1}{5}$ раза більша за швидкість автобуса. Скільки часу (у год) витратив на дорогу з міста A до міста B автомобіль, якщо він прибув до міста B одночасно з автобусом? Уважайте, що автобус та автомобіль рухалися зі сталими швидкостями. (2 б.)



11. У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута D до сторони BC проведено перпендикуляр DK . $BK = 4$ см, $KC = 6$ см. Обчисліть площу ромба $ABCD$ (у см^2). (2 б.)



Розв'яжіть завдання 12. Запишіть у *бланку відповідей* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдання. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдання таблицями, графіками.

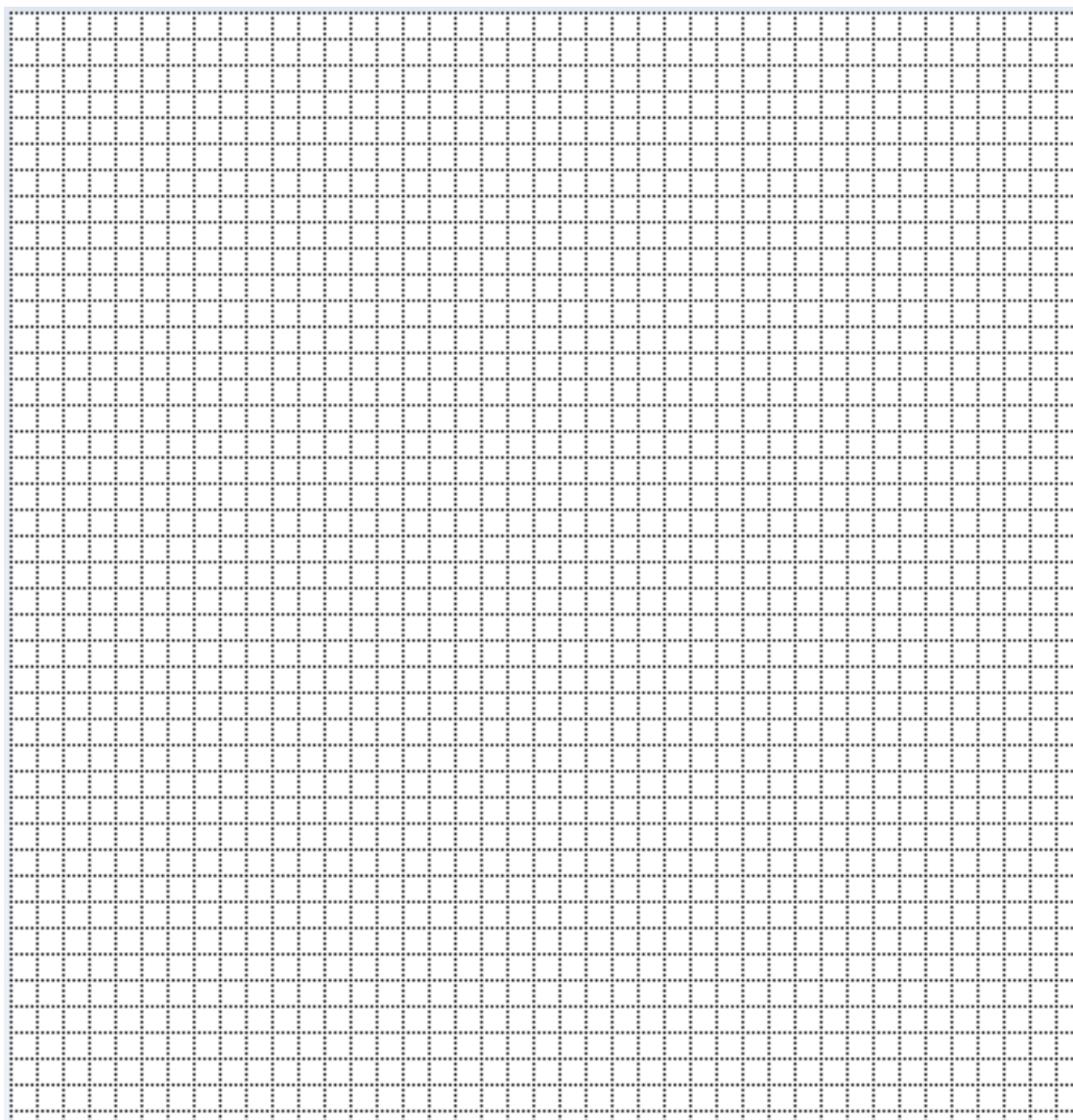
12. Задано функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 6 - x$.

1. Побудуйте графік функції $f(x)$.
2. Побудуйте графік функції $g(x)$.
3. Розв'яжіть графічно нерівність $f(x) < g(x)$.
4. Знайдіть похідну функції $f(x)$.

(3 б.)

Завдання 12.

Розв'язання.



Відповідь. _____

Правильні відповіді

1. В

2. Д

3. В

4. А

5. Г

6. Д

7.

1. А

2. В

3. Б

8.

1. Б

2. А

3. Д

9. 64

10. 2, 5 год

11. 80 см²

12. $[0; 2)$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ЗОШИТ 2

БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ

Клас 10

Прізвище _____

Ім'я _____

Увага! Правильні відповіді до завдань 1–6 позначають тільки так: **×**.
Неправильну відповідь можна виправити, замалювавши попередню позначку та поставивши нову:

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					
5					
6					

	А	Б	В	Г	Д
	×			×	

Правильні відповіді до завдань 7–8

позначають тільки так: **×**.

Їх записують у таблицях; кожне завдання окремо.

7	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

8	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Відповіді до завдань 9–11 записуйте тільки десятковим дробом, урахувуючи положення коми, по одній цифрі в кожній клітці.

9							
10							
11							

Місце для виправлення помилкових
відповідей до завдань 10–11.

9							
10							
11							

ЗАВДАННЯ

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді та позначте його в бланку відповідей.

1. Виконайте множення $0,4x^2 \cdot 5x^3$ (1 б.)

А	Б	В	Г	Д
$0,2x^5$	$20x^5$	$2x^6$	$2x^5$	$0,2x^6$

2. У буфеті друзі купили кілька однакових тістечок вартістю 10 грн кожне і 5 однакових булочок вартістю x грн кожна. Яке з чисел може виражати загальну вартість цієї покупки (y грн), якщо x – ціле число? (1 б.)

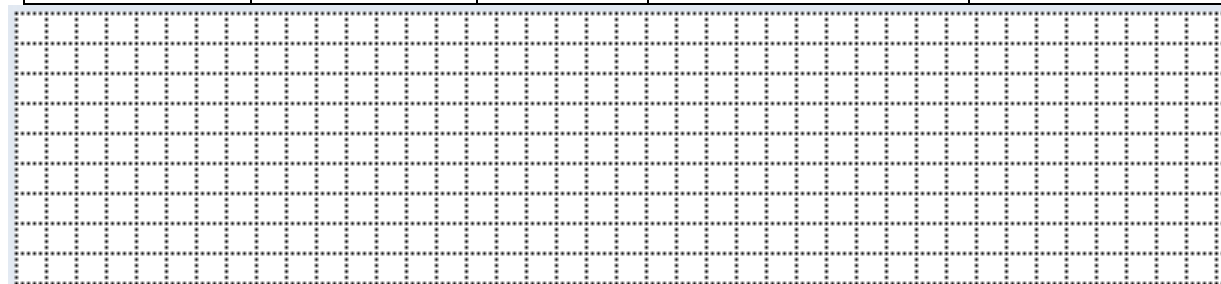
А	Б	В	Г	Д
35	34	33	33	31

3. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 3x - 2y = 9, \\ x + 2y = -5. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ обчисліть суму $x_0 + y_0$. (1 б.)

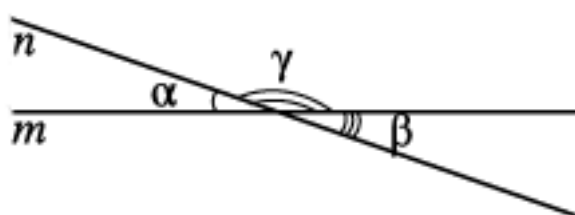
А	Б	В	Г	Д
-4	-1	1	2	-2

4. Відомо, що $a < b$. Серед наведених нерівностей укажіть правильну нерівність. (1 б.)

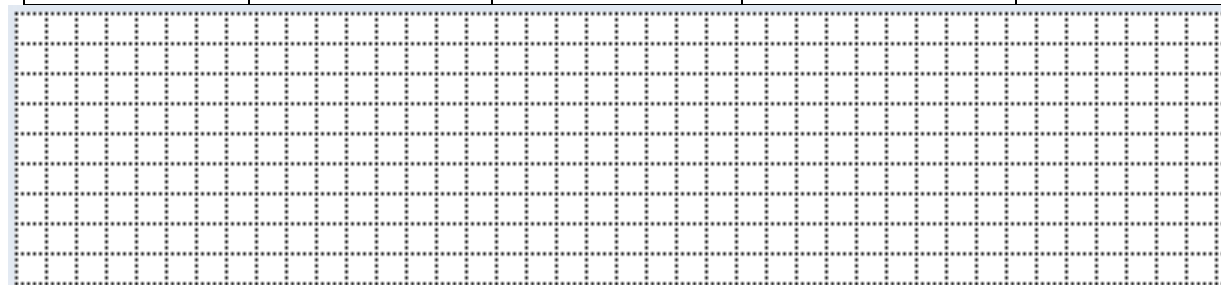
А	Б	В	Г	Д
$-2a < -2b$	$\sqrt{2}a > \sqrt{2}b$	$\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$	$0,5 - a > 0,5 - b$	$a - 4 > b - 4$



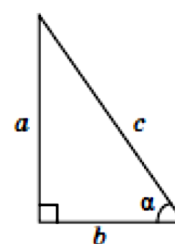
5. На рисунку зображено прямі m і n , що перетинаються. Визначте градусну міру кута γ , якщо $\alpha + \beta = 50^\circ$. (1 б.)



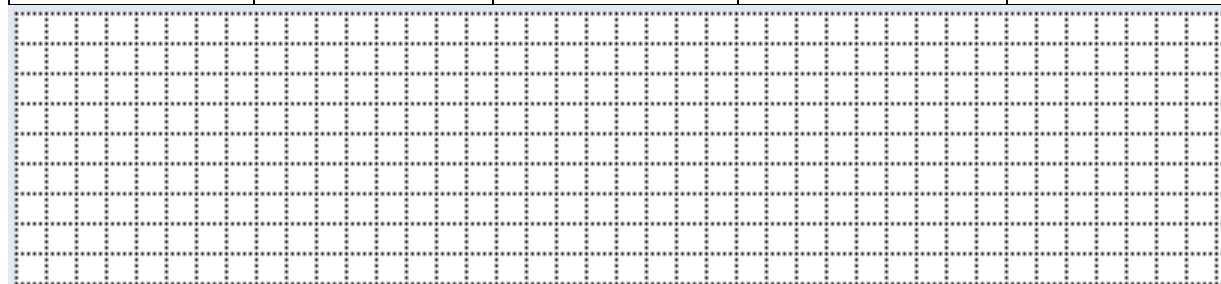
А	Б	В	Г	Д
130°	145°	155°	140°	310°



6. На рисунку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b , гіпотенузою c та гострим кутом α . Укажіть правильну рівність. (1 б.)



А	Б	В	Г	Д
$\cos \alpha = \frac{a}{b}$	$\cos \alpha = \frac{c}{b}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\cos \alpha = \frac{c}{a}$	$\cos \alpha = \frac{a}{c}$



У завданнях 7–8 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Постав позначки в таблицях відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви) у *бланку відповідей*.

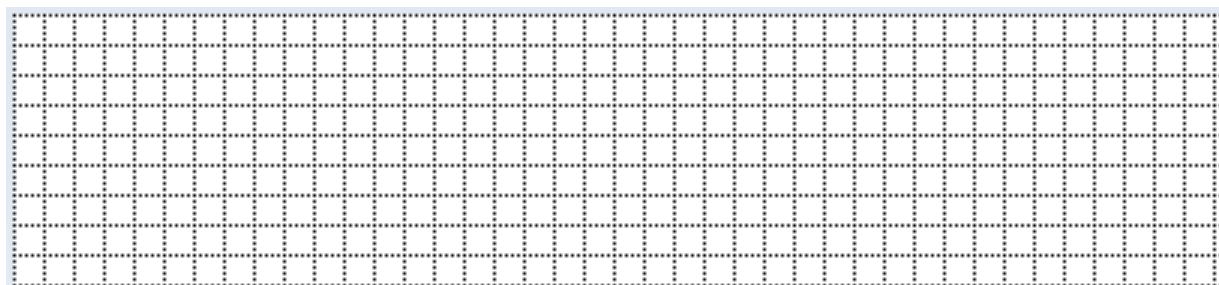
7. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження, якщо $a = -3$.

Початок речення

Закінчення речення

- 1 Значення виразу a^0
- 2 Значення виразу a^2
- 3 Значення виразу $\frac{|a|}{a}$

- А більше за 1
 - Б дорівнює 1
 - В дорівнює 0
 - Г дорівнює -1
 - Д менше за -1
- (3 б.)



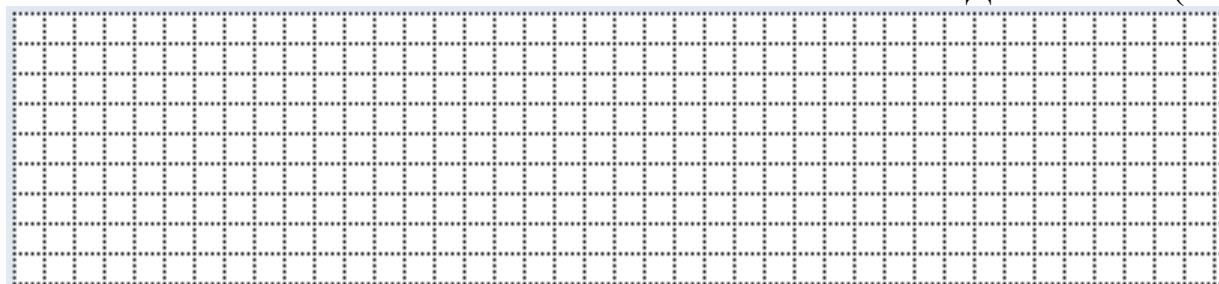
8. Установіть відповідність між многокутником (1–3) і радіусом кола (А–Д), вписаного в цей многокутник

Многокутник

Радіус кола, вписаного в многокутник

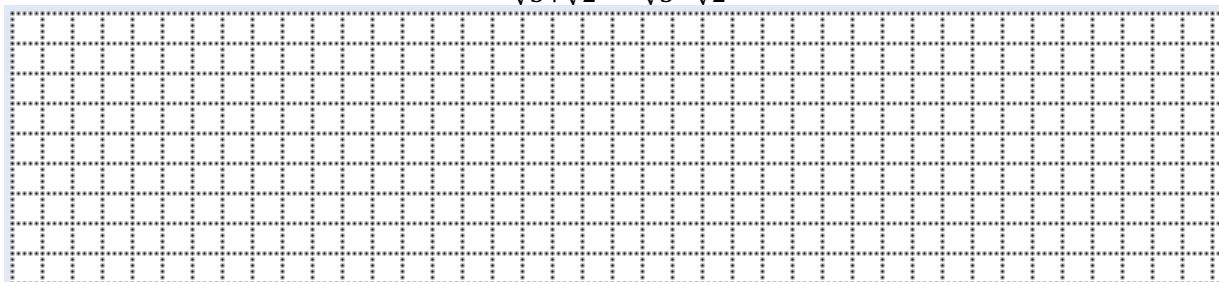
- 1 рівносторонній трикутник зі стороною $3\sqrt{3}$ см
- 2 квадрат зі стороною 2 см
- 3 прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см

- А 1 см
 - Б 1,5 см
 - В $\sqrt{3}$ см
 - Г 2 см
 - Д 4 см
- (3 б.)



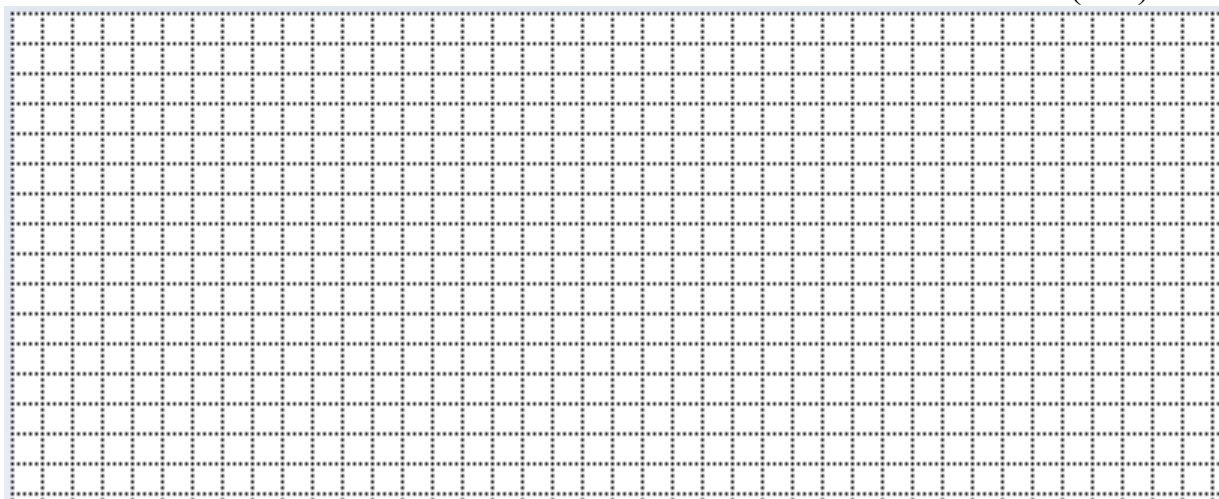
Розв'яжіть завдання 9–11. Одержані числові відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

9. Обчисліть значення виразу $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. (2 б.)

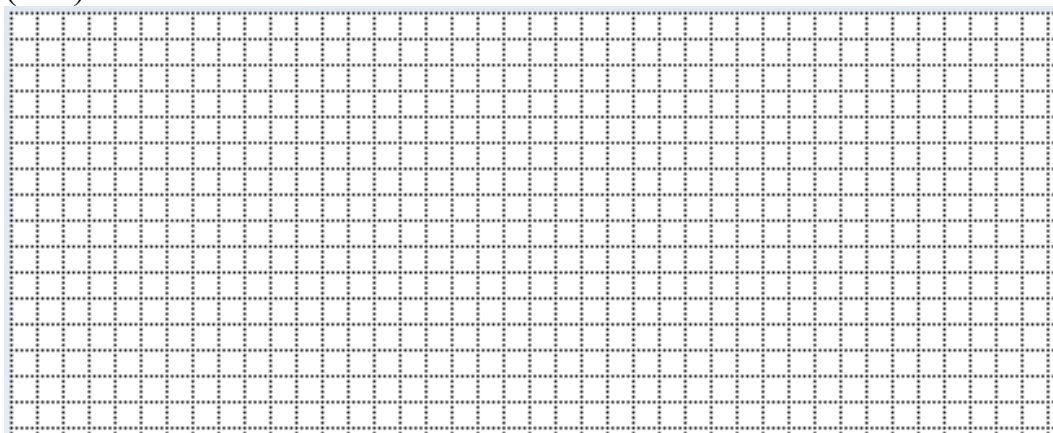


10. Маршрутний автобус, рухаючись зі сталою швидкістю, подолав відстань від міста A до міста B за 4 год, а на зворотній шлях витратив на 30 хв менше. Визначте швидкість (у км/год) автобуса на маршруті від A до B , якщо вона на 9 км/год менша за швидкість на маршруті від B до A . Уважайте, що довжина маршрутів від A до B та від B до A , якими рухався маршрутний автобус, рівні.

(2 б.)



11. У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута D до сторони BC проведено перпендикуляр DK . $BK = 6$ см, $KC = 9$ см. Обчисліть площу ромба $ABCD$ (у см²). (2 б.)



Розв'яжіть завдання 12. Запишіть у *бланку відповідей* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдання. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдання таблицями, графіками.

12. Задано функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 6 - x$.

1. Побудуйте графік функції $f(x)$.

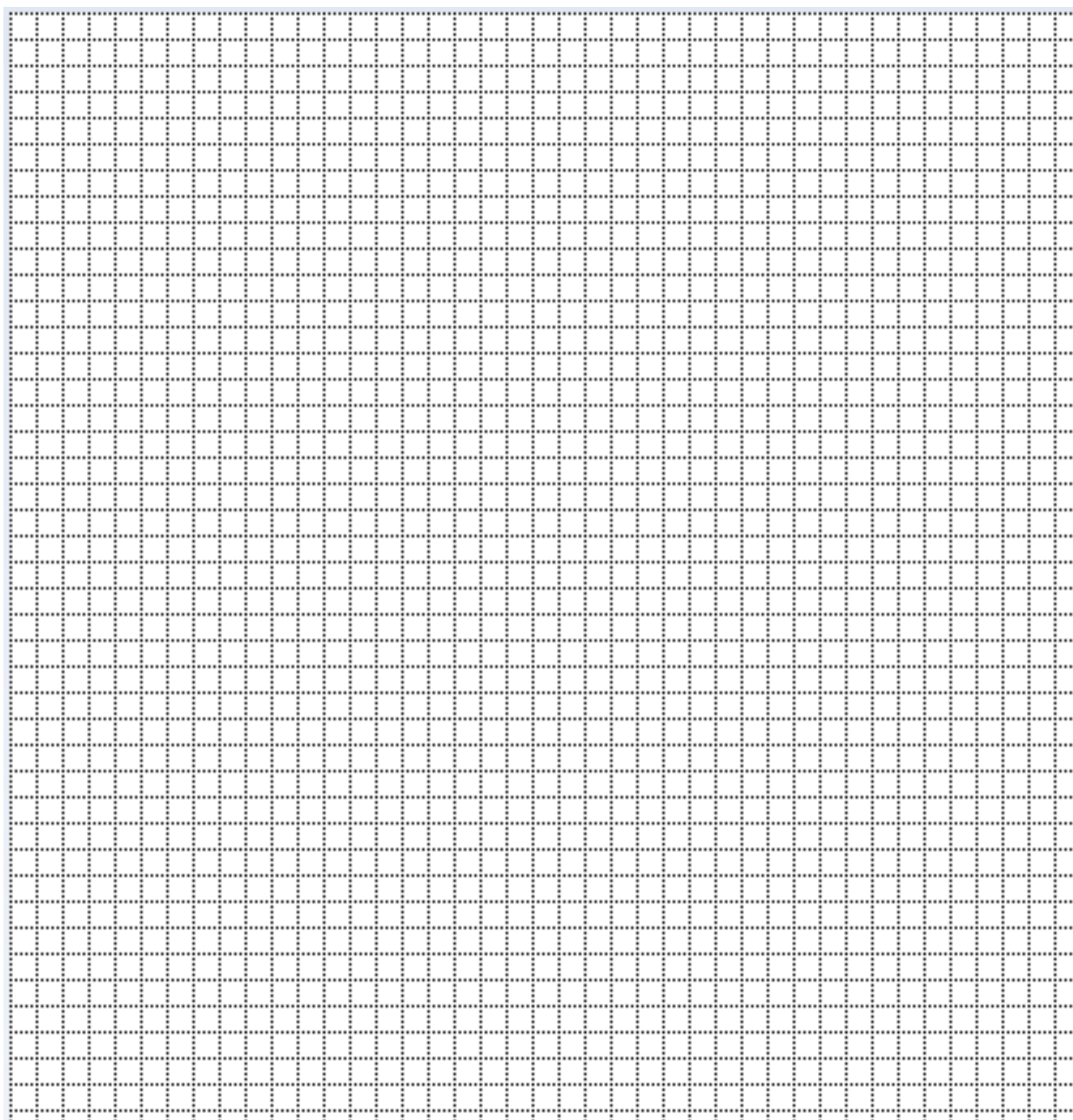
2. Побудуйте графік функції $g(x)$.

3. Розв'яжіть графічно нерівність $f(x) < g(x)$.

(3 б.)

Завдання 12.

Розв'язання.



Відповідь. _____

Правильні відповіді

1. Г

2. А

3. Д

4. Г

5. В

6. В

7.

1. Б

2. А

3. Г

8.

1. Б

2. А

3. Г

9. 5

10. 63 км/год

11. 180 см²

12. [0; 2)

Анкета

(до діагностики вивчення математики учнів основної школи)

(за основу взято методику, розроблену С. Д. Овсєжкіною, А. В. Колчановим)

*Дорогий друже! Уважно прочитай запитання. Вибери **рівно ДВІ** (не більше і не менше) відповіді із запропонованих (обведи або познач галочкою).*

1. Вивчення математики необхідно мені для:
 - а) здобуття освіти;
 - б) майбутньої професії;
 - в) того, щоб навчитися міркувати, думати, аналізувати;
 - г) орієнтуватися у життєвих ситуаціях.
2. Я вважаю, що мета моєї роботи на уроці математики це:
 - а) розуміння та засвоєння нового матеріалу;
 - б) отримання міцних і глибоких знань;
 - в) спілкування з друзями;
 - г) спілкування з учителем;
 - д) отримання гарної оцінки;
 - е) розширення розумового кругозору.
3. Цікавим на уроці математики для мене є:
 - а) робота біля дошки;
 - б спілкування з друзями та вчителем;
 - в) вивчення нового матеріалу із докладним розбором;
 - г) пояснення вчителем нового матеріалу;
 - д) отримання гарних оцінок;
 - е) самостійна та індивідуальна робота (виступ із докладом, письмова робота та ін.).
4. Математика для мене є:
 - а) предметом, який вимагає моїх зусиль і працелюбності;
 - б предметом, який для мене зрозумілий та цікавий;
 - в предметом, який важливий тільки моїм батькам;
 - г) предметом, при вивченні якого я постійно відчуваю труднощі;
 - д) предметом, який для мене не цікавий і не знадобиться для майбутній професії.
5. Я думаю, що успіх моєї роботи на уроці математики залежить від:
 - а) рівня складності задач, які розв'язуються;
 - б) моїх розумових здібностей;
 - в) мого рівня підготовки до заняття;
 - г) докладених зусиль протягом уроку;
 - д) удачі;
 - е) уважного ставлення до пояснень навчального матеріалу вчителем.
6. Моя активність на уроці математики залежить від:
 - а) бажання отримати похвалу від однолітків та/або вчителя;
 - б) мого настрою;
 - в) бажання отримати гарну оцінку;
 - г) бажання більше дізнатися;

- д) упевненості у тому, що матеріал, який вивчається на уроці, знадобиться мені у подальшому.
7. Я вивчаю нову тему з математики сумлінно, якщо:
- а) вона мені цікава і зрозуміла, не викликає утруднень;
 - б) мені потрібно виправити незадовільну оцінку;
 - в) прийшов на урок із гарним настроєм;
 - г) на наступний урок планується письмова робота;
 - д) мене змушують це робити вчитель та/або батьки.
8. Вивчати математику мене змушує:
- а) накази батьків;
 - б) почуття відповідальності та старанність;
 - в) погані оцінки у журналі;
 - г) ставлення вчителя;
 - д) дух змагання з однокласниками;
 - е) бажання одержати нові знання і вдосконалити навички та уміння.
9. Якщо нова тема з математики для мене викликає утруднення і не зрозуміла, то я:
- а) поспішаю на консультацію до вчителя;
 - б) звертаюся за допомогою до однокласників;
 - в) намагаюсь розібратися, докладаючи зусиль;
 - г) нічого не роблю; сподіваюся, що завдання з цієї теми не зустрінуться на контрольній або самостійній роботах;
 - д) розбираю дану тему зі своїм репетитором з математики.
10. Отримання гарних оцінок на уроці з математики – це результат:
- а) моєї активної роботи;
 - б) сумлінної підготовки до уроку;
 - в) удачі;
 - г) моїх здібностей і глибоких знань;
 - д) допомоги батьків або однокласників.
11. Мені подобається виконувати домашні завдання з математики, коли:
- а) я можу самостійно розібратися з ним, без сторонньої допомоги;
 - б) завдання невелике за обсягом;
 - в) у мене немає можливості його списати;
 - г) завжди, оскільки у процесі виконання я вчуся думати, зіставляти, аналізувати, використовувати різні алгоритми;
 - д) у мене є вільний час;
 - е) у мене гарний настрій і батьки не змушують його робити.
12. Мені НЕ подобається виконувати практичні завдання з математики, якщо вони:
- а) великі за обсягом і займають багато часу;
 - б) вимагають розумової напруги;
 - в) виконуються за шаблоном і не викликають зацікавленості;
 - г) мають достатньо високий рівень складності;
 - д) не потребують кмітливості.
13. Припускаючись помилок при розв'язанні завдань з математики, я:
- а) звертаюсь за допомогою до вчителя або однокласників;
 - б) виконую перевірку доти, доки не знайду помилку;

- в) вирішую задане завдання знову;
 г) залишаю завдання нерозв'язаним і переходжу до іншого;
 д) нервуюсь і відмовляюсь його виконувати.

14. Я вважаю, що мої знання і робота на уроці математики відповідають оцінці _____
 (за 12-бальною шкалою поставте оцінку, що, на Ваш погляд, дійсно відображує рівень Ваших знань з математики. Якщо оцінка, що виставив учитель, відрізняється від Вашої, можете вказати причину цієї розбіжності).

Критерії оцінювання

Запитання 1

Варіант відповіді	а	б	в	г
Кількість балів	2	2	5	4

Запитання 2

Варіант відповіді	а	б	в	г	д	е
Кількість балів	4	5	2	2	2	5

Запитання 3

Варіант відповіді	а	б	в	г	д	е
Кількість балів	4	2	5	3	2	5

Запитання 4

Варіант відповіді	а	б	в	г	д
Кількість балів	4	5	1	2	1

Запитання 5

Варіант відповіді	а	б	в	г	д	е
Кількість балів	3	4	4	5	2	5

Запитання 6

Варіант відповіді	а	б	в	г	д
Кількість балів	3	1	2	5	5

Запитання 7

Варіант відповіді	а	б	в	г	д
Кількість балів	4	3	2	1	1

Запитання 8

Варіант відповіді	а	б	в	г	д	е
Кількість балів	2	5	2	4	4	5

Запитання 9

Варіант відповіді	а	б	в	г	д
Кількість балів	5	4	5	1	3

Запитання 10

Варіант відповіді	а	б	в	г	д
Кількість балів	5	5	3	4	3

Запитання 11

Варіант відповіді	а	б	в	г	д	е
Кількість балів	4	2	1	5	2	3

Запитання 12

Варіант відповіді	а	б	в	г	д
Кількість балів	2	1	5	3	4

Запитання 13

Варіант відповіді	а	б	в	г	д
Кількість балів	4	5	3	2	1

Оціночний лист __ (Прізвище, ім'я)

(за результатами опитування щодо мотивації вивчення учнем математики)

Номер Листа	Змістові блоки мотивації вивчення математики учнем													
	Рівень усталеного інтересу до математики				Поведінковий компонент навчальної діяльності					Самооцінка навчальних здібностей з математики				
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
від по від														
б а л														
$\sum_{\text{за 2}}$														
$\sum_{\text{заг}}$														
рівень	високий середній низький				високий середній низький					високий середній низький				
Характеристика за рівнем (за блоками) (потрібно підкреслити)	В) Характеризується проявом стійкого інтересу учня до вивчення математики, усвідомленням необхідності отримання і вдосконалення універсальних навчальних дій, їх застосуванню С) Свідчить про те, що учень позитивно ставиться до навчання математики: конкретні цілі зосереджені за інтересом, діяльність школяра вимагає контролю. Н) Характеризується відсутністю інтересу до навчання математики, що може бути спричинено низькими мотиваційними установками і слабким рівнем підготовки				В) Характеризується усвідомленням школярем необхідності отримання і вдосконалення одержаних умінь і навичок, їх застосування; свідчить про зацікавленість математикою, продуктивність роботи, цілепокладання, а також здатність до самостійного дослідження. С) Свідчить про наявність у здобувача середньої освіти уявлень про конкретну мету навчання математики – оволодіння основними знаннями, вміннями, навичками, однак утруднюється застосувати одержані знання до пізнання реальної дійсності. Н) Характеризується необхідністю уважного контролю за учнем з боку вчителя: учень нерідко докладає значних зусиль до оволодіння знаннями, але не завжди йому це вдається за різними причинами					(заповнюється дослідником власноруч)				
Рівень мотивації (потрібно підкреслити)	Загальна сума балів: Рівень мотивації до навчання математики: високий нормальний занижений низький Загальна характеристика за рівнем мотивації: високий рівень свідчить про наявність у здобувача середньої освіти активності у навчальній діяльності з математики, здатності до досліджень у математичній галузі, позитивної мотиваційної установки; нормальний (середній) рівень проявляється в учня, здатного ставити перед собою певні навчальні цілі та задачі, але при цьому не завжди досягати очікуваного результату за різними обставинами. Потребує уважного контролю з боку вчителя і батьків; занижений рівень проявляється в учня, для якого потрібен постійний контроль з боку вчителя та батьків; дитині важко застосовувати одержані знання з математики у стандартних ситуаціях, при цьому для отримання цих знань докладаються значні зусилля; низький рівень характеризується відсутністю в учня інтересу до математики, слабкою вмотивованістю до її вивчення.													

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Скворцова Світлана Олексіївна, доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України, завідувач кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

skvortsova.so@pdpdpu.edu.ua

[ORCID 0000 – 000 – 4047 - 1301](#)

Светной Олександр Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

svetnoy.op@pdpdpu.edu.ua

[ORCID 0000-0003-2218-5440](#)

Коростіянець Тамара Петрівна, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

korostiyanec.TP@pdpdpu.ua

[ORCID 0000-0003-0782-3774](#)

Іванова Світлана Володимирівна, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

ivasvit@pdpdpu.edu.ua

[ORCID 0000 – 0002 – 4301 - 9954](#)

Кушнірук Анастасія Сергіївна, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Kushniruk.AS@pdpdpu.edu.ua

[ORCID 0000 – 0002 – 4540 - 8750](#)

Недялкова Катерина Василівна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Niedialkova.KV@pdpdpu.edu.ua

[ORCID 0000 – 0003 – 1092 - 2116](#)

Гаєвець Яна Станіславівна, кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Haievets.YS@pdpdpu.edu.ua

[ORCID 0000 – 0003 – 4580 - 4080](#)

Тумбрукакі Алла Валеріївна, старший викладач кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Tumbrukaki.AV@pdpu.edu.ua

[ORCID 0000 – 0002 – 4919 – 979X](https://orcid.org/0000-0002-4919-979X)

Ищенко Анастасія Леонідівна, старший викладач кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

praktika@pdpu.edu.us

[ORCID 0000-0002-8233-3858](https://orcid.org/0000-0002-8233-3858)

Друзьяк Олена Євгенівна, директор Приватної організації (установи, закладу) «Одеський ліцей «Мрія», учитель математики, вчитель вищої категорії e.e.druziyak@mriya.org.ua

Марахова Тетяна Олегівна, вчитель початкових класів Одеського приватного навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І ступеня з поглибленим вивченням іноземних мов – дошкільний навчальний заклад «Мрія», вчитель-методист, вчитель РН (розвивального навчання), учитель вищої категорії t.o.marahova@mriya.org.ua

Демченко Евеліна Миколаївна, методист Приватної організації (установи, закладу) «Одеський ліцей «Мрія», вчитель вищої категорії, відмінник освіти України e.n.demchenko@mriya.org.ua

Шинкаренко Євген Павлович, учитель математики Приватної організації (установи, закладу) «Одеський ліцей «Мрія» e.p.shinkarenko@mriya.org.ua

Наукове видання

**НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ
ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ
ЗДОБУВАЧІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ**

монографія

за редакцією К. В. Неद्याлкової

Редагування і комп'ютерна верстка: К. В. Неद्याлкова

**Науково-методичні засади формування математичної компетентності
здобувачів середньої освіти : монографія / ДЗ «ЛНПУ імені К. Д. Ушинського»;
за ред. К. В. Неद्याлкової. – Одеса: Видавець ФОП Бойчук, 2021. 279 с.**

Підписано до друку 4.02.2021р. Формат 1/8.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Таймс.
Ум. друк арк. 14,92. Наклад 30 прим.

Друк: ФОП Бойчук А.Б.
м.Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 56
tolikboychuk@i.ua