

Клубіс Я.Д., Шкатуляк Н.М.

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Одеса 2020

ЗМІСТ

Передмова	5
Вступ.....	6
1. Деякі відомості з математичної теорії поля	8
2. Узагальнення основних закономірностей електричних та магнітних явищ	17
2.1. Узагальнення закону Кулона	19
2.2. Узагальнення закону Біо-Савара-Лапласа. Закон повного струму	24
2.3. Закон електромагнітної індукції в диференціальній формі	25
2.4. Рівняння безперервності. Струм зміщення	27
3. Система рівнянь Максвелла	30
3.1. Класифікація задач електродинаміки	31
3.2. Граничні умови для електричного та магнітного полів	32
4. Статичні поля.....	36
4.1. Деякі питання електростатики.....	36
4.1.1. Провідники в електростатичному полі	36
4.1.2. Дипольний момент системи зарядів	40
4.1.3. Поле диполя	41
4.1.4. Діелектрики в полі. Електричне поле у присутності діелектриків.....	45
4.1.5. Енергія системи зарядів. Енергія електростатичного поля.....	48
4.2. Деякі питання магнітостатики	51
4.2.1. Векторний потенціал магнітного поля	51

4.2.2. Магнітне поле елементарного струму	53
4.2.3. Магнетики в магнітному полі. Магнітне поле у присутності магнетиків.....	58
4.2.4. Взаємодія струмів.....	61
4.2.5. Енергія струму в магнітному полі. Енергія взаємодії струмів. Власна енергія струму	62
4.2.6. Енергія магнітного поля	66
5. Змінні поля	68
5.1. Закон збереження та перетворення енергії для електромагнітного поля. (Теорема Умова-Пойнтінга).....	68
5.2. Електродинамічні потенціали	70
5.3. Деякі відомості про хвильове рівняння	74
5.4. Потенціали, що запізнюються	75
5.5. Електромагнітні хвилі в діелектрику	80
5.6. Поняття про електромагнітну теорію світла	85
5.7. Імпульс електромагнітного поля. Тиск світла	86
5.8. Розповсюдження електромагнітних хвиль в провідних середовищах	89
5.9. Закони геометричної оптики. Формули Френеля	92
6. Елементи класичної теорії випромінювання.....	97
6.1. Випромінювання короткої антени.....	97
6.2. Дипольне випромінювання	103
6.3. Випромінювання заряду, що рухається прискорено	104
7. Задачі	107
8. Література	120

ПЕРЕДМОВА

Даний навчальний посібник відповідає програмам з теоретичної фізики для фізичних спеціальностей фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та тих напрямків підготовки студентів, де передбачено вивчення загальних основ теоретичної фізики чи окремих її розділів. Запропонований курс “Основи електродинаміки” передбачає знайомство читача з основами електричних та магнітних явищ. Будова курсу традиційна, тобто він містить у собі детальний вивід макроскопічних рівнянь Максвелла в диференційній формі (хоча в ньому присутні, зрозуміло, і рівняння в інтегральній формі) і застосування цих рівнянь для опису статичних та змінних полів. Ми вважаємо недоцільним викладання електродинаміки для зазначених спеціальностей з точки зору теорії відносності, як це робиться в деяких виданнях. При цьому треба мати на увазі, що чотиримірна, тобто релятивістська, форма електродинаміки буде висвітлена у відповідному розділі теорії відносності. Відомості, що містяться в курсі з деякими доповненнями, які повинні бути надані на практичних та лабораторних заняттях, достатні для того, щоб привити студентам навички розрахунку електричних та магнітних полів.

Щодо основ теорії розповсюдження електромагнітних хвиль, автори мають намір здійснити окреме видання навчального посібника з цих питань.

ВСТУП

Оточуючі нас об'єкти матеріального світу розмежовують на два великі самостійні класи, один з яких називають речовиною, а інший – полем. В основі принципу, за яким проводиться подібний розподіл, лежить той факт, що речовина, на відміну від поля, володіє інертною масою в звичайному механічному значенні цього поняття. Рух макроскопічних об'єктів, що складаються з речовини, описується відомими законами механіки.

Розглядаючи поле як самостійний вид матерії, можна назвати відомі науці електромагнітне та гравітаційне поля, а також специфічні види внутріатомних полів, що характеризуються слабкими і сильними взаємодіями.

Предметом електродинаміки є вивчення електромагнітного поля, яке проявляє себе за допомогою сил, що діють на частинки речовини, які володіють електричним зарядом. Експериментально знайдена дискретна структура зарядів. Величини будь-яких зарядів, що зустрічаються в природі, кратні заряду електрона e , рівному приблизно $\sim 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Оскільки електромагнітне поле характеризується силами, що діють на заряди, які знаходяться в області існування поля, а сили, у свою чергу, представляються векторами, є можливість описати електромагнітне поле за допомогою абстрактних математичних моделей – векторних полів.

Всю сукупність електромагнітних явищ прийнято розділяти на дві групи. До першої групи відносяться електричні, а до другої – магнітні явища. Відповідно до цього виділяють два окремі різновиди електромагнітного поля, що носять назву електричного і магнітного

полів. Важливо підкреслити, що твердження про можливість представлення електромагнітного поля як суми електричних і магнітних полів означає визнання їх внутрішньої єдності та взаємообумовленості.

Фундаментальною задачею теорії електромагнетизму є узагальнення численних експериментальних результатів, які стосуються електричних і магнітних явищ. Ця задача була вирішена в 70-х роках XIX століття видатним англійським фізиком Джеймсом Клерком Максвеллом, який сформулював рівняння, що носять його ім'я. Вони повно та однозначно описують всю сукупність електромагнітних явищ в макроскопічних масштабах. Рівняння Максвелла в теорії електромагнетизму грають таку ж роль, як закони Ньютона в механіці.

Результати досліджень Максвелла зіграли величезну роль спочатку в справі наукового, а потім і технічного прогресу. Хвильовий характер електромагнітного поля, передбачений Максвеллом теоретично, а потім експериментально підтверджений Генріхом Герцем, став відправним моментом у роботах великого російського вченого, винахідника радіо Олександра Степановича Попова.

1 ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Теорія електромагнітного поля була створена Д. К. Максвеллом (1831–1879) на основі математичного узагальнення основних експериментальних законів електрики і магнетизму, відомих на той час. Виявилося, що найбільш зручним математичним апаратом для запису рівнянь Максвелла, особливо в диференціальній формі, є математична теорія поля, або, як її ще називають, векторний аналіз. Векторний аналіз – це фактично диференціальне та інтегральне числення, пристосоване до векторних величин.

В математиці розрізняють поля двох типів: якщо в кожній точці простору визначений якийсь скаляр $\varphi(x,y,z)$, то кажуть, що в просторі задано скалярне поле, або поле скаляра φ . Фізичними прикладами скалярних полів можуть бути: поле розподілених у просторі мас, поле тисків, тощо. Якщо в кожній точці простору визначений деякий вектор $\vec{A}(A_x; A_y; A_z)$, то кажуть, що в просторі задане векторне поле, або поле вектора $\vec{A}$. Фізичні приклади векторних полів: поле швидкостей протікаючої рідини, поле імпульсів, поле прискорень, тощо.

Якщо вектор $\vec{A}$ відповідає деякій силі, то поле називається силовим. Таким є поле напруженості гравітаційного поля, поле напруженості електричного поля, поле вектора магнітної індукції (або магнітне поле), поле сили пружності, тощо.

Лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають за напрямками з вектором поля в цій точці, називають векторними лініями поля. Якщо це поле силове, то векторні лінії називають силовими лініями.

Рівняння векторних ліній має вигляд:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z};$$

де $A_i = A_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$.

Фактично ми маємо три диференціальні рівняння, два з яких незалежні. Рішення системи цих рівнянь приводить до рівняння векторних ліній.

Розглянемо основні поняття і деякі формули векторного аналізу, а також доведемо дві головні теореми векторного аналізу: теорему Остроградського – Гаусса і теорему Стокса.

Виберемо в просторі деяку елементарну площадку dS і напрям обходу її контуру. Побудуємо вектор $d\vec{S}$ такий, щоб модуль його був рівний площі dS і щоб він був перпендикулярний до площадки dS , а напрям його склав би правий гвинт з напрямом обходу контуру (рисунок 1.1).

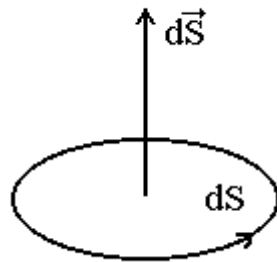


Рисунок 1.1 – Вектор елементарної площадки

Цей вектор називається вектором елементарної площадки $d\vec{S}(dS_x, dS_y, dS_z)$. Його компоненти: $dS_x = dydz$, $dS_y = dxdz$, $dS_z = dxdy$.

Введемо поняття потоку векторного поля, для цього вирішимо наступну гідродинамічну задачу. Хай в потоці рідини виділена деяка елементарна площадка під довільним кутом до напрямку потоку.

Знайдемо щосекундну витрату рідини через цю площадку. Спроектуємо площадку dS на площину, перпендикулярну вектору $\vec{V}$. Ясно, що витрати рідини щомиті через площадки dS і dS' однакові, оскільки площадки елементарні (рисунок 1.2).

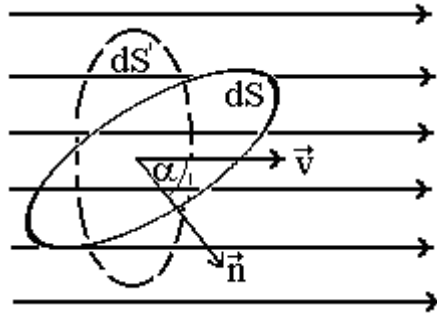
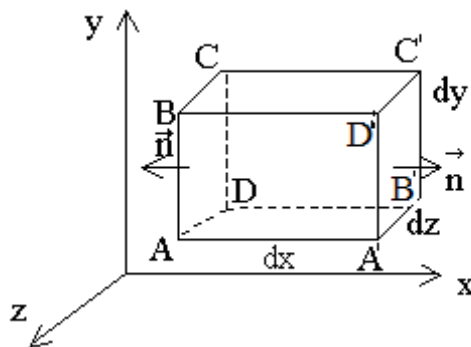


Рисунок 1.2 – До розрахунку потоку вектора

Але через площадку dS' щосекундно проходить маса рідини, яка знаходиться в циліндрі, основа якого дорівнює dS' , а утворююча дорівнює швидкості. Тобто елементарний потік цієї маси рідини дорівнює $dJ = \rho V dS'$. Вважатимемо для простоти, що рідиною є вода: $\rho = 1 \text{ г/см}^3$. Отже $dJ = V dS'$. Але з геометрії відомо, що $dS' = dS \cos \alpha$, тому $dJ = (\vec{V} d\vec{S})$ або $dJ = (\vec{V} \vec{n}) dS$, де $\vec{n}$ – орт вектора $d\vec{S}$, тобто $d\vec{S} = \vec{n} dS$.

Узагальнимо одержаний вираз на будь-яке векторне поле $\vec{A}$. Потоком вектора $\vec{A}$ через елементарну площадку dS називають величину $dJ = (\vec{A} d\vec{S})$, а величину $J = \int_S (\vec{A} d\vec{S})$, що фактично дорівнює $J = \iint A_x dydz + \iint A_y dx dz + \iint A_z dx dy$, потоком векторного поля $\vec{A}$ через деяку поверхню S .

Знайдемо потік векторного поля через замкнуту поверхню. Як таку поверхню виберемо спочатку поверхню елементарного паралелепіпеда (рисунок 1.3).



**Рисунок 1.3 – Визначення потоку векторного поля
через замкнуту поверхню**

На рисунку 1.3 вказані нормалі до бічних граней $ABCD$ і $A'B'C'D'$. Ці нормалі позитивні. Взагалі позитивною вважається нормаль, яка виходить з об'єму назовні, а негативної навпаки.

Обчислимо потік вектора через грань $ABCD$:
 $dJ_{ABCD} = -A_x(x, y, z) dydz$ знак «мінус» показує, що нормаль до грані направлена проти осі x .

Точно так же можна записати: $dJ_{A'B'C'D'} = A_x(x + dx, y, z) dydz$. Зміна аргументу в функції A_x пов'язана з тим, що в міру просування від грані $ABCD$ до грані $A'B'C'D'$ координата x змінюється на dx . Надалі ми не писатимемо координати y і z , оскільки вони не змінюються.

Розкладемо $A_x(x + dx)$ в ряд в околиці точки x :

$$A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \dots \approx A_x(x + dx).$$

Знайдемо сумарний потік через грані $ABCD$ і $A'B'C'D'$:

$$dJ_{ABCD} + dJ_{A'B'C'D'} = \left(A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx - A_x(x) \right) dydz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dydz.$$

Аналогічний вираз можна записати для двох інших пар протилежних граней. Тоді потік через всю замкнуту елементарну поверхню запишеться так:

$$dJ = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Вираз $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{A}$ називається дивергенцією або

розходимістю вектора $\vec{A}$. Оскільки $dx dy dz = dV$, то

$$dJ = \operatorname{div} \vec{A} dV. \quad (1.1)$$

З (1.1) легко з'ясувати математичний сенс дивергенції. Дійсно, з (1.1) витікає, що, дивергенція є границя відношення потоку вектора поля $\vec{A}$ через деяку поверхню, до об'єму, обмеженого цією поверхнею, коли останній стягується в точку. Тобто

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{A} d\vec{S})}{V}.$$

Можна дати наочну інтерпретацію дивергенції таким чином. Для цього зручно знову звернутися до гідродинаміки. Хай у деякому об'ємі розподілені одиничні джерела поля, тобто такі фонтанчики, які в одиницю часу вивергають одиницю маси рідини. Тоді щосекундна витрата рідини через замкнуту поверхню, що оточує об'єм, де знаходяться фонтанчики, буде дорівнювати кількості цих фонтанчиків. Вираз для $\operatorname{div} \vec{A}$ показує, що вона є об'ємна густина одиничних фонтанчиків. Можна сказати також, узагальнюючи вищесказане на будь-яке поле, що дивергенція чисельно дорівнює питомій потужності джерел поля. Якщо $\operatorname{div} \vec{A} > 0$ в околі деякої точки, то говорять, що в цій точці є джерела поля. Якщо $\operatorname{div} \vec{A} < 0$, то говорять, що в точці є негативні джерела або стоки. Векторні лінії поля завжди починаються на позитивних джерелах і закінчуються на негативних. Якщо $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ всюди, то це означає, що поле не має

джерел. Воно називається соленоїдальним і його векторні лінії замкнені.

Розглянемо тепер деякий кінцевий об'єм. Такий об'єм можна розбити на елементарні паралелепіпеди. Для кожного з них справедлива формула (1.1). Підсумуємо (1.1) за всіма такими паралелепіпедами. Очевидно, що елементарні потоки через суміжні грані будуть взаємно знищуватись, оскільки потік, що виходить з однієї грані, входить в суміжну грань і, отже, ці потоки мають протилежні знаки. Некомпенсованими залишаться тільки ті потоки, які проходять через грані, що створюють поверхню, яка охоплює даний об'єм. В той же час підсумовування в правій частині (1.1) зведеться до простого складання дивергенції за всім об'ємом. В результаті одержимо:

$$\oint_S (\vec{A} d\vec{S}) = \int_V \text{div} \vec{A} dV \quad (1.2)$$

Ми одержали одне з найважливіших інтегральних перетворень векторного аналізу, яке називається теоремою Остроградського – Гаусса: *потік вектора через замкнуту поверхню, що обмежує деякий об'єм, рівний інтегралу від дивергенції вектора за цим об'ємом.*

Розглянемо деякий замкнутий контур L . Виберемо напрям його обходу і відповідно до цього напрямку введемо вектор $d\vec{L}(dx, dy, dz)$. Складемо скалярний добуток $(\vec{A} d\vec{L})$.

Інтеграл

$$C = \oint_L (\vec{A} d\vec{L}) = \int (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (1.3)$$

називається циркуляцією вектора $\vec{A}$ за контуром L . Фізичний сенс (1.3) полягає в наступному. Якщо $\vec{A}$ – деяке силове поле, наприклад,

електричне, то циркуляція цього вектора є робота, що здійснюється цим полем при переміщенні одиничного заряду замкнутим шляхом.

Обчислимо циркуляцію для деякого елементарного контура. Нехай цей контур буде прямокутним і нехай проекції його на координатні площини також будуть прямокутними (рисунок 1.4).

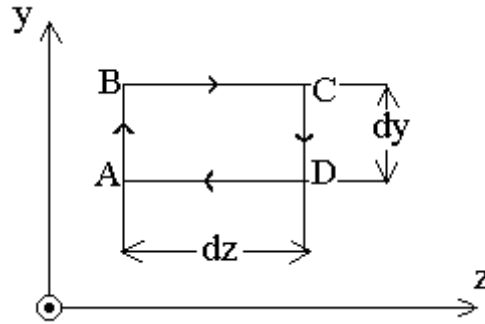


Рисунок 1.4 – До введення поняття ротору

Розглянемо одну з таких проекцій і знайдемо циркуляцію за контуром ABCD:

$$dC_{ABCD} = A_y(x, y, z)dy + A_z(x, y + dy, z)dz - A_y(x, y, z + dz)dy - A_z(x, y, z)dz.$$

Розкладемо $A_z(y + dy)$ в ряд: $A_z(y + dy) = A_z(y) + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy + \dots$

Аналогічно $A_y(z + dz) = A_y(z) + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz + \dots$

Тоді

$$dC_{ABCD} = \left(A_y(z) - A_y(z + dz) - \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \right) dy + \left(A_z(y) + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy - A_z(y) \right) dz = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz.$$

Тут $dydz = dS_x$, а $\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x$ – проекція деякого вектора $\vec{B}$ на вісь

x . Тоді $dC_{ABCD} = B_x dS_x$. Точно так же можна обчислити циркуляцію через інші проекції. При цьому одержимо компоненти вектора

$\vec{B}$: $B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$, $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$. Отже, $\vec{B}$ – вектор з компонентами

$\vec{B} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$. Позначимо $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ (rot – ротор або вихор). Тоді

$$dC = (\text{rot} \vec{A} d\vec{S}) = \text{rot}_n \vec{A} dS, \quad (1.4)$$

де $\vec{n}$ – орт нормалі до площадки dS .

Формула (1.4) дає математичний сенс ротора:

$$\text{rot}_n \vec{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{A} d\vec{L})}{S}, \text{ тобто нормальна складова ротора вектора } \vec{A} \text{ є}$$

границя відношення циркуляції цього вектора за деяким контуром до поверхні, що обмежена цим контуром, коли останній стягується в точку.

Розглянемо тепер деякий кінцевий контур. Його завжди можна розбити на елементарні прямокутні контури, так що він буде сіткою, осередками якої є елементарні прямокутники (рисунок 1.5).

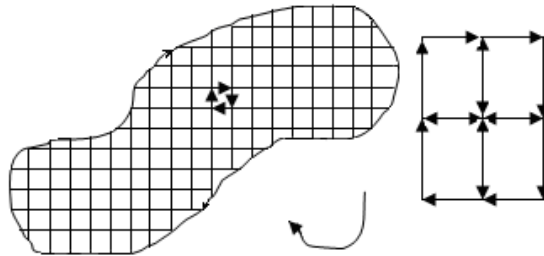


Рисунок 1.5 – Розбиття кінцевого контуру на елементарні прямокутні контури

Підсумуємо (1.4) відповідно до такого розбиття. Тоді в кожному елементі циркуляції входять такі складові, які повторюватимуться двічі при підсумовуванні циркуляцій суміжними контурами. При цьому складові суміжних сторін матимуть протилежні знаки і тому будуть взаємно знищуватись. Не компенсованими в сумі залишаються тільки складові тих сторін, які

утворюють зовнішній контур. В той же час праві частини (1.4) просто підсумуються, і в результаті, одержимо:

$$\oint_L (\vec{A} d\vec{L}) = \int_S (\text{rot} \vec{A} d\vec{S}) \quad (1.5)$$

Це одна з інтегральних теорем векторного аналізу, звана теоремою Стокса: *циркуляція вектора деяким контуром, що обмежує деяку поверхню, рівна потоку ротора цього вектора через цю поверхню.*

Якщо ротор деякого поля не дорівнює нулю, то поле називається вихровим, векторні лінії такого поля замкнуті. Якщо $\text{rot} \vec{A} = 0$, то поле називається потенціальним.

У векторному аналізі часто зручно користуватися поняттям градієнт (*grad*). Якщо φ скалярне поле, то йому можна поставити у відповідність векторне поле, компоненти якого: $\text{grad} \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$.

Введемо векторний диференціальний оператор, який позначається символом ∇ (набла) і називається оператор набла, чи оператор Гамільтона. Це є вектор з компонентами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Звідси

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Фізичного сенсу він не має. Він має сенс, коли поєднується зі скалярною чи векторною функцією, на яку він символічно множиться.

Якщо помножити вектор ∇ на скаляр φ , то отримаємо вектор:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}, \text{ який є градієнтом (grad) функції } \varphi.$$

Якщо ∇ помножити скалярно на вектор $\vec{a}$, отримаємо скаляр:

$$(\nabla \vec{a}) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

який є дивергенцією (*div*) вектора $\vec{a}$.

Якщо ∇ помножити векторно на $\vec{a}$, отримаємо вектор з компонентами:

$$[\nabla \vec{a}]_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \dots,$$

які співпадають з компонентами $rot \vec{a}$

Тому можна записати

$$rot \vec{a} = [\nabla \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Таким чином

$$\nabla \varphi = grad \varphi$$

$$(\nabla \vec{a}) = div \vec{a}$$

$$[\nabla \vec{a}] = rot \vec{a}$$

З визначення *grad* випливає, що якщо є векторне поле $\vec{A}$ та існує такий скаляр U , що $\vec{A} = -grad U$, то поле $\vec{A}$ є потенціальним полем. Дійсно, в цьому випадку $rot \vec{A} = 0$, тому що $[\nabla \nabla U] \equiv 0$. Скаляр U називається потенціалом цього поля. Поверхня $U = const$ називається екіпотенціальною поверхнею. Вектор $\vec{A}$, чи $grad U$ перпендикулярний до поверхні $U = const$.

Дійсно, розглянемо $(\vec{A} d\vec{r})$ скалярний добуток, де $d\vec{r}$ – довільний елемент переміщення поверхнею $U = \text{const}$.

$$(\vec{A} d\vec{r}) = -(\text{grad} U \cdot d\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = -dU = 0,$$

тому що $U = \text{const}$.

Але $d\vec{r}$ – це довільний елемент переміщення, звідси випливає, що $\vec{A}$ перпендикулярний до поверхні $U = \text{const}$.

∇ – диференціальний оператор, діє на всі функції, що стоять справа від нього. При перетворенні виразів, у які входить ∇ , треба враховувати як правила диференціального числення, так і правила векторної алгебри.

$$(\varphi\psi)^{|} = \varphi^{|}\psi + \varphi\psi^{|}, \text{ відповідно}$$

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \psi\text{grad}\varphi + \varphi\text{grad}\psi.$$

Аналогічно,

$$\text{div}(\varphi\vec{a}) = (\nabla_{\varphi}\varphi\vec{a}) + (\nabla_a\varphi\vec{a}) = (\vec{a}\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\vec{a}) = (\vec{a}\text{grad}\varphi) + \varphi\text{div}\vec{a}.$$

grad деякої функції φ є векторна функція. Тому до нього можуть бути застосовані операції div і rot .

$$\text{divgrad}\varphi = (\nabla\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi,$$

де $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

$\text{rotgrad}\varphi = [\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla\nabla]\varphi = 0$ (векторний добуток вектора на самого себе дорівнює 0).

Застосуємо операції div і rot до $\text{rot}\vec{a}$.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = (\nabla [\nabla \vec{a}]) = ([\nabla \nabla] \vec{a}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla, [\nabla \vec{a}]] = \nabla(\nabla a) - (\nabla \nabla) \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

(дійсною є формула $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$).

Співвідношення (1.6) означає, що поле ротора не має джерел.

Отже, лінії вектора $[\nabla \vec{a}]$ не мають початку і кінця.

Якщо застосувати вектор ∇ , то:

$$\oint_S (\vec{A} d\vec{S}) = \int_V (\nabla \vec{A}) dV \quad (\text{теорема Остроградського-Гаусса}),$$

$$\oint_L (\vec{A} d\vec{L}) = \int_S ([\nabla \vec{A}] d\vec{S}) \quad (\text{теорема Стокса}).$$

Контрольні питання і вправи.

1. В чому полягає математичний та фізичний зміст дивергенції?
2. В чому полягає математичний та фізичний зміст градієнта?
3. Якщо частинка знаходиться в потенціальному полі, то як зв'язані елементарна робота, що виконана цим полем зі зміною потенціальної енергії?
4. Якщо потенціальне поле нестационарне, тобто $U = U(t)$, то якою буде відповідь на попереднє питання?
5. Навести приклади векторних та скалярних полів.
6. Розглядаючи вектор $\vec{a} = v \operatorname{grad} U$ і користуючись тотожністю

$\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{A})$, а також тим, що

$a_n = (v \operatorname{grad} U, \vec{n}) = v \frac{\partial U}{\partial n}$, довести першу формулу Гріна

$$\int_V (v \Delta U + (\operatorname{grad} U, \operatorname{grad} v)) dV = \oint_S v \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

2. УЗАГАЛЬНЕННЯ ОСНОВНИХ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ ЯВИЩ

Серед багатьох закономірностей електрики і магнетизму є кілька основних чи фундаментальних законів, узагальненням яких Максвеллу вдалося створити єдину теорію електрики і магнетизму, відкрити, по суті, електромагнітне поле, математично описати його, встановити його основні властивості, створити електромагнітну теорію світла і отже включити всю оптику в електродинаміку.

До цих законів належать:

Закон Кулона. Закон взаємодії точкових зарядів у вакуумі називається законом Кулона. Він формулюється так: Сила взаємодії $\vec{F}$ двох нерухомих точкових зарядів у вакуумі прямо пропорційна добутку кількостей електрики цих зарядів q_1 і q_2 , обернено пропорційна квадрату відстані r між ними і напрямлена вздовж прямої, яка з'єднує ці заряди, тобто

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \text{ або } \vec{E} = k \frac{q}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

де $\frac{\vec{r}}{r}$ – орт вектора $\vec{r}$, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (Н} \cdot \text{м}^2\text{)/Кл}^2$ – коефіцієнт

пропорційності, $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}}$ – електрична стала чи діелектрична

проникність вакууму. Цим законом встановлюється поле, яке створюється нерухомим точковим зарядом у довільній точці вакууму.

Закон Біо-Савара-Лапласа. Закон Біо-Савара-Лапласа є одним із основних експериментальних законів електромагнітних явищ,

який установлює зв'язок між магнітним полем і струмами, що його породжують.

Закон Біо-Савара-Лапласа для елемента об'ємного струму

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV, \quad (2.1)$$

де $\vec{j}$ – густина струму, $\vec{j}dV$ – елемент об'ємного струму; $\vec{r}$ – вектор, що з'єднує елемент об'єму з точкою спостереження поля.

Закон Біо-Савара-Лапласа для лінійних струмів:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}, \quad (2.2)$$

де $I d\vec{l}$ – елемент лінійного струму, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{м}$ – магнітна проникність вакууму.

За визначенням сила струму I – потік вектора $\vec{j}$ крізь площу, яку пронизує електричний заряд:

$$I = \int_S (\vec{j} d\vec{S}), \quad (2.3)$$

де dS – елемент поверхні, який пронизується електричним зарядом.

Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея). За законом електромагнітної індукції е.р.с. індукції прямо пропорційна швидкості зміни магнітного потоку:

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (2.4)$$

де ε_i – електрорушійна сила індукції, Φ – магнітний потік крізь деяку поверхню.

За визначенням потік вектора магнітної індукції Φ через деяку поверхню dS дорівнює

$$\Phi = \int_S (\vec{B} d\vec{s}). \quad (2.5)$$

$\varepsilon = \oint_l (\vec{E} d\vec{l})$ за означенням – циркуляція напруженості електричного поля $\vec{E}$ контуром, в якому протікає струм.

Знак мінус відображає правило Ленца про напрям індукційного струму, чи полярності е.р.с.: індукційний струм у замкненому провідному контурі має такий напрям, що створене ним власне магнітне поле протидіє змінам магнітного поля, яке збуджує індукційний струм.

Нагадаємо ще два важливих закони електрики:

Закон Ома. В диференціальній формі закон Ома має вигляд $\vec{j} = \lambda \vec{E}$. Величину λ називають питомою провідністю провідника (у СІ вимірюють в $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$). Диференціальним він називається тому, що $\vec{j}$ і $\vec{E}$ є фізичні величини, зв'язок між якими дається в одній і тій самій точці провідника (чи поблизу однієї й тієї ж точки). Питома провідність у неоднорідному провіднику може бути функцією координат.

Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі. Закон Джоуля-Ленца у диференціальній формі через локальні характеристики провідника та електричного поля в ньому записується у вигляді

$$q = (\vec{j} \vec{E}). \quad (2.6)$$

Враховуючи закон Ома, його можна записати так:

$$q = \lambda E^2 = \frac{j^2}{\lambda}, \quad (2.7)$$

де q – питома потужність струму, тобто енергія, яка виділяється струмом за одиницю часу в одиниці об'єму провідника.

Електромагнітне поле описується чотирма векторами: $\vec{E}$ – вектором напруженості електричного поля, $\vec{D}$ – вектором

електричної індукції (чи електричного зміщення); $\vec{B}$ – вектором магнітної індукції і $\vec{H}$ – вектором магнітної напруженості.

У вакуумі між цими векторами існує попарне співвідношення:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.8)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.9)$$

$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \left(\frac{m}{c} \right) = c$ – електродинамічна стала, яка співпадає із швидкістю світла у вакуумі.

2.1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАКОНУ КУЛОНА

Запишемо закон Кулона у вигляді: $\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r}$ і поставимо таку задачу: обчислити потік вектора $\vec{D}$ крізь деяку замкнену поверхню.

$$\text{Тоді } \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \oint_S (\vec{D} \vec{n}) dS = \frac{q}{4\pi} \oint_S \frac{(\vec{r} \vec{n})}{r^3} dS = \frac{q}{4\pi} \oint_S \frac{\cos(\vec{r} \wedge \vec{n})}{r^2} dS,$$

де $\vec{n}$ – орт вектора $d\vec{S}$.

Спроектуємо площадку $d\vec{S}$ на площадку, перпендикулярну вектору $\vec{r}$, тоді $dS \cos \alpha = dS'$. Відношення $\frac{dS'}{r^2} = d\Omega$ – це кут, що опирається на площадку dS' (кут при вершині конуса) (рисунок 2.1).

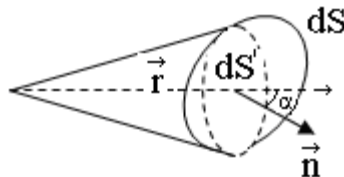


Рисунок 2.1 – До доведення теореми Остроградського-Гаусса

Таким чином приходимо до співвідношення:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi} \cdot 4\pi = q.$$

Узагальнимо цей результат на випадок багатьох зарядів, тобто зарядів: $q_1, q_2, q_3, \dots$

Ми будемо виходити з найважливішого принципу суперпозиції полів: поле, що утворюється системою зарядів, є сумою полів, що утворюються кожним з цих зарядів:

$$\vec{D} = \sum_i \vec{D}_i \quad \text{чи} \quad \left(\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \right),$$

$$\text{Тоді} \quad \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \oint_S \left(\sum_i \vec{D}_i d\vec{S} \right) = \sum_i \oint_S (\vec{D}_i d\vec{S}) = \sum_i q_i = q$$

Таким чином

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q, \quad (2.10)$$

де q – сумарний заряд, $\vec{D}$ – сумарне поле.

В цьому полягає відома в електростатиці теорема Остроградського-Гаусса: потік вектора індукції електростатичного поля через довільну замкнену поверхню, що обмежує деякий об'єм, дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, які знаходяться в цьому об'ємі.

Перейдемо до диференціальної форми теореми. Для цього введемо спочатку поняття про густину електричного заряду.

Нехай у деякому об'ємі довільним чином розподіляється електричний заряд. Виділимо в цьому об'ємі елемент dV , в якому знаходиться заряд dq . Тоді об'ємна густина заряду дорівнює:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (2.11)$$

Якщо ρ залежить від t , то це означає, що заряд може втікати або витікати з об'єму, але в електростатиці цього не буває, тому, що

електростатика вивчає поля нерухомих зарядів, тобто $\rho \neq f(t)$.
Такий розподіл заряду взагалі називається стаціонарним.

Зауважимо, що стаціонарність і статичність не одне й те саме. Статичність означає нерухомість, а стаціонарність – незалежність від часу, яка може мати місце і в динаміці.

За визначенням, в разі $\rho \neq f(t)$, об'ємна густина заряду дорівнює $\rho = \frac{dq}{dV}$. Тоді $q = \int_V \rho dV$. Якщо $\rho \neq f(x, y, z)$, тобто $\rho = \text{const}$, тоді розподіл заряду називається рівномірним, чи однорідним. Якщо заряд розподілений деякою поверхнею, то $\sigma = \frac{\partial q}{\partial S}$ (σ – поверхнева густина заряду). Якщо заряд розподілений на одновимірній структурі, наприклад, на нитці, то визначають лінійну густину заряду: $\kappa = \frac{\partial q}{\partial l}$. У всіх цих міркуваннях передбачається, що заряд – це неперервна величина.

Насправді існує атомізм електрики (заряд дискретний). Це стало зрозуміло ще за часів робіт Фарадея з електролізу. Після відкриття електрона у 1897 р. Томсон з'ясував, що існує мінімальна порція від'ємної електрики – заряд електрона: $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Існує така ж сама порція позитивної електрики (заряд протона).

Однак, коли мова йде про макроскопічну електродинаміку, дискретність заряду не грає суттєвої ролі, і на визначенні густини це не позначається, але при вивченні мікроскопічних явищ дискретністю заряду не можна нехтувати. Повернемося до виразу $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$; За теоремою Остроградського – Гаусса $\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \text{div } \vec{D} dV$.

Але $q = \int_V \rho dV$, тоді $\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$, чи $\int_V (d_i \nabla \vec{D} - \rho) dV = 0$. Звідси $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ (але це не очевидно). Доведемо останнє рівняння.

Нехай $\operatorname{div} \vec{D} \neq \rho$. Тоді знайдеться така точка, в якій $d_i \nabla \vec{D} - \rho \neq 0$, але завжди є окіл точки, в якій функція зберігає знак. Виберемо окіл за область інтегрування. Тоді інтеграл за цією областю буде відрізнятися від нуля. Але записаний інтеграл дорівнює нулю всюди (на об'єм інтегрування ніяких обмежень не накладено). Таким чином наше припущення не вірно, тому:

$$\operatorname{div} \vec{D} \equiv \rho \quad (2.12)$$

Рівняння (2.12) є теоремою Остроградського-Гаусса в диференціальній формі і одне з рівнянь Максвелла. Це рівняння стверджує, що джерелом електричного поля є заряди, а їх об'ємна густина є питома потужність джерел поля.

В декартових координатах рівняння (2.12) має вигляд:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad (2.13)$$

Потенціальність електростатичного поля. Запишемо закон

Кулона у вигляді: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}$ і розглянемо таку функцію:

$$f(r) = \frac{1}{r}; \quad \vec{r}(x, y, z).$$

Знайдемо $\operatorname{grad} f(r) = \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$:

$$\operatorname{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3};$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Очевидно, що $\text{grad}_y\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}$; $\text{grad}_z\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$. Звідси

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Введемо функцію $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Тоді $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

Тому ми дійдемо висновку, що електростатичне поле потенціальне, а φ – потенціал цього поля. Наш висновок відноситься до поля точкового заряду. Але він залишається справедливим для будь-якого електростатичного поля взагалі.

Візьмемо rot від обох частин отриманої рівності:

$$\text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \text{grad}\varphi. \text{ Але } \text{rot } \text{grad}\varphi \equiv 0.$$

Таким чином, маємо $\text{rot } \vec{E} = 0$. Це ще одне диференціальне рівняння Максвелла для електростатичного поля.

Але одному цьому рівнянню відповідають три скалярні. Тому разом з рівнянням $\text{div } \vec{D} = \rho$ ми отримали систему рівнянь, яка вичерпно визначає електростатичне поле.

Потенціальність поля виражається, зокрема, в тому, що робота в цьому полі не залежить від форми шляху. А робота за замкненим контуром дорівнює нулю. Рівняння $\text{div } \vec{D} = \rho$ підтверджує те, що силові лінії електростатичного поля завжди починаються на позитивних, а закінчуються на від'ємних зарядах.

$$\text{Рівняння } \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{cases} \text{ описують електростатичні явища.}$$

Будь-яка задача електростатики, в принципі, може бути вирішена за допомогою цих рівнянь.

$$\text{Рівняння } \text{rot } \vec{E} = 0 \text{ еквівалентне рівнянню } \vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Для вакууму: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (у вакуумі $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$). Звідси

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Але

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi, \quad (2.14)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.15)$$

Рівняння (2.15) – основне рівняння електростатики, яке називають рівнянням Пуассона.

Це рівняння справедливе для тих областей простору, де розподіляється заряд. Рівняння Пуассона встановлює зв'язок потенціалу φ в різних точках поля з розподілом зарядів $\rho(x, y, z)$. Інтегруванням цього рівняння знаходять $\vec{E}$ і φ . Але поле утворюється, як відомо, зарядом і там, де заряд відсутній. Для таких областей простору вирішується однорідне рівняння Пуассона $\Delta \varphi = 0$. Це рівняння називається рівнянням Лапласа.

Рівняння Пуассона і Лапласа є диференціальними рівняннями другого порядку в часткових похідних. Тому рішення таких рівнянь є важкою математичною задачею, ступінь складності якої визначається видом функції ρ . Тому рішення її можливо в тих небагатьох випадках, коли задача має хорошу геометрію, а функція ρ проста (наприклад, $\rho = \text{const}$).

Проте легко встановити вид загального рішення цих рівнянь. Для цього потрібно використовувати принцип суперпозиції до потенціалу поля: $\varphi = \sum_i \varphi_i$, де φ_i – потенціал поля, який створюється

і-тим зарядом системи, а ϕ – результуючий потенціал, який створюється системою зарядів.

Нехай задано деякий об'єм, в якому безперервно розподілений заряд. Виділимо елемент цього об'єму dV , який має заряд dq . Виберемо довільну точку спостереження поля, яка знаходиться від цього елемента об'єму на відстані r , координати цієї точки x, y, z . Координати точок джерел будемо позначати ξ, η, ζ . Тоді $dV = d\xi d\eta d\zeta$, а

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Зрозуміло, що $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$. Тоді $dq = \rho dV = \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$.

Але dq можна вважати точковим, тому $d\phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$. Принцип суперпозиції для безперервно розподіленого заряду одержимо, якщо суму замінимо на інтеграл. Тому

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.16)$$

Рівняння (2.16) – загальне рішення рівнянь Пуассона і Лапласа.

2.2. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАКОНУ БІО-САВАРА-ЛАПЛАСА. ЗАКОН ПОВНОГО СТРУМУ

Запишемо закон Біо-Савара-Лапласа для векторів $\vec{H}$ в інтегральній формі

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} dV \quad \text{— для об'ємних струмів,}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_i \frac{[d\vec{l} \vec{r}]}{r^3} - \text{для лінійних струмів.}$$

Знайдемо циркуляцію вектора $\vec{H}$ за деяким контуром L :

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{L}).$$

Спростимо рішення цієї задачі. Виберемо найпростіше магнітне поле — поле нескінченного прямого струму. Такий вибір виправданий тим, що отримані результати співпадають із загальним рішенням задачі.

У 1820 році Ерстед, досліджуючи магнітне поле нескінченного прямого струму, встановив, що силові лінії цього поля є концентричними колами, центри яких лежать на провіднику.

Із закону Біо-Савара-Лапласа витікає, що напрям $\vec{H}$ зв'язаний з напрямом струму правилом правого гвинта.

Застосування закону Біо-Савара-Лапласа до цього струму дає

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

де r — радіус силової лінії.

Виберемо контуром інтегрування силову лінію: $\vec{H} \parallel d\vec{L}$, звідси

$$(\vec{H} d\vec{L}) = H dL. \text{ Тоді } \oint_L (\vec{H} d\vec{L}) = \oint_L H dL = H \oint_L dL = \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = I.$$

Узагальнимо цей результат на випадок багатьох струмів. Для магнітного поля справедливий принцип суперпозиції: $\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i$. Тоді

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{L}) = \oint_L \left(\sum_i \vec{H}_i \cdot d\vec{L} \right) = \sum_i \oint_L (\vec{H}_i d\vec{L}) = \sum_i I_i = I \quad (2.17)$$

Рівняння (2.17) є закон повного струму: циркуляція вектора $\vec{H}$ магнітного поля за деяким контуром дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються цим контуром. Ця теорема є аналогом

(магнітним) теореми Остроградського-Гаусса в електростатиці. Запишемо вираз (2.17) в диференціальній формі. За визначенням (2.3) і теоремою повного струму маємо $\oint_L (\vec{H} d\vec{L}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S})$. Інтеграл зліва перетворимо за теоремою Стокса. Тоді $\int_S (\text{rot} \vec{H} d\vec{S}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S})$.

Такими ж міркуваннями, як при виведенні рівняння $\text{div} \vec{D} = \rho$, приходимо до висновку, що

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (2.18)$$

Рівняння (2.18) – одне з рівнянь Максвелла, яке визначає магнітостатичне поле.

Рівняння (2.17) є рівнянням Максвелла в інтегральній формі (для магнітостатики). З (2.18) випливає, що магнітостатичне поле породжується струмами провідності і має вихровий характер.

2.3 ЗАКОН ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

Закон електромагнітної індукції $\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ згідно з означеннями $\mathcal{E}_i$ та Φ запишемо у вигляді:

$$\oint_i (\vec{E}_i d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} d\vec{S}) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right).$$

Перетворимо інтеграл зліва за теоремою Стокса. Тоді

$$\int_S (\text{rot} \vec{E}_i d\vec{S}) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right),$$

звідси

$$\text{rot} \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.19)$$

Електричне поле може утворюватися нерухомими зарядами (статичні поля), а також і змінним магнітним полем.

В загальному випадку $\vec{E} = \vec{E}_{cm} + \vec{E}_i$, де $\vec{E}_{cm}$ – статичне поле, $\vec{E}_i$ –індукційне поле.

Візьмемо ротор від обох частин: $\text{rot} \vec{E} = \text{rot} \vec{E}_{cm} + \text{rot} \vec{E}_i$. За визначенням потенціальності поля $\text{rot} \vec{E}_{cm} = 0$. Тому рівняння (2.19) запишеться як

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Це рівняння є закон електромагнітної індукції в диференціальній формі чи диференціальне рівняння Максвелла, що зв'язує електричні і магнітні поля, а саме: навколо кожної точки простору, де змінюється вектор магнітної індукції $\vec{B}$, виникає вихрове електричне поле.

Візьмемо дивергенцію від обох частин (2.20)

$$\text{div} \text{rot} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{B} \quad (2.21)$$

Але $\text{div} \text{rot} \vec{a} \equiv 0$. Тому $\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{B} = 0$. Отже, $\text{div} \vec{B} = \text{const}$. Значення її легко визначити. Дійсно, для всіх $\vec{B}$ $\text{div} \vec{B}$ є деякою постійною величиною. Але ж $\text{div} 0 = 0$. Отже, $\text{div} \vec{B} = 0$.

Рівняння $\text{div} \vec{B} = 0$ є одним з рівнянь Максвелла для магнітного поля. Воно вказує, що не має джерел, подібних

джерелам електричного поля, тобто у природі не існує магнітних зарядів. Відсутність магнітних зарядів означає, що магнітні лінії завжди замкнуті. Питання про існування магнітних зарядів вже багато років є одним з найцікавіших питань теоретичної і експериментальної фізики. В 1931 р. Поль Дірак показав, що в принципі магнітні заряди можуть існувати. Вони названі “монополями Дірака” – однополюсний заряд. Дірак отримав навіть формулу для квантування цього заряду:

$$\frac{eq}{\hbar c} = \frac{k}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots,$$

де e – заряд електрона; q – магнітний заряд чи заряд монополя; c – швидкість світла у вакуумі; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постійна Планка.

З того часу з'явилося багато публікацій, які розвивають теорію Дірака. А експериментатори почали шукати монополь Дірака, тобто однополюсну частинку. Але всі зусилля експериментаторів поки що були марні. Мабуть, вважають експериментатори, потужності сучасної прискорюючої техніки для рішення цього питання не вистачає. Якби монополі Дірака існували, то суттєвих змін класична електродинаміка не зазнала би. Рівняння Максвелла виявились би симетризовані відносно електричних і магнітних полів. Але для розуміння фізичної природи електрики і магнетизму це питання є важливим. Наприклад, воно дуже важливе для фізики елементарних частинок. Пошуки магнітного заряду продовжуються і в даний час.

2.4 РІВНЯННЯ БЕЗПЕРЕРВНОСТІ

Розглянемо деякий об'єм, в якому міститься заряд з об'ємною густиною $\rho(x,y,z,t)$. Це означає, що заряд втікає з об'єму, або витікає, або і те й інше одночасно. Крізь поверхню, яка охоплює даний об'єм, йде електричний струм.

З одного боку, за визначенням, $I = -\frac{\partial q}{\partial t}$ (знак мінус означає, що заряд витікає з об'єму, але це не принципово). З іншого боку, $I = \oint_S (\vec{j} d\vec{S})$, а $q = \int_V \rho dV$. Таким чином

$$\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.22)$$

За теоремою Остроградського-Гаусса

$$\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = \int_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV,$$
$$\text{або } \int_V \text{div} \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.23)$$

Звідси

$$\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$
$$\text{чи } \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

Рівняння (2.24) є рівнянням безперервності в електродинаміці.

Розглянемо окремий випадок. Нехай $\rho \neq \rho(t)$. Це відповідає постійному струму ($I = \text{const}$), тобто за будь-які рівні проміжки часу крізь поперечний переріз провідника проходить однаковий заряд. Тоді

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.25)$$

Рівняння (2.25) є рівнянням безперервності для постійного струму. Це рівняння виражає той очевидний факт, що ланцюг постійного струму обов'язково замкнений, тобто нема ані джерел, ані стоків зарядів. З іншого боку, рівняння (2.25) є першим законом Кірхгофа. Дійсно, нехай заданий деякий вузол в ланцюгу постійного струму. Проінтегруємо рівняння (2.25) за об'ємом, який обмежує цей вузол: $\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0$. Але з теореми Остроградського – Гаусса цей інтеграл можна записати так (рисунок 2.2)

$$\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = I_1 + I_2 + \dots I_n = 0,$$

де $I_1 + I_2 + \dots + I_n$ – алгебраїчна сума струмів, що входять чи виходять з вузла. З'ясуємо сенс рівняння (2.24).

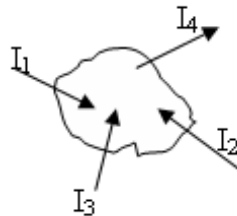


Рисунок 2.2 – До виразу (2.25) у вигляді закону Кірхгофа

Для цього звернемось до його інтегральної форми (2.22). Розглянемо весь можливий об'єм, тобто $V \rightarrow \infty$. Тоді ясно, що S також $\rightarrow \infty$. Але ж $\oint_{S \rightarrow \infty} (\vec{j} d\vec{S}) = 0$, тому що потоку вектора крізь нескінченно віддалену поверхню не може бути, тоді $\frac{\partial}{\partial t} \int_{V \rightarrow \infty} \rho dV = 0$. Позначимо $\int_{V \rightarrow \infty} \rho dV = Q$. Має сенс назвати його світовим зарядом. Тоді

$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$. Отже $Q = \text{const}$. Тобто рівняння неперервності виражає закон збереження електричного заряду.

Для кінцевих об'ємів цей закон відповідно з (2.22) означає, що зміна заряду у деякому кінцевому об'ємі зв'язано зі струмом крізь поверхню, яка обмежує цей об'єм – це теж закон збереження заряду.

Струм зміщення. Одне з рівнянь Максвелла має вигляд:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (2.26)$$

Візьмемо div від обох його частин: $\text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j}$. Оскільки ліва частина останнього рівняння дорівнює нулю, що було доведено вище, то і $\text{div } \vec{j} = 0$. Таким чином, рівняння (2.26) задовольняє рівнянню безперервності для постійних струмів, але не задовольняє рівнянню (2.24). Іншими словами, рівняння Максвелла не погоджується з законом збереження заряду в загальному вигляді, а цей закон є фундаментальним законом фізики, як і всі закони збереження взагалі.

Тому Максвелл поставив задачу так виправити рівняння для магнітного поля, щоб не виникало суперечності з рівнянням неперервності, тобто з законом збереження заряду. Для цього в праву частину рівняння (2.26) додамо деякий член $\vec{j}_{zm}$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{zm} \quad (2.27)$$

Візьмемо div від обох частин рівняння (2.27). Дістанемо: $\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{zm}) = 0$, звідси $\text{div } \vec{j} = -\text{div } \vec{j}_{zm}$. Але згідно з (2.24) це буде

тоді, коли $\operatorname{div} \vec{j}_{зм} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Але $\rho = \operatorname{div} \vec{D}$. Це означає, що

$$\operatorname{div} \vec{j}_{зм} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \text{ Звідси } \vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Отримаємо рівняння:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Це означає, що магнітне поле може бути породжено як струмом провідності, так і електричним полем, що змінюється з часом (струмом зміщення, фізичний зміст якого є швидкість зміни електричного поля). При цьому магнітне поле завжди носить вихровий характер.

Струм зміщення виникає всюди, де є змінне електричне поле. Тому він обов'язково є присутнім, наприклад, в ланцюгах змінного струму. При цьому він відрізняється від нуля і в місцях розриву ланцюга (кола) змінного струму. Легко показати, наприклад, що якщо в колі змінного струму є конденсатор, то в будь який момент часу вектор $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ є паралельним вектору $\vec{j}$ (в просторі конденсатора), тобто векторні лінії вектора $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ замикають векторні лінії вектора $\vec{j}$. Таким чином, ланцюг змінного струму є також завжди замкнутим у сенсі струмових ліній вектора $\vec{j} + \vec{j}_{\text{зі}}$, тому що $\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{зі}}) = 0$. Таке векторне поле є завжди замкнутим. Одиницею вимірювання вектора $\vec{j}_{\text{зі}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ є $\frac{A}{i^2}$. Одиниці вимірювання, а також те, що струм провідності і струм

зміщення є джерелами магнітного поля ріднить їх з назвою щільність «струму», хоча струм зміщення як змінне електричне поле не зв'язаний зі струмом у звичайному сенсі цього слова. Але термін «струм зміщення», введений Максвеллом на основі уявлень про існування ефіру і його зміщення в електричному полі, за сучасними поглядами на природу електромагнітного поля не є вдалим.

Перші експериментальні роботи з виявлення струму зміщення були проведені О.О. Ейхенвальдом. Він вивчав магнітне поле струму поляризації, який є частиною струму зміщення. Експериментально були знайдені струми зміщення, і гіпотеза Максвелла була підтверджена.

3 СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА.

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3.1) \end{array} \right. \quad \oint_l (\vec{E} d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s (\vec{B} \vec{n}) dS$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (3.2) \end{array} \right. \quad \oint_l (\vec{H} d\vec{l}) = \int_s \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \vec{n} \right) dS$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{D} = \rho & (3.3) \end{array} \right. \quad \oint_s (\vec{D} \vec{n}) dS = \int_v \rho dV$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (3.4) \end{array} \right. \quad \oint_s (\vec{B} \vec{n}) dS = 0$$

Рівняння (3.1) – (3.4) зліва – рівняння Максвелла в диференціальній формі, а справа – в інтегральній формі.

Проаналізуємо формули (3.1) – (3.4):

1. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея). Зв'язує електричні і магнітні поля, а саме: навколо кожної точки простору,

де змінюється магнітне поле, виникає вихрове електричне поле, або зміна магнітного поля породжує вихрове електричне поле.

2. Магнітне поле створюється як струмом провідності, так і струмом зміщення, тобто змінним електричним полем.

3. Теорема Остроградського – Гаусса: джерелом електричного поля є заряди. Силкові лінії електростатичного поля починаються на позитивних зарядах, закінчуються на негативних зарядах.

4. Вказує на те, що магнітне поле завжди соленоїдальне. Це означає, що в нього нема джерел, подібних джерелам електростатичного поля, тобто в природі не існує магнітних зарядів.

Рівняння (3.1) і (3.2) зв'язують електричні і магнітні поля. Рівняння (3.3) і (3.4) – це так звані джерельні рівняння. Вони не є самостійними, тому що рівняння (3.4) випливає з (3.1), а (3.3) може бути одержано з (3.2) і рівняння неперервності. Тим не менше (3.3) і (3.4) мають самостійне і дуже важливе значення.

3.1. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Система (3.1) – (3.4) охоплює всі задачі електродинаміки, які можуть бути класифіковані таким чином:

1. Статичні (тобто незалежні від t) поля. Рівняння для цих полів отримують, якщо $\frac{d}{dt}$ символічно спрямувати до нуля. Тоді система

(3.1) – (3.4) розпадається на дві пари рівнянь, і ці пари не зв'язані

одна з одною. А саме: $\left. \begin{matrix} \text{rot}\vec{E} = 0 \\ \text{div}\vec{D} = \rho \end{matrix} \right\}$ і $\left. \begin{matrix} \text{rot}\vec{H} = \vec{j} \\ \text{div}\vec{B} = 0 \end{matrix} \right\}$. Перша пара визначає

електростатику, друга – магнітостатику.

2. Квазістаціонарні поля. Це такі поля, де $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow 0$ (тобто електричні поля, що повільно змінюються). Тоді:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}.$$

Цими рівняннями визначається все коло задач, які відносяться до електротехніки. Основним тут є закон електромагнітної індукції.

3. Змінні поля (3-й клас задач). Для їх описання потрібна вся система рівнянь (3.1) – (3.4). Коло задач, що входять у цю групу – це вся оптика (як хвильова так і геометрична), радіотехніка і класична теорія випромінювання.

Треба відмітити, що з часом у фізиці виникли задачі, рішення яких за допомогою системи (3.1) – (3.4) виявились неможливими. Це насамперед задачі про взаємодію світла з речовиною, наприклад, задача про фотоефект. У ХХ столітті була побудована так звана квантова електродинаміка. Але необхідність її використання в деяких задачах зовсім не відмінило електродинаміку Максвелла, яка використовується навіть у деяких питаннях лазерної фізики.

3.2 ГРАНИЧНІ УМОВИ ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ТА МАГНІТНОГО ПОЛІВ

Рівняння Максвелла (3.1) – (3.4) описують електричні та магнітні поля не тільки у вакуумі, де $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ і $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, але і в

середовищі. Для середовища $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{j} = \lambda \vec{E}$. Ці вирази є так звані матеріальні рівняння, в яких ϵ – діелектрична проникність середовища, μ – магнітна проникність, λ – питома провідність – матеріальні константи, що характеризують електричні, магнітні та провідні властивості середовища. В свою чергу $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu = \mu_0 \mu_r$, де ϵ_r і μ_r – відносні діелектрична та магнітна проникності відповідно. Зрозуміло, що для різних середовищ матеріальні константи різні. Тому при переході з одного середовища в друге вектори поля можуть мати розрив. Умови, що визначають поведінку векторів поля на границі розділу двох середовищ, називаються граничними умовами. Вони встановлюються за допомогою рівнянь Максвелла і відомих інтегральних перетворень. Неперервність функцій, яку потребують рівняння Максвелла і ці перетворення, забезпечується тим, що розглядається тонкий прошарок між двома середовищами, в якому вектори поля змінюються швидко, але неперервно. Після необхідних перетворень товщина цього прошарку спрямовується до нуля, що приводить до отримання граничних умов.

Розглянемо заряджену поверхню. Нехай поверхнева густина заряду σ . Вона може бути функцією координат. Нехай $\vec{n}$ є орт нормалі до поверхні. Орти, які йдуть у бік опуклості, вважають позитивними, і навпаки. Візьмемо деяку площадку ΔS і побудуємо на ній, як на основі, вгору і вниз циліндр. Вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ є відповідно ортами нормалей до його основ (рисунок 3.1).

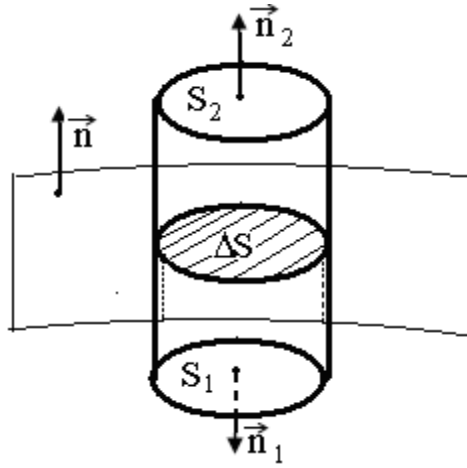


Рисунок 3.1 – Поверхня розділу двох середовищ

Застосуємо теорему Остроградського-Гаусса до поверхні всього циліндра:

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_{S_1} (\vec{D} d\vec{S}) + \int_{S_2} (\vec{D} d\vec{S}) + \int_{S_\theta} (\vec{D} d\vec{S}) = q$$

Спрямуємо висоту циліндра до нуля. Тоді $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_\theta} (\vec{D} d\vec{S}) = 0$ і

$$\int_{S_1} (\vec{D} d\vec{S}) + \int_{S_2} (\vec{D} d\vec{S}) = \sigma \Delta S, \quad S_1 \rightarrow \Delta S, \quad S_2 \rightarrow \Delta S.$$

Ці потоки за визначенням дають: $(\vec{D}_1 \vec{n}_1) + (\vec{D}_2 \vec{n}_2) \Delta S = \sigma \Delta S$. Але $\vec{n}_2 \uparrow \uparrow \vec{n}$, а $\vec{n}_1 \uparrow \downarrow \vec{n}$. Тому $(\vec{D}_2 \vec{n}_2) = (\vec{D}_2 \vec{n})$, а $(\vec{D}_1 \vec{n}_1) = -(\vec{D}_1 \vec{n})$. Звідси

$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$. Тобто нормальна складова вектора $\vec{D}$ здійснює стрибок при переході через заряджену поверхню. Такого стрибка не буде, коли поверхня не заряджена ($\sigma = 0$). Якщо заряджена поверхня

знаходиться у вакуумі, то $\epsilon_0 E_{2n} - \epsilon_0 E_{1n} = \sigma$. Звідки $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$,

тобто нормальна складова вектора $\vec{E}$ здійснює стрибок при переході через заряджену поверхню.

Якщо заряджена поверхня є поверхнею розділу двох діелектричних середовищ, то $\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma$.

Легко зрозуміти, що $E_{2\tau} = E_{1\tau}$ де E_τ є тангенціальна складова вектора $\vec{E}$.

Дійсно, якщо б це було не так, то заряд не зміг би знаходитись на поверхні в статичному стані. На нього діяла б результуюча складова E_τ вздовж поверхні, що змушувало б його набути прискорення.

Однак $D_{2\tau} \neq D_{1\tau}$, оскільки $\frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1}$.

Розглянемо граничні умови для магнітного поля. Будемо використовувати рисунок 3.1, на якому поверхня є поверхнею розділу двох середовищ, що знаходяться в магнітному полі. Рівняння Максвелла $\text{div}\vec{B}=0$ проінтегруємо за об'ємом циліндра $\int_V \text{div}\vec{B}dV=0$.

Перетворимо останній вираз за теоремою Остроградського – Гаусса

$$\int_{S_1} (\vec{B}d\vec{S}) + \int_{S_2} (\vec{B}d\vec{S}) + \int_{S_0} (\vec{B}d\vec{S}) = 0$$

При $h \rightarrow 0$ маємо $(B_{2n} - B_{1n})\Delta S = 0$. Отже $B_{2n} = B_{1n}$, тобто нормальна складова вектора $\vec{B}$ на границі двох середовищ неперервна. Але з рівності $\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$ приходимо до висновку, що нормальна складова вектора $\vec{H}$ зазнає розриву на границі двох середовищ.

Перейдемо до тангенціальної складової вектора $\vec{H}$. На поверхні розділу двох середовищ виконаємо таку побудову (рисунок 3.2).

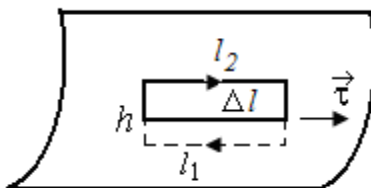


Рисунок 3.2 – До крайових умов вектора $\vec{H}$

На малому відрізку Δl побудуємо прямокутний контур висотою h . Вказаний на рисунку 3.2 напрям орта дотичної вважаємо позитивним. Будемо виходити з рівняння Максвелла $\oint_l (\vec{H} d\vec{l}) = I$.

Інтегруючи за побудованим контуром, маємо:

$$\int_{l_1} (\vec{H} d\vec{l}) + \int_{l_2} (\vec{H} d\vec{l}) + \int_{l_3} (\vec{H} d\vec{l}) = I.$$

При $h \rightarrow 0$ $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{l_3} (\vec{H} d\vec{l}) = 0$, $l_1 \rightarrow \Delta l$, $l_2 \rightarrow \Delta l$, і ми отримуємо

$(H_{2\tau} - H_{1\tau})\Delta l = I$, або $H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{\text{пов.}}$, де $j_{\text{пов.}} = \frac{I}{\Delta l}$ – густина поверхневого струму.

Якщо $j_{\text{пов.}} = 0$, то $H_{2\tau} = H_{1\tau}$, тобто тангенціальна складова вектора $\vec{H}$ неперервна.

Контрольні питання і вправи до II і III розділів.

1. Дайте математичне означення та фізичний зміст магнітного потоку та циркуляції вектора $\vec{E}$.
2. Дайте визначення струму зміщення. Покажіть на прикладі кола змінного струму, яке містить конденсатор, що вектор зміщення замикає в просторі між обкладинками конденсатора векторні лінії струму провідності.
3. З яких міркувань виникає неперервність тангенціальної складової $\vec{E}_\tau$ вектора $\vec{E}$ при переході через заряджену поверхню.
4. Яким чином з граничних умов для вектора $\vec{E}$ можна знайти зв'язки між зарядом та потенціалом зарядженого провідника?

5. Яким чином, розглядаючи рівняння Максвелла, можна дійти до висновку про існування електромагнітних хвиль?
6. Покажіть, що рівняння неперервності для сталих струмів є фактично виразом закону Кірхгофа.
7. За якими інтегральними теоремами векторного аналізу та як саме відбувається перехід від інтегральної форми рівнянь Максвелла до диференціальної?

4. СТАТИЧНІ ПОЛЯ

4.1 ДЕЯКІ ПИТАННЯ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

Електростатика вивчає поля, що створюються статичним розподілом електричних зарядів. Рівняння

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{cases}$$

вичерпно описують усі електростатичні явища. Ці рівняння сумісно приводять до рівнянь Пуассона і Лапласа:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta\varphi = 0$$

В електростатиці вирішуються задачі двох типів:

1. За заданим полем знайти розподіл зарядів, які його створили. Ця задача диференціального характеру, вона тривіальна і зводиться до диференціювання поля згідно другого рівняння Максвелла.
2. За заданим розподілом зарядів q знайти поле, яке цим зарядом створене. Ця задача інтегральна. Вона зводиться до інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа, що взагалі кажучи, не завжди можливо.

В електростатиці розроблені спеціальні методи, які дозволяють вирішувати деякі задачі, коли пряме інтегрування здається неможливим.

4.1.1 ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

Провідниками називаються середовища, які мають вільні заряди. Коли говорять «вільний заряд» мають на увазі, що цей заряд відносно слабо зв'язаний з атомами свого середовища. Тобто такий заряд, який під дією самого слабкого електричного поля може прийти в стан спрямованого руху. Найбільш відомим прикладом такого середовища є метали, чи провідники першого роду.

Коли метал поміщується в деяке зовнішнє електростатичне поле, то спочатку поле пронизує метал і природно викликає рух вільних носіїв заряду, але в статичі, в кінцевому рахунку, все повинно заспокоїтись, тобто прийти в стаціонарний стан. Це означає, що почнуться якісь процеси перерозподілу вільних зарядів, які приведуть їх до такої конфігурації, при якій власне поле цих зарядів повинно привести до компенсації зовнішнього поля, яке проникло в провідник. Тоді рух зарядів закінчиться, що є ознакою електростатики. Перехід металу в цей новий стан – дуже складний процес. Але вивчати кінетику цього процесу не є задачею електростатики.

Поле всередині провідника повинно дорівнювати нулю $\vec{E}_i = 0$. Таким чином, $\vec{E}_i = 0$ ($\vec{D}_i = 0$) визначають провідник в електростатичному полі. (Індекс «i» означає всередині, тобто в інтер'єрі). Але тоді з рівняння $\text{div } \vec{D}_i = \rho$ випливає $\rho = 0$. Отже, всередині провідника, що знаходиться в електростатичному полі, нема об'ємного вільного заряду.

Візьмемо всередині провідника деяку замкнену поверхню S . Застосуємо до неї теорему Остроградського – Гаусса: $\oint_S (\vec{D}_i d\vec{s}) = q_i$. Але $\vec{D}_i = 0$. Тоді $q_i = 0$.

Оскільки вибір поверхні інтегрування довільний, а результат інтегрування всюди однозначний, можна зробити висновок: заряд провідника, що знаходиться в електричному полі, розподіляється на поверхні провідника в шарі атомної товщини.

Ця властивість провідника ($\vec{E}_i = 0$) застосовується для так званого електростатичного захисту, тобто, якщо якусь частину простору потрібно ізолювати від дії зарядів, тобто полів, які вони створюють. Цю частину простору потрібно обмежити металевою оболонкою дуже малої товщини, наприклад, фольгою або сіткою.

Можна вирішувати і обернену задачу. Наприклад, ізолювати зовнішній простір від впливу певної кількості зарядів. Для цього потрібно оточити групу зарядів металевою оболонкою. Ці заряди індукують на внутрішній поверхні оболонки заряд q' . Але ж оболонка остається нейтральною. Тому на її зовнішній поверхні виникає заряд $-q'$ (рисунок 4.1,а). (Заряди q' і $-q'$ розподілені поверхнями).

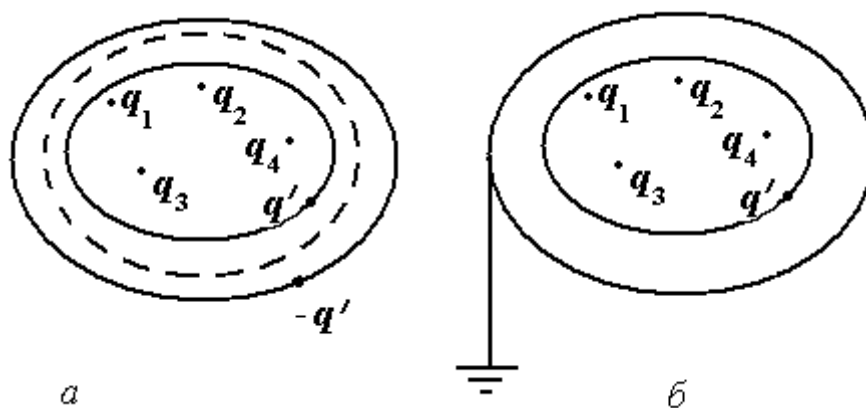


Рисунок 4.1 – Ізолювання зовнішнього простору від впливу зарядів:
а – виникнення індуктивного заряду на поверхнях металевої оболонки;
б – нейтралізація заряду $-q'$ за допомогою заземлення

Візьмемо всередині оболонки замкнену поверхню S і застосуємо до неї теорему Остроградського – Гаусса:

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q_1 + q_2 + \dots + q'. \text{ Але } \vec{D} = 0, \text{ отже } q' = -\sum q. \text{ Якщо}$$

заземлити цю оболонку, заряд $-q'$ буде нейтралізованим (рисунок 4.1,б).

Застосуємо формулу

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

до зарядженого провідника. Ми знаємо, що всередині провідника $\vec{E}_1 = 0$. Це означає, що $E_{1n} = 0$. (Якщо вектор дорівнює нулю, то його складові теж дорівнюють нулю).

Поверхня зарядженого провідника є екіпотенціальною. Це легко зрозуміти, враховуючи, що в статичі заряди знаходяться в стані спокою. Отже, всі точки поверхні, на якій вони знаходяться, мають однаковий потенціал. Але $\vec{E} = -grad \phi$, а $grad \phi$ перпендикулярний до поверхні $\phi = const$. Тобто $\vec{E}_2$ перпендикулярний до поверхні провідника. Тоді $E_2 = E_{2n}$, де E_{2n} – нормальна складова вектора $\vec{E}_2$.

Якщо провідник знаходиться у вакуумі, то $E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, де $\sigma = \frac{dq}{ds}$.

Тоді, $E_{2n} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dS}$. Але, оскільки $E_{2n} = E_2$ і $\vec{E}_2 = -grad \phi$, то $E_{2n} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$.

У похідну $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ вкладається такий сенс. Нехай є екіпотенціальна поверхня. Візьмемо на ній довільну точку O і з початком у цій точці введемо локальну систему координат (рисунок 4.2). Вісь z направимо по нормалі $\vec{n}$ до екіпотенціальної поверхні в сторону

зростання потенціалу. Цей напрямок приймемо за позитивний напрямок нормалі $\vec{n}$. Координатна площина xy суміститься, очевидно, із дотичною площиною до еквіпотенціальної поверхні.

Тоді в точці O $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, а $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial n}$.

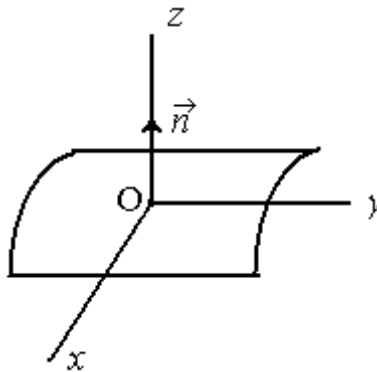


Рисунок 4.2 – Локальна система координат на еквіпотенціальній поверхні

Із загального визначення градієнта

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

враховуючи, що $\vec{k} = \vec{n}$, отримуємо:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}.$$

Отже,

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{dS} \quad q = -\varepsilon_0 \int \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot dS. \quad (4.2)$$

З формули граничних умов (4.1) отримуємо формулу для заряду зарядженого провідника.

Проаналізуємо загальну постановку задач в електростатиці. Звичайно задача ставиться так. Є деяка сукупність провідників.

Частина з них заряджена, частина незаряджена. Може бути також у просторі розподілений якийсь вільний заряд. Якщо ж такого заряду немає, то для знаходження поля потрібно вирішувати рівняння Лапласа: $\Delta\varphi = 0$.

Із загальної теорії диференціальних рівнянь відомо, що однозначне рішення рівняння Лапласа можливе тільки при заданні двох категорій крайових умов (оскільки це рівняння 2-го порядку):

1. Потрібно задати заряди на всіх провідниках
2. Потрібно задати потенціали на їх поверхнях.

Розглянемо найпростішу систему, що складається з одного зарядженого провідника (відокремлений провідник). Нехай він має заряд q_1 і потенціал φ_1 . Вони пов'язані один з одним формулою (4.2):

$$q_1 = -\varepsilon_0 \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS.$$

Змінимо заряд на провіднику: нехай він буде $q_2 = k q_1$. Тоді

$$q_2 = -\varepsilon_0 \int \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS,$$

або

$$q_2 = k q_1 = -k \varepsilon_0 \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS = -\varepsilon_0 \int \frac{\partial (k \varphi_1)}{\partial n} dS.$$

Зміна крайових умов для рівняння Лапласа виявилася такою, що якщо $q_2 = k q_1$, то $\varphi_2 = k \varphi_1$. Тобто $\frac{q_1}{\varphi_1} = \frac{q_2}{\varphi_2} = \dots = C$.

Звідси приходимо до поняття ємності відокремленого провідника.

4.1.2 ДИПОЛЬНИЙ МОМЕНТ СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ

Нехай є система зарядів $q_1, q_2, \dots, q_n$. Виберемо довільну точку O . Будемо вважати її початком відліку, і положення кожного заряду будемо характеризувати радіусом-вектором (рисунок 4.3).

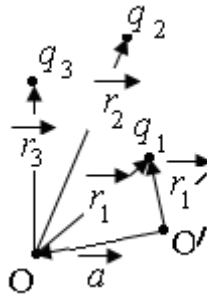


Рисунок 4.3 – До визначення дипольного моменту системи зарядів

Вектор $\vec{d} = \sum_k q_k \vec{r}_k$ називається дипольним моментом системи зарядів.

Нехай система зарядів буде нейтральна, тобто $\sum_k q_k = 0$.

Виберемо іншу точку початку відліку – точку O' , так що радіус-вектори будуть: $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3, \dots$. Вектор $\vec{OO'}$ назвемо вектором $\vec{a}$.

Видно, що $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 + \vec{a}$. Знайдемо дипольний момент $\vec{d}'$ відносно O' . За визначенням

$$\vec{d}' = \sum_k q_k \vec{r}'_k = \sum_k q_k (\vec{r}_k + \vec{a}) = \sum_k q_k \vec{r}_k + \vec{a} \sum_k q_k = \vec{d}.$$

Видно, що дипольний момент нейтральної системи зарядів не залежить від вибору точки, відносно якої він розглядається.

Будемо і далі розглядати електронейтральну систему зарядів. Електронейтральними системами є більшість систем у природі: атом, молекула, їх сукупності в різних агрегатних станах, а також плазма.

Будемо позначати позитивні заряди q_k^+ , а негативні – q_k^- . Відповідно їх радіуси – вектори – $\vec{r}_k^+$ і $\vec{r}_k^-$. «Електронейтральність» означає, що $\sum_k q_k^+ = \sum_k |q_k^-| = q$.

Дипольний момент такої системи

$$\vec{d} = \sum_k q_k^+ \vec{r}_k^+ + \sum_k q_k^- \vec{r}_k^- = \sum_k q_k^+ \vec{r}_k^+ - \sum_k |q_k^-| \vec{r}_k^-$$

Введемо вектори:

$$\vec{R}_+ = \frac{\sum_k q_k^+ \vec{r}_k^+}{\sum_k q_k^+} = \frac{\sum_k q_k^+ \vec{r}_k^+}{q}; \quad \text{і} \quad \vec{R}_- = \frac{\sum_k |q_k^-| \vec{r}_k^-}{\sum_k |q_k^-|} = \frac{\sum_k |q_k^-| \vec{r}_k^-}{q};$$

За визначенням, радіус-вектор центра мас системи

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{m}.$$

Тому можна сказати, в геометричному сенсі $\vec{R}_+$ і $\vec{R}_-$ – радіус-вектори «електричних центрів» позитивного і негативного зарядів. При цьому

$$\vec{d} = q(\vec{R}_+ - \vec{R}_-) = q \vec{R}_{+-}, \text{ де } \vec{R}_{+-} = \vec{R}_+ - \vec{R}_-.$$

Тобто $\vec{R}_{+-}$ – це вектор, напрямлений від центра негативних зарядів до центра позитивних зарядів.

Ясно, що електронейтральна система може не мати дипольного моменту, якщо геометрія її така, що центри позитивних і негативних зарядів співпадають. Це буває, наприклад, у сферично-симетричних атомів і молекул при певній кількості електронів.

Проте відсутність дипольного моменту не означає, що електронейтральна система не створює поля, оскільки потенціал поля визначається не тільки дипольним моментом, а і так званими

моментами вищих порядків, до яких відноситься квадрупольний момент, октопольний момент і взагалі, мультипольний момент.

4.1.3 ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Розглянемо поле найпростішої електронейтральної системи – поле диполя.

Диполем (або биполем) називають найпростішу електронейтральну систему, що складається з двох однакових за величиною і протилежних за знаком зарядів (рисунок 4.3)

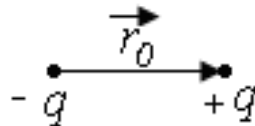


Рисунок 4.4 – Електричний диполь

$\vec{R}_{+-} = \vec{r}_0$ – вісь диполя.

Для диполя замість $\vec{d}$ пишуть $\vec{P}$: $\vec{P} = q \cdot \vec{r}_0$. Виберемо довільну точку $M(x, y, z)$, яка відносно зарядів q^- і q^+ має радіуси - вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ відповідно, а відносно центра диполя радіус-вектор – $\vec{r}$ (рисунок 4.4).

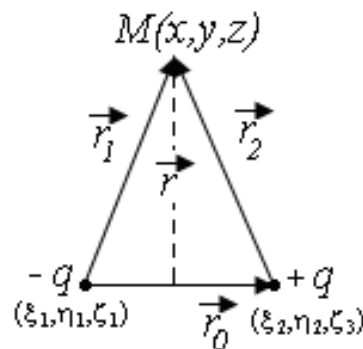


Рисунок 4.5 – Визначення поля диполя

Точка M – точка спостереження поля.

Звичайно розглядають такі точки спостереження поля, для яких $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$. Тоді диполь можна вважати точковим. Модель точкового диполя дуже важлива при розгляді питань поляризації діелектриків і взагалі в питаннях атомної фізики.

Знайдемо поле точкового диполя, тобто поле, створюване диполем у будь-якій точці простору, що відповідає умові точковості диполя.

Почнемо з потенціалу поля:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Як точно визначити різницю $\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$? Нехай є деяка функція

$$f(r). \text{ Тоді } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\text{grad } f \cdot d\vec{r}).$$

В якості функції $f(r)$ візьмемо функцію $f(r) = \frac{1}{r}$. Тобто

$$df = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}. \text{ Це змінювання пов'язане з тим, що ми переміщуємося по}$$

осі диполя, тобто $dr = r_0$. Тоді $df = (\text{grad} \frac{1}{r} \cdot \vec{r}_0)$ (індекс i означає, що

grad обчислюється за координатами точок джерел).

Визначимо $\text{grad} \frac{1}{r}$. Оскільки $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$,

$$\text{grad}_\xi \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{1}{r^2} \frac{2(x-\xi)(-1)}{2\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} = \frac{x-\xi}{r^3}.$$

Так само $\text{grad}_{\eta} \frac{1}{r} = \frac{y-\eta}{r^3}$, $\text{grad}_{\zeta} \frac{1}{r} = \frac{z-\zeta}{r^3}$. Звідси $\text{grad}_i \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}$. Тоді

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}\vec{r}_0)}{r^3}; \text{ або } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \quad (4.3)$$

Визначимо напруженість поля диполя. За визначенням $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$. (grad обчислюємо за координатами точок спостереження поля). $\vec{E}$ будемо обчислювати за компонентами

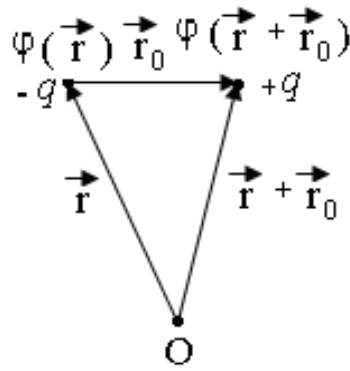
$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}.$$

Так як диполь точковий, то це дозволяє в якості радіус – вектора $\vec{r}$ взяти радіус – вектор, модуль якого дорівнює $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Якщо вважати, що початок координат знаходиться в центрі диполя, тоді $(\vec{p} \cdot \vec{r}) = p_x x + p_y y + p_z z$, а

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_x}{r^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p_x}{r^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p_x}{r^3} - (\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{3}{r^4} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})x}{r^5} - \frac{p_x}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо E_y і E_z . Звідси $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$

Енергія диполя в зовнішньому електричному полі. Відомо, що заряд q в точці поля, де потенціал дорівнює φ , має енергію $W = q \cdot \varphi$. Тому легко обчислити енергію електричного диполя у зовнішньому полі (рисунки 4.5).



**Рисунок 4.6 – До обчислення енергії диполя
у зовнішньому електричному полі**

$$W = -q \varphi(\vec{r}) + q \varphi(\vec{r} + \vec{r}_0),$$

де $\varphi(\vec{r} + \vec{r}_0)$ – функція трьох змінних.

Розкладемо цю функцію в ряд Тейлора в околі точки з радіус-вектором $\vec{r}$.

$$\varphi(\vec{r} + \vec{r}_0) = \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} r_{0x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} r_{0y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} r_{0z} + \dots$$

$$W = q \left(\varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} r_{0x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} r_{0y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} r_{0z} + \dots - \varphi(\vec{r}) \right) \cong q(\text{grad } \varphi \cdot \vec{r}_0) = -(\vec{P} \cdot \vec{E})$$

Будь-яка система в природі знаходиться в найбільш стійкому стані, коли її енергія є мінімальною. Звідси видно, що поле буде прагнути обернути диполь так, щоб його вісь співпадала з напрямом поля, бо при цьому енергія диполя виявляється мінімальною.

Сила, що діє на диполь у зовнішньому полі. На заряд q , що знаходиться в точці поля, де напруженість $\vec{E}$, діє, як відомо, сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Тому на диполь, що знаходиться в полі, діє, згідно з рисунком 4.5, сила

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_0) - \vec{E}(\vec{r})).$$

Розкладемо вектор $\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_0)$ в ряд в околі точки $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_0) = \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} r_{0x} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} r_{0y} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} r_{0z} + \dots$$

Таким чином, маємо, обмежуючись першими членами розкладу

$$\vec{F} = q \left(r_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + r_{0y} \frac{\partial}{\partial y} + r_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}.$$

Враховуючи $\vec{p} = q\vec{r}_0$ і вводячи позначення

$$\left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E} = (\vec{p} \nabla) \vec{E},$$

Отримаємо

$$\vec{F} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}.$$

Легко зрозуміти, що в однорідному полі ($\vec{E} = \text{const}$) $\vec{F} = 0$.

4.1.4. ДІЕЛЕКТРИКИ В ПОЛІ. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ПРИСУТНОСТІ ДІЕЛЕКТРИКІВ

Діелектрики – це середовища, в яких немає вільних електричних зарядів. З точки зору провідності до діелектриків, чи ізоляторів, відносять речовини, для яких λ знаходиться в інтервалі приблизно від 10^{-10} до 10^{-20} Ом $^{-1}$ ·см $^{-1}$, в той час як тверді речовини із питомою провідністю приблизно від 10^4 до 10^{10} Ом $^{-1}$ ·см $^{-1}$ належать до класу напівпровідників, а метали при кімнатній температурі мають λ приблизно в межах від $6 \cdot 10^3$ до $6 \cdot 10^5$ Ом $^{-1}$ ·см $^{-1}$.

Діелектрик, поміщений в електричне поле, приходить у стан, який називають станом поляризації. Залежно від природи діелектрика механізм виникнення цього стану може бути двояким. Є

діелектрики, дипольні моменти молекул яких у відсутності зовнішнього поля дорівнюють нулю. Такі діелектрики називаються неполярними. В зовнішньому полі в кожній молекулі індукується дипольний момент. Молекули перетворюються на мікродиполі, причому всі дипольні моменти паралельні і направлені в напрямі дії поля. Виникає макроскопічний дипольний момент діелектрика. Цей механізм називають індукційним.

Існують так звані полярні діелектрики, тобто діелектрики, молекули яких у відсутності поля мають дипольний момент. Проте температура хаотичного руху приводить до того, що середній дипольний момент діелектрика у відсутності поля дорівнює нулю. В зовнішньому полі починається процес орієнтації молекулярних диполів, причому поле прагне сумістити осі диполів із своїм напрямом. Проте температура заважає цьому, тобто грає роль дезорієнтуючого чинника. При кожному значенні температури і кожному значенні поля між полем і температурою виникає компроміс, який характеризує статистичну рівновагу системи. В цьому стані середня проекція дипольного моменту молекули на напрям поля виявляється позитивною, тобто виникає макроскопічна поляризація, тобто макроскопічний дипольний момент. Чим нижче температура, тим вище ступінь поляризації (при даному полі), чим сильніше поле, тим також вище ступінь поляризації (при даній температурі). Описаний механізм поляризації називається орієнтаційним ефектом. Він істотно залежить від температури, тоді як індукційний ефект від температури не залежить. При поляризації полярного діелектрика має місце також індукційний ефект. Він зводиться до того, що зовнішнє поле дещо розтягує молекулярні

диполі, збільшуючи їх дипольний момент. Ступінь поляризації діелектрика характеризується вектором поляризації.

Нехай елемент об'єму полярного діелектрика dV має дипольний момент $d\vec{P}$. Ясно, що $d\vec{P} \sim dV$. В якості коефіцієнта пропорційності візьмемо деякий вектор $\vec{\mathcal{P}}$: $d\vec{p} = \vec{\mathcal{P}} dV$, звідки $\vec{\mathcal{P}} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ – вектор поляризації.

За визначенням видно, що він є об'ємною густиною дипольного моменту. Є широка категорія діелектриків, для яких $\vec{\mathcal{P}} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$, де χ – діелектрична сприйнятливість діелектрика.

Діапазон значень χ надзвичайно широкий. Для великого класу діелектриків $\chi \approx 1$, проте для сильно розряджених газів значення χ можуть мати значення десятих і сотих часток одиниці. Для деяких напівпровідників – сотні і тисячі одиниць. Для діелектриків, які не виявляють напівпровідникових властивостей з підвищенням температури, значення χ досягає десятків тисяч одиниць. Діелектрики з аномально високим значенням χ називаються сегнетоелектриками.

Сегнетоелектрики виявляють спонтанну поляризацію в певному інтервалі температур і гістерезис поляризації, тобто при знятті зовнішнього поля поляризація у них частково залишається. Є такі матеріали, які виявляють анізотропію поляризаційних властивостей, тобто у різних напрямках ступінь поляризації у них різний. До них відносяться деякі монокристали. Їх не можна характеризувати одним значенням χ , тому вводять цілу таблицю таких значень, яка називається тензором діелектричної сприйнятливості. Діелектричні

властивості середовища безпосередньо пов'язані з її оптичними властивостями, а саме показник заломлення n безпосередньо пов'язаний з діелектричною проникністю, а діелектрична проникність пов'язана з діелектричною сприйнятливістю. Тому анізотропні діелектрики виявляють в оптиці подвійне променезаломлення.

Електричне поле у присутності діелектриків. Якщо діелектрик внести в зовнішнє електричне поле, то він стає поляризованим. Діелектрик породжує своє поле, і тому потрібно говорити про нове сумарне поле, тобто про суму поля зовнішнього і поля діелектрика. Потенціал такого поля

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

де φ_0 – потенціал зовнішнього поля, φ_1 – потенціал поля діелектрика.

Але для φ_0 загальний вираз відомий:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r} dS \quad (4.4)$$

Вважаємо, що зовнішнє поле створюється об'ємними і поверхневими вільними зарядами.

Обчислимо потенціал поля діелектрика φ_1 . Якщо ми маємо елемент dV поляризованого діелектрика, то його дипольний момент $d\vec{P}$, як ми показали в теорії диполя, створює потенціал

$$d\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(d\vec{P} \cdot \vec{r})}{r^3}, \text{ але оскільки } d\vec{P} = \vec{\mathcal{P}} dV \text{ то } d\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) dV. \text{ Звідки}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r})}{r^3} dV. \quad (4.5)$$

Для перетворення цього інтегралу скористаємось такою тотожністю:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{\mathcal{P}}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} + \left(\vec{\mathcal{P}} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right), \quad \text{але} \quad \operatorname{grad}_i \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad \text{Тому}$$

$$\left(\frac{\vec{\mathcal{P}} \vec{r}}{r^3} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{\vec{\mathcal{P}}}{r} \right) - \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}. \text{ Підставляючи цей вираз в (4.5) і користуючись}$$

теоремою Остроградського-Гаусса, отримуємо:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{(\vec{P} \vec{n})}{r} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{r} dV, (4.6)$$

де S – поверхня діелектрика.

Порівнюючи (4.6) з канонічним виразом (4.4), ми бачимо, що

$$-\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} = \rho_{\text{зв.}}, \text{ і } (\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}) = \mathcal{P}_n = \sigma_{\text{зв.}}.$$

Індекс «зв.» означає зв'язаний заряд, а зв'язаність заряду обумовлена тим, що йдеться про заряд у межах поляризованих молекул.

Таким чином, ми бачимо, що зв'язані заряди поляризованого діелектрика є джерелами поля, причому густина цих зарядів залежить від ступеня поляризації діелектриків.

Може трапитися так, що у діелектрика не буде об'ємного зв'язаного заряду. Це буває, якщо поляризація діелектрика однорідна. Для цього потрібна, взагалі кажучи, як однорідність самого діелектрика, так і однорідність поля, в яке він поміщений. Дійсно $\rho_{\text{зв.}} = 0$, якщо $\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} = 0$, тобто $\vec{\mathcal{P}} = \text{const}$.

Рівняння $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ є універсальним. У вакуумі це рівняння можна записати так: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, де ρ – об'ємна густина заряду.

Нехай у полі розміщений діелектрик, тоді з'являється ще одне джерело поля, що пов'язане з поляризацією діелектрика $\rho_{\text{зв.}}$.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_{\text{зв}}), \text{ але } \rho_{\text{зв}} = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}, \text{ звідси } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}), \text{ а це}$$

можна записати так:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}) = \rho,$$

тобто з'являється такий вираз, який потрібно прийняти за $\vec{D}$. Таким чином,

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \text{ де } \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}.$$

Тобто формально рівняння таке ж саме, але вектор індукції в порівнянні з вакуумом змінюється.

Встановимо зв'язок між діелектричною проникністю і діелектричною сприйнятливістю. Вектор $\vec{D}$ в діелектрику може бути представлений як $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, де ε – абсолютна діелектрична проникність діелектрика, яку можна записати: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, де $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ – відносна діелектрична проникність діелектрика, яка для всіх діелектриків більше 1.

Будемо вважати, що діелектрик такий, що $\vec{\mathcal{P}} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$. Тоді можна записати, що $\varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, звідки $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = 1 + \chi$ і $\chi = \varepsilon_r - 1 > 0$ (завжди).

4.1.5 ЕНЕРГІЯ СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ. ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ

Розглянемо два заряди. Енергією такої системи називається енергія взаємодії зарядів, тобто енергія одного із зарядів у полі, що створюється іншим зарядом:

$$W = W_{12} = W_{21} = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2,$$

де φ_1 – потенціал поля, що створюється другим зарядом, у точці, де знаходиться перший, а φ_2 – потенціал поля, що створюється першим зарядом, у точці, де знаходиться другий, тобто

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{21}}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{12}},$$

де $r_{12} = r_{21} = r$.

Звернемось до системи багатьох зарядів. Енергією такої системи називають енергію взаємодії всіх зарядів між собою.

Розглянемо i -тий заряд системи і його енергію в полі всієї решти зарядів, яку позначимо W_i . Тобто

$$W_i = \sum_{k \neq i} W_{ik} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{r_{ik}}.$$

Для того, щоб написати вираз для енергії системи, потрібно останній вираз підсумувати за всіма зарядами:

$$W_{\text{сист.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{k > i} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \quad (4.7)$$

(При такому запису немає повторень індексів).

Ми бачимо, що ця енергія може бути як позитивною, так і негативною величиною залежно від набору зарядів і конфігурації системи. Тут є важлива особливість, яка полягає у виключенні члена з індексами $k = i$. Таким чином, ми виключаємо фактично енергію зарядів у своєму власному полі. Але фізично це не зовсім коректно. Поля в околах точкових зарядів повинні бути досить великі. Дійсно,

поля в межах атома дуже великі, оскільки $\varphi \sim \frac{1}{r}$ і $E \sim \frac{1}{r^2}$. Поле сонячного світла $E \sim 10^{-1}$. Ефективний радіус електрона $\sim 10^{-13}$ см, отже, поле атома $E \sim 10^7$ В/м.

Таким чином, насправді, ми виключаємо нескінченну власну енергію точкових зарядів і залишаємо лише енергію взаємодії їх між собою. Детальний розгляд цього питання належить до компетенції квантової електродинаміки.

Енергія електростатичного поля. Ми можемо замість формули (4.7) записати:

$$W_{\text{сум.}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i.$$

Якщо застосувати цю формулу до зарядженого провідника, то

$$W_{\text{пр.}} = \frac{1}{2} \varphi \sum_i q_i = \frac{1}{2} q \varphi,$$

де $\varphi_i = \text{const} = \varphi$.

Будемо розглядати безперервно розподілений заряд. Замість q_i треба перейти до ρdV , замість суми – до інтегралу. Тоді

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV.$$

Цей вираз перекладемо на польову мову, пригадаємо що $\rho = \text{div} \vec{D}$. Тоді

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \text{div} \vec{D} dV.$$

Пригадаємо тотожність:

$$\text{div}(\varphi \vec{D}) = \varphi \text{div} \vec{D} + (\vec{D} \text{grad} \varphi), \quad \varphi \text{div} \vec{D} = \text{div}(\varphi \vec{D}) - (\vec{D} \text{grad} \varphi). \text{ Отже}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\varphi \vec{D}) dV - \frac{1}{2} \int_V (\vec{D} \text{grad} \varphi) dV.$$

Перший інтеграл перетворимо за теоремою Остроградського – Гаусса. Тоді

$$W = \frac{1}{2} \oint_S (\varphi \vec{D} \cdot \vec{n}) dS + \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \vec{D}) dV.$$

Розглянемо весь простір. Це можна зробити, оскільки електричне поле займає весь простір, інша справа, що воно швидко зменшується. Але коли $S \rightarrow \infty$, то $\oint_{S \rightarrow \infty} (\varphi \vec{D} \cdot \vec{n}) dS = 0$, оскільки потоку вектора $\vec{D}$ через нескінченно далеку поверхню бути не може.

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \vec{D}) dV \quad (4.8)$$

Вираз (4.8) – енергія електростатичного поля. А енергія, що міститься в одиниці об'єму

$$w_{el.cm.} = \frac{dW_{el.cm.}}{dV} = \frac{(\vec{E} \vec{D})}{2}.$$

Величина $w_{el.cm.}$ називається об'ємною густиною енергії електростатичного поля.

Декілька зауважень до виразу (4.8). Видно що енергія електростатичного поля завжди позитивна, існує всюди, де є поле, тобто в усьому просторі, а не тільки там, де розташовані заряди. В цій формулі враховується все, що не враховує формула (4.7), тобто і енергія поля поблизу самих зарядів. Вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ статичні, тобто не залежать від часу. Енергія «вморожена» в простір і не володіє властивістю руху на відміну від енергії електромагнітного поля.

4.2 ДЕЯКІ ПИТАННЯ МАГНІТОСТАТИКИ

Магнітостатика визначається рівняннями Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Так само як електростатика, магнітостатика вирішує дві категорії задач:

1. За заданими полями знайти струми, що створюють ці поля. Ці задачі диференціального типу і є тривіальними.
2. За заданими струмами, знайти поля, що створюються ними. Це важка задача. Ця задача інтегральна, і рішення її звичайно представляє великі труднощі.

4.2.1 ВЕКТОРНИЙ ПОТЕНЦІАЛ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Введемо деякий вектор $\vec{A}$ такий, щоб $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Тоді друге рівняння Максвелла автоматично задовольняється, оскільки

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0.$$

Вектор $\vec{A}$ називається вектор-потенціалом, або векторним потенціалом магнітного поля.

Візьмемо довільний скаляр ψ і розглянемо інший векторний потенціал

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi.$$

Цей потенціал визначає поле

$$\vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} (\vec{A} + \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \vec{B}.$$

Тобто вектори $\vec{A}$ і $\vec{A}'$ визначають одне і те ж поле, отже, вибір вектор-потенціалу неоднозначний. А саме, існує як завгодно багато

вектор-потенціалів, що відрізняються один від одного на *grad* довільного скаляра, які визначають одне і те ж поле.

Така властивість поля називається градієнтною інваріантністю поля (інваріантність взагалі це незмінність по відношенню до якого-небудь перетворення). Для того, щоб обмежити вибір вектор-потенціалів, на них накладають додаткові умови, чи, як кажуть їх калібрують.

В магнітостатиці вимагають, щоб $\text{div}\vec{A}=0$. Таке калібрування називається кулонівським.

Звернемось до першого рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{H}=\vec{j}$. Це рівняння для вакууму можна записати як $\text{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$.

Підставимо $\vec{B}=\text{rot}\vec{A}$, отримаємо:

$$\text{rotrot}\vec{A}=\mu_0\vec{j}.$$

Відповідно до тотожності, доведеної вище, маємо:

$$\text{graddiv}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}.$$

З урахуванням калібрування

$$-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}. \quad (4.9)$$

Це рівняння Пуассона в магнітостатиці, або основне рівняння магнітостатики.

Так само, як і рівняння Пуассона в електростатиці, це рівняння допускає точні рішення лише в незначному числі випадків, а саме, коли розподіл струмів має «хорошу» геометрію. Проте можна записати загальне рішення цього рівняння.

Воно має вигляд:

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}}{r}dV, \quad (4.10)$$

де r – відстань від елемента струму $\vec{j}dV$ до точки спостереження поля.

Покажемо, що з (4.10) випливає закон Біо – Савара – Лапласа.

Обчислимо вектор $\vec{B}$ як $\text{rot}\vec{A}$.

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

На підставі (4.10) маємо:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot}_e \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV \quad (4.11)$$

Тут індекс “ e ”, означає, що операцію rot потрібно проводити за зовнішніми координатами, тобто за координатами точок спостереження поля, в той час як інтеграл береться за внутрішніми координатами, тобто координатами точок джерел.

Відповідно до доведеної тотожності

$$\text{rot}_e \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot}_e \vec{j} + \left[\text{grad}_e \frac{1}{r} \vec{j} \right],$$

$\text{rot}_e \vec{j} = 0$, тому що $\vec{j}$ залежить від внутрішніх координат $\text{grad}_e \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$;

$\text{rot}_e \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \left[\vec{j} \frac{\vec{r}}{r^3} \right]$. Підставимо цей вираз у формулу (4.11). Отримаємо:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV.$$

Останній вираз є закон Біо-Савара-Лапласа для об'ємних струмів.

4.2.2 МАГНІТНЕ ПОЛЕ ЕЛЕМЕНТАРНОГО СТРУМУ

Для вирішення задачі про магнітне поле елементарного струму використаємо метод векторного потенціалу. *Струм* називається

елементарним, якщо розмір області його розповсюдження набагато менший відстаней від будь-якого елемента цього струму до точок спостереження поля. Уявлення про такий струм дуже важливо, тому що атомні і молекулярні струми якраз є елементарними, а в макрофізиці буває так, що магнітні поля, створювані макроскопічними струмами, спостерігаються на великих відстанях від таких струмів.

Нехай маємо довільний об'ємний струм. Елемент цього струму $\vec{j}dV$. Виберемо довільну точку O в області розподілу цього струму і довільну точку P – точку спостереження поля (рисунок 4.7)

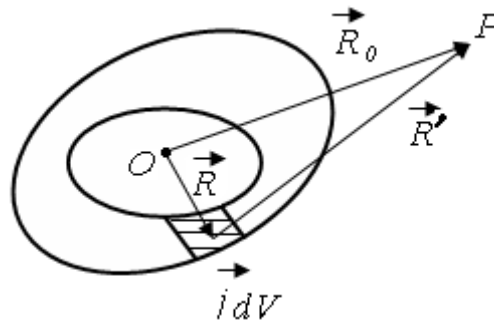


Рисунок 4.7 – До обчислення векторного потенціалу поля елементарного струму

За визначенням струм буде елементарним, якщо $R_0 \gg R$, $R' \gg R$.

Для вектор-потенціалу поля можна записати:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{R'} dV. \quad (4.12)$$

Перша частина задачі: обчислення векторного потенціалу, тобто обчислення інтеграла (4.12). Оскільки $\vec{R}' = \vec{R}_0 - \vec{R}$, то

$$\begin{aligned} (R')^2 &= R_0^2 - 2(\vec{R}_0 \vec{R}) + R^2. \text{ Звідси } R' = (R_0^2 - 2(\vec{R}_0 \vec{R}) + R^2)^{1/2} = \\ &= R_0 \left(1 - \frac{2(\vec{R}_0 \vec{R})}{R_0^2} + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{1/2} \approx R_0 \left(1 - \frac{2(\vec{R}_0 \vec{R})}{R_0^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

тому що за визначенням елементарного струму, $\frac{R^2}{R_0^2} \ll 1$.

Тоді

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{2(\vec{R}_0 \vec{R})}{R_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Останній вираз розкладемо в ряд за узагальненою формулою бінома Ньютона. Обмежуючись першими членами цього ряду, отримаємо:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{(\vec{R}_0 \vec{R})}{R_0^2} \right),$$

тому для вектор-потенціалу $\vec{A}$ отримаємо вираз:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \int_V \vec{j} dV + \frac{\mu_0}{4\pi R_0^3} \int_V \vec{j} (\vec{R} \vec{R}_0) dV \quad (4.13)$$

Позначимо

$$\vec{J}_1 = \int_V \vec{j} dV \quad \text{і} \quad \vec{J}_2 = \int_V \vec{j} (\vec{R} \vec{R}_0) dV.$$

Обчислимо $\vec{J}_2$.

Підінтегральний вираз перетворимо за правилом $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$, вважаючи, що він є $\vec{b}(\vec{a}\vec{c})$:

$$\begin{aligned} [\vec{R}_0[\vec{j}\vec{R}]] &= [[\vec{R}\vec{j}]\vec{R}_0] = \vec{j}(\vec{R}_0\vec{R}) - \vec{R}(\vec{R}_0\vec{j}) \\ \frac{1}{2} [[\vec{R}\vec{j}]\vec{R}_0] &= \vec{j}(\vec{R}_0\vec{R}) - \frac{1}{2} \{ \vec{R}(\vec{R}_0\vec{j}) + \vec{j}(\vec{R}_0\vec{R}) \} \\ \vec{j}(\vec{R}_0\vec{R}) &= \frac{1}{2} [[\vec{R}\vec{j}]\vec{R}_0] + \frac{1}{2} \{ \vec{R}(\vec{R}_0\vec{j}) + \vec{j}(\vec{R}_0\vec{R}) \} \\ \vec{J}_2 &= \frac{1}{2} \int_V [[\vec{R}\vec{j}]\vec{R}_0] dV + \frac{1}{2} \int_V \{ \vec{R}(\vec{R}_0\vec{j}) + \vec{j}(\vec{R}_0\vec{R}) \} dV \quad (4.14) \\ \vec{J}_2' &= \frac{1}{2} \int_V [[\vec{R}\vec{j}]\vec{R}_0] dV \end{aligned}$$

$$\vec{J}_2'' = \int_V \{ \vec{R}(\vec{R}_0 \vec{j}) + \vec{j}(\vec{R}_0 \vec{R}) \} dV$$

В $\vec{J}_2'$ інтегрування здійснюється за внутрішніми координатами, в той час, як $\vec{R}_0$ залежить тільки від зовнішніх координат. Тому знак зовнішнього векторного добутку можна винести за інтеграл

$$\left[\frac{1}{2} \int_V [\vec{R} \vec{j}] dV \vec{R}_{i0} \right] = \vec{J}_2'.$$

Вектор

$$\frac{1}{2} \int_V [\vec{R} \vec{j}] dV = \vec{M} \quad (4.15)$$

назвемо магнітним моментом струму. Тоді можна записати:

$$\vec{J}_2' = [\vec{M} \vec{R}_0]. \quad (4.16)$$

Для обчислення $\vec{J}_2''$ візьмемо довільний вектор $\vec{a}$ і розглянемо скалярний добуток $(\vec{a} \vec{J}_2'')$. Підінтегральний має вигляд:

$$(\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{j}) + (\vec{j} \vec{a})(\vec{R}_0 \vec{R}).$$

Можна довести майже очевидну тотожність:

$$(\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{j}) + (\vec{j} \vec{a})(\vec{R}_0 \vec{R}) = (\vec{j} \text{grad}_i \{ (\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{R}) \}). \quad (4.17)$$

Індекс «i» при градієнті означає, що потрібно брати похідні за внутрішніми координатами.

Доведемо (4.17). Розглянемо праву частину (4.17):

$$\text{grad}_i \{ (\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{R}) \} = (\vec{a} \vec{R}) \text{grad}_i (\vec{R}_0 \vec{R}) + (\vec{R}_0 \vec{R}) \text{grad}_i (\vec{a} \vec{R}); \quad (4.18)$$

$$\vec{R}_0(x, y, z);$$

$$\vec{a}(\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z);$$

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta).$$

Тому, обчислюючи в (4.18) градієнти, отримаємо:

$$\text{grad}_\xi (\vec{R}_0 \vec{R}) = \frac{\partial}{\partial \xi} (x\xi + y\eta + z\zeta) = x;$$

$$\text{grad}_i(\vec{R}_0 \vec{R}) = \vec{R}_0; \quad (4.19)$$

$$\text{grad}_\xi(\vec{a} \vec{R}) = \frac{\partial}{\partial \xi}(a_x \xi + a_y \eta + a_z \zeta) = a_x;$$

$$\text{grad}_i(\vec{a} \vec{R}) = \vec{a}. \quad (4.20)$$

Підставимо (4.19) і (4.20) в (4.18), отримаємо:

$$\text{grad}_i \{(\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{R})\} = \vec{R}_0(\vec{a} \vec{R}) + \vec{a}(\vec{R}_0 \vec{R}). \quad (4.21)$$

Вираз (4.21) доводить тотожність (4.17).

Тепер перетворимо праву частину (4.17) за відомою тотожністю векторного аналізу:

$$\text{div}_i(\vec{j}(\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{R})) = (\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{R}) \text{div}_i \vec{j} + (\vec{j} \text{grad}_s \{(\vec{a} \vec{R}) \cdot (\vec{R}_0 \vec{R})\}). \quad (4.22)$$

Але $\text{div}_i \vec{j} = 0$ (рівняння безперервності для постійного струму).

Маємо таке відношення: ліва частина (4.17) дорівнює лівій частині (4.22). Отже

$$(\vec{a} \vec{J}_2'') = \int_V \text{div}_s(\vec{j}(\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{R})) dV.$$

Цей інтеграл перетворимо за теоремою Остроградського – Гаусса:

$$(\vec{a} \vec{J}_2'') = \oint_S (\vec{a} \vec{R})(\vec{R}_0 \vec{R})(\vec{j} d\vec{S}),$$

де S – поверхня, що охоплює об'єм (обмежує об'єм), в якому тече струм. Але через таку поверхню потоку вектора $\vec{j}$ бути не може. Тому цей інтеграл дорівнює нулю. Отже, $(\vec{a} \vec{J}_2'') = 0$.

З того, що вектор $\vec{a}$ довільний, виходить, що $\vec{J}_2'' = 0$. Дійсно, через довільність вектор $\vec{a}$ завжди можна вибрати таким, щоб $\vec{a} \parallel \vec{J}_2''$. Тоді явно $(\vec{a} \vec{J}_2'') \neq 0$.

Але $(\vec{a} \vec{J}_2'') = 0$ завжди. Отже, $\vec{J}_2'' = 0$ завжди. Таким чином, отримаємо:

$$\vec{J}_2 = \vec{J}'_2 \quad (4.23)$$

Розглянемо $\vec{J}_1$:

$$\vec{J}_1 = \int_V \vec{j} dV.$$

Розіб'ємо об'ємний струм на такі струмові трубки, кожен з яких можна вважати лінійним струмом, тоді елемент $\vec{j} dV$ струму перейде

$$\text{в} \quad \vec{j} dV \rightarrow \sum_K I_k d\vec{l}_k,$$

де I_k – струм, $d\vec{l}_k$ – елемент довжини k - струмової трубки. Отже,

$$\int_V \vec{j} dV \rightarrow \sum_k \oint_{l_k} I_k d\vec{l}_k = \sum_k I_k \oint_{l_k} d\vec{l}_k = 0.$$

$$\vec{J}_1 = 0 \quad (4.24)$$

З урахуванням (4.23), (4.16) і (4.24) одержуємо з (4.13):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{M}\vec{R}_0]}{R_0^3} \quad (4.25)$$

Таким чином ми вирішили першу частину задачі.

Друга частина задачі: обчислення поля.

Будемо обчислювати поле як $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, тобто, враховуючи (4.25), будемо шукати $\vec{B}$ як

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot}_e \frac{[\vec{M}\vec{R}_0]}{R_0^3}.$$

Для компонент поля маємо:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot}_x \frac{[\vec{M}\vec{R}_0]}{R_0^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{[\vec{M}\vec{R}_0]_z}{R_0^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{[\vec{M}\vec{R}_0]_y}{R_0^3} \right\}, \quad \vec{M}(M_\xi, M_\eta, M_\zeta), \quad \vec{R}_0(x, y, z).$$

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M_\xi y - M_\eta x}{R_0^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M_\zeta x - M_\xi z}{R_0^3} \right) \right\} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{M_\xi}{R_0^3} + (M_\xi y - M_\eta x) \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R_0^3} + \frac{M_\xi}{R_0^3} - (M_\zeta x - M_\xi z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_0^3} \right\} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{2M_\xi}{R_0^3} + (M_\xi y - M_\eta x) \frac{\partial}{\partial R_0} \left(\frac{1}{R_0^3} \right) \frac{\partial R_0}{\partial y} - (M_\zeta x - M_\xi z) \frac{\partial}{\partial R_0} \left(\frac{1}{R_0^3} \right) \frac{\partial R_0}{\partial z} \right\} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{2M_\xi}{R_0^3} + (M_\xi y - M_\eta x) \left(-\frac{3}{R_0^4} \right) \frac{2y}{2R_0} - (M_\zeta x - M_\xi z) \left(-\frac{3}{R_0^4} \right) \frac{2z}{2R_0} \right\} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{2M_\xi}{R_0^3} + \frac{-3M_\xi y^2 + 3M_\eta xy + 3M_\zeta xz - 3M_\xi z^2 - 3M_\xi x^2 + 3M_\xi x^2}{R_0^5} \right\} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{2M_\xi}{R_0^3} - \frac{3M_\xi}{R_0^3} + \frac{3(M_\xi x + M_\eta y + M_\zeta z)x}{R_0^5} \right\} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{M}\vec{R}_0)x}{R_0^5} - \frac{M_\xi}{R_0^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Узагальнюючи цей результат, отримуємо:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{M}\vec{R}_0)\vec{R}_0}{R_0^5} - \frac{\vec{M}}{R_0^3} \right\}. \quad (4.26)$$

Пригадаємо, що в теорії електричного диполя отримують такі результати:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}, \text{ а } \vec{E} = -grad\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}. \quad (4.27)$$

У той же час для поля елементарного струму маємо:

$$\begin{aligned}
\vec{B} = rot\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{M}\vec{R}_0)\vec{R}_0}{R_0^5} - \frac{\vec{M}}{R_0^3} \right\}. \\
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{M}\vec{R}_0]}{R_0^3}.
\end{aligned} \quad (4.28)$$

Порівнюючи (4.27) і (4.28), дійдемо висновку, що елементарний струм нагадує електричний диполь, тому його називають іноді магнітним диполем.

Із математичної аналогії ясно, що можна ввести скалярний потенціал

$$\psi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{M}\vec{R}_0)}{R_0^3} \quad (4.29)$$

Тоді поле $\vec{B}$ можна виразити як

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = -\text{grad}\psi.$$

4.2.3 МАГНЕТИКИ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ. МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ПРИСУТНОСТІ МАГНЕТИКІВ

Всі речовини є магнітоактивними, хоча ступінь цієї активності у різних речовин різна. Так, наприклад, є речовини, які своєю присутністю ослабляють магнітне поле, у яке вони поміщені. Такі речовини називають діамагнетиками.

Є речовини, які незначно підсилюють магнітне поле. Вони називаються парамагнетиками.

Речовини, які суттєво підсилюють магнітне поле називаються феромагнетиками. Для таких речовин характерний гістерезис, тобто після зняття зовнішнього магнітного поля в них спостерігається залишок намагніченості.

Вищеназвані типи магнетиків є основними. Проте вони не вичерпують магнітних властивостей речовини. Є ще досить складні явища антиферомагнетизму і ферімагнетизму.

Пояснимо спочатку різницю між діа- та парамагнетизмом. Вона полягає в тому, що діамагнетики – це речовини, молекули яких у відсутності магнітного поля не мають магнітних моментів. Однак у зовнішньому полі такі моменти у молекул з'являються (індукуються)

і ці моменти направлені проти зовнішнього поля. Таким чином, в середовищі виникає макроскопічний магнітний момент, направлений проти поля, що веде до ослаблення цього поля. Механізм виникнення таких моментів описується так званою теоремою Лармора.

Парамагнетики – це речовини, молекули яких у відсутності зовнішнього поля мають магнітні моменти. Однак внаслідок теплового руху ці молекулярні магнітні моменти розкидані хаотично, так що середній магнітний момент рівний нулю. Але у зовнішньому магнітному полі $\vec{B}$ магнітний момент $\vec{\mu}$ набуває енергію

$$W_M = -(\vec{\mu}\vec{B}).$$

Звідси ясно, що сили, що діють на магнітний момент з боку поля прагнуть зорієнтувати цей момент вздовж поля. В цьому випадку енергія досягає мінімуму, і стан системи буде стійким. Тому при поміщенні парамагнетика в зовнішнє магнітне поле в ньому починається орієнтація молекулярних магнітних моментів вздовж поля. Цьому орієнтуючому ефекту заважає тепловий рух молекул. При цьому чим вище температура, тим сильніше його дезорієнтуюча дія. В кінцевому рахунку при кожній температурі і при кожному значенні поля встановлюється деяка статистична рівновага, результатом якої є стійке значення середнього магнітного моменту, направленою вздовж поля. Таким чином, орієнтаційний ефект, на відміну від описаного раніше індукційного (тобто діамагнітного) ефекту, залежить від температури. При намагніченні парамагнетика поряд з орієнтаційним ефектом має місце і індукційний ефект, який частково зменшує результат орієнтаційного ефекту.

Діа- і парамагнетизм знаходять задовільне пояснення в рамках класичної електронної теорії. Однак феромагнетизм не міг бути пояснений в рамках цієї теорії, насамперед тому, що не була зрозуміла природа цього явища. Тільки в 1927-1928 роках після виникнення квантової механіки, стало зрозуміло, що своїм походженням феромагнетизм зобов'язаний спіну електрона. На цій основі В. Гейзенберг створив квантову теорію феромагнетизму.

Нехай у зовнішньому магнітному полі елемент об'єму магнетика dV набуде магнітний момент $d\vec{M}$. Вектором намагніченості або намагніченістю $\vec{I}$ називається

$$\vec{I} = \frac{d\vec{M}}{dV}.$$

Це є кількісна характеристика ступеню намагніченості, яка є об'ємною густиною магнітного моменту. Для багатьох діа- і парамагнетиків існує простий зв'язок:

$$\vec{I} = \chi \vec{H},$$

де χ – так звана магнітна сприйнятливість магнетика. Такого зв'язку не існує для феромагнетиків.

Є магнетики, яким властива магнітна анізотропія. Для таких магнетиків замість величини χ потрібно вводити тензор магнітної сприйнятливості.

Магнітне поле у присутності магнетиків. Нехай у магнітне поле поміщений магнетик. Тоді внаслідок його намагніченості потрібно говорити про результуюче магнітне поле, вектор-потенціал якого буде представляти собою

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_M,$$

де $\vec{A}_0$ – вектор-потенціал зовнішнього поля, а $\vec{A}_M$ – вектор-потенціал поля магнетика. При цьому $\vec{A}_0$ завжди виражається як

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV. \quad (4.30)$$

Знайдемо вираз для $\vec{A}_M$. Якщо dV набуде магнітний момент $d\vec{M}$, то, згідно теорії елементарного струму, $d\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[d\vec{M}\vec{R}_0]}{R_0^3}$. Нехай $R_0 = r$.

Тоді $d\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[d\vec{M}\vec{r}]}{r^3}$, але $d\vec{M} = \vec{I}dV$, тому $d\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{I}\vec{r}]}{r^3} dV$. Звідси

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{I}\vec{r}]}{r^3} dV, \quad (4.31)$$

де інтегрування ведеться за об'ємом магнетика. Для перетворення підінтегрального виразу скористаємося відомою тотожністю векторного аналізу:

$$\text{rot} \frac{\vec{I}}{r} = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{I} + \left[\text{grad} \frac{1}{r} \vec{I} \right].$$

Візьмемо градієнт за координатами точок джерел: $\text{grad}_i \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}$.

Тоді $\text{rot} \frac{\vec{I}}{r} = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{I} + \frac{[\vec{r}\vec{I}]}{r^3}$. Звідси $\frac{[\vec{I}\vec{r}]}{r^3} = \frac{\text{rot} \vec{I}}{r} - \text{rot} \frac{\vec{I}}{r}$. Підставимо останній

вираз у формулу (4.31). Отримаємо:

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot} \vec{I}}{r} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot} \frac{\vec{I}}{r} dV.$$

Тепер скористаємось перетворенням: $\int_V \text{rot} \vec{A} dV = \oint_S [d\vec{S}\vec{A}]$.

Тут S – поверхня, що обмежує об'єм V . Тоді з урахуванням цієї теореми запишемо:

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot} \vec{I}}{r} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{[d\vec{S}\vec{I}]}{r}.$$

Якщо розглядати однорідний магнетик і під S розуміти поверхню, що обмежує зайнятий ним об'єм, то вектор намагніченості на цій поверхні перетворюється в нуль. Тоді другий інтеграл дорівнює нулю.

Але інтеграл, що залишився, за своєю структурою нагадує канонічний інтеграл $\vec{A}_0$ за формулою (4.30) і $\text{rot}\vec{I}$ має сенс якогось струму. Тому запишемо $\text{rot}\vec{I} = \vec{j}_{\text{мол.}}$. Таким чином, виникає уявлення про якісь мікроскопічні струми, що виникають на молекулярному рівні та забезпечують намагніченість магнетика. Поняття про такі струми було введено в свій час Ампером. Він виходив із наступних міркувань: вже було відомо, що магнетизм завжди супроводжував струми, тобто що він породжується струмами. Тому у намагніченій речовині повинні, за Ампером, існувати якісь мікроструми, які забезпечують намагніченість цієї речовини. Однак, нічого не знаючи про атомізм речовини, він нічого не міг сказати про фізичну природу цих струмів. У подальшому, вже в класичній електронній теорії будови речовини і на основі моделі атома Бора, стало зрозуміло, що амперівські струми – це дійсно струми, що виникають на молекулярному рівні за рахунок руху атомних електронів. Враховуючи, що ці струми швидко змінюються від атома до атома, правильно було б писати так:

$$\text{rot}\vec{I} = \langle \vec{j}_{\text{мол.}} \rangle,$$

де $\langle \vec{j}_{\text{мол.}} \rangle$ – середня густина молекулярних струмів.

Запишемо рівняння Максвелла (рівняння магнітостатики):

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j},$$

або

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Однак, якщо в полі поміщений магнетик, то окрім струму $\vec{j}$ з'являється ще і струм $\vec{j}_{\text{мол.}}$: $\text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{\text{мол.}})$. Враховуючи, що $\vec{j}_{\text{мол.}} = \text{rot}\vec{I}$, отримаємо $\text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \text{rot}\vec{I})$, або $\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\right) = \vec{j}$. Ми бачимо, що

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}, \quad (4.32)$$

Тобто рівняння Максвелла має вигляд $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$, але під $\vec{H}$ розуміють (4.32). Вираз (4.32) – це поле у присутності магнетика.

Знайдемо зв'язок між магнітною проникністю і магнітною сприйнятливістю. Для цього у виразі (4.32) замінимо $\vec{B}$ на $\mu\vec{H}$ (де μ – абсолютна магнітна проникність магнетиків: $\mu = \mu_0\mu_r$, де $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ – відносна магнітна проникність магнетика), а вектор $\vec{I}$ замінимо на $\chi\vec{H}$. Отримаємо $\vec{H} = \frac{\mu}{\mu_0}\vec{H} - \chi\vec{H}$. Звідси $\chi = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = \mu_r - 1$. Для діамagnetиків $\mu < \mu_0$, $\chi < 0$. Для парамагнетиків $\mu > \mu_0$, $\chi > 0$. Для феромагнетиків такого зв'язку між χ і μ немає. Для них $\mu \gg \mu_0$. При цьому між $\vec{I}$ і $\vec{H}$ лінійної залежності не існує.

4.2.4 ВЗАЄМОДІЯ СТРУМІВ

Відомо, що на струм, який знаходиться в магнітному полі, діє з боку останнього сила, що за деяких умов може викликати рух провідника. Оскільки навколо кожного провідника виникає магнітне

поле, струми повинні взаємодіяти між собою. Сили цієї взаємодії називаються пондеромоторними, а сама взаємодія – пондеромоторною.

На елемент струму $\vec{j}dV$ діє з боку магнітного поля $\vec{B}$ сила

$$d\vec{F} = [\vec{j}\vec{B}]dV \quad (4.33)$$

Якщо струм лінійний, то вираз (4.33) переходить в

$$d\vec{F} = I[d\vec{L}\vec{B}] \quad (4.34)$$

Вирази (4.33) і (4.34) описують закон Ампера для об'ємних та лінійних струмів відповідно. В інтегральній формі цей закон має вигляд:

$$\vec{F} = \int_V [\vec{j}\vec{B}]dV; \quad \vec{F} = \int_L I[d\vec{L}\vec{B}] \quad (4.35)$$

Розглянемо два лінійних струми (рисунок 4.8)

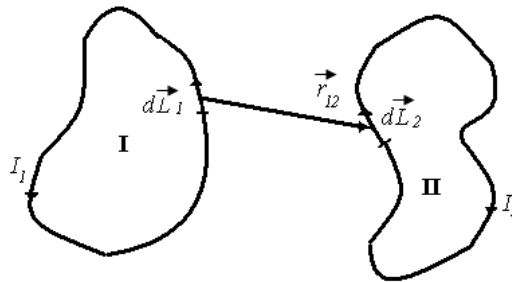


Рисунок 4.8 – До питання про взаємодію лінійних струмів

Магнітне поле, що утворює елемент $I_1 d\vec{L}_1$ першого струму в місці, де знаходиться елемент $I_2 d\vec{L}_2$ другого струму згідно закону Біо-Савара є

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{[d\vec{L}_1 \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}.$$

Тому магнітне поле, що утворює струм I_1 в місці, де знаходиться елемент $I_2 d\vec{L}_2$ струму I_2 , є

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{L_1} \frac{[d\vec{L}_1 \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3} \quad (4.36)$$

На підставі (4.35) і (4.36) для взаємодії струмів I_1 і I_2 отримуємо:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[d\vec{L}_2 [d\vec{L}_1 \vec{r}_{12}]]}{r_{12}^3} \quad (4.37)$$

4.2.5 ЕНЕРГІЯ СТРУМУ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ. ЕНЕРГІЯ ВЗАЄМОДІЇ СТРУМІВ. ВЛАСНА ЕНЕРГІЯ СТРУМУ

Нехай лінійний струм I переміщується в магнітному полі $\vec{B}$ так, що кожний елемент контуру $d\vec{L}$ зазнає переміщення $\delta\vec{r}$, а сам струм при цьому не змінюється (віртуальне переміщення) (рисунок 4.9).

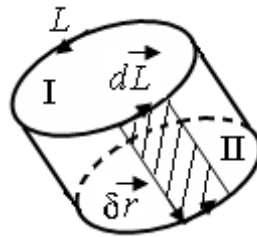


Рисунок 4.9 До обчислення енергії струму в магнітному полі

Робота з переміщення елемента dL , що виконує магнітне поле, дорівнює:

$$\delta A_{dL} = (d\vec{F} \delta\vec{r}) = I ([d\vec{L} \vec{B}] \delta\vec{r}) = I (\vec{B} [\delta\vec{r} d\vec{L}]) = I \delta\phi_{dL},$$

де $\delta\phi_{dL}$ – потік вектора $\vec{B}$ крізь штриховану площадку.

Отже робота поля по переміщенню по всьому контуру буде

$$\delta A = \oint_L \delta A_{dl} = I \delta \varphi_{бок}, \quad (4.38)$$

де $\delta \varphi_{бок} = \int_{S_{бок}} (\vec{B} d\vec{S})$ – магнітний потік, що пронизує поверхню, яку описує контур L при своєму русі.

Але ж при цьому русі змінюється також магнітний потік крізь поверхню, обмежену самим контуром. Таким чином, повний магнітний потік є потік крізь замкнену поверхню, а саме:

$$\Phi_{бок} = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_{бок}+S_1+S_2} (\vec{B} d\vec{S}) = \delta \varphi_{бок} + \Phi_1 + \Phi_2 = \delta \varphi_{бок} - \delta \Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0$$

Звідси

$$\delta \varphi = \delta \Phi. \quad (4.39)$$

Позначення $\delta \Phi$ обумовлено тим, що положення контурів 1 і 2 нескінченно мало відрізняються один від одного, а різниця в значеннях Φ_1 і Φ_2 обумовлено тим, що орт Φ_2 по відношенню до контуру 1 виходить із об'єму, а по відношенню до контуру 2 входить в об'єм.

Для Φ можна записати, позначаючи поверхню, що спирається на контур, через f

$$\Phi = \int_f (\vec{B} d\vec{f}) = \int_f (\operatorname{rot} \vec{A} d\vec{f}) = \oint_L (\vec{A} d\vec{L})$$

де $\vec{A}$ – вектор-потенціал магнітного поля.

Таким чином, ми бачимо, що:

$$\delta A = -I \oint_L (\vec{A} d\vec{L}) \quad (4.40)$$

Введемо позначення

$$U = -I \Phi = -I \oint_L (\vec{A} d\vec{L}) \quad (4.41)$$

Зараз

$$\delta A = -(\delta U)_I \quad (4.42)$$

Індекс I означає, що вираз δU береться при постійному струмі і відповідає саме віртуальному переміщенню.

Таким чином, функція U відіграє роль потенціальної чи силової функції струму в магнітному полі. Але ж її не можна ототожнювати із потенціальною енергією. Дійсно, переміщення провідника в магнітному полі супроводжується не тільки роботою пондеромоторних сил цього поля, але також і роботою електрорушійних сил, що їх індукує поле в провіднику. Тому зміну енергії не можна визначити тільки за роботою пондеромоторних сил.

Однак, з урахуванням останніх зауважень, будемо вважати «потенціальною енергією» струму в магнітному полі вираз (4.41). Кінцеву роботу поля, яку називають також магнітною енергією струму, отримаємо з (4.41) і (4.42) у вигляді

$$W = -U = I \oint_L (\vec{A} d\vec{L}) \quad (4.43)$$

В разі об'ємних струмів, використовуючи заміну $I d\vec{L} \rightarrow \vec{j} dV$, отримуємо:

$$W = -U = \int_V (\vec{j} \vec{A}) dV \quad (4.44)$$

Енергія взаємодії струмів. Так називають енергію одного струму в полі, що створене іншим струмом, яку будемо позначати літерою W . Тоді на підставі (4.44) можна записати для енергії взаємодії двох струмів:

$$W_{21} = \int_{V_2} (\vec{j}_2 \vec{A}_1) dV_2,$$

$$\text{де } \vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{j}_1}{r} dV_1.$$

Тут під r треба розуміти відстань від елемента струму $\vec{j}_1 dV_1$ до елемента струму $\vec{j}_2 dV_2$.

Таким чином, отримаємо:

$$W_{12} = W_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{(\vec{j}_1 \vec{j}_2)}{r} dV_1 dV_2 \quad (4.45)$$

Перехід $\vec{j}_1 dV_1 \rightarrow I_1 d\vec{L}_1$ і $\vec{j}_2 dV_2 \rightarrow I_2 d\vec{L}_2$ дає для лінійних струмів вираз:

$$W_{12} = W_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{L}_1 d\vec{L}_2)}{r} \quad (4.46)$$

Введемо позначення

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\vec{L}_1 d\vec{L}_2)}{r} = L_{12} = L_{21} \quad (4.47)$$

Величина L_{12} називається коефіцієнтом взаємодукції. Це суттєво геометрична величина, яка не залежить від струмів у контурах і визначається лише їх конфігураціями і взаємним розташуванням. Використовуючи позначення (4.47), можемо (4.46) записати у вигляді:

$$W_{12} = L_{12} I_1 I_2 \quad (4.48)$$

Неважко дати фізичне тлумачення коефіцієнта взаємодукції. З одного боку,

$$W_{12} = I_1 \Phi_{21},$$

де Φ_{21} — частина магнітного потоку, що створюється контуром 2 і проходить через контур 1. С другого боку, маємо (4.48).

Звідки $L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$, тобто це є магнітний потік, що розрахований на

одичинний струм одного з контурів.

Власна енергія струму. Розглянемо об'ємний струм. Виділимо два елементи струму $\vec{j}dV$ і $\vec{j}'dV'$ (рисунок 4.10).

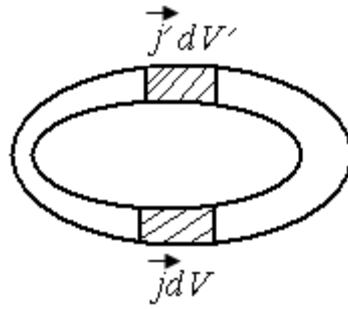


Рисунок 4.10 – Об'ємний струм

Кожний з цих елементів знаходиться в магнітному полі інших елементів. Тому є сенс говорити про енергію, наприклад, елемента струму $\vec{j}dV$ в магнітному полі, що утворюється всіма іншими елементами, тобто говорити про власну енергію – енергію струму у власному магнітному полі.

Формула (4.44) набуває вигляду:

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{j} \vec{A}') dV,$$

$$\text{де } \vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}'}{r} dV'.$$

Таким чином,

$$W_{11} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{VV'} \frac{(\vec{j} \vec{j}')}{r} dV dV'. \quad (4.49)$$

Множник $\frac{1}{2}$ з'являється тому, що взаємодія двох елементів струму $\vec{j}dV$ і $\vec{j}'dV'$ враховується інтегралом двічі.

Введемо коефіцієнт самоіндукції

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_1^2} \iint_{VV'} \frac{(\vec{j} \vec{j}')}{r} dV dV', \quad (4.50)$$

де I_1 – сила струму.

Тоді власна енергія струму може бути записана як

$$W_{11} = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 \quad (4.51)$$

4.2.6 ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Будемо обчислювати енергію магнітного поля як енергію системи струмів, що містить в собі енергію їх взаємодії і власну енергію.

Для двох струмів I_1 та I_2

$$W = W_{11} + W_{22} + \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + \frac{1}{2} (L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1) \quad (4.52)$$

Користуючись термінами векторного потенціалу, енергію системи двох струмів (4.52) запишемо у наступному вигляді:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\vec{j}_1 \vec{A}_1) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\vec{j}_2 \vec{A}_2) dV_2 + \frac{1}{2} \int_{V_1} (\vec{j}_1 \vec{A}_2) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\vec{j}_2 \vec{A}_1) dV_2 \quad (4.53)$$

Позначаючи $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}$, зробимо наступні прості перетворення:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\vec{j}_1 \vec{A}) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\vec{j}_2 \vec{A}) dV_2 = \frac{1}{2} \int_V (\vec{j}_1 \vec{A}) dV + \frac{1}{2} \int_V (\vec{j}_2 \vec{A}) dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{j} \vec{A}) dV$$

Перехід від об'ємів V_1 і V_2 до об'єму V можливий тому, що інтегрування за цим об'ємом дає відмінні від нуля результати лише тоді, коли воно відбувається за частиною V_1 цього об'єму ($\vec{j} = \vec{j}_1$) чи за частиною V_2 його ($\vec{j} = \vec{j}_2$).

Зрозуміло, що останній вираз можна розповсюдити на будь-яку кількість струмів. Тому для енергії магнітного поля маємо:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{j} \vec{A}) dV \quad (4.54)$$

Перейдемо до польових векторів. На підставі рівняння Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ отримуємо:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \text{rot} \vec{H}) dV \quad (4.55)$$

Використовуючи тотожність

$$\text{div}[\vec{H} \vec{A}] = (\vec{A} \text{rot} \vec{H}) - (\vec{H} \text{rot} \vec{A}),$$

запишемо (4.55) у вигляді:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \text{div}[\vec{H} \vec{A}] dV + \frac{1}{2} \int_V (\vec{H} \text{rot} \vec{A}) dV$$

Застосовуючи теорему Остроградського-Гаусса і маючи на увазі, що $\text{rot} \vec{A} = \vec{B}$, одержимо:

$$W_m = \frac{1}{2} \oint_S ([\vec{H} \vec{A}] d\vec{S}) + \frac{1}{2} \int_V (\vec{H} \vec{B}) dV. \quad (4.56)$$

При $S \rightarrow \infty$ перший інтеграл в (4.53) прямує до нуля, тому вираз (4.56) набуває вигляду:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{H} \vec{B}) dV. \quad (4.57)$$

Величина, що визначається за формулою (4.57), є енергія магнітного поля, а $\frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} (\vec{H} \vec{B})$ – її об'ємна густина.

Енергія (4.57) існує всюди, де відмінне від нуля поле, тобто в усьому просторі. В той же час вираз (4.54), з якого ми виходили, відмінний від нуля тільки там, де існують струми. Тут ситуація аналогічна тій, яку ми розглядали при переході від енергії системи зарядів до енергії електростатичного поля, що записується термінами польових векторів.

Енергія (4.57) статична, тобто вона «вморожена» в простір і, подібно до енергії електростатичного поля, не може розповсюджуватися.

Контрольні питання і вправи.

1. Наведіть приклади систем електричних зарядів, дипольний момент яких дорівнює нулю?
2. Із загальних формул для поля диполя знайдіть потенціал та напруженість поля в точках на осі диполя та на перпендикулярі до осі, що проходить крізь її центр.
3. При яких умовах об'ємний заряд у поляризованому діелектрику відсутній?
4. Як обчислити роботу, що виконує електростатичне поле по переміщенню в ньому заряду на деяку відстань?
5. Докажіть потенціальність електростатичного поля. Як з цього доказу випливає, що напруженість поля зарядженого провідника нормальна до його поверхні?
6. Як виглядає рівняння Пуассона і чим воно відрізняється від рівняння Лапласа? Який загальний вигляд рішень цих рівнянь?
7. Яким чином від виразу для енергії системи зарядів перейти до виразу до енергії електростатичного поля? У чому полягає принципіальна різниця виразів?
8. В чому полягає сенс введення вектор-потенціалу магнітного поля?
9. Що таке калібровка вектор-потенціалу і для чого вона введена?

10. Що таке основне рівняння магнітостатики і як виглядає його загальне рішення?
11. Покажіть, як з загального рішення рівняння Пуассона для магнітостатики випливає закон Біо-Савара.
12. Що таке магнітний момент струму і як він виглядає для випадку простішого струму, що тече по колу радіуса R.
13. Запишіть вираз для енергії магнітостатичного поля і знайдіть його відмінність від виразу для енергії взаємодії системи струмів.

5 ЗМІННІ ПОЛЯ

Всі питання фізики змінних полів охоплюються системою рівнянь Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (5.4)$$

За допомогою цієї системи вирішуються задачі оптики, як геометричної, так і хвильової, радіотехніки, а також класичної теорії випромінювання. Ця система дозволяє ввести поняття і вивчити властивості електромагнітного поля за виключенням його квантових властивостей.

5.1 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ ДЛЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. (ТЕОРЕМА УМОВА - ПОЙНТІНГА).

Помножимо рівняння (5.1) і (5.2) скалярно на вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ відповідно:

$$(\vec{E} \text{rot} \vec{H}) = (\vec{j} \vec{E}) + \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (5.5)$$

$$(\vec{H} \text{rot} \vec{E}) = - \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (5.6)$$

Віднімемо від рівняння (5.5) рівняння (5.6):

$$(\vec{E} \text{rot} \vec{H}) - (\vec{H} \text{rot} \vec{E}) = (\vec{j} \vec{E}) + \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Перепишемо останній вираз як

$$\left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -(\vec{j} \vec{E}) - \{ (\vec{H} \text{rot} \vec{E}) - (\vec{E} \text{rot} \vec{H}) \}. \quad (5.7)$$

Неважко довести, що

$$(\vec{H} \text{rot} \vec{E}) - (\vec{E} \text{rot} \vec{H}) = \text{div} [\vec{E} \vec{H}]. \quad (5.8)$$

Очевидні наступні перетворення:

$$\left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \left(\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial (E^2)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{E} \vec{D})}{\partial t} \quad (5.9)$$

$$\left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \left(\vec{H} \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial (H^2)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{H} \vec{B})}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Підставляючи (5.8), (5.9), (5.10) в (5.7), отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{(\vec{E} \vec{D}) + (\vec{H} \vec{B})}{2} = -(\vec{j} \vec{E}) - \text{div} [\vec{E} \vec{H}] \quad (5.11)$$

Проінтегруємо (5.11) за деяким об'ємом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{(\vec{E} \vec{D}) + (\vec{H} \vec{B})}{2} dV = - \int_V (\vec{j} \vec{E}) dV - \int_V \text{div} [\vec{E} \vec{H}] dV \quad (5.12)$$

Позначимо

$$[\vec{E}\vec{H}] = \vec{S}. \quad (5.13)$$

Цей вектор називається вектором Пойнтінга.

Другий інтеграл справа у рівнянні (5.12) перетворимо за теоремою Остроградського – Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{(\vec{E}\vec{D}) + (\vec{H}\vec{B})}{2} dV = - \int_V (\vec{j}\vec{E}) dV - \oint_f (\vec{S}d\vec{f}) \quad (5.14)$$

де f – поверхня, що охоплює об'єм V .

З'ясуємо фізичний зміст членів, що входять у рівняння (5.14).

Розглянемо підінтегральний вираз $(\vec{j}\vec{E})dV = \rho(\vec{u}\vec{E})dV = dq(\vec{u}\vec{E}) = (\vec{u}d\vec{F})$,

де $\vec{u}$ – середня швидкість напрямленого руху носіїв струму, $\rho dV = dq$;

$(\vec{u}d\vec{F})$ – потужність.

Якщо перейти до дискретного заряду, то

$$dq \rightarrow e_k; \vec{u} \rightarrow \vec{u}_k; d\vec{F} \rightarrow \vec{F}_k; (\vec{u}d\vec{F}) \rightarrow (\vec{u}_k \vec{F}_k) = \frac{dW_k^{(k)}}{dt},$$

де $W_k^{(k)}$ – кінетична енергія k -го заряду.

Ленц-Джоулеве тепло

$$\int_V (\vec{j}\vec{E})dV \rightarrow \frac{d}{dt} \sum_k W_k^{(k)}, \quad (5.15)$$

де $\frac{d}{dt} \sum_k W_k^{(k)}$ – зміна кінетичної енергії системи зарядів за одиницю часу.

Підставляючи (5.15) в (5.14), отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_V \frac{(\vec{E}\vec{D}) + (\vec{H}\vec{B})}{2} dV + \sum_k W_k^{(k)} \right\} = - \oint_f \vec{S}d\vec{f}. \quad (5.16)$$

Якщо в (5.16) спрямувати поверхню інтегрування до нескінченості, то інтеграл справа зникне, тобто $\oint_{f \rightarrow \infty} \vec{S} d\vec{f} \rightarrow 0$ ($\vec{H}(\infty) = \vec{E}(\infty) = 0$).

Тоді вираз (5.16) перетворюється в

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_V \frac{(\vec{E}\vec{D}) + (\vec{H}\vec{B})}{2} dV + \sum_k W_k^{(k)} \right\} = 0. \quad (5.17)$$

Коли $f \rightarrow \infty$, то це відповідає нескінченно великому об'єму V .

Вичерпний розгляд фізичної системи полягає в тому, що її потрібно розглядати як дві підсистеми: частинки + поле.

У виразі (5.17) другий член у дужках є енергією заряджених частинок. Тому перший член потрібно прийняти за енергію електромагнітного поля, тобто

$$\int_V \frac{(\vec{E}\vec{D}) + (\vec{H}\vec{B})}{2} dV = W_{e.m.поля} \quad (5.18)$$

Вираз (5.17) абсолютно логічно вказує на те, що в нескінченно великому об'ємі енергія системи частинки + поле зберігається.

Величину

$$\frac{dW_{e.-m.}}{dV} = \frac{(\vec{E}\vec{D}) + (\vec{H}\vec{B})}{2} = \omega_{e.-m.} \quad (5.19)$$

називають об'ємною густиною енергії електромагнітного поля.

Формально вираз (5.18) складається із суми двох членів: енергії електростатичного поля та енергії магнітостатичного поля. Однак насправді ця схожість тільки зовнішня, так як усі чотири польові вектори є функціями часу. Тому енергія електромагнітного поля розповсюджується, тобто тече в просторі і часі, на відміну від «вморожених» у простір статичних полів.

Повернемось до виразу (5.16). Розглянемо скінчений об'єм i , отже, скінчену поверхню f . Перепишемо цей вираз у вигляді (5.14). Це інтерпретується таким чином: зміна енергії електромагнітного поля в деякому об'ємі зв'язано з виділенням Ленц-Джоулевого тепла в цьому об'ємі та з потоком вектора Пойнтінга крізь поверхню, що обмежує цей об'єм. Це є закон збереження та перетворення енергії для електромагнітного поля, який складає зміст теореми Умова-Пойнтінга. З теореми Умова-Пойнтінга стає зрозумілим фізичний зміст вектора Пойнтінга: вектор Пойнтінга чисельно дорівнює потоку електромагнітної енергії, що проходить в одиницю часу через одиничну площину, яка нормально зорієнтована до цього вектора.

5.2 ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ

Звернемось до системи рівнянь Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Безпосереднє рішення системи (5.1) – (5.4) для більшості задач є утрудненим. Тому в електродинаміці розроблений спеціальний математичний формалізм, так званий метод електродинамічних потенціалів, котрий дає змогу від рівнянь (5.1) – (5.4) перейти до інших рівнянь, рішення яких часто є більш простим, а потім вже за результатами цих рішень безпосередньо знаходити поля.

Візьмемо деякий скаляр φ і вектор $\vec{A}$, такі, що

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad (5.20)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.21)$$

Тоді рівняння (5.2) і (5.3) автоматично задовольняються. Дійсно, підставляючи в (5.3) (5.20), маємо:

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}\text{rot}\vec{A} \equiv 0.$$

Підставляючи (5.21) в (5.2) і з урахуванням (5.20), маємо:

$$\text{rot}\vec{E} = \text{rot}\left(-\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\text{rotgrad}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{A} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{оскільки}$$

$$\text{rotgrad}\varphi \equiv 0).$$

Вектор $\vec{A}$ і скаляр φ називаються електродинамічними або електромагнітними потенціалами. Покажемо, що вибір електродинамічних потенціалів не є однозначним. Виберемо довільний скаляр ψ і розглянемо такі потенціали:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\psi \quad (5.22)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.23)$$

Вичислимо згідно (5.20) і (5.21) нові штриховані поля:

$$\vec{B}' = \text{rot}\vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad}\psi) = \text{rot}\vec{A} + \text{rotgrad}\psi = \vec{B} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\text{grad}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad}\left(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \text{grad}\psi) = \\ &= -\text{grad}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\text{grad}\psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\text{grad}\psi = \vec{E} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Перетворення (5.22), (5.23) називаються градієнтними перетвореннями, а незмінність полів (5.24), (5.25) при градієнтних перетвореннях називається інваріантністю полів відносно градієнтних перетворень (градієнтна інваріантність). Тому що скаляр

ψ є довільним, існує скільки завгодно багато електромагнітних потенціалів, що визначають одні й ті самі поля.

Для того щоб обмежити вибір потенціалів, на них накладають додаткові математичні умови або, як кажуть, калібрують.

В магнітостатиці ми зустрічались із кулонівським калібруванням. В теорії змінних полів використовують інше калібрування, а саме, вимагають, щоб:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.26)$$

Це калібрування називається лоренцевим.

Покажемо, що лоренцеве калібрування, взагалі кажучи, не інваріантне відносно градієнтних перетворень:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}' + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \operatorname{div}(\vec{A} + \operatorname{grad} \psi) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \\ &= \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta \psi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

(якщо потенціали $\vec{A}$ і φ калібровані за Лоренцом).

Якщо ми хочемо, щоб штриховані потенціали були також калібровані, то потрібно, щоб

$$\Delta \psi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Але останній вираз є хвильовим рівнянням. Тобто скаляр ψ повинен задовольняти хвильове рівняння.

Знайдемо рівняння для електродинамічних потенціалів. Для цього перепишемо рівняння (5.1) у вигляді:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Підставимо в це рівняння (5.20) і (5.21):

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right).$$

Використовуючи відому тотожність векторного аналізу, маємо:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

Групуючи відповідні члени останнього рівняння, одержимо:

$$\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

Враховуючи лоренцеве калібрування (5.26), дістанемо

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (5.27)$$

Звернемось до рівняння (5.4) і перепишемо його так:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

На підставі (5.21) маємо

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Із умови Лоренца (5.26) виразимо $\operatorname{div} \vec{A}$ і підставимо в останнє рівняння:

$$-\Delta \varphi + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ або } \Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.28)$$

Рівняння (5.27) і (5.28) відомі у математичній фізиці як рівняння Даламбера, або неоднорідні хвильові рівняння, тобто хвильові рівняння з джерелами.

Якщо $\rho = 0$ і $\vec{j} = 0$, то ми маємо звичайні хвильові рівняння:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.29)$$

$$\Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.30)$$

Рівняння (5.29) і (5.30) – однорідні хвильові рівняння у вільному просторі. Якщо $\varphi \neq \varphi(t)$, а $\vec{A} \neq \vec{A}(t)$, то рівняння (5.27) і (5.28) стають:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}; \quad \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

тобто перетворюються в рівняння Пуассона для магнітостатики і електростатики. Останні, якщо в просторі відсутні струми та заряди, перетворюються в $\Delta \vec{A} = 0; \quad \Delta \varphi = 0$, тобто в рівняння Лапласа для магнітостатики і електростатики.

Тепер стає зрозумілим, що якщо вдається вирішити рівняння (5.27) і (5.28), то, використовуючи ці рішення, за формулами (5.20) і (5.21) можна знайти самі поля. Тому наступне завдання буде полягати в тому, щоб знайти загальний розв'язок рівнянь (5.27) і (5.28). Але для цього необхідно згадати деякі відомості про хвильове рівняння.

5.3 ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ

Будь-який хвильовий процес математично описується так званим хвильовим рівнянням, рішення якого є хвильовою функцією, тобто функцією, яка дає уявлення про стан хвильового поля (коливального процесу) у будь-якій точці простору у будь-який момент часу. Ця функція $f(x, y, z, t)$ повинна задовольняти хвильовому рівнянню, яке у вільному просторі, тобто в просторі, де немає джерел, має вигляд:

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

де V – швидкість розповсюдження хвильового процесу.

Оператор $\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \square$ – називається оператором Даламбера або даламбер'яном. Тому однорідне хвильове рівняння записується так:

$$\square f = 0.$$

Легко показати, що частковим рішенням хвильового рівняння завжди є рішення у вигляді плоских хвиль.

Відомо, що геометрія хвилі визначається геометрією її фронту. Таким чином, розрізняють сферичні, плоскі, циліндричні та інші хвилі.

Покажемо, що часткове рішення записаного рівняння є плоска хвиля. В цьому випадку функція f повинна бути функцією двох змінних $f(x, t)$, і рівняння повинно виглядати так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

або

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Останнє рівняння можна записати у такому вигляді:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$

Добуток цих операторних дужок дає оператор Даламбера.

Введемо нові змінні: $\xi = t - \frac{x}{v}$; $\eta = t + \frac{x}{v}$.

Тоді: $t = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$; $x = \frac{v}{2}(\eta - \xi)$

Знайдемо похідні за новими змінними:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Хвильове рівняння набуває вигляду $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Проінтегруємо

рівняння формально за η . $\frac{\partial f}{\partial \xi} = F(\xi)$; $F(\xi)$ – довільна функція ξ .

Після інтегрування за η отримуємо: $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, де f_1, f_2 – довільні функції. $f(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$. Рівняння поверхні

однакових фаз для хвилі f_1 має вигляд $t - \frac{x}{v} = \text{const}$, $x = vt + \text{const}'$.

У будь-який момент часу це рівняння є рівнянням площини. f_1 і f_2 – дійсно описують дві плоскі хвилі, що біжать вздовж осі x в протилежних напрямках.

5.4 ПОТЕНЦІАЛИ, ЩО ЗАПІЗНЮЮТЬСЯ

Раніше було виведено рівняння для електродинамічних потенціалів:

$$\Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.31)$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (5.32)$$

або в короткому запису

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Оскільки $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, рівняння (5.31), (5.32) набувають вигляду

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.31')$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (5.32')$$

Задача полягає в тому, щоб вирішити рівняння (5.31') і (5.32').

Строге рішення цих рівнянь є досить складною і громіздкою математичною задачею. Тому скористаємось дещо спрощеним методом, так званим методом джерел, результати застосування якого виявляються точно співпадаючими з результатами більш строгого методу.

Оскільки (5.31') і (5.32') абсолютно однакові за математичною структурою, будемо вирішувати одне з цих рівнянь, наприклад, (5.31'). Нехай у деякому об'ємі розподілений заряд, об'ємна густина якого є функцією $\rho(\xi, \eta, \zeta, t)$. Розіб'ємо весь об'єм на нескінченно малі елементи, кожний з яких можна вважати точковим. Тоді мова буде йти про поле, створюване сукупністю точкових зарядів.

Розглянемо спочатку поле, створюване одним з таких зарядів. Всюди, за винятком точки, в якій знаходиться сам заряд, рівняння (5.31') буде мати вигляд:

$$\Delta\varphi_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0 \quad (5.33)$$

Рівняння (5.33) – хвильове рівняння для всіх точок простору, де немає джерел (вільний простір).

Будемо пам'ятати, що φ_1 – це потенціал поля, створеного тільки одним точковим джерелом з їх сукупності в даному об'ємі. Але точкове джерело, як відомо, повинне породжувати сферичну хвилю. Тому зручно в рівнянні (5.33) перейти від декартових координат до сферичних (r, θ, ψ) (рисунок 5.1).

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \Theta \leq \pi$$

$$0 \leq \Psi \leq 2\pi$$

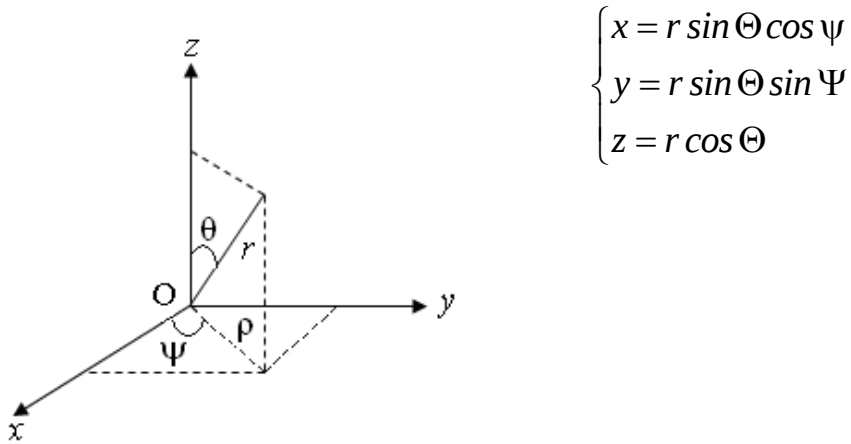


Рисунок 5.1 – Сферична система координат

Оператор Лапласа у сферичних координатах має вигляд:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2}$$

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \text{радіальна частина}$$

$$\frac{\Delta_{\Theta, \Psi}}{r^2} = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2},$$

$\Delta_{\Theta, \Psi}$ – сферична частина.

У сферичній хвилі функція φ_1 повинна бути залежною від r і t : $\varphi_1(r, t)$. Рівняння для електродинамічного потенціалу (5.33) має вигляд:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0. \quad (5.34)$$

Введемо заміну

$$\varphi_1(r, t) = \frac{U(r, t)}{r} \quad (5.35)$$

В такій заміні знаменником r добре підкреслюється сферична симетрія φ_1 .

Підставимо (5.35) в (5.34). Отримаємо:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5.37)$$

Тому для U маємо рівняння:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (5.38)$$

Раніше ми розглянули рівняння для хвильової функції $f(x, t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Рішення цього рівняння знайшли як суперпозицію двох плоских хвиль:

$$f(x, t) = f_1 \left(t - \frac{x}{V} \right) + f_2 \left(t + \frac{x}{V} \right)$$

Але рівняння (5.38) точно таке ж, як рівняння для $f(x, t)$, тому рішення рівняння (5.38) можна записати відразу, а саме:

$$U(r, t) = U_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + U_2 \left(t + \frac{r}{c} \right) \quad (5.39)$$

У виразі (5.39) достатньо обмежитись однією плоскою хвилею, наприклад, хвилею, що біжить зліва направо, тобто запишемо (5.39) у вигляді:

$$U(r,t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (5.40)$$

Тоді у відповідності з (5.35) будемо мати:

$$\varphi_1(r,t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (5.41)$$

Тепер потрібно встановити, що конкретно розуміється під символом f . Для цього сформулюємо питання так: як можна змінити вираз для φ_1 , щоб (5.41) описувало поле не тільки у вільному просторі, але і в найближчому околі заряду, що створює це поле, враховуючи при цьому, що заряд все-таки не точковий, а має вигляд:

$$de = \rho(\xi, \eta, \zeta, t) dV.$$

З (5.41) видно, що в безпосередній близькості від заряду, тобто коли $r \rightarrow 0$, потенціал зростає надзвичайно швидко. Це означає, що в оточенні заряду похідна за координатами росте набагато швидше, ніж похідна за часом, тобто поле в оточенні заряду можна вважати статичним. Іншими словами, в рівнянні (5.34) можна нехтувати похідною за часом, коли йдеться про окіл заряду. Тоді (5.34) перетворюється на наступне рівняння:

$$\Delta_r \varphi_1 = 0 \quad (5.42)$$

Але (5.42) є рівняння Лапласа, рішення якого відоме, а саме:

$$\varphi_1 = \frac{de}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.43)$$

Узагальнюючи (5.41) і (5.43), бачимо, що залежність від $(t - \frac{r}{c})$, що фігурує в (5.41), повинна бути перенесена на ρ , що фігурує в (5.43). Тому можна записати загальний вираз для φ_1 :

$$\varphi_1(r,t) = \frac{\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} dV \quad (5.44)$$

Скористаємось принципом суперпозиції полів, згідно якого φ буде дорівнювати:

$$\varphi = \int \varphi_1.$$

Враховуючи далі, що $dV = d\xi d\eta d\zeta$, а

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

отримаємо:

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (5.45)$$

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (5.46)$$

Вирази (5.45) і (5.46) є загальними рішеннями рівнянь (5.31) і (5.32). Ці вирази називаються потенціалами, що запізнюються.

Аргумент $(t - \frac{r}{c})$ називається *аргументом, що запізнюється*, а

$\frac{r}{c}$ називається *запізнюванням*.

Проаналізуємо вирази (5.45) і (5.46). Бачимо, що кожний потенціал (і скалярний, і векторний) у точці спостереження поля у момент часу t є сумою потенціалів створюваних у цій точці окремими елементами заряду (або струму). Проте ці заряди (або

струми) беруться не в момент часу t , а в моменти попередні цьому моменту на величину $\frac{r}{c}$, тобто на проміжок часу, що необхідний світлу для подолання відстані від даного елемента об'єму до точки спостереження поля. Можна сказати інакше: в об'ємі, де заряд знаходиться в русі, заряд кожного елемента об'єму безперервно змінюється і, як видно з виразу (5.45), потенціал, який спостерігається в будь-якій точці поля у момент часу t , створюється не конфігурацією зарядів, яка існує в зарядженому об'ємі у момент часу t , а зарядами, які передували справжній конфігурації на час запізнювання (свій для кожного елемента об'єму). Це свідчить про те, що електромагнітне поле має кінцеву швидкість розповсюдження, яка у вакуумі дорівнює c . Тобто, якщо елемент об'єму відстоїть від точки спостереження поля на r , то поле, ним створюване в цій точці у момент часу t , визначається зарядом цього елемента у момент $(t - \frac{r}{c})$.

Таким чином, встановлено, що електромагнітна взаємодія розповсюджується з кінцевою швидкістю. Звідси виникає припущення, що й інші види відомих взаємодій, зокрема гравітаційна, також мають кінцеву швидкість.

5.5 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В ДІЕЛЕКТРИКУ

Запишемо систему рівнянь Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (5.4)$$

Розглянемо нескінчене однорідне діелектричне середовище. Це означає, що $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, оскільки $\vec{j} = \lambda \vec{E}, \lambda = 0$. $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ – однорідність середовища. Тоді система рівнянь Максвелла буде виглядати так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (5.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = 0 \end{array} \right. \quad (5.49)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (5.50)$$

Рівняння (5.47) і (5.48) перепишемо так:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.51)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.52)$$

Рівняння (5.51) і (5.52) продиференціюємо за часом:

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5.53)$$

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.54)$$

Підставимо рівняння (5.52) у (5.53), а в рівняння (5.54) – (5.51).

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5.55)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.56)$$

Перетворимо (5.55) і (5.56), а саме:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Враховуючи (5.50) і (5.49), останні рівняння перепишемо так:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.57)$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.58)$$

Видно, що (5.57) і (5.58) – це стандартні однорідні хвильові рівняння (рівняння Даламбера). Рівняння Максвелла свідчать про існування електромагнітних хвиль. Причому електромагнітна хвиля – це структура, в якій присутні магнітне та електричне поля, коливання яких розповсюджуються в просторі.

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{V^2},$$

де V – швидкість розповсюдження хвилі. Тобто

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n},$$

де ε_r , μ_r – відносні діелектрична і магнітна проникності середовища,

а

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad (5.59)$$

– показник заломлення середовища.

Рівняння (5.57), (5.58), повинні мати часткові рішення у вигляді плоских хвиль. Розглянемо плоску монохроматичну хвилю. Монохроматизм означає, що в такій хвилі повинна бути присутня одна частота коливань ω . Функції $\vec{E}$, $\vec{H}$ повинні бути функціями двох змінних: $E = E(x, t)$ $H = H(x, t)$. Тому рівняння (5.57) і (5.58), враховуючи, що $\Delta \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, повинні мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.61)$$

Рішення хвильових рівнянь (5.60) і (5.61) (тобто плоску монохроматичну хвилю) будемо шукати у вигляді:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}(x) e^{i\omega t} \quad (5.62)$$

$$\vec{H}(x, t) = \vec{H}(x) e^{i\omega t} \quad (5.63)$$

Підставимо (5.62) в (5.60) і отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x)}{\partial x^2} e^{i\omega t} + \varepsilon \mu \omega^2 e^{i\omega t} \vec{E}(x) = 0. \quad (5.64)$$

Ясно, що рівняння для $\vec{H}(x)$ буде мати такий самий вигляд.

Введемо позначення:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (5.65)$$

Рівняння (5.64) перепишемо так:

$$\frac{d^2 \vec{E}(x)}{dx^2} + k^2 \vec{E}(x) = 0.$$

Знайдемо рішення цього рівняння. Характеристичне рівняння для нього має вигляд:

$$\alpha^2 + k^2 = 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm ik.$$

Тоді загальне рішення попереднього рівняння має вигляд:

$$\vec{E}(x) = \vec{A}_1 e^{ikx} + \vec{A}_2 e^{-ikx} \quad (5.66)$$

де $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ – деякі довільні постійні вектори інтегрування.

Обмежимося в рішенні (5.66) тільки одним членом. Це означає, що розглядається плоска хвиля, що біжить тільки в одному напрямі. В рівнянні (5.66) збережемо тільки член з $\vec{A}_2$ і позначимо $\vec{A}_2$ через $\vec{A}$. Підставляючи (5.66) в (5.62), знайдемо:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{A} e^{i(\omega t - kx)}.$$

Аналогічно знайдемо

$$\vec{H}(x,t) = \vec{B} e^{i(\omega t - kx)}$$

Сенс векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ легко встановити з цих виразів. Якщо взяти $\vec{E}(0,0) = \vec{E}_0 = \vec{A}$ і $\vec{H}(0,0) = \vec{H}_0 = \vec{B}$, то отримаємо:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (5.67)$$

$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (5.68)$$

З виразів (5.67) і (5.68) видно, що електромагнітна хвиля в діелектрику не згасає, оскільки амплітуди $\vec{E}_0$ і $\vec{H}_0$ залишаються постійними.

Повернемося до виразу (5.65). Його можна записати так:

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{TV} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

де T – період коливань, k – хвильове число.

Якщо орт напрямку розповсюдження хвилі позначити через $\vec{n}$, то вектор $\vec{k} = k\vec{n}$ називається хвильовим вектором.

Узагальнимо вирази (5.67) і (5.68) на випадок розповсюдження хвилі в довільному напрямі (рисунок 5.2). Вісь, вздовж якої

розповсюджується хвиля, завжди можна назвати віссю x . Знайдемо скалярний добуток

$$(\vec{k} \vec{r}) = kr \cos(\vec{n} \wedge \vec{r}) = kr \cos \alpha = kx.$$

Тут $\vec{r}$ – радіус-вектор будь-якої точки простору, а площина нормальна до віссі x – хвильова поверхня, що містить цю точку.

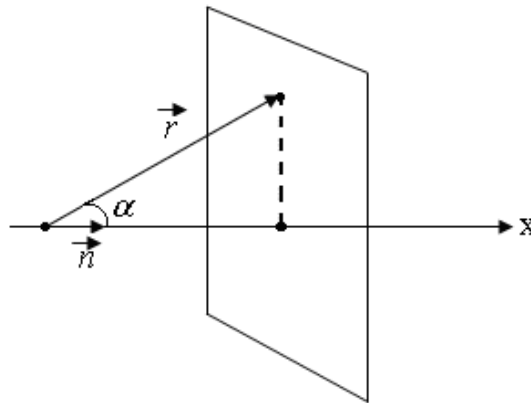


Рисунок 5.2 – Розповсюдження хвилі в довільному напрямі

Тому (5.67) і (5.68) можна записати так:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \vec{r}))} \quad (5.69)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \vec{r}))} \quad (5.70)$$

З'ясуємо деякі властивості електричної і магнітної складових електромагнітної хвилі.

Насамперед знайдемо, як взаємно орієнтовані вектори $\vec{E}$ і $\vec{n}$. Для цього розглянемо рівняння Максвелла $\text{div} \vec{E} = 0$, яке запишемо як $(\vec{\nabla} \vec{E}) = 0$. Підставимо в якості $\vec{E}$ його вираз (5.69). Отримаємо:

$$(\vec{\nabla} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \vec{r}))}) = (\vec{E}_0 e^{i\omega t} \vec{\nabla} e^{-i(\vec{k} \vec{r})}) = 0 \quad (5.71)$$

Обчислимо окремо, що таке $\vec{\nabla}$, застосоване до ступеня $e^{-i(\vec{k} \vec{r})}$:

$$\vec{\nabla} e^{-i(\vec{k} \vec{r})} = \vec{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} + \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial y} e^{-i(\vec{k} \vec{r})} + \vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} e^{-i(\vec{k} \vec{r})} =$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{\alpha}(-ik_x)e^{-i(\vec{k}\vec{r})} + \vec{\beta}(-ik_y)e^{-i(\vec{k}\vec{r})} + \vec{\gamma}(-ik_z)e^{-i(\vec{k}\vec{r})} = \\
&= -ie^{-i(\vec{k}\vec{r})}(\vec{\alpha}k_x + \vec{\beta}k_y + \vec{\gamma}k_z) = -i\vec{k}e^{-i(\vec{k}\vec{r})}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Тут, α, β, γ – орти координатних осей.

Підставляючи (5.72) в (5.71), отримаємо:

$$(\vec{E}_0 e^{i\omega t} (-i\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{r})}) = -i(\vec{k} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}) = -i(\vec{k} \vec{E}) = 0.$$

З останнього виразу випливає, що

$$\vec{E} \perp \vec{k}, \text{ отже, } \vec{E} \perp \vec{n}. \tag{5.73}$$

Точно так само розглянемо рівняння $\text{div} \vec{H} = 0$ і, використовуючи (5.70), покажемо, що

$$\vec{H} \perp \vec{n} \tag{5.73}$$

З (5.72) і (5.73) випливає, що електромагнітні хвилі є поперечними.

Далі потрібно з'ясувати, як взаємно орієнтовані $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Для цього скористаємося рівнянням Максвелла (5.52), яке запишемо як

$$[\vec{\nabla} \vec{H}] = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ і виразами (5.69), (5.70), які підставимо в ці рівняння:}$$

$$[\vec{\nabla} \vec{H}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}).$$

Прості перетворення дають:

$$-[\vec{H}_0 e^{i\omega t} \vec{\nabla} e^{-i(\vec{k}\vec{r})}] = \varepsilon i\omega \vec{E} \tag{5.74}$$

Далі скористаємось рівністю (5.72)

$$\begin{aligned}
i[\vec{H}_0 e^{i\omega t} \vec{k} e^{-i(\vec{k}\vec{r})}] &= \varepsilon i\omega \vec{E} \\
k[\vec{H} \vec{n}] &= \varepsilon \omega \vec{E} \\
\sqrt{\mu}[\vec{H} \vec{n}] &= \sqrt{\varepsilon} \vec{E}
\end{aligned} \tag{5.75}$$

З (5.75) бачимо, що

$$\vec{E} \perp \vec{H}, \quad (5.76)$$

а враховуючи (5.75) і (5.73), дійдемо висновку, що, $\vec{E}$, $\vec{H}$ і $\vec{n}$ утворюють правоґвинтову трійку взаємно ортогональних векторів. Таким чином, електромагнітну хвилю слід уявити собі як коливання векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$, що одночасно відбуваються у взаємно перпендикулярних площинах і розповсюджуються уздовж осі, перпендикулярній до площини, яку утворюють $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Вираз (5.75), враховуючи, що $|\vec{n}|=1$ і $\vec{H} \perp \vec{n}$ дає:

$$\sqrt{\mu}|\vec{H}| = \sqrt{\varepsilon}|\vec{E}|; \quad (5.77)$$

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} = \text{const}.$$

Це означає, що відношення величин векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ у будь-який момент часу одне і те ж, іншими словами, ці вектори коливаються синфазно. Саме ця властивість електромагнітної хвилі забезпечує збереження її структури як єдиного цілого (вона не «розсипається» з часом). В найпростішому випадку плоскої монохроматичної хвилі ця картина виглядає так (рисунок 5.3):

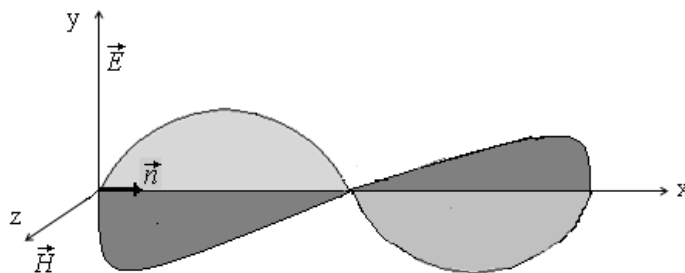


Рисунок 5.3 – Плоска монохроматична електромагнітна хвиля

Використовуючи (5.77), знайдемо вектор Пойнтінга для електромагнітної хвилі. За визначенням, $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$. Оскільки, $\vec{E} \perp \vec{H}$, то ми можемо це записати таким чином:

$$S = \frac{1}{2} \left(|\vec{E}| \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu}} |\vec{E}| + |\vec{H}| \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}} |\vec{H}| \right) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} (\epsilon E^2 + \mu H^2) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} ((\vec{E}\vec{D}) + (\vec{H}\vec{B}))$$

Але $\frac{(\vec{E} \cdot \vec{D}) + (\vec{H} \cdot \vec{B})}{2} = w$ – об'ємна густина енергії електромагнітного

поля. Якщо врахувати, що швидкість

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v,$$

то тоді $S = w \cdot v$, або у векторній формі $\vec{S} = w \cdot \vec{v}$.

Звідси стає абсолютно зрозумілим, що електромагнітна хвиля переносить енергію електромагнітного поля у вигляді потоку вектора Пойнтінга, причому цей вектор направлений за швидкістю розповсюдження електромагнітної хвилі.

5.6 ПОНЯТТЯ ПРО ЕЛЕКТРОМАГНІТНУ ТЕОРІЮ СВІТЛА

Електромагнітні хвилі були передбачені Максвеллом теоретично. Перший експериментальний доказ про їх існування був знайдений Герцем через 8 років після смерті Максвелла. Сам же Максвелл теоретично дослідив властивості цих хвиль і знайшов, що основні закони їх інтерференції, дифракції і поляризації повинні бути такими ж, як закони, встановлені в хвильовій оптиці для світла. Крім того, можна показати, що з рівнянь Максвелла за певних умов витікає так зване рівняння ейконалу, яке фактично описує всю геометричну оптику. Швидкість розповсюдження електромагнітних

хвиль у вакуумі, як витікає з теорії, дорівнює електродинамічній сталій

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Відомі на той час досліди за визначенням швидкості світла в повітрі давали значення достатньо близькі до c , при цьому експериментатори розуміли недосконалість своїх дослідів, тобто слід було чекати повного співпадання c із швидкістю світла у вакуумі.

Зі всього цього Максвелл робить висновок, що світло є електромагнітною хвилею, при цьому видима ділянка світлового спектру складає дуже вузький діапазон частот, доступних для електромагнітного випромінювання взагалі. Шкала електромагнітних хвиль показує, що світло займає на ній досить вузький діапазон.

Електромагнітна природа світла, встановлена Максвеллом, вважається у фізиці безперечним фактом, хоча надалі виявилось, що світло (і взагалі електромагнітне поле) складніший об'єкт, ніж уявляв собі Максвелл. Саме з розширення понять про електромагнітне поле в 1900 році почалась квантова механіка, а в 1905 році Ейнштейн розробив так звану квантову або фотонну теорію світла. Ця теорія не відмінила теорію Максвелла, а вражаючим чином встановила, що світло має подвійну природу або, як говорять, йому властивий корпускулярно-хвильовий дуалізм.

5.7 ІМПУЛЬС ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ТИСК СВІТЛА

Нехай поле діє на об'ємні заряди, що розподілені в просторі з густиною ρ , і струм з об'ємною густиною $\vec{j}$. На заряди і струми одиничного об'єму діє сила

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}] \quad (5.78)$$

Повна сила $\vec{F}$, що діє на заряди і струми в об'ємі V , дорівнює:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \int_V (\rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}]) dV \quad (5.79)$$

Згідно відомій теоремі механіки сила $\vec{F}$ визначає зміну з часом імпульсу $G_{\text{мех}}$ всієї речовини, що міститься в об'ємі V (враховуючи при цьому тільки сили електромагнітного походження).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}_{\text{мех}}}{dt} \quad (5.80)$$

Підставимо в (5.78) замість ρ та $\vec{j}$ їх вирази з рівнянь

Максвелла:

$$\rho = \text{div} \vec{D}, \quad \vec{j} = \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Отримаємо

$$\vec{f} = \vec{E} \text{div} \vec{D} + [\text{rot} \vec{H} \vec{B}] - \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{B} \right] \quad (5.81)$$

Беручи до уваги, що $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, додаємо до правої частини (5.81) вираз $\vec{H} \text{div} \vec{B}$, що дорівнює нулю, і перетворимо останній член

$$\left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{B} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}] + \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{D} \right].$$

Тоді

$$\vec{f} = \vec{E} \text{div} \vec{D} + \vec{H} \text{div} \vec{B} + [\text{rot} \vec{H} \vec{B}] + [\text{rot} \vec{E} \vec{D}] - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}] \quad (5.82)$$

x – компонента сили $\vec{f}$ дорівнює

$$f_x = E_x \operatorname{div} \vec{D} + H_x \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{H} \vec{B}]_x + [\operatorname{rot} \vec{E} \vec{D}]_x - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}]_x.$$

Цей вираз можна привести до вигляду:

$$f_x = \operatorname{div} \vec{L} - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \vec{B}]_x, \quad (5.83)$$

де $\vec{L}$, як неважко бачити, має такі компоненти:

$$L_x = D_x E_x + H_x B_x - \frac{1}{2} \{(\vec{D} \vec{E}) + (\vec{H} \vec{B})\},$$

$$L_y = D_x E_y + H_x B_y,$$

$$L_z = D_x E_z + H_x B_z.$$

У вираз (5.83) підставимо рівність $[\vec{D} \vec{B}] = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}]$ і перейдемо до x -компоненти загальної сили.

$$F_x = \int_V f_x dV = \int_V \operatorname{div} \vec{L} dV - \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}]_x dV \quad (5.84)$$

Аналогічно записуються F_y та F_z . Замінімо в (5.84) силу її виразом (5.80)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{L} dV = \frac{d}{dt} \left(G_{\text{мех.}x} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}]_x dV \right) \quad (5.85)$$

За теоремою Остроградського - Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{L} dV = \oint_S (\vec{L} d\vec{S}) = F_{\text{нов.}x}$$

Цей вираз має сенс x -складової сили, що діє на поверхню, яка охоплює об'єм V . Перехід від складових до векторів дає

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{G}_{\text{мех.}} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] dV \right) = \vec{F}_{\text{нов.}} \quad (5.86)$$

Якщо на поверхні S , що охоплює об'єм V , вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ дорівнюють нулю, то $\vec{F}_{\text{нов.}} = 0$. Ця умова виконується, якщо поверхня інтегрування S нескінченно віддалена, а всі заряди та струми

локалізовані в обмеженому об'ємі, що утворює замкнену систему.

Тоді

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{G}_{\text{мех.}} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] dV \right) = 0,$$

тобто

$$\vec{G}_{\text{мех.}} + \int_V \epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] dV = \text{const} \quad (5.87)$$

Таким чином, при взаємодії зарядів і струмів у певному об'ємі з електромагнітним полем зберігається не імпульс речовини $\vec{G}_{\text{мех.}}$, а його сума із вектором $\epsilon_0 \mu_0 \int_V [\vec{E} \vec{H}] dV$, який має розмірність імпульсу.

Цей інтеграл є імпульс електромагнітного поля в об'ємі V , а вектор $\epsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] = \vec{g}_{\text{ем.}}$ – його об'ємна густина. Відповідно

$$\int_V \vec{g}_{\text{ем.}} dV = \vec{G}_{\text{ем.}} \quad (5.88)$$

Отже в електромагнітному полі зберігається сума імпульсів речовини і поля:

$$\vec{G}_{\text{мех.}} + \vec{G}_{\text{ем.}} = \text{const} \quad (5.89)$$

Зауважимо, що закон збереження імпульсу виконується строго тільки в разі, коли враховуються обидва імпульси: $\vec{G}_{\text{мех.}}$ і $\vec{G}_{\text{ем.}}$.

Із закону збереження імпульсу витікає, що електромагнітне поле при відбиванні чи поглинанні його тілом чинить на нього тиск (світловий тиск). Якщо тіло було б вільним, то під дією світлового тиску воно отримало би прискорення в напрямку руху поля, тобто збільшився би його імпульс. Приріст імпульсу одного тіла пов'язаний із зменшенням імпульсу інших частин системи. В нашому випадку зменшується імпульс електромагнітного поля.

Тиск, що чине електромагнітна хвиля на тіло, що поглинає, дорівнює імпульсу, який хвиля передає тілу в одиницю часу та на одиницю поверхні. Якщо хвиля падає нормально до поверхні та при повному її поглинанні, тиск дорівнює

$$p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} g_{em} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = \varepsilon_0 E^2 = W_{em}, \quad (5.90)$$

де $W_{em} = \frac{(\vec{E}\vec{D}) + (\vec{H}\vec{B})}{2}$ – об’ємна густина енергії електромагнітної хвилі.

Ми доходимо до висновку, що в разі повного поглинання тиск електромагнітної хвилі дорівнює густині її енергії.

Якщо має місце повне відбивання від поверхні, імпульс хвилі змінюється на протилежний і поверхні тіла передається імпульс вдвічі більший, ніж при повному поглинанні. Відповідно, і тиск в цьому разі буде вдвічі більшим ($p = 2W_{em}$). Вираз (5.89) підтверджує закон збереження моменту імпульсу

$$\frac{d}{dt}(\vec{M}_{mex} + \vec{M}_{em}) = 0 \quad (5.91)$$

Такий вираз має місце, якщо здійснено деякий пристрій, в запоні якого відбувається циркуляція електромагнітної енергії. Якщо такий пристрій і електромагнітне поле створюють замкнену систему, то завдяки взаємодії поля із зарядами і струмами в стінках запови, зміна моменту імпульсу поля $\vec{M}_{em}$ спряжена зі зміною моменту імпульсу пристрою.

Процеси обміну моментом імпульсу між електромагнітним полем (світлом) і речовиною мають важливе значення в атомній фізиці.

5.8 РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У ПРОВІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розглянемо нескінчене однорідне провідне середовище:

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad \lambda = \text{const} \quad (\lambda \neq 0).$$

Покажемо, насамперед, що розповсюдження хвиль в однорідному провіднику не пов'язане з виникненням у ньому вільних електричних зарядів. Припускаючи, що в провіднику відсутні електрорушійні сили, на підставі рівняння неперервності, закону Ома та рівняння Максвелла можемо записати:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j} = -\lambda \text{div} \vec{E} = -\frac{\lambda}{\varepsilon} \text{div} \vec{D} = -\frac{\lambda \rho}{\varepsilon}$$

Рішення цього диференціального рівняння має вигляд:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon} t},$$

де ρ_0 – довільна стала.

Отже, якщо навіть якимось чином внести в провідник вільні об'ємні заряди, то густина їх дуже швидко спаде до нуля, і тим швидше, чим більше λ .

Таким чином, будемо виходити з системи рівнянь Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \lambda \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{div} \vec{H} = 0$$

Провівши вже знайомі нам перетворення, дістаємо:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \lambda \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (5.92)$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \lambda \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (5.93)$$

Будемо шукати рішення рівнянь (5.92), (5.93) у вигляді монохроматичної плоскої хвилі, що розповсюджується вздовж осі X . Для цього в рівняння (5.92), (5.93) підставимо

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}(x) e^{i\omega t} \quad (5.94)$$

$$\vec{H}(x, t) = \vec{H}(x) e^{i\omega t} \quad (5.95)$$

Для $\vec{E}(x)$ і $\vec{H}(x)$ отримуємо рівняння:

$$\frac{d^2 \vec{E}(x)}{dx^2} + (\epsilon \mu \omega^2 - i \lambda \mu \omega) \vec{E}(x) = 0 \quad (5.96)$$

$$\frac{d^2 \vec{H}(x)}{dx^2} + (\epsilon \mu \omega^2 - i \lambda \mu \omega) \vec{H}(x) = 0 \quad (5.97)$$

Однотипні рівняння (5.96) і (5.97) мають окремі рішення у вигляді (для (5.96), наприклад)

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0 e^{-ik_\omega x}, \quad (5.98)$$

де
$$k_\omega^2 = \omega^2 \epsilon \mu - i \lambda \mu \omega = \omega^2 \epsilon_\omega \mu \quad (5.99)$$

Величина $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$, розглянута вище, замінюється комплексною величиною (5.99), чи, що теж саме, з'являється нова, комплексна діелектрична проникність:

$$\epsilon_\omega = \epsilon - i \frac{\lambda}{\omega} \quad (5.100)$$

Таким чином, щодо розповсюдження монохроматичних хвиль провідник еквівалентний до діелектрика із комплексною діелектричною проникністю ϵ_ω .

Представимо k_ω у вигляді:

$$k_\omega = k - is \quad (5.101)$$

Оскільки $k_\omega^2 = k^2 - 2iks - s^2$, то, враховуючи (5.99), отримуємо:

$$\begin{aligned} k^2 - s^2 &= \omega^2 \epsilon \mu \\ 2ks &= \lambda \mu \omega \end{aligned} \quad (5.102)$$

Підстановка (5.98) і (5.101) в (5.94) та (5.95) дає:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (5.103)$$

Бачимо, що комплексність хвильового числа k_ω відповідає наявності поглинання: амплітуда хвилі експоненціально спадає в міру її розповсюдження. Якщо $\lambda = 0$, уявна частина хвильового числа обертається в нуль, і затухання хвилі припиняється.

На довжині $x = \delta = \frac{1}{s}$ амплітуда хвилі зменшується в e разів.

Величину δ називають глибиною проникнення хвилі в провідне середовище. Її можна знайти, розв'язуючи рівняння (5.102) відносно k та s .

Ці рішення мають вигляд:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right\}, \\ s^2 &= \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (5.104)$$

Для металів $\lambda \approx 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, відносна діелектрична проникність не може бути більше декількох одиниць, тобто $\epsilon \approx \epsilon_0$. Тому в діапазоні видимого світла ($\omega \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$)

$$\frac{\lambda}{\epsilon \omega} \approx \frac{10^7}{10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{15}} \approx 200 \gg 1.$$

При більш низьких частотах (наприклад, в діапазоні радіохвиль) ця нерівність підсилюється. Отже, у формулах (5.104) можна нехтувати одиницями в правих частинах. Таким чином

$$k^2 \approx s^2 \approx \frac{\omega \lambda \mu}{2},$$

і глибина проникнення δ дорівнює

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \lambda \mu}} \quad (5.105)$$

Розглянемо як приклад мідь, для якої $\lambda = 5 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ і $\mu = \mu_0$ ($\mu_r \approx 1$). Глибина проникнення світла буде

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2}{5 \cdot 10^{15} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-6}}} \approx 10^{-8} \text{ м}$$

Таким чином, глибина проникнення суттєво менша за довжину хвилі і ніякої просторової періодичності поля хвилі у металах немає. Строго кажучи, внаслідок швидкого загасання не має сенсу говорити про розповсюдження електромагнітних хвиль у провідному середовищі. Цей висновок залишається вірним і для великих довжин хвиль, так як із зменшенням ω глибина проникнення зростає як корінь квадратний із ω .

Швидке загасання електромагнітних хвиль у провідному середовищі пояснюється перетворенням електромагнітної енергії в ленц-джулеве тепло. Механізм цього перетворення зводиться до того, що електричне поле хвилі викликає струми провідності, а енергія останніх виділяється у вигляді теплоти.

Окремий випадок явища, розглянутого вище, – неоднорідний розподіл змінного струму перерізом провідника – скін-ефект. Найвища густина змінного струму виявляється на поверхні провідника, найменша – на його осі. При високих частотах основна частина струму сконцентрована у тонкому поверхневому шарі, від чого явище отримало назву поверхневого, чи скін-ефекту (skin – шкіра).

Наприкінці відмітимо, що співвідношення, отримане при розгляданні електромагнітних хвиль в діелектрику, а саме

$$\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$$

має місце і зараз, але у вигляді:

$$\sqrt{\epsilon_{\omega}}E = \sqrt{\mu}H.$$

Внаслідок комплексності ϵ_{ω} вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ вже не є синфазними, як це було у випадку діелектрика. При цьому вони залишаються перпендикулярними один до одного.

5.9 ВІДБИТТЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА ПЛОСКІЙ МЕЖІ ДВОХ ДІЕЛЕКТРИКІВ. ФОРМУЛИ ФРЕНЕЛЯ

Будемо розглядати розповсюдження електромагнітних хвиль в неоднорідному середовищі. Найпростіший випадок неоднорідності – наявність плоскої межі між двома ізотропними, однорідними та прозорими (тобто такими, що не поглинають) середовищами. На межі таких середовищ промінь, що падає, перетворюється у відбитий та заломлений промені, напрямки яких знаходяться за законами відбиття і заломлення. Ці закони, як визначення інтенсивностей та поляризацій обох променів, природно випливають з електромагнітної теорії світла. Проте в «старій» фізиці, тобто в фізиці до Максвелловського періоду, спроби вирішити ці питання базувались на уявленні про пружний ефір, що приводило до необхідності ввести суперечливі припущення про властивості ефіру.

Але ж саме в цей період були введені в оптиці поняття про світлові коливання та площину поляризації. Нагадаємо, що під світловими коливаннями розуміють коливання електричного вектора $\vec{E}$. В лінійно поляризованій хвилі цей вектор коливається у площині, що перпендикулярна до площини поляризації, а магнітний вектор $\vec{H}$ коливається в площині поляризації.

Природне світло, на відміну від радіохвиль, в загальному випадку є неполяризованим, тобто площина коливання вектора $\vec{E}$ весь час змінюється. Однак для будь-якого моменту часу можна розкласти електричні вектори всіх трьох хвиль (падаючій, відбитій та заломленій) на дві взаємно перпендикулярні складові, одна з яких коливається в площині падіння променя на границю середовищ, а друга – перпендикулярна їй (рисунок 5.4).

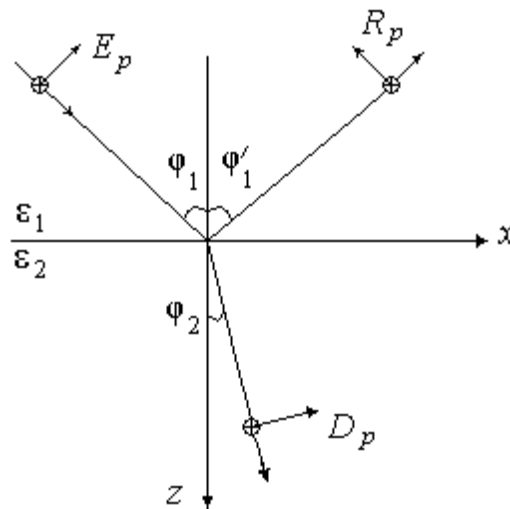


Рисунок 5.4 – Відбиття та заломлення електромагнітних хвиль на плоскій межі двох діелектриків

Введемо такі позначення: $\vec{E}$, $\vec{R}$ і $\vec{D}$ – амплітуди падаючої, відбитої та заломленої хвиль відповідно. Індекс p позначає складові, що лежать у площині падіння, індекс s – перпендикулярні до

площини падіння. За позитивний напрям p - складових приймаємо напрям, що показаний на рисунку 5.4 стрілкою, за позитивний напрям s - складових – напрям, позначений значком $\oplus$ («від нас»). Прозорі середовища, на межі яких відбувається відбиття та заломлення світла, вважаються ідеальними діелектриками. Тобто ε_1 і ε_2 – сталі величини, вільні заряди ρ і σ в них відсутні, а $\mu_{1r} = \mu_{2r} \approx 1$. Швидкість світла в середовищах v_1 і v_2 , при цьому $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$ (n – показник заломлення).

З векторних рівнянь

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_p + \vec{E}_s \\ \vec{R} &= \vec{R}_p + \vec{R}_s \\ \vec{D} &= \vec{D}_p + \vec{D}_s\end{aligned}\quad (5.106)$$

отримуємо для компонент

$$\begin{aligned}E_x &= E_p \cos \varphi_1 & R_x &= -R_p \cos \varphi'_1 & D_x &= D_p \cos \varphi_2 \\ E_y &= E_s & R_y &= R_s & D_y &= D_s \\ E_z &= -E_p \sin \varphi_1 & R_z &= -R_p \sin \varphi'_1 & D_z &= -D_p \sin \varphi_2\end{aligned}\quad (5.107)$$

Беручи до уваги, що $\sqrt{\varepsilon}[\vec{n}\vec{E}] = \sqrt{\mu}\vec{H}$, де $\vec{n}$ – орт напрямку розповсюдження хвилі, для магнітних векторів трьох хвиль будемо мати (при $\mu_{1r} = \mu_{2r} = 1$):

$$\vec{H}^n = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 \\ E_x & E_y & E_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}; \vec{H}^{\hat{a}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{vmatrix} \sin \varphi'_1 & 0 & -\cos \varphi'_1 \\ R_x & R_y & R_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}; \vec{H}^{\zeta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \begin{vmatrix} \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \\ D_x & D_y & D_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix},\quad (5.108)$$

де верхні індекси «п», «в» та «з» означають «падаюча», «відбита», «заломлена». Таким чином

$$\begin{aligned}&\sqrt{\mu_0}\vec{H}^{\ddot{r}} \left(-\sqrt{\varepsilon_1}E_s \cos \varphi_1, \sqrt{\varepsilon_1}E_p, \sqrt{\varepsilon_1}E_s \sin \varphi_1 \right) \\&\sqrt{\mu_0}\vec{H}^{\hat{a}} \left(\sqrt{\varepsilon_1}R_s \cos \varphi'_1, \sqrt{\varepsilon_1}R_p, \sqrt{\varepsilon_1}R_s \sin \varphi'_1 \right) \\&\sqrt{\mu_0}\vec{H}^{\zeta} \left(-\sqrt{\varepsilon_2}D_s \cos \varphi_2, \sqrt{\varepsilon_2}D_p, \sqrt{\varepsilon_2}D_s \sin \varphi_2 \right)\end{aligned}\quad (5.109)$$

Граничні умови для електричного та магнітного полів у загальному позначенні мають у нашому випадку вигляд:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}; H_{1\tau} = H_{2\tau}; H_{1n} = H_{2n} \quad (5.110)$$

Стосовно нашої задачі, тобто з урахуванням (5.107) та (5.109), (5.110) набувають вигляду:

$$E_p \cos \varphi_1 - R_p \cos \varphi'_1 = D_p \cos \varphi_2 \quad (5.111)$$

$$\varepsilon_1 (E_p \sin \varphi_1 + R_p \sin \varphi'_1) = \varepsilon_2 D_p \sin \varphi_2 \quad (5.112)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (E_p + R_p) = \sqrt{\varepsilon_2} D_p \quad (5.113)$$

$$E_s + R_s = D_s \quad (5.114)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (E_s \cos \varphi_1 - R_s \cos \varphi'_1) = \sqrt{\varepsilon_2} D_s \cos \varphi_2 \quad (5.115)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (E_s \sin \varphi_1 + R_s \sin \varphi'_1) = \sqrt{\varepsilon_2} D_s \sin \varphi_2 \quad (5.116)$$

При умові, що E_p і E_s задані, можемо обмежитись тільки чотирма рівняннями з системи (5.111) – (5.116), наприклад, (5.111), (5.113), (5.114), (5.115). Напруженості полів є функціями координат і часу і для плоскої хвилі (наприклад, електричної) записується як

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right).$$

Легко бачити, що в площині XZ $r = x \sin \varphi + z \cos \varphi$. Тому для фаз Φ_1, Φ_2 і Φ_3 падаючої, відбитої та заломленої хвиль маємо:

$$\Phi_1 = \omega \left(t - \frac{x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1}{v_1} \right);$$

$$\Phi_2 = \omega \left(t - \frac{x \sin \varphi'_1 + z \cos \varphi'_1}{v_1} \right);$$

$$\Phi_3 = \omega \left(t - \frac{x \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2}{v_2} \right).$$

Рівності (5.111) – (5.116) можуть мати місце для миттєвих значень векторів тільки в тому випадку, якщо фази хвиль на границі середовищ однакові (або протилежні, що зводиться до заміни знаку перед амплітудою). Таким чином, $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$. Оскільки граничні умови дійсні для будь-яких x у будь-який момент t , то (при $z=0$) отримаємо:

$$\frac{\sin \varphi_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi'_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2}{v_2} \quad (5.117)$$

тобто $\varphi_1 = \varphi'_1$ (закон відбиття) і

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} = n \text{ (закон заломлення),} \quad (5.118)$$

де n – показник заломлення другого середовища відносно першого (n_{12}).

Використовуючи ці закони, легко виводяться формули Френеля. Так, переписуючи рівняння (5.115) у вигляді

$$\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}}(E_s - R_s) \cos \varphi_1 = \frac{v_2}{v_1} \cos \varphi_1 (E_s - R_s) = \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} (E_s - R_s) = D_s \cos \varphi_2 \quad (5.119)$$

(тут при перетвореннях скорочено на $\sqrt{\epsilon_0}$ і c), і замінюючи D_s згідно (5.114) $D_s = E_s + R_s$, отримуємо рівняння відносно R_s :

$$\frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2} (E_s - R_s) = E_s + R_s, \text{ звідки}$$

$$R_s = -E_s \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (5.120)$$

Для D_s маємо

$$D_s = E_s \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (5.121)$$

Рівняння (5.111) і (5.113) набувають вигляду:

$$(E_p - R_p) \cos \varphi_1 = D_p \cos \varphi_2$$

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} (E_p + R_p) = D_p,$$

З них знаходимо:

$$R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (5.122)$$

$$D_p = E_p \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad 5.123)$$

Формули Френеля (5.120) – (5.123) дають змогу встановити фазові співвідношення при відбитті та заломленні. Із формул (5.121) і (5.123) видно, що при будь-яких значеннях кутів φ_1 і φ_2 знаки складових $\vec{D}$ і $\vec{E}$ співпадають, що означає, що заломлена хвиля у всіх випадках зберігає фазу падаючої.

Щодо фазових співвідношень при відбитті (5.120) та (5.122), то необхідно розрізняти два випадки: 1) $\varphi_1 > \varphi_2$; 2) $\varphi_1 < \varphi_2$.

Перший випадок має місце при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Із формул (5.120) та (5.122) випливає, що E_s і R_s мають протилежні знаки, тому їх фази протилежні, знаки E_p і R_p у цьому випадку співпадають. Це явище часто згадується в оптиці як втрата півхвилі при відбитті.

В другому випадку ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$) фази векторів електричної напруженості падаючої і відбитої хвиль однакові, але фази векторів магнітної напруженості зсунуті на π .

Контрольні питання і вправи.

1. Який вигляд та фізичний зміст має теорема Умова-Пойнтінга? Зміст вектора Пойнтінга?

2. Запишіть вирази для електродинамічних потенціалів та поясніть, що таке градієнтна інваріантність електричного та магнітного полів, та колі бровка потенціалів. Яка відмінність Лоренцової калібровки від Кулонівської?
3. Який вигляд мають рівняння Даламбера та який їх зв'язок з рівняннями Пуассона і Лапласа?
4. В чому полягає фізичний зміст рішення рівняння Даламбера у вигляді потенціалів, що запізнюються?
5. Які особливості розповсюдження електромагнітних хвиль в діелектрику і відмінності цього розповсюдження від розповсюдження в провідниках?
6. Які обставини понукали Максвелла дійти до висновку, що світло має електромагнітну природу?
7. Яким чином (в загальних рисах) виявляється зв'язок теорії Максвелла з геометричною оптикою?

6 ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ВИПРОМІНЮВАННЯ

В 1887 році з'явилися перші досліди Генріха Герца, що доводять існування електромагнітної хвилі. Для цієї мети Герц скористався так званим вібратором, або осцилятором Герца. Осцилятор Герца – це фактично прообраз відкритого коливального контуру.

6.1 ВИПРОМІНЮВАННЯ КОРОТКОЇ АНТЕНИ

Антенною називається, провідник, яким тече швидкозмінний струм.

Розташуємо антену вздовж осі Z . Нехай M – точка спостереження. Позначимо через R відстань від неї до центру антени O (рисунок 6.1)

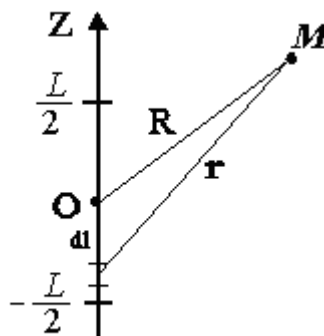


Рисунок 6.1 – Випромінювання короткої антени

Відносно точок спостереження поля, для яких $r \approx R$, антену називають короткою. Множина точок, для яких $R \gg \lambda$, де λ –

довжина хвилі, що випромінюється, утворює так звану хвильову зону.

Задачу про випромінювання антени будемо вирішувати методом електродинамічних потенціалів. Мета полягає в тому, щоб знайти електромагнітне поле, породжене антеною, в будь-якій точці хвильової зони. Знайдемо спочатку електродинамічні потенціали в такій точці, а потім обчислимо і самі поля. Електродинамічні потенціали візьмемо у вигляді потенціалів, що запізнюються, і почнемо з векторного потенціалу

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV \quad (6.1)$$

З усіх аргументів функції $\vec{j}$ ми записали тільки аргумент, що запізнюється. Далі у виразі (6.1) передбачається, що антена знаходиться у вакуумі. Для короткої антени, згідно визначенню, вираз (6.1) може бути переписано так:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV \quad (6.2)$$

Оскільки антена лежить на осі Z, то $j_x = j_y = 0$; $j_z = j$, і тому $A_x = A_y = 0$; $A_z = A$. Тому з (6.2) одержуємо:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V j\left(t - \frac{R}{c}\right) dV$$

Нехай dS – елемент площі перетину антени, а dl – елемент довжини. Тоді $dV = dS \cdot dl$. Останній вираз записується так:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_S j\left(t - \frac{R}{c}\right) dS \int_L dl = \frac{\mu_0 I \left(t - \frac{R}{c}\right) L}{4\pi R}$$

Введемо таке позначення

$$t - \frac{R}{c} = t'. \quad (6.3)$$

Тоді векторний потенціал в будь-якій точці хвильової зони має вигляд:

$$A = A_z = \frac{\mu_0 L I(t')}{4\pi R} \quad (6.4)$$

Для того щоб знайти скалярний потенціал, скористаємось умовою Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Враховуючи (6.4) і те, що $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, оскільки початок координат ми взяли в центрі антени, можна записати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{L}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I(t')}{R} \right) = -\frac{L}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial I(t')}{\partial z} + I(t') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \right\} = \\ &= -\frac{L}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial I(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} + I(t') \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial R}{\partial z} \right\} = -\frac{L}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{I'(t')}{R} \left(-\frac{1}{c} \right) \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{I(t')}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z} \right\}. \end{aligned}$$

Тут введено позначення: $\frac{\partial I(t')}{\partial t'} = I'(t')$. Враховуючи (6.3), таким чином, ми прийшли до виразу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{L}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial R}{\partial z} \left\{ \frac{I'(t')}{cR} + \frac{I(t')}{R^2} \right\}. \quad (6.5)$$

Покажемо тепер, що в хвильовій зоні другий член в дужках виразу (6.5) набагато менше першого і тому їм можна нехтувати. Нехай струм змінюється по синусоїдальному закону $I(t') = I_0 \sin \omega t'$.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{I'(t')}{cR} + \frac{I(t')}{R^2} &= \frac{I_0 \omega \cos \omega t'}{cR} + \frac{I_0 \sin \omega t'}{R^2} = \frac{2\pi I_0 \cos \omega t'}{TcR} + \frac{I_0 \sin \omega t'}{R^2} = \\ &= \frac{2\pi I_0 \cos \omega t'}{\lambda R} + \frac{I_0 \sin \omega t'}{R^2} \end{aligned}$$

де T – період синусоїдального струму, λ – довжина хвилі випромінювання.

Чисельники в цих виразах майже однакові, але якщо $\lambda \ll R$, то $\frac{1}{\lambda R} \gg \frac{1}{R^2}$. Тому другий член тут набагато менше, ніж перший.

Ми надалі будемо нехтувати похідною за координатами від $(\frac{1}{R})$ в порівнянні з похідною за координатами від (6.3).

Таким чином, рівняння (6.5) запишемо так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} z;$$

Тут ми врахували, що $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}$. Ми перепишемо цей вираз, так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{Lz}{4\pi\epsilon_0 c R^2} \frac{\partial I(t')}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}.$$

Як видно з (6.3), $\frac{\partial t}{\partial t'} = 1$, тому, скорочуючи на ∂t і інтегруючи, знаходимо скалярний потенціал:

$$\varphi = \frac{LI(t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} z \quad (6.6)$$

Перейдемо до обчислення полів. Почнемо з магнітного поля:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A}$$

Поле будемо обчислювати за компонентами. Для компоненти H_x , враховуючи (6.4), запишемо:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{L}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{I(t')}{R} \right) \cong \frac{L}{4\pi R} \frac{\partial I(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} \end{aligned}$$

Тут ми врахували, що величиною $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)$ можна знехтувати.

Тому маємо:

$$H_x = \frac{LI'(t')}{4\pi R} \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{LI'(t')}{4\pi R^2 c} y \quad (6.7)$$

$$H_y = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = -\frac{L}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{I(t')}{R} \right) = \frac{LI'(t')}{4\pi R^2 c} x \quad (6.8)$$

$$H_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0. \quad (6.9)$$

Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{LI'(t')}{4\pi R^2 c} y \\ H_y &= \frac{LI'(t')}{4\pi R^2 c} x \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Перейдемо до електричного поля. $\vec{E} = -grad\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Як і вище,

будемо шукати поле по компонентах.

$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$. Враховуючи (6.4) і (6.6), отримаємо,

$$E_x = -\frac{Lz}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{I(t')}{R^2} \right) \cong -\frac{Lz}{4\pi\epsilon_0 c R^2} \frac{\partial}{\partial x} (I(t')) = \frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} xz. \quad (6.11)$$

В останньому виразі ми знехтували похідною $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^2} \right)$.

Аналогічно отримаємо

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} yz \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{L}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I(t')}{R^2} z \right) - \frac{\mu_0 L}{4\pi R} \frac{\partial I(t')}{\partial t} = \\
&= -\frac{Lz}{4\pi\epsilon_0 c R^2} \frac{\partial}{\partial z} (I(t')) - \frac{LI(t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} - \frac{LI(t')z}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R^2} \right) - \frac{\mu_0 L}{4\pi R} \frac{\partial I(t')}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} \cong \\
&\cong \frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} z^2 - \frac{LI(t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} - \frac{\mu_0 LI'(t')}{4\pi R}
\end{aligned}$$

Тут ми врахували, що згідно до (6.3) $\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$, і знехтували

похідною $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R^2} \right)$, а в останній рівності знехтуємо у хвильовій зоні

другим членом, який пропорційний $\frac{1}{R^2}$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}
E_z &\cong \frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} z^2 - \frac{\mu_0 LI'(t')}{4\pi R} = \frac{LI'(t')(z^2 - \epsilon_0 \mu_0 c^2 R^2)}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} = \\
&= \frac{LI'(t')(z^2 - R^2)}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} = -\frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} (x^2 + y^2)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\left. \begin{aligned}
E_x &= \frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} xz \\
E_y &= \frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} yz \\
E_z &= -\frac{LI'(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} (x^2 + y^2)
\end{aligned} \right\} \tag{6.14}$$

Таким чином,

Якщо антена коротка, то для хвильової зони її можна вважати точковою, і тоді антена випромінює сферичну хвилю. Тому її випромінювання відбувається у радіальному напрямі, і з рівності (6.10) витікає, що скалярний добуток $(\vec{H}\vec{R})=0$ ($\vec{R}(x,y,z)$ – радіус-вектор будь-якої точки простору). Тому вектор $\vec{H}$ перпендикулярний вектору $\vec{R}$. Так само з рівняння (6.14) витікає, що $(\vec{E}\vec{R})=0$. Звідси вектор $\vec{E}$ перпендикулярний вектору $\vec{R}$. Вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{R}$ утворюють правоґвинтову трійку взаємно перпендикулярних векторів, як це і повинно бути в електромагнітній хвилі.

Розглянемо фронт сферичної хвилі в деякий момент часу. Візьмемо деяку точку з радіус-вектором $\vec{R}$. Зобразимо на рисунку 6.2 коло широт для цієї точки.

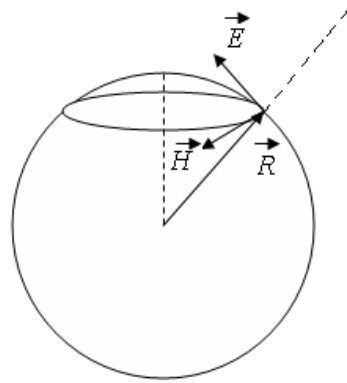


Рисунок 6.2 – Взаємна орієнтація векторів $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{R}$ у довільній точці фронту сферичної хвилі

Вектор напруженості електричного поля хвилі $\vec{E}$ завжди лежить у меридіанній площині, а вектор $\vec{H}$ лежить у площині кіл широт. Із рівнянь (6.10) випливає, що

$$H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 = \left(\frac{LI'(t')}{4\pi c R^2} \right)^2 (x^2 + y^2).$$

Звідси

$$H = \frac{LI'(t')}{4\pi c R^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

При дослідженні сферичних хвиль зручно користуватись сферичними координатами R, θ, ψ (рисунок 5.1, розділ 5).

На основі простого співвідношення $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho = R \sin \theta$ для попереднього виразу маємо:

$$H = \frac{LI'(t')}{4\pi c R} \sin \theta. \quad (6.15)$$

Аналогічно можна виразити напруженість електричного поля в сферичних координатах із (6.14). Але можна поступити простіше. На великих відстанях від антени у хвильовій зоні кривизна сферичної хвилі стає дуже маленькою. Тому можна вважати, що хвиля плоска. А для плоскої хвилі, як було показано вище,

$$\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H. \text{ Тому } E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H. \text{ Тоді із (6.15) випливає, що}$$

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{LI'(t')}{4\pi cR} \sin \theta = \frac{LI'(t')}{4\pi \epsilon_0 c^2 R} \sin \theta. \quad (6.16)$$

Обчислимо вектор Пойнтінга у хвильовій зоні. За величиною він є $S = EH$. Враховуючи вирази (6.15), (6.16), отримаємо:

$$S = \frac{L^2 I'^2(t')}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta. \quad (6.17)$$

Із (6.17) випливає основний закон фотометрії (перший закон освітленості), цей закон є справедливим для будь-якої електромагнітної хвилі.

На рисунку 6.3 зображено залежність $S(\theta)$ на полярній діаграмі випромінювання короткої антени. У якості полярної вісі прийнята вертикальна вісь. З цієї діаграми видно, що вздовж вертикальної осі (тобто вздовж себе) антена не випромінює.

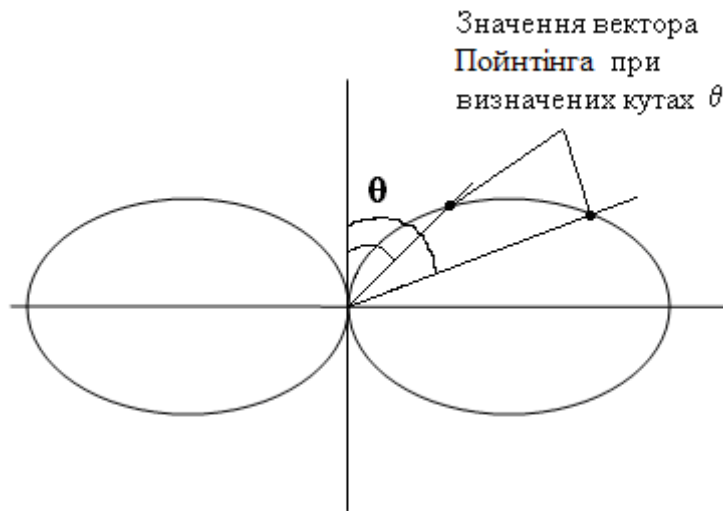


Рисунок 6.3 – Залежність $S(\theta)$ на полярній діаграмі випромінювання короткої антени

Максимальне випромінювання припадає на напрям, перпендикулярний антені. Такі діаграми важливі для аналізу випромінювання електромагнітних хвиль радіочастотного діапазону, тому що дозволяють визначити розподіл інтенсивності випромінювання антени за напрямком.

6.2 ДИПОЛЬНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Генерація електромагнітного поля, як вперше показав Герц у своїх дослідях, можлива вже при іскровому розряді. Основним інструментом генерації поля є швидкозмінний струм. Але це не єдиний спосіб отримання електромагнітного випромінювання. Покажемо це, аналізуючи систему рівнянь Максвелла.

Розглянемо рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.18)$$

Для вакууму $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, а для діелектрика $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}$, де $\vec{\mathcal{P}}$ – вектор поляризації. Тоді рівняння Максвелла в загальному вигляді треба записати так:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}. \quad (6.19)$$

Рівняння (6.18) є одним з базових рівнянь у теорії випромінювання. Але, записане у формі (6.19), воно виявляє у правій своїй частині симетрію крайніх членів відносно центрального. Звідси випливає, що джерелом електромагнітного випромінювання може бути як струм провідності $\vec{j}$, так і швидкозмінна поляризація діелектрика $\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}$. При цьому, наприклад, в антені випромінювання обумовлюється членом $\vec{j}$, оскільки $\vec{\mathcal{P}}$ дорівнює нулю. А в діелектрику із змінною поляризацією $\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}$ не дорівнює нулю, а $\vec{j} = 0$. Враховуючи абсолютну рівноправність крайніх членів у рівнянні (6.19), можна теорію, розвинену вище для антени, перенести на діелектрик зі змінною поляризацією. Для цього необхідно зробити деякі заміни, а саме, $\vec{j} \rightarrow \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}$. Візьмемо добуток $(L \cdot j \cdot S)$, де L – довжина відрізка провідника, j – густина струму, S – площа поперечного перетину провідника. Тоді $LjS = LI \rightarrow \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} LS$. Але $\vec{\mathcal{P}}V = \vec{p}$ – дипольний момент об'єму діелектрика за умовою його однорідності, $V = LS$ – об'єм діелектрика. Тоді з формули (6.17), з урахуванням вищезазначених заміन, отримаємо:

$$S = \frac{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta. \quad (6.20)$$

Вираз (6.20) – основна формула для дипольного випромінювання.

Ясно, що так само просто можна знайти вирази для полів дипольного випромінювання. Здійснити дипольне випромінювання експериментально дуже просто. Можна взяти, наприклад, діелектрик з високою діелектричною проникністю і ввести його між обкладинками конденсатора, на який подана швидкозмінна напруга. Тоді в діелектрику виникне швидкозмінна поляризація, яка буде генерувати електромагнітне поле, яке легко зафіксувати. Теорія дипольного випромінювання грає виключно важливу роль в атомній фізиці. Це зв'язано, в першу чергу, з тим, що внутріатомні переходи електронів ведуть до швидких змін дипольних моментів атомів, внаслідок чого виникає дипольне випромінювання.

6.3 ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДУ, ЩО РУХАЄТЬСЯ ПРИСКОРЕНО

Розглянемо простіший випадок дипольного випромінювання, згідно з формулою (6.20). Такому випадку відповідає розгляд простого диполя (рис. 6.4). $\vec{p} = q\vec{r}$. Припустимо, що $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Це означає, що заряди диполя переміщуються один відносно іншого. Тоді дипольний момент буде функцією часу: $\vec{p}(t) = q\vec{r}(t)$.

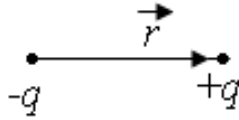


Рисунок 6.4 – Електричний диполь

Якщо при цьому $\ddot{\vec{r}}(t) \neq 0$, то існує $\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2}$, тобто $\ddot{\vec{p}}(t) \neq 0$. Ситуацію можна спростити. Взаємне переміщення двох зарядів завжди можна представити як переміщення одного з них відносно другого, тобто один з них вважати нерухомим. Тоді зміна дипольного моменту буде обумовлена рухом саме заряду, що рухається. Тобто дійшли висновку, що заряд, який рухається прискорено, є джерелом випромінювання. При цьому формула (6.20) має вигляд:

$$S = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \ddot{\vec{r}}^2 \sin^2 \theta. \quad (6.21)$$

Вирішимо таку важливу задачу. Знайдемо потужність випромінювання заряду, що рухається прискорено. Точковий заряд випромінює сферичну хвилю. Тому, враховуючи сенс вектора Пойнтінга, отримаємо шуканий вираз потужності, якщо вектор Пойнтінга проінтегрувати за сферичною поверхнею $\frac{dW_{\text{вип.}}}{dt} = \int S df$, де S – вектор Пойнтінга – енергія випромінювання, що проходить в одиницю часу через одиничну площадку, що зорієнтована перпендикулярно променям. Елемент площі df у сферичних координатах має вигляд $df = R^2 d\Omega = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Тоді, враховуючи (6.21), маємо:

$$\begin{aligned}\frac{dW_{\text{випр.}}}{dt} &= \frac{q^2 \ddot{r}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q^2 \ddot{r}^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta) = \\ &= \frac{q^2 \ddot{r}^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{q^2 \ddot{r}^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left(+1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{q^2 \ddot{r}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\frac{dW_{\text{випр.}}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{r}^2. \quad (6.22)$$

В системі CGSE формула (6.22) має вигляд:

$$\frac{dW_{\text{випр.}}}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{r}^2.$$

Формула (6.22) привела до розуміння багатьох ефектів у фізиці. Зокрема, вона допомогла зрозуміти виникнення суцільного спектра тормозного рентгенівського випромінювання. Ця формула дуже просто і зрозуміло пояснює блакитний колір неба тощо.

Нехай рух зарядженої частинки є найпростішим, тобто $\vec{r} = \vec{r}_0 \sin \omega t$. Тоді $\ddot{\vec{r}} = -\vec{r}_0 \omega^2 \sin \omega t$. Згідно з формулою (6.22): $\frac{dW_{\text{випр.}}}{dt} \sim \omega^4$, тобто потужність випромінювання частинки, що коливається за гармонічним законом, пропорційна четвертому ступеню частоти.

Для змінного струму, що змінюється за гармонічним законом, як випливає з формули (6.17), $\frac{dW_{\text{випр.}}}{dt} \sim \omega^2$. І те, і друге свідчить про те, що легше генерувати високочастотні хвилі (короткохвильове випромінювання), ніж низькочастотні. З цим фактом добре знайомі радісти.

Контрольні питання і вправи.

1. Що ви вважаєте за головне в кінцевих висновках про випромінювання короткої антени?
2. Яким чином можна здійснити перехід від результатів, отриманих в теорії випромінювання короткої антени до теорії дипольного випромінювання?
3. Чому дипольне випромінювання (як і випромінювання зарядженого осцилятора), на ваш погляд, займає особливе місце в теорії випромінювання?

7 ЗАДАЧІ

Електростатика та магнітостатика.

1. За допомогою теореми Остроградського-Гаусса знайти поле, створюване нескінченною прямою ниткою, рівномірно зарядженою з лінійною густиною τ (рисунок 7.1). Обчислити поле, якщо $\tau = 4 \text{ Кл/м}$, $d = 20 \text{ см}$.

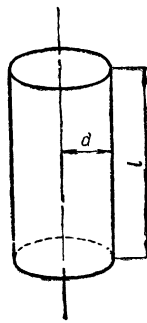


Рисунок 7.1

Рішення. З міркувань симетрії ясно, що вектор напруженості електричного поля лежить в площинах, перпендикулярних нитці. Побудуємо круглий циліндр радіусом d , вісь якого співпадає з ниткою. Висота циліндра нехай буде l . Застосуємо до об'єму циліндра теорему Остроградського-Гаусса:

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q,$$

де q – повний заряд в об'ємі циліндра, S — поверхня циліндра.

Очевидно, що $q = \tau \cdot l$. Потік вектора через поверхні підстав циліндра рівний нулю, оскільки вектор $\vec{D}$ паралельний підставам. Потік вектора через бічну поверхню легко обчислюється, оскільки на цій поверхні напрям вектора $d\vec{S}$ в кожній точці співпадає з напрямом

вектора $\vec{D}$, а по абсолютній величині вектор $\vec{D}$ постійний. Отже, маємо:

$$\int (\vec{D} d\vec{S}) = D \cdot 2\pi dl.$$

Таким чином, теорема Остроградського-Гаусса приводить до рівності:

$$\varepsilon_0 E \cdot 2\pi dl = \tau l.$$

Звідси слідує:

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\tau}{\pi d} = 10 \text{ В/м}.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою для поля зовні нескінченного зарядженого циліндра, ми бачимо, що поле нескінченної зарядженої нитки і поле нескінченного зарядженого циліндра співпадають, якщо на одиницю довжини вздовж осі доводиться однакова кількість електрики (у циліндра $\tau = \rho\pi a^2$).

2. Знайти поле прямої нитки кінцевої довжини l , рівномірно зарядженої, з лінійною густиною τ (рисунок 7.2).

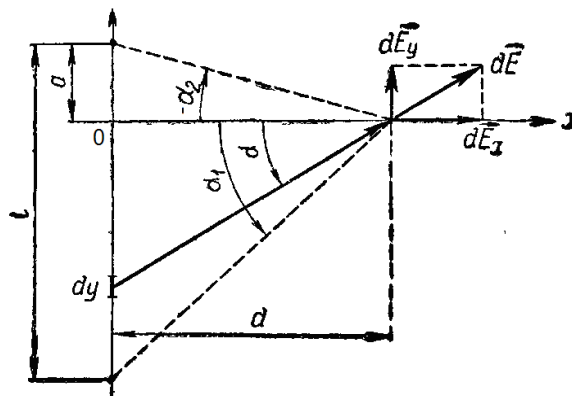


Рисунок 7.2

Розглянути чисельний приклад: $\tau = 10^{-10}$ Кл/м, $l = 1$ м, $d = 50$ см, $a = 50$ см.

Рішення. Використовуємо закон Кулона:

$$dE_x = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0(y^2 + d^2)} \cos \alpha = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0(y^2 + d^2)} \frac{d}{\sqrt{y^2 + d^2}},$$

$$dE_y = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0(y^2 + d^2)} \sin \alpha = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0(y^2 + d^2)} \left(\frac{-y}{\sqrt{y^2 + d^2}} \right).$$

Звідси

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}; \quad E_y = -\frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{y dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Провівши заміну змінних

$$-y = dtg \alpha, \quad dy = \frac{-d}{\cos^2 \alpha} d\alpha, \quad 1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

Одержуємо:

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) \approx 1,27 \hat{A} / \hat{i},$$

$$E_y = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = 0.$$

Якщо довжина нитки нескінченна ($l \rightarrow \infty$), то $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $E_y = 0$.

3. Кільце радіусом a рівномірно заряджене. Загальний заряд, кільця рівний Q . Визначити напруженість поля і потенціал в точках на осі кільця (мал. 7.3).

Розглянути чисельний приклад: $a = 5$ см, $h = 3$ см. $Q = 2 \cdot 10^{-13}$ Кл.

Рішення. Напруженість визначаємо безпосереднім застосуванням закону Кулона. На елементі довжини кільця dl знаходиться кількість електрики $dq = \frac{Q}{2\pi a} dl$

$$\text{Тому маємо: } dE_h = \frac{Q dl \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2\pi a (a^2 + h^2)} = \frac{Q dl h}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2\pi a (a^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Звідси, інтегруючи уздовж кільця, знаходимо:

$$E_h = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0(a^2 + h^2)^{3/2}} \approx 0,25 \text{ В/м.} \quad (1)$$

Складові напруженості від різних елементів кільця, перпендикулярні до осі кільця, в сумі дають нуль, як це видно безпосередньо з рисунка 7.3.

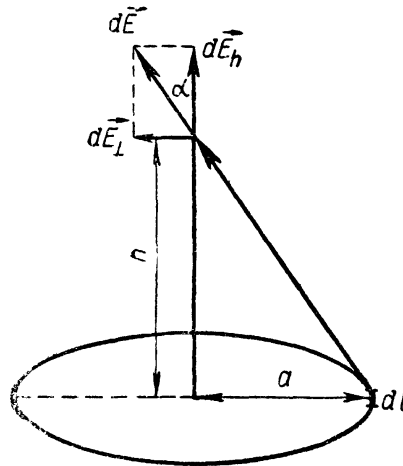


Рисунок 7

Потенціал можна обчислити, вибравши за шлях інтегрування осьовий напрям, поле на якому відоме:

$$\varphi(h) = \int_h^{\infty} \frac{Qh dh}{4\pi\epsilon_0(a^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + h^2}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$$

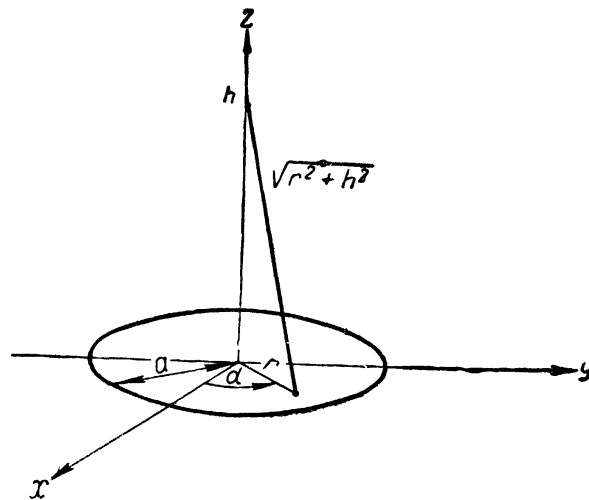


Рисунок 7.4

4. Визначити напруженість поля на осі диска, якщо по ньому рівномірно розподілений заряд Q . Радіус диска a (рисунок 7.4) Розглянути чисельний приклад: $Q = 10^{-10}$ Кл, $a = 10$ см, $h = 20$ см.

Рішення. Потенціал поля, що утворене поверхневим зарядом, має вигляд $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{R}$. Для нашого випадку

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}; \quad \sigma = \frac{Q}{\pi a^2}.$$

Інтеграл зручно обчислювати в полярних координатах:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad dx dy = S = r dr d\alpha,$$

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} (\sqrt{a^2 + h^2} - h) \approx 4,3 \text{ В},$$

звідки

$$E_h = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \approx 18 \text{ В/м}.$$

5. Знайти поле всередині і зовні рівномірно зарядженої кулі радіусом a рішенням рівняння Пуассона і за допомогою теореми Остроградського-Гаусса. Об'ємна густина заряду ρ . Потенціал нормувати рівністю нулю на нескінченності.

Вказівка. Скористатися виразом оператора Лапласа в сферичних координатах.

Теорема Остроградського-Гаусса використовується аналогічно тому, як це було зроблене в задачі 1 цього розділу, але як поверхні, через які обчислюється потік вектора $\vec{D}$, необхідно взяти сфери, концентричні з кулею.

$$\text{Відповідь:} \quad \varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon \epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \text{ при } 0 < r < a$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \text{ при } a < r$$

Величина Q – повний заряд кулі: $Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho$.

6. Знайти електричне поле в кульовій порожнині, що знаходиться усередині рівномірно зарядженої кулі (рисунок 7.5).

Вказівка. Скористатися результатами задачі 5.

$$\text{Відповідь: } \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_0.$$

7. Знайти поле в нескінченній циліндровій порожнині, що знаходиться в нескінченному рівномірно зарядженому круглому циліндрі. Об'ємна густина заряду ρ , решта величин вказана на рисунку 7.5.

Рішення. З погляду впливу на електричне поле наявність порожнини еквівалентно наявності в суцільному циліндрі зарядів протилежного знака, що рівномірно заповнюють порожнину, з густиною ρ .

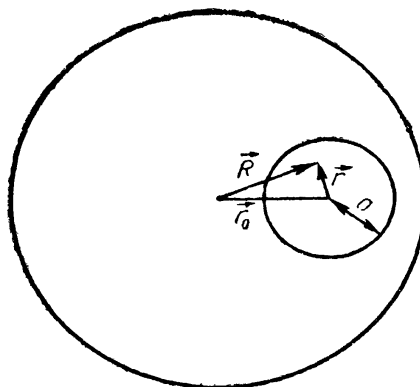


Рисунок 7.5

Тому поле, створюване циліндром з порожниною, можна розглядати як суперпозицію двох полів: поля суцільного циліндра більшого радіусу, зарядженого з об'ємною густиною ρ і поля суцільного циліндра, що заповнює порожнину, з об'ємною густиною $-\rho$. Одержуємо:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} (\vec{R} - \vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{r}_0,$$

тобто поле в порожнині однорідно. Вектор напруженості направлений по лінії, що сполучає вісь циліндра і вісь порожнини.

Абсолютно аналогічним способом може бути знайдено поле і у всіх точках простору зовні порожнини. З останньої формули видно, зокрема, що, коли вісь порожнини співпадає з віссю циліндра, поле в ній дорівнює нулю.

8. Знайти ємність провідної кулі радіусом r .

Рішення. Потенціал кулі

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

тому ємність

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 r.$$

9. Знайти ємність циліндрового конденсатора завдовжки l , радіуси обкладинок якого рівні r_1 і r_2 , а простір між обкладинками заповнений діелектриком з проникністю ϵ .

Рішення. Якщо заряд внутрішньої обкладки рівний Q , то за допомогою теореми Остроградського-Гаусса одержуємо для електричного поля між обкладинками формулу:

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon r l} \quad (r_1 < r < r_2).$$

Звідси для різниці потенціалів між обкладинками знаходимо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{Q}{l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Ємність дорівнює:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

10. Знайти ємність циліндрового конденсатора завдовжки l з двома шарами діелектрика. Розміри вказані на мал. 7.6.

Вказівка. Скористатися методом попередньої задачі.

$$\text{Відповідь: } C = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_2}{a}}.$$

11. Знайти ємність двошарового сферичного конденсатора. Розміри вказані на рисунку 7.6.

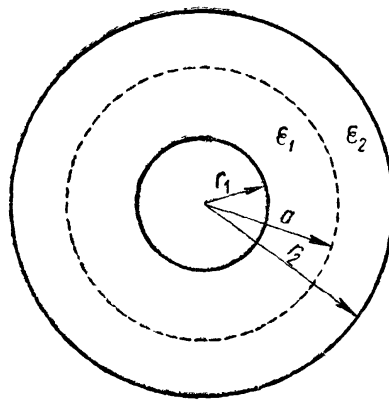


Рисунок 7.6

$$\text{Відповідь: } C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_2} \right)}.$$

12. Визначити роботу розсовування пластин плоского конденсатора на відстань d . Площа пластин S , заряд Q .

Розглянути чисельний приклад: $Q = 10^{-10}$ Кл, $S = 100$ см², $d = 1$ см.

Рішення. Поле біля поверхні пластини можна обчислити за допомогою граничної умови:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Використаємо також вираз для густини сили, що діє на пластинку:

$$f_n = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Отже, сила дорівнює:

$$F = f_n \cdot S = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} S = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

Робота розсовування пластин

$$A = Fd = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} d \approx 5,6 \cdot 10^{-10} \text{ Дж.}$$

13. Відстань між пластинами плоского конденсатора дорівнює d . В простір між обкладинками конденсатора вноситься металева пластина товщиною δ , поверхня якої паралельна до обкладинок. Пластины конденсатора мають потенціали φ_1 і φ_2 (рисунок 7.7). Знайти потенціал φ металевої пластини.

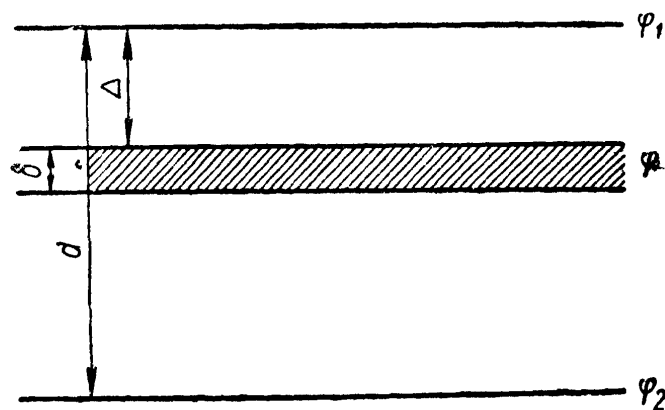


Рисунок 7.7

Рішення. Маємо

$$\varphi_1 - \varphi = E\Delta, \quad \varphi - \varphi_2 = E(d - \Delta - \delta).$$

Звідси

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E(d - \delta).$$

Отже

$$\varphi = \varphi_1 - E\Delta = \varphi_1 - \frac{\Delta}{d - \delta}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

14. Визначити силу, яка діє на заряд q , поміщений всередині металевої сфери на відстані r від її центра. Радіус сфери рівний a .

$$\text{Відповідь: } F = -\frac{q^2 ar}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - r^2)^2}.$$

15. Є дві концентричні провідні сфери з радіусами r_1 і r_2 ($r_1 < r_2$). Між сферами на відстані d від їх загального центра ($r_1 < d < r_2$) поміщений точковий заряд q . Визначити величини зарядів, індукованих на сферах.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } q_1 &= \frac{r_1(r_2 - d)}{d(r_2 - r_1)}q, \\ q_2 &= -\frac{r_2(d - r_1)}{d(r_2 - r_1)}q. \end{aligned}$$

16. Маленька кулька висить над горизонтальною провідною поверхнею на пружній нитці, яка є ізолятором. Коефіцієнт пружності нитки рівний k . Відстань від кульки до поверхні рівна d . Визначити величину заряду q , який треба надати кульці для того, щоб відстань між кулькою і провідною площиною зменшилася на величину x .

$$\text{Відповідь: } q = 4(d - x)\sqrt{kx\pi\epsilon_0}.$$

17. На відстані d від центра заземленої сфери поміщений точковий заряд q . Визначити величину відношення f заряду,

індукованого на частини сфери, видимої з точки знаходження заряду q , до заряду невидимої частини поверхні сфери. Радіус сфери a .

$$\text{Відповідь: } f = \sqrt{\frac{d+a}{d-a}}.$$

18. Два конденсатори ємністю C_1 і C_2 та із зарядами q_1 і q_2 (заряд конденсатора – абсолютна величина зарядів кожної з пластин конденсатора) з'єднуються паралельно. Обчислити і пояснити зміну електростатичної енергії конденсаторів.

$$\text{Відповідь: } \Delta W = \frac{(C_2 q_1 - C_1 q_2)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)}.$$

19. В рівномірно зарядженій кулі з об'ємною густиною заряду ρ є куляста порожнина, центр якої розташований на відстані a від центру кулі. Знайти напруженість поля усередині порожнини.

$$\text{Відповідь: } \vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}.$$

20. Знайти напруженість магнітного поля всередині і зовні циліндрового провідника, по якому тече струм, рівномірно розподілений по його перетину з густиною j . Радіус провідника R .

$$\text{Відповідь: } \vec{H}_i = \frac{1}{2} [\vec{j}, \vec{r}], \quad r < R$$

$$\vec{H}_e = \frac{R^2}{2r^2} [\vec{j}, \vec{r}], \quad r > R, \quad r - \text{відстань від осі циліндра.}$$

21. Обчислити індукцію магнітного поля, створюваного у вакуумі тонким прямолінійним провідником завдовжки $2L$, по якому тече струм силою I . Розглянути граничний випадок $L \rightarrow \infty$.

Вказівка: Вісь z направити уздовж струму, початок відліку взяти всередині провідника.

$$\text{Відповідь: } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left\{ \frac{L - z}{\sqrt{R^2 + (L - z)^2}} + \frac{L + z}{\sqrt{R^2 + (L + z)^2}} \right\},$$

$B|_{L \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, де R – відстань точки спостереження поля від провідника.

22. Лінійний провідник має форму правильного n – кутника із стороною $2a$. По ньому тече струм силою I . Обчислити індукцію створюваного ним магнітного поля на осі, що проходить через центр багатокутника перпендикулярно його площині.

$$\text{Відповідь: } B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} \frac{a^2 \operatorname{ctg} \frac{\rho}{n}}{\left(a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} + z^2 \right) \sqrt{a^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n} + z^2}}.$$

23. Струм I рівномірно розподілений по поверхні плоского кільця, внутрішній і зовнішній радіуси якого відповідно дорівнюють a і b . Обчислити індукцію магнітного поля на осі кільця.

$$\text{Відповідь: } B = \frac{\mu_0 I}{2(b - a)} \left\{ \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{a + \sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\}.$$

24. На циліндрову котушку радіусу $2l$ рівномірно намотаний один шар з N витків тонкого ізолюваного дроту, по якому пропущений струм I . Обчислити індукцію магнітного поля на осі котушки.

Вказівка: початок відліку помістити всередині осі котушки.

$$\text{Відповідь: } B = \frac{\mu_0 IN}{4l} \left\{ \frac{z+l}{\sqrt{a^2 + (z+l)^2}} - \frac{z-l}{\sqrt{a^2 + (z-l)^2}} \right\}.$$

25. Є нескінченний прямолінійний соленоїд радіусу R , обмотка якого виготовлена з дроту діаметром d , причому d дуже мало в порівнянні з R . Вийняти з соленоїда один виток, не розриваючи при цьому його обмотку, і визначити напруженість магнітного поля в центрі вийнятого витка. Обмоткою соленоїда тече струм I .

$$\text{Відповідь: } H = \frac{1}{2} I \frac{2R-d}{Rd}.$$

26. Розрахувати магнітне поле нескінченного прямого струму I , обчислюючи спочатку векторний потенціал, а потім – індукцію поля за формулою $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$.

$$\text{Відповідь: } A = A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(L + \sqrt{L^2 + x^2 + y^2}) - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2),$$

$$B_x = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi r^2}; \quad B_y = -\frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}; \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

27. Показати, що постійне однорідне магнітне поле $\vec{B}$ можна описувати векторним потенціалом $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}, \vec{r}]$.

Квазістаціонарні електромагнітні поля

1. Горизонтальний металевий стрижень обертається біля вертикальної осі, що проходить на відстані l/k його довжини від одного з кінців, роблячи N оборотів в секунду. Довжина стрижня l . Визначити різницю потенціалів між кінцями стрижня, якщо він обертається у вертикальному однорідному магнітному полі з індукцією B .

Приклад: $k = 3$, $l = 120$ см, $N = 6$ с⁻¹, $B = 10^{-2}$ Тл.

$$\text{Відповідь. } V = \pi N l^2 \frac{k-2}{k} B \approx 9,1 \text{ В.}$$

2. Провідна рамка опором R повертається в постійному магнітному полі з індукцією B навколо осі, перпендикулярної магнітному полю. Визначити, яка кількість електрики проходить через гальванометр, включений послідовно в ланцюг з рамкою, якщо спочатку площа рамки була перпендикулярна магнітному полю і рамка обернулася на 90° . Площа рамки рівна S .

Рішення

$$\varepsilon^{\text{інд}} = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad I = \frac{\varepsilon^{\text{інд}}}{R}$$

$$q = \int I dt = -\frac{1}{R} \int \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Delta\Phi}{R}.$$

3. Замкнутий контур у вигляді рамки площею S рівномірно обертається в однорідному магнітному полі B , роблячи N оборотів у секунду. Визначити максимальну ЕРС у контурі.

Розглянути чисельний приклад: $B = 1$ Тл, $S = 1000$ см², $N = 10$ с⁻¹

$$\varepsilon_{\text{макс}}^{\text{інд}} = 2\pi BSN = 6,28B.$$

4. Коливальний контур складається з котушки індуктивності L і плоского конденсатора з площею обкладинок S , розділених діелектриком завтовшки d діелектричною проникністю ε . Визначити період коливань цього контуру. Опір досить малий.

Розглянути чисельний приклад: $L = 0,1$ Гн, $S = 500$ см², $d = 1$ мм, $\varepsilon = 2 \varepsilon_0$.

$$\text{Відповідь } T = 2\pi\sqrt{L\frac{S\varepsilon}{d}} \approx 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

5. На котушку, опір і індуктивність якої рівний $R = 5$ Ом і $L = 100$ мГн, подається напруга. Через який час струм у котушці досягне величини, рівної половині сталого струму?

$$\text{Відповідь } t = \frac{L}{R} \ln 2 \approx 0,014 \text{ с.}$$

6. Між круглими полюсами електромагніту, що живиться змінним струмом з частотою 1000 Гц, утворюється магнітне поле, що синусоїдально змінюється в часі, з амплітудою індукції $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл. Вважаючи магнітне поле однорідним, визначити максимальну напруженість електричного поля в зазорі між магнітами на відстані $r = 0,5$ м від центра.

Вказівка. Скористатися законом електромагнітної індукції.

$$\text{Відповідь } E = \frac{1}{2} B_0 \omega r = 7,8 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

7. Надпровідне кільце, яке може рухатися лише у вертикальному напрямі, лежить на столі над витком провідника. Через виток провідника починає текти струм I . В результаті цього надпровідне кільце підіймається. Коефіцієнт взаємодукції витка і кільця, піднятого на висоту x , рівний $M_{12}(x)$. Коефіцієнт самоіндукції надпровідного кільця дорівнює M_{11} , маса кільця m , прискорення сили тяжіння g . Визначити висоту, на яку підіймається надпровідне кільце.

$$\text{Відповідь } h = \frac{1}{2} \frac{I^2}{mg L_{11}} \{ [L_{12}(0)]^2 - [L_{12}(h)]^2 \}.$$

Випромінювання електромагнітних хвиль

1. Визначити середню потужність випромінювання рамки із струмом $I = I_0 \cos \omega t$? Площа рамки S .

Розглянути чисельний приклад: $I_0 = 10 \text{ А}$, $S = 100 \text{ см}^2$, $\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$.

$$\text{Відповідь } \langle Q \rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c^3} \omega^4 I_0^2 S^2 = 0,124 \text{ Вт}.$$

2. Знайти максимальну величину густини потоку випромінювання в площині рамки (див. попередню задачу) на відстані 200 м від неї.

$$\text{Відповідь } P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^2} \frac{\omega^4 I_0^2 S^2}{r^2} = 0,47 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2.$$

3. Якої величини повинно бути плече диполя l для того, щоб його потужність випромінювання дорівнювала потужності випромінювання рамки в попередніх задачах. Частота коливань

диполя рівна частоті коливань струму в рамці, а величина кожного із зарядів диполя рівна $q=10^{-4}$ Кл.

$$\text{Відповідь } l = \frac{I_0 S}{qc} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,33 \text{ мм.}$$

4. Оцінити на основі класичних уявлень «час життя» атома, обмежуючись лише допущенням, що повне прискорення електрона весь час співпадає з доцентровим. Початковий радіус орбіти порядку 10^{-8} см.

$$\text{Відповідь: } \tau \approx 10^{-10} \text{ с.}$$

5. В деякий момент часу на осі кільцевого заряду Q (радіусу a) на відстані h від його центру поміщають електрон. Наданий потім самому собі електрон здійснює коливання уздовж вказаної осі. Знайти середню за період коливання інтенсивність дипольного випромінювання електрона. Загасанням коливань унаслідок випромінювання нехтувати.

$$\text{Відповідь: } \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{e^4 Q^2}{48\pi\epsilon_0 m^2 c^3 a^3 h} \left[\operatorname{arctg} \frac{h}{a} - \frac{(a^2 - h^2)ah}{(a^2 + h^2)^2} \right].$$

6. Визначити повну інтенсивність дипольного випромінювання електрона, що рухається по колу в постійному і однорідному магнітному полі B_0 з постійною швидкістю v_0 .

$$\text{Відповідь: } I = \frac{e^4 v_0^2 B_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

7. Виразити середню інтенсивність дипольного випромінювання пружно зв'язаного електрона як функцію його повної енергії E .

$$\text{Відповідь: } I_{cp} = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} E.$$

Розповсюдження електромагнітних хвиль

1. Повітря починає іонізуватись при напруженості електричного поля $E \approx 30$ кВ/см. При якій густині потоку енергії плоских електромагнітних хвиль достатньо малої частоти в повітрі може наступити іонізація?

Вказівка. Амплітуда вектора електричної напруженості повинна дорівнювати іонізаційній напруженості.

$$\text{Відповідь } \langle P \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \approx 1,2 \cdot 10^3 \text{ кВт/см}^2.$$

2. Плоска поляризована електромагнітна хвиля з круговою частотою $\nu = 10^6$ с⁻¹ падає з ребра на рамку з провідника, причому вектор **H** хвилі направлений перпендикулярно площині рамки. Лінійні розміри рамки малі порівняно з довжиною хвилі. Площа рамки $S=100$ см², середня густина потоку енергії в хвилі $\langle P \rangle = 1$ Вт/м². Знайти максимальну ЕРС індукції, що наводиться в контурі.

Вказівка. Скористатися законом електромагнітної індукції.

$$\text{Відповідь } \epsilon_{\text{макс}}^{\text{інд}} = \sqrt{2\langle P \rangle \mu_0} (\epsilon_0 \mu_0)^{1/4} S \omega \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

8. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РІШЕННЯ

1. Знайти напруженість електричного поля, створюваного зарядженої сферою радіуса r . поверхнева щільність заряду сфери дорівнює σ .

2. Знайти напруженість електричного поля, створюваного двома концентричними сферами радіуса r_1 і r_2 ($r_1 \leq r_2$). поверхнева щільність заряду сфер дорівнює відповідно σ_1, σ_2 .
3. Знайти потенціал електричного поля, створюваного системою зарядів, заданої в попередній задачі, в області $r < r_1$, вважаючи, що $\varphi(\infty) = 0$.
4. Знайти енергію електричного поля системи, описаної в зад. 2.
5. Знайти напруженість електричного поля, створюваного нескінченної зарядженої площиною.
6. Знайти напруженість електричного поля нескінченної прямої зарядженої нитки. лінійна щільність заряду нитки дорівнює σ .
7. Знайти напруженість електричного поля, створюваного двома нескінченними співвісними циліндрами радіуса r_1 і r_2 ($r_1 \leq r_2$). заряд одиниці довжини циліндрів дорівнює відповідно.
8. Знайти напруженість магнітного поля нескінченного прямого провідника зі струмом. Струм I рівномірно розподілений по перетину провідника радіуса r . Побудувати графік $h(r)$.
9. Показати, що за теоремою Остроградського - Гаусса, будь-який заряд, внесений в провідник, може розташовуватися лише на його поверхні.
10. Показати за теоремою Остроградського - Гаусса, що замкнутий порожнистий провідник екранує внутрішній обсяг від дії зарядів, розташованих зовні, чи не екранує зовнішній обсяг від дії зарядів, розташованих усередині.
11. Чи можна створити електростатичне поле, для якого $\text{grad}E$ перпендикулярний вектору E ?

12. У кулі, рівномірно зарядженому за обсягом з постійною щільністю ρ , є сферична порожнина, центр якої знаходиться від центру кулі на відстань h . Порожнина знаходиться цілком усередині кулі. Знайти напруженість поля всередині порожнини.

13. У прямому круглому циліндрі, рівномірно зарядженому за об'ємом з постійною густиною ρ , має цикл циліндрична порожнина, вісь якої паралельна осі циліндра і відстоїть від неї на відстані h . Знайти напруженість поля всередині порожнини.

Відповідь: $E(R) = 2\pi\rho h$.

14. Знайти потенціал і напруженість електричного поля в центрі кола радіуса a , частиною якої є дуга, рівномірно заряджена з лінійною густиною τ . Центральний кут дуги γ .

15. На відстані d від нескінченного провідника, що займає весь лівий півпростір, знаходиться точковий заряд q . Визначити: 1) поле поза провідником; 2) силу F тяжіння заряду провідником; 3) енергію U взаємодії провідника і заряду; 4) густину заряду σ , індукованого на поверхні провідника; 5) повний заряд q поверхні.

16. На відстані l від центру заземленою сфери радіуса R знаходиться точковий заряд Q . Знайти поле поза сферою, розподіл заряду, індукованого на її поверхні, і силу тяжіння заряду сферою.

17. Визначити напруженість поля $\vec{E}$ всередині та поза нескінченного плоского шару товщиною d , у якому рівномірно розміщений позитивний заряд з об'ємною густиною ρ .

18. Знайти дію, що діє на точковий заряд , що знаходиться на бісектрисі прямого двогранного кута між двома провідними площинами. Відстань між зарядом і вершиною двогранного кута дорівнює d .

19. Знайти силу взаємодії $\vec{F}$ між точковим зарядом і точковим диполем, якщо відстань між ними дорівнює d і дипольний момент $\vec{p}$ спрямований вздовж прямої, що їх з'єднує.
20. Якого діаметра d слід взяти мідний провід, щоб падіння напруги на ньому на відстані 1,4 км дорівнювало 1В при струмі в 1А?
21. З однакових кусків дроту спаяний куб, до протилежних кінців його діагоналі прикладена е.р.с. Який у такий схемі опір кубу? Яка напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі куба?
22. Знайти напруженість магнітного поля $\vec{H}$ в центрі плоскої спіралі, по якій тече струм I . Спіраль міститься між колами радіусів R_1 і R_2 . Загальне число витків спіралі N .
23. Знайти диференціальне рівняння, якому задовольняє потенціал $\varphi = q \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0 r}$.
24. У нескінченному прямому провіднику радіуса R тече струм, густина якого дорівнює $\frac{a}{\rho}$ при $\rho \leq R$, де ρ відстань від осі провідника. Знайти векторний потенціал і напруженість магнітного поля всередині та поза провідника.
25. По двом нескінченим лінійним провідникам, відстань між якими d течуть протилежно спрямовані струми силою I . Обчислити векторний потенціал системи.
26. Обчислити силу, з якою взаємодіють два нескінченних паралельних проводи, що знаходяться на відстані d один від

одного, по яким течуть струми I_1 та I_2 . Магнітна проникливість середовища μ .

27. Знайти градієнт скалярного добутку двох векторів

$\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Яку форму будуть мати еквіпотенціальні поверхні?

28. Середня густина електронної хмари в атомі водню дорівнює

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$
 де a - борівський радіус, а r - відстань до

протона, який має заряд e . Визначити напруженість $\vec{E}$ електричного поля в атомі водню. Дослідити $\vec{E}$ на малих $r \ll a$ і великих $r \gg a$ відстанях від протона.

29. Заряд e_1 знаходиться на осі x в точці $x_1 = l$. Визначити величину заряду e_2 , який необхідно помістити в точку $x_2 = -\sqrt{3}l$ осі x , щоб потік напруженості електричного поля крізь коло $x = 0, y^2 + z^2 = l^2$ дорівнював нулю.

30. Напруженість електричного поля в просторі задана формулою $\vec{E} = \frac{e\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + br) \exp(-br)$, де e і b – позитивні сталі, а r – відстань до начала координат. Визначити розподіл об'ємної густини ρ заряду, що створює поле. Чому дорівнює повний заряд Q ?

31. На осі x між точками $x_1 = -l$ і $x_2 = l$ рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною λ . Знайти потенціал φ електричного поля в кожній точці простору.

32. Всередині півсфери радіуса R розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = \rho_0 e^{ar}$, де ρ_0 і a - сталі, а r - відстань

- до центра кривизни півсфери. Знайти напруженість $\vec{E}$ електричного поля в центрі кривизни півсфери.
33. Визначити енергію W електростатичного поля сфери радіуса R , рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ .
34. Об'ємна густина заряду всередині кулі радіуса R має вигляд $\rho = (\vec{a}\vec{r})$, де $\vec{a}$ - сталий вектор, а $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений з центру кулі. Знайти напруженість електричного поля всередині і зовні кулі.
35. Визначити магнітне поле в центрі кулі радіуса R , рівномірно покритою дуже великою кількістю N паралельних витків, товщина яких τ така, що $N\tau = 2R$.
36. По нескінченному порожньому циліндру паралельно його осі тече струм I , рівномірно розподілений по його поверхні. Показати, не використовуючи закон Ерстеда, що магнітне поле в будь-якій точці всередині циліндру дорівнює нулеві.
37. Обчислити магнітне поле нескінченного прямого струму I , обраховуючи насамперед векторний потенціал $\vec{A}$, а потім індукцію поля. Знайти також рівняння силових ліній поля.
38. Показати, що векторний потенціал однорідного магнітного поля може бути записано у вигляді
- $$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}\vec{r}].$$
39. Струм I тече по тонкій струмовій трубці, яка утворює квадрат зі стороною $2a$. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля на осі, що проходить крізь центр квадрата перпендикулярно його площині.

40. Обчислити вектор-потенціал магнітного поля, що його створює в вакуумі коловий струм силою I радіуса a .
41. Крізь конденсатор пролетіла частинка масою m та зарядом e . Відстань між обкладинками конденсатора дорівнює l , а напруженість $\vec{E}$ електричного поля в ньому однорідна і стала. Кут між вектором $\vec{E}$ і напрямком швидкості $\vec{v}_0$ частинки при потраплянні в конденсатор дорівнював α . Знаки заряду e і косинуса кута α однакові. Знайти енергію W , яку втрачає частинка на дипольне випромінювання за час руху крізь конденсатор.
42. Довести, що електромагнітне поле, що задається рівняннями
- $$E_x = E_y = 0; \quad E_z = \cos(y - ct);$$
- $$B_x = \cos(y - ct); \quad B_y = B_z = 0,$$
- задовольняє рівняння Максвелла.
43. Чи можна підібрати такий розподіл електричного струму зовні порожньої області, щоб всередині її напруженість магнітного поля мала вигляд: а) $\vec{H} = \vec{H}_0$; б) $\vec{H} = b(\vec{i}z + \vec{j}x + \vec{k}y)$, де b – постійна; в) $\vec{H} = \frac{3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}$, де вектор $\vec{\mu}$ не залежить від координат та часу, а точка з радіус-вектором $\vec{r} = 0$ знаходиться поза порожньої області?
44. Чи можна створити в просторі постійний електричний струм з об'ємною густиною $\vec{j} = \vec{j}_0 e^{-ar}$, де a – додатня стала величина, а об'ємна густина заряду не залежить від часу?
45. Знайти розподіл об'ємної густини струму у просторі, якщо напруженість магнітного поля цього струму має вигляд:

$\vec{H} = (\vec{a}\vec{r})(\vec{b}\vec{r})$, де вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні і не залежать від координат і часу.

46. Показати, що векторний потенціал однорідного

магнітного поля можна записати у вигляді: $\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}\vec{r}]$.

47. Показати, що при зміні у часі радіального магнітного поля, такого що $B_x = B_y = 0$, $B_z = B(r, t)$, виникає вихрове електричне поле, силові лінії якого є концентричні кола з центрами, що лежать на осі магнітного поля.

48. Плоска електромагнітна хвиля задана векторним потенціалом $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}$, $\varphi = 0$. Знайти напруженість електричного поля і індукцію магнітного поля хвилі.

49. Чи може існувати: а) змінне у часі електричне поле без магнітного всередині порожньої області; б) змінне у часі магнітне поле без електричного; в) однорідне електричне поле при наявності змінного у часі магнітного поля?

50. Чи може однорідне електричне (магнітне) поле бути змінним у часі?

51. При виводі закону збереження енергії електромагнітного поля з системи рівнянь Максвелла звичайно замінюють вираз $(\vec{H} \text{ rot } \vec{E}) - (\vec{E} \text{ rot } \vec{H})$, згідно 1 д. через $\text{div } \vec{S}$, де $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$ – вектор Пойнтінга. Довести, що вибір вектора $\vec{S}$ не є однозначним.

52. Вивести рівняння для скалярного та векторного потенціалів, використовуючи кулонівську калібровку $\text{div } \vec{A} = 0$.

53. Одномірна модель іонного кристалу являє собою нескінчений лінійний ланцюжок однакових по модулю і різних за знаками зарядів (іонів), що чергуються. Відстань між сусідніми зарядами однакова вздовж всього ланцюжка і дорівнює a , модуль заряду дорівнює q . Знайти наближено потенціал φ , що його утворюють заряди в точці, де знаходиться: а) позитивний заряд; б) негативний заряд. Формула повинна забезпечувати точність не меншу 20%.

54. Всередині деякого об'єму V неперервно розподілено заряд e з об'ємною густиною $\rho = \rho(r')$. Показати, що якщо вибрати початок координат де-небудь в об'ємі V , з'єднати його з точкою спостереження P і пряму, що отримана, прийняти за вісь z , то потенціал електричного поля на осі z з точністю до членів порядку $\left(\frac{1}{z}\right)^3$ включно може бути представлений у вигляді:

$$\varphi \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} \right), \text{ де}$$

$$a_0 = \int_V \rho(r') dV = e, \quad a_1 = \int_V z' \rho(r') dV = p_z, \quad a_2 = \frac{1}{2} \int_V (3z'^2 - r'^2) \rho(r') dV = Q_{zz}$$

(p_z і Q_{zz} — z - компоненти дипольного і квадрупольного моментів просторово розподіленого заряду). Штрихом позначено координати і радіус-вектори точок джерел, тобто точок об'єму V . (Про квадрупольний момент системи зарядів можна докладно дізнатись, наприклад, в [2, 3])

55. Обчислити потенціал і напруженість поля всередині та поза рівномірно зарядженої по поверхні сфери, радіус якої a та загальний заряд q .

56. Обчислити потенціал та напруженість поля, що утворює заряд q , рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса a .
57. Заряд електрона розподілений в атомі водню, що знаходиться в основному стані, з густиною
- $$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}, \quad a = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} \quad - \quad \text{боровський радіус}$$
- атома, $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – елементарний заряд. Знайти потенціал φ_e і напруженість E_e електричного поля електронного заряду, а також повні потенціал φ і напруженість поля E в атомі, вважати, що протон знаходиться на початку координат.
58. З експериментальної ядерної фізики відомо, що атомні ядра в стані рівноваги не мають дипольного моменту, але ж мають відмінний від нуля квадрупольний момент. Цей факт знаходиться в згоді з уявленням про ядро як про еліпсоїд обертання, по об'єму якого рівномірно розподілений заряд ze_0 . Обчислити дипольний і квадрупольний моменти ядра та його електричне поле.
59. Заряд q рівномірно розподілений по поверхні сферичного сегмента радіуса R , який видно з центру кривизни під кутом 2α . Визначити напруженість поля в центрі кривизни сегмента.
60. Тонке плоске кільце, внутрішній та зовнішній радіуси якого a і b рівномірно заряджене з густиною заряду σ . Визначити поле на перпендикулярі до площини кільця, що проведений через його центр.

61. Знайти потенціал поля, яке створюють заряди $q, -2q, q$, що розташовані на відстані a один від одного (лінійний квадруполь), на великих відстанях від нього.
62. Сферична порожнина розташована ексцентрично всередині кулі, однорідно зарядженої по об'єму з густиною ρ . Відстань між центрами кулі і порожнини дорівнює d . Визначити напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точках сферичної порожнини.
63. Два точкових заряди $+q$ та $-q$ розташовані відповідно в точках з координатами $(a/2, 0, 0)$, $(-a/2, 0, 0)$ (рисунок 1). а) Показати напрям напруженості поля $\vec{E}$ у точках 1, 2, 3, 4; б) Написати вираз $E_x(x)$ для точок, що лежать на осі x , та побудувати графік цієї залежності; в) Написати вираз для напруженості поля $\vec{E}(y)$ у точках, що лежать на осі y , побудувати графік залежності $E_x(y)$.

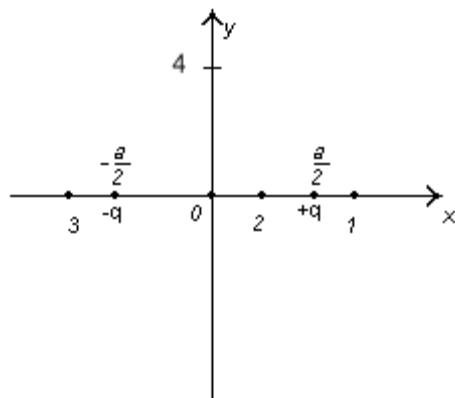


Рисунок 8.1.

64. Знайти напруженість $\vec{E}$ та потенціал φ електричного поля в кожній точці простору, якщо поле утворює однорідно заряджена з об'ємною густиною ρ куля радіуса R .

65. Знайти поле, що утворює в кожній точці простору нескінчений прямий круговий циліндр радіуса R , однорідно заряджений з об'ємною густиною заряду ρ .
66. Знайти поле нескінченної прямолінійної нитки, що рівномірно заряджена лінійною густиною χ .
67. Обчислити напруженість та потенціал поля рівномірно зарядженої з поверхневою густиною заряду σ площини.
68. Поверхня нескінченного кругового циліндра радіуса R рівномірно заряджена так, що на одиницю його довжини припадає заряд λ . Визначити напруженість поля всередині й поза циліндра.
69. Поверхня сфери радіуса R рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ . Обчислити напруженість і потенціал електричного поля в кожній точці простору.
70. Всередині нескінченного однорідно зарядженого по об'єму циліндра знаходиться нескінченна циліндрична порожнина, причому її вісь відстоїть від осі циліндра на d . Визначити поле у порожнині.
71. Куля радіуса R заряджена сферично-симетрично з об'ємною густиною $\rho = ar^5$, де a – стала. Чому дорівнює потік Φ напруженості електричного поля крізь круг радіуса R , площа якого в центральній точці торкається кулі?
72. На початку координат знаходиться точковий заряд $+q$, навколо якого в просторі розподілено негативний заряд $-q$ з об'ємною густиною $\rho = -\frac{qa^2}{4\pi} \frac{e^{-ar}}{r}$. Обчислити напруженість і

потенціал електростатичного поля, яке збуджує така система зарядів.

73. По сфері радіуса R рівномірно розподілений заряд q . Визначити тиск із середини на поверхню сфери, що обумовлений взаємодією зарядів.

74. Три взаємно перпендикулярні площини рівномірно заряджені з поверхневою густиною σ . Знайти напруженість $\vec{E}$ електричного поля у кожній точці простору.

Вирішити задачу 45 методом теореми Гаусса. Дослідити $\vec{E}$ на малих $r \ll a$ та великих $r \gg a$ відстанях від протона.

75. Нескінченна плоска плита товщиною a однорідно заряджена по об'єму з густиною ρ . Знайти потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля.

76. Довести, що потік напруженості електричного поля точкового заряду q крізь поверхню S дорівнює $\frac{q\Omega}{4\pi\epsilon_0}$. Тут Ω – тілесний кут, під яким видно контур поверхні S з точки, де знаходиться заряд q ($\Omega > 0$, якщо з цієї точки видна негативна сторона поверхні).

77. Заряд q_1 знаходиться на осі симетрії круглого диску радіуса a на відстані a від площини диска. Який заряд q_2 треба помістити у симетричну відносно диска точку, щоб потік електричного поля крізь диск у бік заряду q_1 дорівнював Φ ?

78. Визначити напруженість електричного поля всередині і зовні кулі, об'ємна густина заряду якої змінюється за законом

$\rho = \alpha r^n$, де $n > -2$. Радіус кулі R .

79. Простір між двома концентричними сферами, радіуси яких R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$), заряджений з об'ємною густиною $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$.

Знайти повний заряд q , потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля. Розглянути випадок $R_2 \rightarrow R_1$.

80. Простір заповнений електричним зарядом з періодичною об'ємною густиною $\rho = \rho_0 \sin \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z$. Визначити потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля в кожній точці простору.

81. Потенціал електростатичного поля в вакуумі

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\alpha x}{4\pi\epsilon_0} & (x > 0) \\ \frac{\alpha x}{4\pi\epsilon_0} & (x < 0) \end{cases}$$

Визначити розподіл зарядів, що створюють це поле.

82. Потенціал поля у вакуумі має вигляд

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \frac{q}{a^3} r^2 + \frac{3}{2} \frac{q}{a} \right), & r < a \end{cases},$$

де r - відстань від початку координат, a і q - сталі. Визначити відповідний розподіл заряду.

83. Заряди розподілені рівномірно по поверхні двох концентричних сфер з радіусами 10 та 20 см, причому поверхневі густини зарядів на обох сферах однакові. Знайти густину заряду σ , якщо потенціал у центрі сфер дорівнює 300В, а на нескінченості дорівнює нулеві.

84. Задані потенціали $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ у чотирьох суміжних вершинах малого кубика. Як можна наближено визначити напруженість поля в області цих точок?
85. У сферичних координатах об'ємна густина заряду всередині кулі радіуса R симетрична відносно осі z і має вигляд $\rho = \rho_0 \cos \theta$, де θ - полярний кут, а початок координат співпадає з центром кулі. Знайти потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля у всьому просторі.
86. Заряд розподілений на поверхні сфери радіуса R з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, де θ - полярний кут сферичної системи координат, початок якої співпадає з центром сфери. Знайти потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля всередині і зовні сфери.
87. В однорідне електростатичне поле з напруженістю $E_0 = \text{const}$ поміщено металеву кулю радіусом a . Визначити напруженість поля навколо кулі, якщо діелектрична проникність середовища ϵ .
88. Знайти розподіл потенціала всередині напівнескінченої прямокутної коробки, вертикальна стінка якої має потенціал V , а горизонтальні стінки - потенціал, що дорівнює 0.
89. Знайти потенціал електростатичного поля всередині витягнутої коробки прямокутного перерізу, дві протилежні грані якого знаходяться при потенціалі V , а дві другі заземлені (рисунок 8.2).

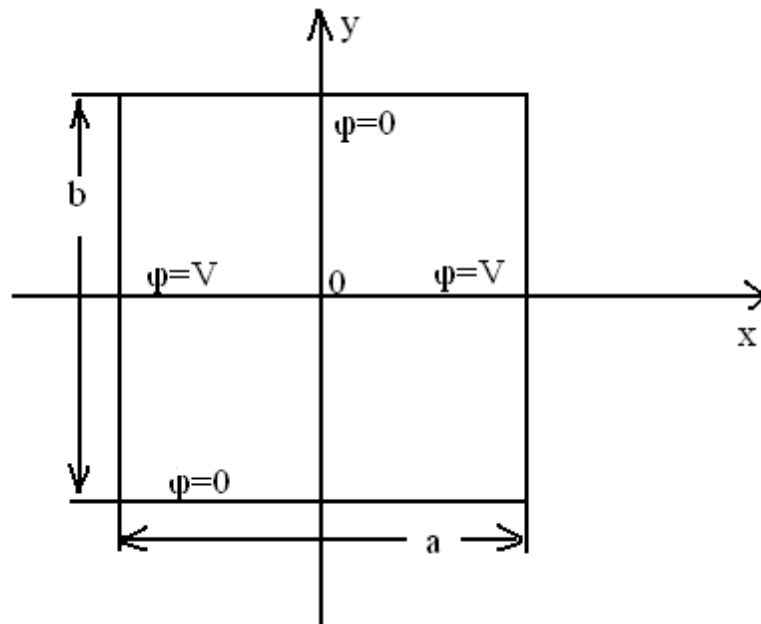


Рисунок 8.2.

Показати, що функції

$$\varphi_1 = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ та } \varphi_2 = b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

де a і b – сталі, є рішенням рівняння Лапласа $\Delta\varphi=0$. При якому розташуванні точкових зарядів поблизу початку координат утворюються на великих відстанях потенціали φ_1 та φ_2 ?

90. Об'ємна густина заряду необмеженої пластини товщини $2a$ має періодичну структуру $\rho = \rho_0 \sin l_1 x \sin l_2 y \sin l_3 z$, де $|z| \leq a$. Знайти потенціал електричного поля всередині і зовні пластини.
91. Визначити комплексний потенціал поля, що утворюється в вакуумі нескінченною прямолінійною ниткою, рівномірно зарядженою з лінійною густиною ζ . Знайти рівняння силових ліній.
92. Визначити який вигляд мають еквіпотенціальна поверхня та силові лінії, якщо потенціал дорівнює

$$\varphi = \operatorname{Re}(\sqrt{z}).$$

93. Потенціал якого заземленого контуру дається цією формулою?

94. Записати комплексний потенціал $W = f(x + iy)$ однорідного електричного поля з напруженістю $\vec{E}$. Розглянути випадок поля площини з поверхневою густиною заряду σ .

95. Знайти потенціал та рівняння силових ліній поля, що утворюється в вакуумі двома нескінченими і паралельними нитками, які знаходяться на відстані $2a$ одна від одної і заряджені однаковими за знаком зарядами з лінійною густиною χ .

96. Визначити, потенціали якої електростатичної задачі даються уявною та дійсною частинами функції $W = f(z) = z^2$.

97. Знайти екіпотенціальні поверхні та силові лінії поблизу заземленого еліпса, рівняння якого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

98. Розглянути граничний випадок поля поблизу кола (в просторовій задачі циліндра), поклавши $b = a$.

99. Знайти екіпотенціальні поверхні та силові лінії поблизу заземленої гіперболи, рівняння якої

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

100. Знайти рівняння силових ліній поля, що утворюється в однорідному середовищі двома точковими зарядами,

рівними за величиною і протилежними за знаком. Відстань між ними $2a$.

101. Знайти рівняння силових ліній поля, що утворюється в однорідному середовищі двома однойменними та рівними за величиною точковими зарядами, що знаходяться на відстані $2a$ один від одного.

102. Площина XU несе заряд з періодичною поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \cos(ax + by)$. Знайти потенціал електричного поля в необмеженому просторі.

103. Потенціал електростатичного поля у циліндричних координатах має вигляд

$$\varphi = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} (3R - 2r)r \cos \theta \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\varphi = \frac{aR^3}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \theta \quad \text{при } r \geq R,$$

де a і R – сталі. Знайти розподіл об'ємної густини ρ заряду, що утворює це поле.

104. Знайти розподіл об'ємної густини ρ заряду, який утворює в просторі електричне поле, потенціал якого в сферичних координатах має вигляд:

$$\varphi = \frac{e}{8\pi\epsilon_0} \left(3 + \frac{2R}{r} - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad r \leq R,$$

$$\varphi = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq R,$$

де e і R – сталі. Чому дорівнює повний заряд Q ?

105. В евакуйованій сферичній камері, радіус якої $a = 10$ см, із заземленими провідними стінками у деякий момент часу

утворився іон водню, що не мав в момент утворення початкової швидкості. Через який проміжок часу іон досягне стінки камери, якщо відстань від точки, в якій він утворився, до центру сфери $r = 6$ см ?

106. Всередині сферичної незарядженої провідної оболонки в точці A на відстані $OA = a$ від її центру поміщений точковий заряд q . Радіус внутрішньої поверхні оболонки дорівнює r , зовнішньої – R . Знайти:

1) поверхневу густину індукованих зарядів на зовнішній поверхні; 2) потенціал оболонки, приймаючи за нуль потенціал нескінченно віддаленої точки; 3) поверхневу густину індукованих зарядів в точках B і C внутрішньої поверхні оболонки, що лежать на одному діаметрі з точкою A .

107. На відстані d від центра провідної заземленої сфери радіусу R знаходиться диполь p , спрямований позитивним зарядом до центра сфери. Знайти потенціал системи.

108. Заряд e розташований на відстані d від плоскої поверхні нескінченного діелектрика з діелектричною проникністю ϵ_2 . Середовище, у якому знаходиться заряд, має діелектричну проникність ϵ_1 . Визначити потенціал та вектор електричної індукції в обох середовищах.

109. У однорідне поле в вакуумі, напруженість якого E_0 , внесено незаряджений ізольований провідник, що має форму кулі радіуса a . Визначити поле, що встановиться, поляризуємість кулі та густину зарядів, індукованих на поверхні кулі.

110. Довести, що для системи, яка складається з провідника, що створює двогранний кут α , і точкового заряду (див. рис.), метод електричних зображень можна застосувати лише у тому випадку, коли $\alpha = \frac{\pi}{n}$, де n – ціле число.
111. Центр провідної сфери радіуса R знаходиться на плоскій межі розділу двох діелектриків з діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 кожна. Заряд сфери e . Знайти потенціал системи, вектор електричної індукції і розподіл поверхневого заряду на сфері.
112. Однорідно заряджена куля радіуса R_1 із зарядом Q розташована ексцентрично всередині другої кулі радіуса R_2 , рівномірно зарядженої з об'ємною густиною ρ . Заряд більшої кулі не проникає у меншу. Відстань між центрами обох куль дорівнює l . Вважаючи заряди куль однойменними, визначити силу $\vec{F}$, з якою менша куля виштовхується з більшої. Чому дорівнює електростатична енергія W взаємодії куль, якщо потенціал електричного поля кожної зарядженої кулі дорівнює нулеві на безкінечності?
113. Знайти силу $\vec{F}$, що діє на заряд e , що знаходиться у вершині конуса висотою h і радіусом R , якщо конус однорідно заряджений по об'єму з густиною ρ .
114. Визначити ємність конденсаторів: а) сферичного, б) плоского, в) циліндричного. Між обкладинками конденсаторів знаходиться діелектрик з діелектричною проникністю ε .
115. Два довгі циліндричні провідники з радіусами R_1 та R_2 розташовані паралельно один одному на відстані d .

Визначити ємність одиниці довжини такої системи при умові, що $d \gg R_1$ і $d \gg R_2$.

116. Обчислити ємність циліндричного конденсатора, довжина якого l , радіуси обкладинок R_1 і R_2 . Між обкладинками знаходяться два коаксіальних шари діелектриків з проникностями ε_1 і ε_2 . Границя розділу між ними – циліндрична поверхня радіуса R_0 . Крайовим ефектом знехтувати.

117. Простір заповнено двома однорідними діелектриками з проникностями ε_1 і ε_2 . Між ними знаходиться провідна куля радіусу R так, що центр її знаходиться на площині розділу діелектриків. Знайти ємність кулі.

118. Плоский конденсатор заповнений діелектриком, проникність якого змінюється за законом $\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{x+a}{a}$, де a – відстань між обкладинками, вісь x спрямована перпендикулярно обкладинкам, площа яких S . Нехтуючи крайовим ефектом, знайти ємність C такого конденсатора та розподіл у ньому зв'язаних зарядів.

119. Струм I тече по дузі кола радіуса R . Знайти магнітне поле, що створює цей струм на осі кільця.

120. Струм I тече по дузі кола радіуса R з центральним кутом 2α . Обчислити магнітне поле у центрі кола.

121. Знайти поле, що створює струм I , який тече по відрітку прямолінійного провідника довжиною l , на відстані a від прямої, на якій лежить відрізок. Розглянути граничний випадок $l \rightarrow \infty$.

122. Визначити магнітне поле у центрі кулі радіуса R , рівномірно покритої дуже великою кількістю N паралельних витків, товщина яких τ така, що $N\tau = 2R$. Сила струму I .
123. Струм I рівномірно розподілений по поверхні плоского кільця, внутрішній та зовнішній радіус якого дорівнюють a і b . Обчислити магнітне поле на осі кільця.
124. Струм $I=20\text{A}$ тече по нескінченно довгому проводу, що зігнутий під кутом $\alpha=60^\circ$. Визначити індукцію магнітного поля в точці, яка лежить на бісектрисі кута на відстані $d=5\text{см}$ від його вершини.
125. Обчислити магнітне поле у центрі правильного багатокутника з n сторонами, вздовж якого циркулює струм I .
126. Лінійний контур зі струмом I складається з двох паралельних напівнескінчених прямих, з'єднаних між собою півколом радіуса R . Обчислити індукцію магнітного поля в центрі цього півкола.
127. У контурі, що зображений на рисунку, гілки AN і BM розходяться радіально на нескінченності. Показати, що в центрі кола магнітне поле дорівнює нулеві (див. рисунок 8.3).

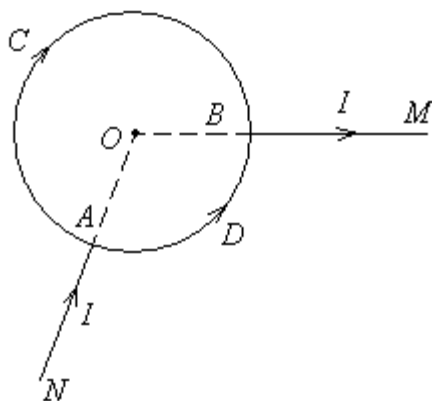


Рисунок 8.3.

128. Вздовж контуру ABCDA циркулює струм $I = 10\text{А}$, причому $R_1 = 10\text{см}$, $R_2 = 10\sqrt{10}\text{см}$ і $AB = CD = 30\text{см}$. Визначити магнітну індукцію у точці О (див. рисунок 8.4).

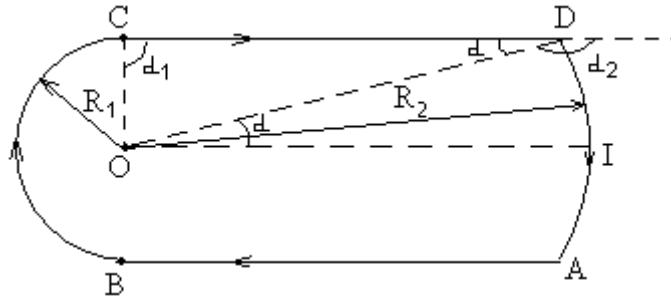


Рисунок 8.4.

129. Провід утворює плоску спіраль, рівняння якої у полярних координатах має вигляд: $r = R_0 \varphi (2\pi N)^{-1}$, де N – кількість витків, а R_0 – довжина радіуса-вектора, що проведений з центру спіралі до її зовнішнього кінця. По спірній тече струм I . Визначити аксіальну складову магнітної індукції вздовж осі спіралі на відстані z від її площини.
130. Лінійний провідник має форму прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$. По ньому тече струм I . Обчислити індукцію магнітного поля, що створює цей струм, на осі, що проходить через центр прямокутника перпендикулярно його площині.
131. Дерев'яна куля радіусу R обмотана тонким дротом так, що всі витки паралельні між собою. По дроту йде струм сили I . Знайти напруженість магнітного поля H у центрі кулі. Загальна кількість витків N . Витки можна вважати кільцями, що знаходяться на рівній відстані один від одного по дузі

великого кола, площа якого перпендикулярна до площини кілець.

132. З однакових шматків дроту зроблено куб. До протилежних кінців його діагоналі прикладена е.р.с. Яка напруженість магнітного поля у центрі куба.
133. Знайти індукцію магнітного поля у центрі плоскої спіралі, по якій тече струм I . Спіраль заточена між колами радіусів R_1 та R_2 . Загальна кількість витків N .
134. Знайти напруженість магнітного поля на осі соленоїду у точці A , з якої діаметри кінців видно під кутами 2α і 2β . Соленоїд складений з N витків, що рівномірно намотані на довжині l , і по ньому тече струм I .
135. Заряд Q однорідно заповнює об'єм кулі радіусу R . Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля у центрі кулі, якщо остання обертається навколо свого діаметру з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. В скільки разів зміниться напруженість магнітного поля у центрі кулі, якщо заряд Q рівномірно розмазати по її поверхні?
136. Конічна поверхня $(x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h)$, що рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ , обертається навколо своєї осі симетрії з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля у вершині конічної поверхні.
137. Знайти рівняння силових ліній магнітного поля двох нескінченних прямих паралельних струмів I , що протікають

- у протилежних напрямках. Відстань між струмами прийняти рівною $2a$.
138. Струм I тече вздовж контуру, що має форму еліпса, довжина якого дорівнює l , а площа – S . Обчислити індукцію магнітного поля у центрі еліпса.
139. Знайти напруженість магнітного поля у фокусі плоского еліптичного провідника, по якому тече постійний струм I . Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a}$ і параметр $p = \frac{b^2}{a}$, де a і b – напіввісі еліпса, c – відстань між його фокусами.
140. Струм I тече по контуру, що має форму рівнобічного трикутника зі стороною a . Знайти напруженість поля у вершині трикутника.
141. Заряд Q однорідно розподілений по об'єму кулі радіуса R . Одна половина кулі обертається навколо своєї осі симетрії з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$, а друга з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ в протилежному напрямку. Знайти напруженість магнітного поля $\vec{H}$ у центрі складеної кулі. Яку частину заряду Q треба однорідно розподілити всередині першої половини, що обертається, і яку в другій, щоб напруженість магнітного поля у центрі кулі дорівнювала нулеві.
142. Всередині безкінечного циліндра радіуса R паралельно його осі тече однорідний струм з об'ємною густиною $\vec{j}$. Користуючись інтегральною формою рівняння Максвелла

$\oint_l (\vec{H} d\vec{l}) = \int_s (\vec{j} d\vec{S})$, знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля всередині і зовні циліндра.

143. По нескінченній циліндричній поверхні радіуса R паралельно її осі тече однорідний струм з поверхневою густиною $\vec{j}_0$. Знайти напруженість магнітного поля.

144. По центральному провіднику довгого коаксіального кабеля, поперечний переріз якого і розміри приведені на рисунку 8.5, і по зовнішньому циліндричному провіднику течуть однакові за величиною, але протилежно спрямовані струми I .

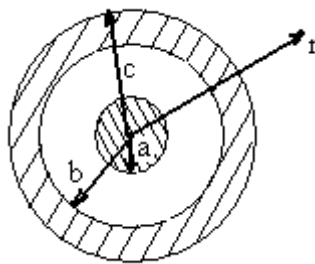


Рисунок 8.5.

145. Визначити розподіл магнітного поля у чотирьох різних областях:

1) $r < a$, 2) $a < r < b$, 3) $b < r < c$, 4) $r > c$.

146. Довгий прямолінійний провідник радіуса a має всередині круглий отвір радіуса b , витягнутий паралельно осі провідника, але зміщений відносно цієї вісі на відстань c , причому $b+c < a$. По провіднику тече струм I , рівномірно розподілений по його перерізу. Визначити магнітне поле у довільній точці простору.

147. По кожному з двох безкінечно довгих паралельних провідників колового перерізу радіуса a йде струм I ,

рівномірно розподілений по площі поперечного перерізу. Відстань між осями провідників $l > 2a$. У яких точках на прямій, що проходить крізь ці осі перпендикулярно до них, напруженість магнітного поля дорівнює нулеві? Розглянути випадки паралельних та антипаралельних струмів.

148. 172. Знайти магнітне поле всередині нескінченного соленоїда з густою обмоткою, що містить n витків на одиницю довжини. Струм, що йде по обмотці, дорівнює I .

149. На тор радіуса R (з коловим перерізом радіуса a) намотано N витків дроту, по якому тече струм I . Вважаючи дріт достатньо тонким, визначити напруженість магнітного поля, що створює такий соленоїд.

150. По двом нескінченно довгим прямолінійним провідникам, зробленим з немагнітного матеріалу та ізольованих один від одного, течуть у протилежних напрямках струми з однією і тією ж густиною $j = 1000 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$. Провідники обмежені циліндричними поверхнями, які перетинаються, як показано на рисунку 8.6. Знайти величину і напрямок напруженості магнітного поля у порожнині Π . Струм у лівому провіднику спрямований до читача, в правому – від читача. Відстань між осями циліндрів $AB = d = 5\text{см}$.

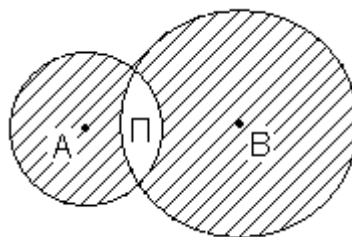


Рисунок 8.6.

151. Довгий суцільний циліндр з діелектрика статично поляризований. Причому поляризованість у всіх точках циліндра спрямована радіально, а величина її пропорційна відстані від поздовжньої осі циліндра, тобто $\vec{p} = k\vec{r}$ ($k = \text{const}$, $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від осі перпендикулярно до неї). Циліндр обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі. Знайти напруженість магнітного поля всередині циліндра далеко від його кінців, якщо радіус циліндра дорівнює R .
152. У нескінченному прямому провіднику радіуса R тече струм, густина якого дорівнює $\frac{a}{\rho}$ при $\rho \leq R$, де ρ – відстань від осі провідника. Знайти напруженість магнітного поля всередині і зовні провідника.
153. Безконечно прямолінійний соленоїд радіуса R намотаний з дроту діаметра d ($d \ll R$). Виймемо з соленоїду один виток, не розриваючи при цьому його обмотку. Визначити напруженість магнітного поля в центрі витка, що вийнятий. По обмотці соленоїду тече струм I .
154. Знайти векторний потенціал і напруженість магнітного поля, що створює струм I , який тече по кільцю радіуса R . Дослідити окремий випадок, коли точка спостереження знаходиться на осі кільця.
155. В циліндричних координатах дві компоненти векторного потенціалу дорівнюють нулеві $A_r = A_z = 0$, а третя має вигляд

$$A_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} ar \left(R^2 - \frac{r^2}{2} \right) \text{ при } r \leq R \text{ і } A_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{aR^4}{2r} \text{ при } r \geq R, \text{ де } a \text{ і}$$

R – сталі. Знайти розподіл об'ємної густини $\vec{j}$ струму, що утворює магнітне поле з даним векторним потенціалом.

156. У сферичних координатах дві компоненти векторного потенціалу дорівнюють нулеві $A_r = A_\theta = 0$, а третя має вигляд

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} ar \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \sin \theta \quad \text{при } r \leq R \quad \text{і} \quad A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2aR^5}{15r^2} \sin \theta \quad \text{при}$$

$r \geq R$, де a і R – сталі. Знайти розподіл об'ємної густини $\vec{j}$ струму, що утворює магнітне поле з даним векторним потенціалом.

157. У сферичних координатах дві компоненти векторного потенціалу дорівнюють нулеві $A_r = A_\theta = 0$, а третя має вигляд

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} ar \sin \theta \quad \text{при } r \leq R \quad \text{і} \quad A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{aR^3}{r^2} \sin \theta \quad \text{при } r \geq R, \text{ де } a \text{ і } R -$$

сталі. Знайти розподіл об'ємної густини $\vec{j}$ струму, що утворює магнітне поле з даним векторним потенціалом.

158. Об'ємна густина струму у просторі змінюється від точки до точки по періодичному закону $\vec{j} = \vec{j}_0 \cos(\vec{k}\vec{r})$, де сталі вектори $\vec{j}_0$ і $\vec{k}$ задовольняють співвідношенню $(\vec{k}\vec{j}_0) = 0$. Знайти векторний потенціал $\vec{A}$ і індукцію $\vec{B}$ магнітного поля, що створює цей струм у необмеженому просторі.

159. По площині тече струм з поверхневою густиною i , однаковою у всіх точках. Знайти магнітне поле площини.

160. Вздовж нескінченної прямолінійної смуги, що має ширину a , тече струм, рівномірно розподілений по її ширині з поверхневою густиною i . Знайти магнітне поле. Розглянути граничний випадок, коли $a \rightarrow \infty$.

161. Визначити векторний потенціал системи струмів, що представлена на рисунку 8.7, у точці $P(x, y, z)$.

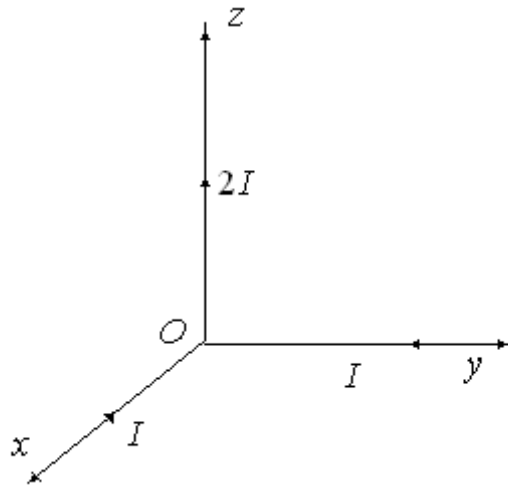


Рисунок 8.7.

162. Заряджена куля радіусу a рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Вважаючи постійними густину заряду і густину маси всередині кулі, обчислити її магнітний момент.

163. Циліндр радіуса a і висоти h , рівномірно заряджений по об'єму, обертається навколо своєї геометричної осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Повний заряд e . Визначити магнітний момент циліндра.

164. Визначити відношення магнітного моменту до механічного моменту для системи, що складається з двох частинок із зарядами e_1 та e_2 і масами m_1 та m_2 .

165. Чи може індукція магнітного поля у вакуумі визначитися наступними формулами:

а) $\vec{B} = \mu_0 a (x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y + 3z\vec{e}_z);$

б) $\vec{B} = \mu_0 a (x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - 3z\vec{e}_z);$

в) $\vec{B} = \mu_0 a (y\vec{e}_x + z\vec{e}_y),$

де a – стала, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – координатні орти декартової системи. У разі позитивної відповіді визначити густину струму $\vec{j}(x,y,z)$.

166. Довести, що магнітний момент $\vec{M} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r} \vec{j}] dV$ струму, що

тече у просторі з об'ємною густиною $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$, не залежить від вибору початку координат. Припускається, що магнітний момент струму має кінцеве значення.

167. У однорідне магнітне поле $\vec{B}_0$ внесено кулю радіуса a , що виготовлена з матеріалу з відносною магнітною проникністю μ_r , завдяки чому однорідне поле $\vec{B}_0$ перекручується. Визначити магнітне поле всередині і зовні кулі. Знайти також вектор намагнічення (тобто магнітний момент, що припадає на одиницю об'єму кулі).

168. Металева куля радіуса a з немагнітної речовини рухається рівномірно у постійному та однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ зі швидкістю $\vec{v}$, спрямованої під кутом до магнітного поля. Знайти напруженість електричного поля всередині та поза кулею у «нерухомій» системі відліку, відносно якої куля рухається зі швидкістю $\vec{v}$. Знайти також об'ємну та поверхневу густину індукованих зарядів. Магнітним полем індукованих зарядів, що рухаються, знехтувати.

169. Прямокутна рамка $(a \times b)$ обертається навколо однієї зі своїх сторін в однорідному магнітному полі індукції $\vec{B}$, перпендикулярному осі обертання, зі змінною кутовою

швидкістю $\omega = \omega_0(1 - e^{-kt})$. Визначити величину індукованої е.р.с. $\mathcal{E}$, якщо у початковий момент рамка перпендикулярна до поля.

170. По двом вертикальним ідеальним провідникам, відстань між якими l , в полі сили тяжіння може ковзати без тертя ідеально провідна перемичка маси m і довжини l . Провідники зверху замкнені індуктивністю L , а знизу – опором R і поміщені у однорідне магнітне поле індукції B , перпендикулярне до площини, у якій лежать провідники. Перемичка спочатку утримується у деякому положенні, а потім відпускається без поштовху. Знайти положення рівноваги перемички та характер перехідного процесу.

171. Знайти швидкість перемички, що встановлюється, в умовах попередньої задачі, якщо провідники замкнені зверху послідовно включеними опором R та індуктивністю L .

172. Конденсатор заряджається від джерела з постійною е.р.с. $\mathcal{E}$ через опір R і індуктивність L , причому $R^2 = 4L/C$. 1) Як змінюється сила зарядного струму I з часом (побудувати графік)? 2) Через який час t від початку зарядки сила струму досягне максимуму? 3) Чому дорівнює максимальна сила $I_{\max}$ зарядного струму? 4) Чому дорівнює напруга V на конденсаторі у цю мить? 5) Чому дорівнює к.к.д. η установки?

173. Порожній діелектричний циліндр з внутрішнім радіусом r_1 та зовнішнім радіусом r_2 рівномірно обертається у однорідному магнітному полі з кутовою швидкістю ω

навколо своєї геометричної осі. Вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ паралельний осі циліндра, діелектрична проникність речовини циліндра дорівнює ϵ . Знайти: 1) об'ємну густину $\rho_{зв.}$ зв'язаних зарядів, що з'явилися у діелектрику внаслідок обертання у магнітного полі; 2) повний об'ємний заряд одиниці довжини циліндра; 3) густини поверхневих зарядів на обох поверхнях циліндра; 4) повний заряд циліндра.

174. В системі, що складається з двох паралельних рейок і поперечки AB , довжина якої l , а маса m , і знаходиться у однорідному магнітному полі B , перпендикулярному до площини рисунку і спрямованому за рисунок, бажають встановити за допомогою підхожої е.р.с. постійний струм I , спрямований за стрілкою (див. рисунок 8.8). Вважаючи опір системи сталим, визначити закон руху провідника AB та е.р.с. ϵ як функцію часу. Перевірити виконання закону збереження енергії.

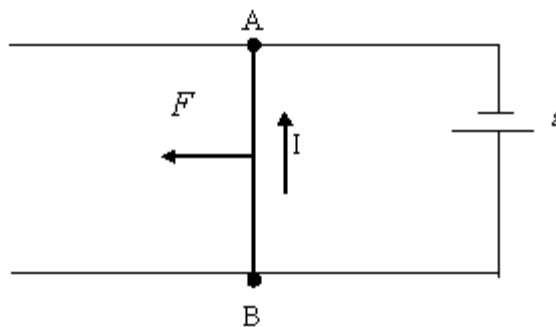


Рисунок 8.8.

175. Коло постійного струму складається з таких послідовно з'єднаних частин: джерело е.р.с. ϵ , індуктивність L , два опора R_1 і R_2 . Визначити силу струму в колі після того, як опір R_2 замкнений накоротко.

176. Заряджений конденсатор з ємністю C замкнений на опір R з самоіндукцією L . Визначити заряд на обкладинках конденсатора як функцію від часу, якщо спочатку він дорівнював q_0 .
177. Кругова петля радіуса a розташована концентрично у площині другої, значно більшої петлі радіуса b ($a \ll b$). Більша петля закріплена нерухомо, і по ній тече постійний струм I , а меншу петлю обертають навколо діаметра з кутовою частотою ω (її електричний опір дорівнює R , а індуктивність майже відсутня).
- а) Визначити, як залежить струм у малій петлі від часу.
 - б) Знайти, який момент сили повинен бути прикладений до малої петлі, щоб привести її до обертання зі вказаною частотою.
 - в) Визначити е.р.с., що індукується у великій петлі, як функцію часу.
178. Як пов'язані між собою параметри R , L , I послідовного коливального контуру у випадку критичного згасання?
179. Виходячи з узагальненої форми закону Ома, показати, що густина магнітної енергії всередині тороїдального соленоїда радіуса R з круговим перерізом радіуса $r_0 \ll R$ і з N витками тонкого дроту, по якому тече зімкнений струм I , дорівнює $\frac{1}{2} \mu H^2$, де μ – магнітна проникність сердечника соленоїда.
180. Провідний кут XOY поміщений у однорідне магнітне поле, перпендикулярне до його площини. Провідник AB , перпендикулярний до бісектриси кута XOY , рухається рівномірно зі швидкістю v_0 . Визначити величину струму, що

наводиться в контурі AOB , якщо всі провідники мають опір r на одиницю довжини (див. рисунок 8.9).

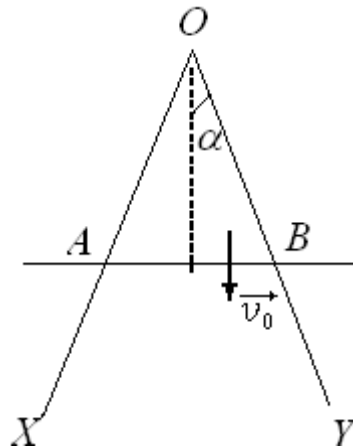


Рисунок 8.9.

181. Всередині досить довгого круглого залізного стрижня магнітний потік рівномірно зростає з часом. Зовні цього стрижня магнітне поле відсутнє. На деякій відстані від стрижня знаходиться електрон. Початкова швидкість його дорівнює нулеві. Як він буде рухатись?

182. Котушка індуктивності L має опір r та включена у ланцюг симетричного моста. У діагональ моста включений балістичний гальванометр. Знайти заряд, який протече через гальванометр після замкнення ключа, якщо опором гальванометра можна знехтувати (див. рисунок 8.10).

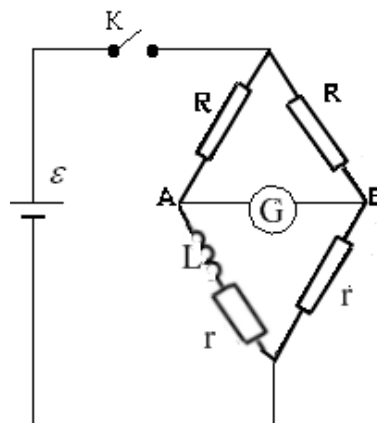


Рисунок 8.10.

183. Довести, що – потік вектора магнітної індукції, що пронизує надпровідний замкнений виток, не змінюється при зміні форми (деформації) витка та при зміні зовнішнього магнітного поля.
184. Надпровідне кільце радіуса R , що виготовлене з проводу радіуса b ($b \ll R$), внесли в однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$, перпендикулярною площині кільця. Визначити струм I , який виникає у кільці після внесення його у поле. Чому дорівнює середнє значення магнітної індукції $\langle B \rangle$ на поверхні кола, обмеженого кільцем?
185. Коефіцієнт взаємної індукції двох коливальних контурів дорівнює L_{12} . Параметри цих контурів дорівнюють відповідно R_1, L_1, C_1 та R_2, L_2, C_2 . На конденсаторі першого контуру є заряд q , а контур розімкнений. Конденсатор другого контуру не заряджений, а контур замкнений. Скласти диференціальні рівняння, якими визначаються струми у контурах після замкнення першого з них.
186. Дослідити перетворення енергії при замиканні і розмиканні ланцюга, який складається з омичного опору та індуктивності і в якому діє джерело постійної сторонньої е.р.с. $\mathcal{E}^{стор}$.
187. У постійному однорідному магнітному полі $\vec{H}$ рівномірно обертається замкнений плоский контур, що не деформується, має опір R і самоіндукцію L . До контуру не прикладено сторонніх електрорушійних сил. Ось обертання перпендикулярна до $\vec{H}$ і лежить у площині контуру. Число

обертів у секунду дорівнює $n = \frac{\omega}{2\pi}$. Відповідно цьому потік магнітної індукції Φ зовнішнього поля $\vec{H}$ через контур визначається виразом $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$.

Показати, що в контурі повинен індукуватись струм I :

$$I = \omega \Phi_0 \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

де φ – зсув фази струму по відношенню до фази електрорушійної сили індукції, що збуджується в контурі зміною потоку індукції Φ поля $\vec{H}$:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \omega \sin \omega t,$$

причому $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$.

Показати також, що для підтримки обертання контура необхідна витрата зовні механічної роботи у кількості $A = \frac{\omega^2 \Phi_0^2 R}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} = \frac{1}{2} I_0^2 R$, де I_0 – амплітуда струму I , причому в контурі виділяється кількість джоулевого тепла Q , що дорівнює A .

188. Знайти у загальному вигляді струм $I(t)$, що тече в контурі (R, L, C) , в якому діє періодична стороння електрорушійна сила, і визначити зсув фаз між струмом і цією е.р.с.
189. Плоский контур (R, L, C) і площею S обертається з кутовою швидкістю ω у постійному і однорідному магнітному полі $\vec{B}_0$ навколо осі, що лежить у площині контуру і перпендикулярна $\vec{B}_0$. Визначити середній гальмуючий момент $\vec{N}$, прикладений до контура.

190. У найпростішій схемі магнітного гідродинамічного генератора плоский конденсатор з площею пластин S і відстанню між ними d поміщений у потік провідної рідини з питомою провідністю λ , яка рухається з постійною швидкістю $\vec{v}$ паралельно пластинам. Конденсатор знаходиться в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, спрямованою перпендикулярно до швидкості рідини. Яка потужність виділяється у зовнішньому колі що має опір R ? (див. рисунок 8.11).

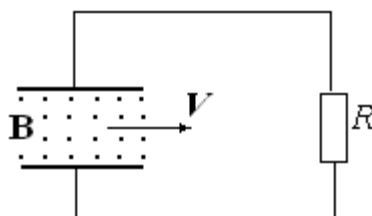


Рисунок 8.11.

191. Показати, що рівняння $\text{div} \vec{D} = \rho$ можна отримати з рівняння $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, закону збереження заряду $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ і додатковою умовою, котру треба встановити.

192. Заряд $q > 0$ рухається у вакуумі з постійною швидкістю $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ вздовж осі X . Знайти струм зміщення $\vec{J}_{\text{зм.}}$, який утворює заряд поблизу осі X на відстані r від заряду (див. рисунок 8.12).

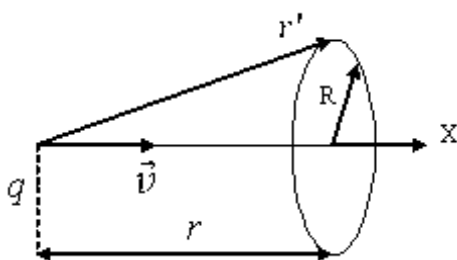


Рисунок 8.12

193. Використовуючи результат попередньої задачі, визначити напруженість магнітного поля H , що створюється рухомим зарядом на малій порівняно з r відстані R від осі X (див. рисунок 8.12). Переконатися, що отриманий вираз впливає також з формули для поля $\vec{H}$ рухомого заряду.
194. Виходячи з рівнянь Максвелла, отримати вираз, що описує поширення плоскої електромагнітної хвилі з частотою ω в необмеженому середовищі, яке має провідність σ , діелектричну та магнітну проникності ϵ та μ .
195. Перпендикулярно до поверхні провідника з електропровідністю σ і магнітною проникністю μ падає плоска електромагнітна хвиля частотою ω . Нехтуючи струмами зміщення порівняно зі струмами провідності, визначити на якій глибині всередині провідника електромагнітне поле хвилі слабшає у e разів.
196. Показати, що однорідний провідник еквівалентний щодо поширення монохроматичних електромагнітних хвиль діелектрику з комплексною діелектричною проникністю $\epsilon' = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}$, де σ – питома електропровідність, ω – частота хвилі.
197. Заряд e рухається в площині XU по прямій $y = x \cdot l$ з постійною швидкістю $\vec{V}$, віддаляючись від початку координат. У початковий момент $v_0 = 0$ він знаходився на осі X . Знайти розподіл об'ємної густини заряду ρ та об'ємної густини $\vec{j}$ струму у просторі.

198. Показати, що при розрядці плоского конденсатора на його обкладинках струм провідності замикається струмом зміщення.
199. Провідник має форму досить довгого круглого циліндра радіуса a , по якому тече постійний струм I , рівномірно розподілений по його перерізу. Розглянути міграцію енергії електромагнітного поля на поверхні провідника. Показати, що джоулеве тепло, яке виділяється у провіднику, дорівнює енергії електромагнітного поля, яка поступає у провідник ззовні.
200. Узагальнити хвильові рівняння для однорідного та ізотропного непровідного середовища при відсутності в ньому зарядів ($\rho = 0$) на випадок неоднорідного середовища. Вважати середовище немагнітним ($\rho = \rho_0$).
201. Записати рівняння плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі, що поширюється у прозорому середовищі $\sigma=0$ вздовж позитивної осі Z і лінійно поляризованої вздовж осі X .
202. Записати рівняння плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі, що поширюється у прозорому немагнітному ($\mu = \mu_0$) середовищі з показником заломлення n вздовж від'ємної осі X і поляризованої по колу (праворуч).
203. Амплітуда правополяризованої кругової хвилі дорівнює A , а ліво поляризованої – B . Частоти і фази цих хвиль однакові. Визначити поляризацію результуючої хвилі.

204. Дві монохроматичні хвилі $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \alpha_1)$ і $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \alpha_2)$ поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Вважаючи амплітуди цих хвиль однаковими, знайти поляризацію результуючої хвилі.
205. Монохроматична плоска електромагнітна хвиля, що описується векторним потенціалом $\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \alpha)$, падає на поверхню нерухомої кулі радіуса R і повністю відбивається від неї. Довжина хвилі мала порівняно з радіусом R , тому за кулею знаходиться область тіні. Визначити силу $\vec{F}$, що прикладена до кулі у середньому по часу за період $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
206. Обчислити векторний потенціал рамки зі змінним струмом.
207. Знайти поле випромінювання рамки зі змінним струмом.
208. Плоска монохроматична лінійно поляризована хвиля падає у повітрі на рамочну антену. Обчислити е. р. с. індукції, що наводиться в антені, якщо антена має форму квадрата зі стороною a та розташована, як показано на рисунку 8.13.

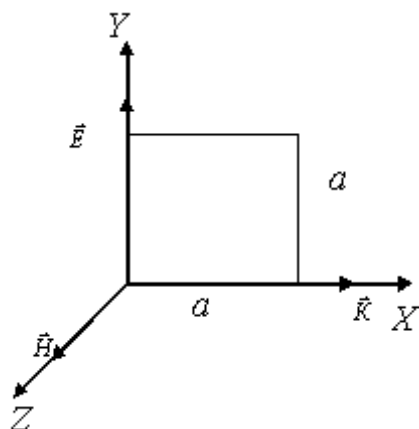


Рисунок 8.13

209. Визначити рух вільної зарядженої частинки (e , m) в полі монохроматичної лінійно поляризованої електромагнітної хвилі. Взаємодію частинки з власним полем випромінювання (радіаційним тертям) знехтувати. Вважати також, що $\frac{v}{c} \ll 1$.
210. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на плоску поверхню діелектрика, показник заломлення якого n . Обчислити тиск хвилі на поверхню.
211. Показати, що у ідеальний провідник ($\sigma = \infty$) електромагнітна хвиля не проникає. Вивести граничні умови для векторів $\vec{E}$ та $\vec{B}$ електромагнітної хвилі на межі з ідеальним провідником.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989
2. Матвеев А.Н. Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980.
3. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985.
4. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа, 1992.
5. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.
6. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. М.: Высшая школа, 1980.

7. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Гос. из-во физико-математической литературы, 1963.
8. Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А. Электродинамика. М.: Наука, 1978.
9. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. М.: Высшая школа, 1990.
10. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики, Т.2. М.: Наука, 1971.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. 1 книга. Механика. Электродинамика. М.: Наука, 1969.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Т.2, теория поля. М.: Наука, 1973.
13. Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Справочное пособие. К.: Наукова думка, 1981.
14. Сугаков В.Й. Теоретична фізика. Електродинаміка. К.: Вища школа, 1974.
15. Крушевський Ю.В., Кравцов Ю.І., Мізерний В.М. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч. 1. Основи електродинаміки. Навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2004.
16. Чернишов П.М., Самсонов В.П., Чернишов М.П. Технічна електродинаміка: Навчальний посібник. Харків: НТУ „ХПІ”, 2006.
17. Клубіс Я. Д., Шкатуляк Н. М. Збірник задач з електродинаміки. Навчальний посібник. 2-е вид.:доп., перероб.- Одеса: Фенікс, 2014.–284 с.